1

- 一、验证 $C_n / C_{n-1} = 2(2n-1)/(n+1)$。利用此式编程序计算$C_{20}$ mod 97.

- Catalan数：$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$
- $C_{20}\ mod\ 97 = 52$

（两个问题）

```
int main() {
        long long res=1;
        for(int i=2; i<=20; ++i) {
                res = 2*(2*i-1)*res/(i+1);
        }
        cout<<res%97;
        return 0;
}
```

- 二、假设有m个矩阵$A_1,\cdots,A_m$，A_i的列数等于A_{i+1}的行数。要计算这些矩阵的乘积。有多少种顺序？ 比如$(A_1*A_2)*A_3$,$A_1*(A_2*A_3)$是m=3时的解。

答案：C_{m-1}.

设f(m)为m个矩阵乘积的顺序，则：

$$f(m)=\sum_{i=1}^{m} f(i)f(m-i)=C_{m-1}$$

Catalan数满足$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0$； $C_0=1$.

- 三、n个节点的形态不同的二叉树有多少棵？　注意二叉树是分左右儿子的。（一个节点有一个左儿子，不同于一个节点有一个右儿子。）

- 答案：C_n.
- 设f(n)为n个节点的二叉树个数，则：

$$f(n)=\sum_{i=0}^{n-1} f(i)f(n-1-i)=C_n.$$

Catalan数满足$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\ldots+C_{n-1}C_0$；　$C_0=1$.

- 四、请给出如下结论的一个直接的证明（不利用Raney lemma）：如果某个序列包含n+1个1，n个-1，它的2n+1个cyclic-shifts各不相等。

- 反证：设$L = 2n + 1.$
- 若存在两个相等的cyclic-shifts，分别是：

$$h_1, h_2, \dots, h_k, h_{k+1}, \dots, h_L,$$
$$h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_L, h_1, h_2, \dots, h_k$$

其中$k < L.$

则有结论：这个序列以$g = \gcd(L, k)$为周期。（第二次作业的第6题）

若上述结论成立。知$g < L$。

且有

$$\left.\frac{L}{g}\right| n, \qquad \left.\frac{L}{g}\right| n+1$$

矛盾。

- 四、请给出如下结论的一个直接的证明（不利用Raney lemma)：如果某个序列包含n+1个1，n个-1，它的2n+1个cyclic-shifts各不相等。
- 若存在两个相等的cyclic-shifts，分别是：

$$h_1, h_2, \dots, h_k, h_{k+1}, \dots, h_L,$$
$$h_{k+1}, h_{k+2}, \dots, h_L, h_1, h_2, \dots, h_k$$

有结论：这个序列以$g = \gcd(L, k)$为周期。（第二次作业的第6题）

即证明：$h_i = h_{(i+g) mod\ L}$.

证：知：

$$h_1 = h_{k+1},$$
$$h_2 = h_{k+2},$$
$$\dots,$$
$$h_{L-1} = h_{k-1},$$
$$h_L = h_k.$$

所以$h_i = h_{(i+k) mod\ L}$.（即序列中的某个元素，与向后数k个的元素相等），

所以$h_i = h_{(i+dk) mod\ L}$.

- 四、请给出如下结论的一个直接的证明（不利用Raney lemma)：如果某个序列包含n+1个1，n个-1，它的2n+1个cyclic-shifts各不相等。
- 反证：

