

3.2
1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

x_2, x_4, x_5 x_3

2. $A = (2, 1, 0, 0, 0)$ $B = (4, -1, 1)$
 $(0, 0, -2, 1, 0)$
 $(0, 0, -3, 0, 1)$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 自由, $(0, 0, 0, 1, 0)$

9. x_5 $(-1, 0, 0, 0, 1)$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 列空间 $(1, 1, 5)$
 $(0, 3, 1)$

$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 5 & 1 \end{matrix}$ 2个轴变量
 3×3 零空间 $(1, 0, 1)$ $(0, 0, 1)$
 不符 2个自由变量

24. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $N(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $N(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\text{rref}(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ X

(c) $R = \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 $\neq \text{rref}(A^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $N(C) = N(B) \cap N(A)$

3. $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

R 和 U 的零空间相等 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) X $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) V $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $ada-cb \neq 0$

(c) X m

(d) V 不超过 m

10. $n-r, n, m$

13. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 3y+z+12 \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x = 12 + 3y + z$ $\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ 零空间等于列空间 r
 $n = m - 3$ 列空间 r 零空间 $n - r$
 $n - r = m - r$ $n = 2r$ X

22. 零空间

$AB = 0$. 即 B 每一列 $XA = 0$. B 在 A 的零空间中

26. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} \diagup & \diagdown \\ \diagdown & \diagup \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$

30. $C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ $N(C) = \begin{bmatrix} N(A) \\ N(B) \end{bmatrix}$

$CX = 0$ $AX = 0, BX = 0$

$N(C) = N(B) \cap N(A)$

32. 1: $y_3 = y_1 + y_4$

2: $y_1 = y_5 + y_2$

3: $y_2 = y_3 + y_6$

4: $y_4 + y_5 + y_6 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow R: \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x_2, x_5, x_6

~~$(1, 1, 1, 0, 0, 0)$~~

$(1, 1, 1, 0, 0, 0)$

~~$(0, 0, 0, 1, 1, 1)$~~

$(1, 0, 0, -1, 1, 0)$

~~$(1, 0, 0, -1, 1, 0)$~~

$(1, 1, 0, -1, 0, 1)$

33. (a) (c) 对, (b) 是至少 $(n-m)$ 个, (d) 轴无打

35. $R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$

38. $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = (-2, -4, 1, 0), (-3, -5, 0, 1)$

$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x = (1, 0, 0), (0, -2, 1)$

$y^T R = 0$ $(y^T)^T R = 0$ $R = 0$ $Rx = 0$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -\frac{9}{2} \\ 1 & 3 & -3/2 \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{cb}{a} \end{bmatrix}$

40. 线, $(n-1)$ 维, $n(n-1)$

41. $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

4. $m \times n$ 矩阵只有 r 个轴元, 子矩阵 $m \times r$ 消除后, 轴元不会被消而是保留

45. $r \times m$, P^T 中的 r 个非零元列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$P^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad S^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

50. $AB = I$, $\text{rank}(AB) = n$

$$\text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A)$$

有 $\text{rank}(A) \geq n$, A 为 $n \times n$

A 的秩 $\leq n \therefore A$ 的秩 $= n$

$$47. UV^T W Z^T = U(V^T W) Z^T$$

$$V^T W, V^T W = 0$$

48. (a) AB 是 A 倍的 B 列

B 的 j 列是前 n 列线性组合

AB 的 j 列也是前 n 列 AB 的线性组合

AB 不有新的非零元列。

$$\therefore \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(B)$$

$$(b) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

52. (a) $A, B \rightarrow R$

且简化行阶梯形 R 相同

有 A, B 零空间, 行空间相同

(b) $E, A = R, E, B = R$

$$(E_1)^T E_2$$

$$54. RA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & c-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c-1 & 0 & 2(c-1) & 2(c-1) \\ 0 & c-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c=1 \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

χ_1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

χ_1, χ_2

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\chi_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$c=1$

$$c=2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\chi_1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c \neq \begin{bmatrix} (1-c)(2-c) & 0 \\ 0 & 2-c \end{bmatrix}$$

$$56. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \times 1 \times 1 \times 4$$

非零列 \times 非零行

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$