Типовой расчет на компьютере №1 "Преобразования матриц"

11 вариант (*Антиповская, Мороз Ирина*)

Написать программу вычисления обратной матрицы для матицы $n \times n$ методом элементарных преобразований с выбором главного элемента. Этой программой обратить две матрицы A и B. Исходные данные вводятся из файла input13.txt (для удобства можно разрезать его на 2 файла). Результаты записать в файлы matrix3.txt, matrix6.txt и сделать проверку.

Предусмотреть демонстрационный режим, когда после каждого шага метода элементарных преобразований матрицы выводятся на экран, а для перехода к следующему шагу требуется нажать Enter.

12 вариант (*Денисов, Соловьева*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений с n неизвестными методом элементарных преобразований с выбором главного элемента. Решить этой программой систему 8 линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{y}, \quad \text{где} \quad a_{ij} = 0{,}5^{|i-j|} + 1/i, \qquad y_j = \operatorname{tg} j.$$

Результаты записываются в файл vector8.txt. Затем делается проверка.

Предусмотреть демонстрационный режим, когда после каждого элементарного преобразования расширенная матрица выводится на экран, а для перехода к следующему шагу требуется нажать Enter.

13 вариант (*Королев, Пышногуб*)

1) Написать программу вычисления определителя матицы $n \times n$ методом элементарных преобразований с выбором главного элемента. Этой программой вычислить определители трёх матриц A, B, C. Исходные данные вводятся из файла input14.txt (для удобства можно разрезать его на 3 файла). Результаты выводятся на экран.
2) Найти какое-нибудь положительное собственное значение λ матрицы B, т.е. корень уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$ с точностью 10^{-3} методом деления отрезка пополам.

14 вариант (*Коротков, Сухоставский*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений с n неизвестными методом элементарных преобразований с выбором главного элемента. Решить этой программой две системы линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{y}, \qquad B\vec{X} = \vec{Z}.$$

Исходные данные вводятся из файла input12.txt (для удобства можно разрезать его на 2 или на 4 файла). Результаты записать в файлы vector4.txt, vector6.txt и сделать проверку.

Предусмотреть демонстрационный режим, когда после каждого элементарного преобразования расширенная матрица выводится на экран, а для перехода к следующему шагу требуется нажать Enter.

15 вариант (*Мороз Иван, Тарасенко*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений с n неизвестными с 5-диагональной матрицей методом элементарных преобразований. Решить этой программой систему 16 линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{y}$, где

$$a_{ij} = \begin{cases} 6 & \text{при} \quad i = j, \\ 2\sin(2i+3j) & \text{при} \quad |i-j| = 1, \\ \sin(5i+8j) & \text{при} \quad |i-j| = 2, \\ 0 & \text{при} \quad |i-j| > 2; \end{cases} \qquad y_i = \operatorname{tg}(i^2).$$

Результаты записать в файл vector16.txt и сделать проверку.

Предусмотреть демонстрационный режим, когда после каждого элементарного преобразования расширенная матрица выводится на экран, а для перехода к следующему шагу требуется нажать Enter.

21 вариант (*Антиповская, Денисов*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{y}$ с n неизвестными методом итераций. Программа должна

1) преобразовать систему к виду $\vec{x} = \vec{y} - B\vec{x}$,

2) оценить коэффициент сжатия = операторную норму B,

3) начиная с $\vec{x}_0 = \vec{y}$, сделать столько итераций, чтобы получить ответ с погрешностью меньше ε, заданного с клавиатуры.

Решить этой программой систему 9 линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{y}, \quad A = (a_{ij}), \quad \text{где} \quad a_{ij} = \left(-\frac{1}{2+i}\right)^{|i-j|}, \quad y_j = \operatorname{tg}\frac{j\pi}{20}.$$

Исходные данные записать в файл system9.txt, затем он будет использован программой. Результаты всех итераций и ответ выводить на экран.

22 вариант (*Королев, Сухоставский*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{y}$ с n неизвестными методом итераций. Программа должна

1) преобразовать систему к виду $\vec{x} = \vec{y} - B\vec{x}$,

2) оценить коэффициент сжатия = операторную норму B,

3) начиная с $\vec{x}_0 = 0$, сделать столько итераций, чтобы получить ответ с погрешностью меньше ε, заданного с клавиатуры.