$$h_i = h_{(i+dk) mod\ L}.$$

- 设$g = \gcd(L, k)$，根据裴蜀定理，存在整数d_1, d_2，使得

$$d_1 L + d_2 k = g$$

则

$$i + g = i + d_1 L + d_2 k$$

而

$$i + d_1 L + d_2 k \equiv i + d_2 k\ (mod\ L)$$

所以

$$h_{(i+g) mod\ L} = h_{(i+d_2 k) mod\ L} = h_i$$

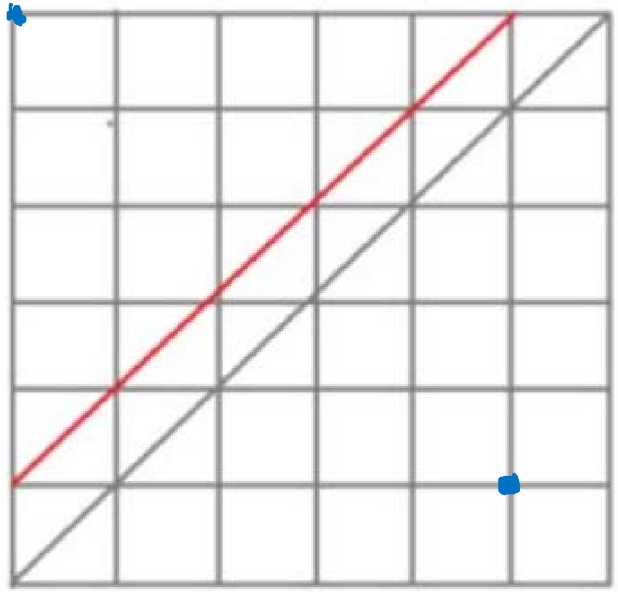
- 五、求有多少个长度为2n的合法序列以 (()(((开始。提示：折线法。

- 答案：$\binom{2n-6}{n-1}-\binom{2n-6}{n}$

- 规定：添加一个左括号，折线向右一格。
  添加一个右括号，折线向上一格。

从（5，1）→（n，n）的方案数

减去从（6，0）→（n，n）的方案数



- 1 求证$n!$ 整除 $x^{\underline{n}}$ 对于整数$x \geq n$成立。

- 已知$x! = x^{\underline{n}}(x-n)!$
- 则$x^{\underline{n}} = \frac{x!}{(x-n)!}$
- 则$\frac{x^{\underline{n}}}{n!} = \frac{x!}{(x-n)!n!}$
- 故$\frac{x^{\underline{n}}}{n!}=\binom{x}{n}$
- 由于$\binom{x}{n}$为整数，原命题得证。

- 2 求出$1^4+\ldots+n^4$的公式。需要推导过程。

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

系数为第二类Stirling数

$$\sum_{0 \leqslant k < n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{for integers } m, n \geqslant 0.$$

- **推导同lecture 2例1、例2、**
- $k^4 = k^{\underline{4}} + 6k^{\underline{3}} + 7k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}.$
- $\sum_{0 \le k < n+1} k^4 = \sum_{0 \le k < n+1} k^{\underline{4}} + 6\sum_{0 \le k < n+1} k^{\underline{3}} + 7\sum_{0 \le k < n+1} k^{\underline{2}} + \sum_{0 \le k < n+1} k^{\underline{1}}$
- $= \frac{(n+1)^{\underline{5}}}{5} + \frac{3(n+1)^{\underline{4}}}{2} + \frac{7(n+1)^{\underline{3}}}{3} + \frac{(n+1)^{\underline{2}}}{2}$
- $= \frac{1}{30}(6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n)$

- 3 计算$\sum_{x=0}^{20} f(x)\delta x$， 其中$f(x)=x^3+x^2-x-1$ 。需要计算过程。

- 方法1、待定系数
- 令$g(x+1)-g(x)=f(x)$,
- 则$\sum_{x=0}^{20} f(x)\,\delta x = g(x)|_0^{20} = g(20)-g(0)$.
- 设$g(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
- 用待定系数法解得

$$g(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{3}x+e$$

所以原式=g(20)-g(0)=38360。

- 3 计算$\sum_{x=0}^{20} f(x)\delta x$， 其中$f(x)=x^3+x^2-x-1$ 。需要计算过程。

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

系数为第二类Stirling数

- 方法2、转换成下阶乘幂求和

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

$$x^2 = x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$$

$$x = x^{\underline{1}},\ \ 1 = x^0$$

所以$\sum_{x=0}^{20} f(x)\,\delta x = \sum_{x=0}^{20} x^{\underline{3}}\,\delta x + \sum_{x=0}^{20} 4x^{\underline{2}}\,\delta x + \sum_{x=0}^{20} x^{\underline{1}}\delta x - \sum_{x=0}^{20} 1\,\delta x$

$$= \frac{1}{4}x^{\underline{4}} + \frac{4}{3}x^{\underline{3}} + \frac{1}{2}x^{\underline{2}} - x^{\underline{1}} + c\,\Big|_0^{20}$$

