2

- 1. 与正整数n互素的各数之和等于多少，写成n的函数。
  - 答案：$n\varphi(n)/2$
  - $\varphi(n)$即欧拉函数，表示小于n的正整数中与n互素的数的个数。$\phi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})...(1-\frac{1}{p_r})$
  - **可以证明，i与n互素**(gcd(i,n)=1)**当且仅当**gcd(n-i,n)=1。
  - 充分性：由裴蜀定理，知道存在整数k_1, k_2，使得

$$k_1 i + k_2 n = 1$$

上式等价于

$$-k_1(n-i)+(k_1+k_2)n=1$$

所以gcd(n-i,n)=1.

必要性易证。

又因为n/2与n互素当且仅当n=2，所以当n>2时1~n-1中与n互素的数成对存在，且和为n。

- 2. 考虑无向图G=(V,E)的顶点集合V的子集X。若X中顶点在G中不相邻，称X为G的**独立集**。若E中每条边都与X中至少一个点相邻，称X为G的**点覆盖**。试用一一映射说明独立集个数=点覆盖个数。

- 设X_1是图G的独立集，则$f(X_1) = V - X_1$是图G的点覆盖，构造映射$f(X_1) = V - X_1$，则f是独立集到点覆盖的一个双射。

- 1、证明$f(X_1)$是点覆盖。

反证：若存在边$e = (v_1, v_2)$，点v_1和v_2都不在集合$f(X_1)$中，则它们都属于集合$X_1 = V - f(X_1)$，这与X_1是独立集矛盾。

- 2、显然，映射$f(X_1) = V - X_1$是一个双射。

补充：严格证明一个对应关系f是双射的步骤：

（1）证明f是一个映射，即证明：

$X_1 = X_2$时，可以推出$f(X_1) = f(X_2)$.

（2）证明f是一个单射，即证明：

$f(X_1) = f(X_2)$时，可以推出$X_1 = X_2$.

（3）证明f是一个满射，即证明：

对任意值域中的元素Y，存在X，使得$f(X) = Y$.

- 3. 一个排列称作**奇排列**如果它有奇数个逆序对，称作**偶排列**如果它有偶数个逆序对。请用一一映射说明奇排列个数=偶排列个数。
  - 这里假设$n>1$。排列指的是$1,\ldots,n$的排列。

- 对奇排列$H=(h_1,h_2,h_3,\ldots,h_n)$，交换$h_1$和$h_2$的位置，得到的排列$H'=(h_2,h_1,h_3,\ldots,h_n)$是偶排列。且映射$f(H)=H'$是双射。

- 1、证明H'是偶排列。
- 证：可以发现，在交换之后，只有数对(h_1,h_2)变为(h_2,h_1)，其他的数对均不变，所以H’的逆序对个数=H的逆序对个数+1或-1.
- 即交换排列的前两个元素，得到的新的排列的奇偶性会发生改变（这个结论对于交换排列中的任意两个相邻元素都成立）。
- 2、映射f显然是双射。

4、求出(3,3,3,3,5,5)对应的生成树。

- n个点的生成树一一对应于长n-2的Prufer序列。
- 由prufer序列得到对应的生成树（自己算）：

- 1、确定点的个数，写出所有点对应的度数；
- 2、每次找到编号最小的，且度数为1的点，将它与prufer序列中的未划掉的第一个点相连；
- 3、将这两个点的度数-1，并划去prufer序列中的第一个点。
- 4、把最后剩下的两个度数为1的点连起来。

- 5. 20个顶点的完全图有多少生成树满足：顶点1~10的度数为1。
- 即顶点1~10是叶子节点。

- 先考虑顶点11~20，根据Cayley公式，可以生成10^8个生成树。
- 再考虑顶点1~10，各自都可以连到顶点11~20中的某一个顶点，一种有10^{10}种选择。
- 所以共有$10^{10} * 10^8 = 10^{18}$个生成树满足条件。

6、证明$a_0a_1 \dots a_{n-1} = a_i \dots a_{n-1}a_0 \dots a_{i-1}$当且仅当这个序列a以$\gcd(i,n)$循环。

- 同第一次作业的第4题的证明。

- 证：知有$a_k = a_{(k+di) mod\, n}$。

设$g = \gcd(i,n)$,则存在整数d_1, d_2，使得$d_1 i + d_2 n = g$.

$$k + g = k + d_1 i + d_2 n \equiv k + d_1 i \ (mod\ n)$$

所以$a_{(k+g) mod\, n} = a_{(k+d_1 i) mod\, n} = a_k$.

7、 请计算n=5,T=3时的项链个数。可用项链计数公式

$$T_{n,k} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} k^{d}\varphi(\frac{n}{d}) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} k^{\frac{n}{d}}\varphi(\mathrm{d})$$

- $=\frac{1}{5}(3^5\varphi(1) + 3\varphi(5))$
- $=51$

- 2. 请利用LYM不等式证明 推论：$|\boldsymbol{A}| \leq \binom{n}{[n/2]}$。
- (Lecture 4 例9)
- 首先已知LYM不等式：$\sum_k a_k / \binom{n}{k} \leq 1$
- 由于$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{[n/2]}$
- 故$\sum_k a_k / \binom{n}{[n/2]} \leq \sum_k a_k / \binom{n}{k} \leq 1$
- 即$\sum_k a_k / \binom{n}{[n/2]} \leq 1$
- 即$\sum_k a_k \leq \binom{n}{[n/2]}$
- 即$|A| \leq \binom{n}{[n/2]}$
- 原命题得证。

- 假定**A**包含$\{1,\ldots,n\}$的若干个“互不包含的”子集$S_1,\ldots,S_m$，并且其中大小为k的子集有a_k个，则 $\sum_k a_k / \binom{n}{k} \leq 1$。

- 3. 请用double counting证明 $x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$
- 首先构造一个问题：有区分的n个物品放入有区分的x的个盒子中，求方案总数。

- 计数方法一：
  - x^n是一个显然的解。（乘法原理）

- 计数方法二：
  - 首先选择盒子，设k个盒子非空，其他盒子都是空的：有$A_x^k = x^{\underline{k}}$个盒子选择方案。
  - 每种盒子选择方案下，有$\left\{ n \atop k \right\}$种物品分配方案(第二类Stirling数)
  - 综上方案总数为$\sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$。
  - 则$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}$

- 4. 请用double counting证明 $\binom{n_1+\cdots+n_p}{m}=\sum_{k_1+\cdots+k_p=m}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_p}{k_p}$
- 构造问题：在$n_1+\ldots+n_p$个物品中选m个，求方案数。

- 一:
- 显然$\binom{n_1+\ldots+n_p}{m}$是答案。

- 二:

将$n_1+\ldots+n_p$个物品划分为p组，第i组有n_i个。
则分别在各组中选取若干数量的物品，保证总量为m即可。
答案为$\sum_{k_1+\ldots+k_p=m}\binom{n_1}{k_1}\binom{n_2}{k_2}\cdots\binom{n_p}{k_p}$