Решить этой программой две системы линейных уравнений

$$A_1\vec{x} = \vec{y_1}, \qquad A_2\vec{X} = \vec{y_2}.$$

Исходные данные вводятся из файла input22.txt (для удобства можно разрезать его на 2 или на 4 файла). Результаты всех итераций и ответ выводить на экран.

23 вариант (*Коротков, Тарасенко*)

Написать программу решения нелинейной системы n уравнений

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ u_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n \end{cases} \tag{$*$}$$

методом итераций. Систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + \dfrac{y\,\cos^2 z}{y^2+1} &= \sqrt{3} \\ e^{-|x|} + 5y + e^{-z^2} &= 14 \\ \operatorname{arctg}(x-y) + 3z &= \sqrt{5} \end{cases}$$

преобразовать к виду $(*)$. Функции u_i задать в программе. Коэффициент сжатия оценить аналитически:

$$q \le \sup_{\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|.$$

Сначала программа должна запрашивать требуемую точность ε и коэффициент сжатия q. Результаты всех итераций и ответ выводить на экран.

24 вариант (*Мороз Иван, Соловьева*)

Написать программу решения системы n линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{y}$ с n неизвестными методом итераций. Программа должна

1) преобразовать систему к виду $\vec{x} = \vec{y} - B\vec{x}$,

2) оценить коэффициент сжатия = операторную норму B,

3) начиная с $\vec{x}_0 = 0$, сделать столько итераций, чтобы получить ответ с погрешностью меньше ε, заданного с клавиатуры.

Решить этой программой систему 10 линейных уравнений

$$A\vec{x} = \vec{y}, \quad A = (a_{ij}), \quad \text{где} \quad a_{ij} = \frac{1}{(|i-j|+1)^3}, \quad y_j = \cos\sqrt{j}.$$

Исходные данные сначала загрузить в файл input10.txt, затем он будет использован программой. Результаты всех итераций и ответ выводить на экран.

25 вариант (*Мороз Ирина, Пышногуб*)

Дана система уравнений

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}35\sin(x_1 + x_2) + 4{,}907 \\ x_2 = 0{,}25\sin(x_1 + x_2 + x_3) + 4{,}484 \\ x_3 = 0{,}25\sin(x_2 + x_3 + x_4) + 0{,}758 \\ x_4 = 0{,}25\sin(x_3 + x_4 + x_5) + 0{,}192 \\ x_5 = 0{,}25\sin(x_4 + x_5 + x_6) + 6{,}753 \\ x_6 = 2\sin(0{,}1x_5 + 0{,}2x_6) + 3{,}017 \end{cases}$$

Написать программу решения нелинейной системы n уравнений

$$\begin{cases} u_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n(x_1, \ldots, x_n) = x_n \end{cases}$$

методом итераций. Функции u_i задать в программе. Коэффициент сжатия оценить аналитически:

$$q \le \sup_{\mathbb{R}^n} \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|.$$

Сначала программа должна запрашивать требуемую точность ε и коэффициент сжатия q. Результаты всех итераций и ответ выводить на экран.

Типовой расчет на компьютере №3 "Математическая статистика"

31 вариант (*Антиповская, Коротков*)

Случайная точка (X, Y) равномерно распределена в секторе эллипса

$$U = \{x^2 + 4y^2 < 4,\ x, y > 0\}.$$

Создать выборку объёма 20 000 пар значений (X, Y) в виде файла sample2D.txt.

Для случайной величины $Z = \dfrac{X - Y}{X + Y}$, получаемой из этой выборки

1. построить гистограмму с шагом 0,1,
2. найти выборочное среднее a (оценку матожидания),
3. найти среднеквадратичное отклонение σ,
4. найти 95%-доверительный интервал для матожидания и сравнить с теоретически вычисленным матожиданием

$$\mathbf{E}\, Z = \frac{1}{S(U)} \iint\limits_U \frac{x - y}{x + y}\, dxdy.$$

32 вариант (*Денисов, Сухоставский*)

В файле input32.txt дана выборка случайной величины. Найти:

1. объём выборки,
2. выборочное среднее a (оценку матожидания),
3. среднеквадратичное отклонение σ,
4. 99%-доверительный интервал для матожидания.
5. По критерию согласия хи-квадрат (разбив отрезок на 12 частей) проверить гипотезу, что распределение — нормальное с матожиданием a и среднеквадратичным отклонением σ (число степеней свободы распределения хи-квадрат будет не 11, а 9, т. к. 2 степени свободы израсходованы на нахождение a и σ).

