

# 作业2 (12月9日 上课时提交)

先阅读Lecture 3、Lecture 4 (含LYM不等式)。有问题可在群里提问。

- 1.  $1 \sim n-1$ 中与正整数 $n$ 互素的各数之和等于多少, 写成 $n$ 的函数。
- 2. 考虑无向图 $G=(V,E)$ 的顶点集合 $V$ 的子集 $X$ 。若 $X$ 中顶点在 $G$ 中不相邻, 称 $X$ 为 $G$ 的**独立集**。若 $E$ 中每条边都与 $X$ 中至少一个点相邻, 称 $X$ 为 $G$ 的**点覆盖**。试用一一映射说明独立集个数=点覆盖个数。
- 3. 一个排列称作**奇排列**如果它有奇数个逆序对, 称作**偶排列**如果它有偶数个逆序对。请用一一映射说明奇排列个数=偶排列个数。
  - 这里假设 $n>1$ 。排列指的是 $1, \dots, n$ 的排列。
- 4. 求出序列 $a=(3,3,1,1,5,5)$ 所对应的生成树。(仅提交最后的结果无需过程。)

- 5. 分析：20个顶点的完全图有多少生成树满足：顶点1~10的度数为1。
- 6. 请证明  $a_0..a_{n-1}=a_i...a_{n-1}a_0...a_{i-1} \Leftrightarrow a$  以  $\gcd(i,n)$  循环
- 7. 请计算  $n=5, T=3$  时的项链个数。可用项链计数公式。
- 8. 请利用LYM不等式证明 推论：  $|A| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 。
- 9. 请用double counting证明 
$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}, \quad \text{integer } n \geq 0.$$
- 10. 请用double counting证明 
$$\binom{n_1 + \dots + n_p}{m} = \sum_{k_1 + \dots + k_p = m} \binom{n_1}{k_1} \binom{n_2}{k_2} \dots \binom{n_p}{k_p}$$

# 作业说明

- 尽量简洁 + 按时提交!
  - 建议采用标准的作业纸。装订好。不要提交草稿本之类的。
  - 写好学号，姓名。独立完成!
- 
- 除了以上要提交的作业。还有一些思考题。
    - (1) 有兴趣的同学当拓展练习。不提交! 不检查。
    - (2) 鼓励学得比较不错的同学，做一些思考题。锻炼思维。部分不难。
    - (3) 期末考试中会选一道思考题来压轴，提高区分度。

## 思考题1

- 请构造 自然数集合 $\mathbb{N}$  与 整数集合 $\mathbb{Z}$  这两个集合间的一一映射。
- 令 $D=[0,1)$ , 请构造  $D^2$  与  $D$  这两个集合间的一一映射。

## 思考题2

- 完全二分图（左右分别有 $n_1$ 和 $n_2$ 个顶点）的生成树个数如何求？
- 提示：  $n-2$ 个 $n$ 中一部分换成 $n_1$ 一部分换成 $n_2$ 。一一映射。

## 思考题3

$n$ 个点，有多少个 rooted forests满足：森林中有恰好 $k$ 棵树？

思考题4 • [vjudge.net/problem/hdu-2376](http://vjudge.net/problem/hdu-2376)

思考题5 • [poj.org/problem?id=3013](http://poj.org/problem?id=3013)

思考题6 (较难)

- **EKR定理**。假如  $n \geq 2r$ 。希望找出  $\{1, \dots, n\}$  的若干个  $r$  元子集，使两两交非空。请证明，这些子集最多有  $\binom{n-1}{r-1}$  个。