3

1 关于子集反演公式的两个形式:

- (1) 若$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T)$，则$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。
- (2) 若$f(S)=\sum_{T\supseteq S} g(T)$，则$g(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。

假定(1)成立。利用(1)来证明(2)。仅需给出(2)的证明。

- 证：对任意集合A，设函数$fc(A)=f(A^c), gc(A)=g(A^c)$.
- 已知$f(S)=\sum_{T\supseteq S} g(T)$，则

$$f(S)=\sum_{T^c\subseteq S^c} g(T)$$

所以

$$fc(S^c)=\sum_{T^c\subseteq S^c} gc(T^c)$$

根据（1）：

$$gc(S^c)=\sum_{T^c\subseteq S^c}(-1)^{|S^c|-|T^c|}fc(T^c)$$

即

$$g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|T|-|S|}f(T)$$

即

$$g(S)=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$$

1 关于子集反演公式的两个形式：

- (1) 若$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T)$，则$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。
- (2) 若$f(S)=\sum_{T\supseteq S} g(T)$，则$g(S)=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。

假定(1)成立。利用(1)来证明(2)。仅需给出(2)的证明。

- 证（不借助（1）的直接证明）：
- 知$f(T)=\sum_{Q\supseteq T} g(Q)$，代入右式：

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\sum_{Q\supseteq T} g(Q)\\
&=\sum_{Q\supseteq S} g(Q)\sum_{Q\supseteq T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\\
&=\sum_{Q\supseteq S} g(Q)\sum_{Q\supseteq T\supseteq S}(-1)^{|T|-|S|}\\
&=\sum_{Q\supseteq S} g(Q)\,[(Q\backslash S)=\emptyset]\\
&=g(S).
\end{aligned}
$$

2. 证明以下等式。σ_1, σ 的定义见lecture 6 例1.

- id * **1** = σ_1。 **1*1**= σ。 这里**1**表示常数函数 $f(n)$=1。

- 由定义可知 $id(n) * 1 = \sum_{d|n} id(d) = \sum_{d|n} d = \sigma_1(n)$
- 同时$1 * 1 = \sum_{d|n} 1 = \sigma(n)$

3. 证明迪利克雷卷积符合

- 结合律 $(a*b)*c= a*(b*c)$。
- 消去律：若$a*b=a*c$，则$b=c$。 （这里假定a是积性函数）。

证明结合律：

- 由定义可知：$a*b=\sum_{d|n}a(d)b\left(\frac{n}{d}\right)$
- 则$(a*b)*c=\sum_{d|n}\left(\sum_{d'|d}a(d')b\left(\frac{d}{d'}\right)\right)c\left(\frac{n}{d}\right)$
- 则$(a*b)*c=\sum_{d|n}\sum_{d'|d}a(d')b\left(\frac{d}{d'}\right)c\left(\frac{n}{d}\right)$
- 则$(a*b)*c=\sum_{d|n}\sum_{d'|d}a(d')b\left(\frac{d}{d'}\right)c\left(\frac{n/d'}{d/d'}\right)$
- 则$(a*b)*c=\sum_{d'|n}\sum_{\frac{d}{d'}|\frac{n}{d'}}a(d')b\left(\frac{d}{d'}\right)c\left(\frac{n/d'}{d/d'}\right)$
- 令$e=\frac{d}{d'}$
- 则$(a*b)*c=\sum_{d'|n}a(d')\sum_{e|\frac{n}{d'}}b(e)c\left(\frac{n/d'}{e}\right)$
- 注意到$(b*c)(\frac{n}{d'})=\sum_{e|\frac{n}{d'}}b(e)c\left(\frac{n/d'}{e}\right)$
- 则证得$(a*b)*c=\sum_{d'|n}a(d')\sum_{d|\frac{n}{d'}}b\left(\frac{d}{d'}\right)c\left(\frac{n}{d}\right)=a*(b*c)$