33 вариант (*Королев, Соловьева*)

В файле input33.txt дана выборка случайной величины. Найти:

1. объём выборки,
2. выборочное среднее a (оценку матожидания),
3. среднеквадратичное отклонение σ,
4. 95%-доверительный интервал для матожидания.
5. По критерию согласия хи-квадрат (разбив отрезок на 10 неравных частей) проверить гипотезу, что распределение — экспоненциальное с матожиданием a (число степеней свободы распределения хи-квадрат будет не 9, а 8, т. к. одна степень свободы израсходована на нахождение a).

34 вариант (*Мороз Иван, Пышногуб*)

Девять независимых случайных величин $A, B, C, K, L, M, X, Y, Z$ равномерно распределены на отрезке $[0; 1]$. Создать выборку объёма 14 400 значений вектора $(A, B, C, K, L, M, X, Y, Z)$ в виде файла mysample.txt.

Для случайной величины $\xi = \begin{vmatrix} A & B & C \\ K & L & M \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$, получаемой из этой выборки

1. построить гистограмму с шагом 0,1,
2. найти выборочную дисперсию σ (зная, что матожидание $= 0$),
3. по критерию согласия хи-квадрат (разбив отрезок на 12 неравных частей) проверить гипотезу, что распределение случайной величины ξ — нормальное (число степеней свободы распределения хи-квадрат будет не 11, а 10, т. к. одна степень свободы израсходована на нахождение σ).

35 вариант (*Мороз Ирина, Тарасенко*)

Случайная точка (X, Y, Z) равномерно распределена в 1/8 шара

$$U = \{x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x, y, z > 0\}.$$

Создать выборку объёма 20 000 троек значений (X, Y, Z) в виде файла sample3D.txt. Для случайной величины $\xi = XYZ^2$, получаемой из этой выборки

1. построить гистограмму с шагом 0,01,
2. найти выборочное среднее a (оценку матожидания),
3. найти среднеквадратичное отклонение σ,
4. найти 95%-доверительный интервал для матожидания и сравнить с теоретически вычисленным матожиданием

$$\mathbf{E}\,\xi = \frac{1}{V(U)} \iiint\limits_U xyz^2\,dxdydz.$$

Типовой расчет на компьютере №4 "Интерполяция и интегрирование"

41 вариант (*Коротков, Пышногуб*)

Дана функция $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x^3}$ на отрезке $[0; \pi]$.

а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа P по 3 точкам, выбранным при помощи многочлена Чебышёва. Построить графики f и S.

б) Вычислить

$$\int_0^{\pi} f(x)dx$$

при помощи разложения f в ряд Тейлора с погрешностью $< 10^{-5}$, оценивая остаток ряда Лейбница.

42 вариант (*Денисов, Тарасенко*)

Дана функция $f(x) = \exp(-\cos \pi x)$ на отрезке $[0, 1]$.

а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа P по 4 точкам, выбранным при помощи многочлена Чебышёва. Построить графики f и P.

б) Вычислить

$$\int_0^{1} f(x)dx$$

по формуле Симпсона с разбиением отрезка на 2^n частей с погрешностью $< 10^{-5}$, постепенно увеличивая n и оценивая погрешность по правилу Рунге.

43 вариант (*Мороз Ирина, Соловьева*)

Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^4}$ на отрезке $[0; 0{,}9]$.

а) Построить кубический сплайн S из 2 участков. Построить графики f и S.

б) Вычислить

$$\int_0^{0{,}7} f(x)dx$$

при помощи разложения f в ряд Тейлора с погрешностью $< 10^{-5}$, оценивая остаток ряда через геометрическую прогрессию.

44 вариант (*Мороз Иван, Сухоставский*)

Дана функция $f(x) = \exp(2\sin x)$ на отрезке $[0, \pi/2]$.

а) Построить кубический сплайн S из 2 участков. Построить графики f и S.

б) Вычислить

$$\int\limits_0^{\pi/2} f(x)dx$$

по формуле Симпсона с разбиением отрезка на 2^n частей с погрешностью $< 5 \cdot 10^{-5}$, постепенно увеличивая n и оценивая погрешность по правилу Рунге.

45 вариант (*Антиповская, Королев*)

Дана функция $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch}\sqrt{x} - 1}{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

а) Построить интерполяционный многочлен Лагранжа P по точкам 0, 1, 2, 3, 4. Построить графики f и P.

б) Вычислить

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx$$

при помощи разложения f в ряд Тейлора с погрешностью $< 10^{-4}$, оценивая остаток ряда через геометрическую прогрессию.