- 4 求证 $(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}}$

- 当n=1时，显然成立

- 假设$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}}$

- 则$(a+b)^{\underline{n+1}} = (a+b)^{\underline{n}}(a+b-n)$

- $= (a+b-n) * \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}}$

- $= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}} ((a-n+r)+(b-r))$

- $= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}} (a-n+r) + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r}} (b-r)$

- $= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{(n+1)-r}} b^{\underline{r}} + \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{\underline{n-r}} b^{\underline{r+1}}$

- 4 求证 $(a+b)^{n}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^{r}$

- $=\binom{n}{0}a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}a^{(n+1)-r}b^{r}+\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n}{r}a^{n-r}b^{r+1}+\binom{n}{n}b^{n+1}$

- $=\binom{n}{0}a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}a^{(n+1)-r}b^{r}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r-1}a^{n+1-r}b^{r}+\binom{n}{n}b^{n+1}$

- 因为$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}=\binom{n+1}{r}$:

- $=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}a^{(n+1)-r}b^{r}+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$

- $=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}a^{(n+1)-r}b^{r}$

- 由数学归纳法，原命题得证。

Raney lemma的扩展

假设H=(h_1,⋯,h_L)是非负整数序列，满足：h1+⋯+hL=1。

求证：对于任何i属于1~L，

- 存在恰好一个cyclic shift $H^{(j)}$，它的L个前缀和中有i个是正数。

举例：

- $H^{(1)}$=(-1，1，2，1,-2) 3个前缀和为正。令$\mathbf{H}=(-\mathbf{2},-\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$,
- $H^{(2)}$=(1，2，1,-2,-1) 5个前缀和为正。
- $H^{(3)}$=(2，1,-2,-1，1) 4个前缀和为正。
- $H^{(4)}$=(1,-2,-1，1，2) 2个前缀和为正。
- $H^{(5)}$=(-2,-1，1，2，1) 1个前缀和为正。

$H=(h_1,h_2,\dots,h_L)$，设：

$$S_i=\sum_{k=1}^{k=i}h_k,$$

$H^{(x)}$表示序列H以h_x为终点的cyclic shift。

事实上，有如下观察：类似Raney lemma的证明，将（i，S_i）对应的点描出来，则：点（i，S_i）的高度越高（S_i越大），则对应序列$H^{(i)}$的正前缀和个数越少；

相同高度的点，越靠左（i的值越小）的点，对应的序列$H^{(i)}$的正前缀和个数越少。

基于上述观察，有如下的证明。

- 设序列$H = (h_1, \dots, h_L)$，令$S_i = \sum_{k=1}^{i} h_k$，令$H^{(x)}$表示以h_x为终点的cyclic shift，即$H^{(x)} = (h_{x+1}, \dots, h_x)$.
- 对$1 \sim L$这L个数定义顺序：

f排在e的前面（$f \to e$）当且仅当 $S_f > S_e$，或者$S_f = S_e$且$f < e$.

- 则$1 \sim L$这L个数可以按照上述定义的顺序排成一排，设为：

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_L$$

有观察：x_i对应的cyclic shift$H^{(x_i)}$恰有i个正的前缀和。

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_L$$

有观察：x_i对应的cyclic shift$H^{(x_i)}$恰有i个正的前缀和。

要证明这个观察，只需要证明：

$\boldsymbol{f}$排在$\boldsymbol{e}$的**前面（$\boldsymbol{f \to e}$）当且仅当** $\boldsymbol{H^{(e)}}$以$\mathbf{h_f}$**为终点的前缀和为正，即** $\boldsymbol{h_{e+1} + \cdots + h_f > 0}$.

（若上述结论成立，则对x_i，有i个元素排在它的左边，对应于i个正的前缀和；有L-i个元素排在它的右边，对应于L-i个非正的前缀和）

证：

Case 1： $e < f$.

则： $f \to e$ 当且仅当 $S_f > S_e$ 当且仅当 $S_f - S_e > 0$.

Case 2： $e > f$.

则： $f \to e$ 当且仅当 $S_f \geq S_e$ 当且仅当 $S_f > S_e + 1$ 当且仅当 $S_f + S_L - S_e > 0$.

（S_L表示序列所有元素之和，根据题目，恰有$S_L = 1$）.