3. 证明迪利克雷卷积符合

- 结合律 $(a*b)*c= a*(b*c)$。
- 消去律：若$a*b=a*c$，则$b=c$。（这里假定a是积性函数）。

- 证明消去律：
- 若$a * b = a * c$
- 则$a * b = \sum_{d|n} a(d)b\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} a(d)c\left(\frac{n}{d}\right) = a * c$
- 若n=1，有$a(1)b(1) = a(1)c(1)$，即$b(1) = c(1)$
- 数学归纳法：
- 若$b(i) = c(i), k \geq i > 0$; $a * b = a * c$;
- 则$\sum_{d|k+1} a(d)b\left(\frac{k+1}{d}\right) = \sum_{d|k+1} a(d)c\left(\frac{k+1}{d}\right)$
- 则$a(1)b(k+1) = a(1)c(k+1)$; $b(k+1) = c(k+1)$
- 原命题得证。

4. 从$\{1,2,\ldots,n\}$中取r个数$(1<=r<=n)$。不能选相邻元素。求方案数。

- 考虑构造映射：一个不相邻的选取方案对应一个向n-r个元素的间隙中插入r个元素（无区分）的方案。
- 如：从{1,2,3,4,5,6}取2个数，等价于将2块隔板插入4个位置的间隙中： O | O O | O 对应于取数2,4。
- 则方案数为$\binom{n-r+1}{r}$

5. 证明$n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i$. （$D_n$表示$n$元素的错排的方案数）

然后利用此公式，通过反演求出D_n 的计算公式，并算出D_6。

最后，用 $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$验证计算结果。

- 设长n的排列中，有i个数是错排的，其它的数没有错排，如：

n=6，i=3，序列：6，2，3，1，5，4

方案数为：$\binom{n}{i} D_i$.

枚举排列中错排元素的个数，则：

$$n! = \sum_{i} \binom{n}{i} D_i .$$

反演：

$$D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i!$$

$D_6 = 265.$

6. 课上提到 $\sum_{i=1}^{\lceil\frac{|T|}{2}\rceil}\binom{|T|}{2i-1}=2^{|T|-1}$。求证 $\sum_{i=1}^{\lceil\frac{t}{2}\rceil}\binom{t}{2i-1}=2^{t-1}$。$(t\geq 1)$

- 证：设 $j=2i-1$，则

$$\sum_{i=1}^{\lceil\frac{t}{2}\rceil}\binom{t}{2i-1}=\sum_{\substack{j=1,\\ \text{且}j\text{是奇数}}}^{2\lceil\frac{t}{2}\rceil-1}\binom{t}{j}$$

注意到当t为偶数：$2\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil-1=t-1$

当t为奇数：$2\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil-1=t$

对t分类讨论。

1、t是偶数：上式等于

$$\sum_{\substack{j=1,\\ \text{且}j\text{是奇数}}}^{t-1}\binom{t}{j}$$

6. 课上提到$\sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{|T|}{2}\right\rceil}\binom{|T|}{2i-1}=2^{|T|-1}$。求证$\sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil}\binom{t}{2i-1}=2^{t-1}$。($t$≥1)

1、t是偶数：上式等于$\sum_{j=1,j是奇数}^{t-1}\binom{t}{j}$

注意到:

$$\sum_{j=0,偶数}^{t}\binom{t}{j}+\sum_{j=1,奇数}^{t-1}\binom{t}{j}=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}=2^t$$

且:

$$\sum_{j=0,偶数}^{t}\binom{t}{j}-\sum_{j=1,奇数}^{t-1}\binom{t}{j}=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-1)^j=0$$

所以

$$\sum_{j=0,偶数}^{t}\binom{t}{j}=\sum_{j=1,奇数}^{t-1}\binom{t}{j}=2^{t-1}$$

2、t是奇数：上式等于$\sum_{j=1,j是奇数}^{t}\binom{t}{j}$

注意到：

$$\sum_{j=0,偶数}^{t-1}\binom{t}{j}+\sum_{j=1,奇数}^{t}\binom{t}{j}=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}=2^t$$

且：

$$\sum_{j=0,偶数}^{t-1}\binom{t}{j}-\sum_{j=1,奇数}^{t}\binom{t}{j}=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}(-1)^j=0$$

所以

$$\sum_{j=0,偶数}^{t-1}\binom{t}{j}=\sum_{j=1,奇数}^{t}\binom{t}{j}=2^{t-1}$$