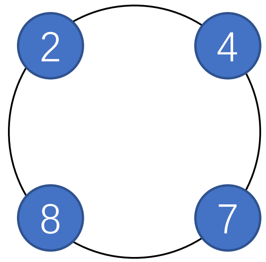
Lecture 2
Stirling数 & 数幂的求和

中山大学 智能工程学院
金恺

Outline

- 一、**两类Stirling数的定义和递归公式**
  - Stirling cycle number（第一类Stirling数）
  - Stirling subset number（第二类Stirling数）
- 二、**上/下阶乘幂 & 它们与普通次幂的转换**
- 三、**阶乘幂的求和 & 普通数幂求和 & 离散积分**
  - $1^k+2^k+\cdots+n^k = ?$
- 四、 **Stirling数的重要公式、性质、应用**

第一类Stirling数的定义



- **定义**：Cycle（圆排列）
  - (2,4,7,8)= (4,7,8,2)=(7,8,2,4)=(8,2,4,7) 是同一个cycle。
  - (2,4,7) ≠ (2,7,4) 。 这是两个不同的cycle。
- **定义**：第一类Stirling数

  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$=将1~$n$ 分成恰好k个cycles的方案总数。

  举例:

  $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$=11。

  (X,X,X) (4), (X X X) (3), (X,X,X) (2), (X,X,X) (1), 2*4=8种。

  (1,2) (3,4), (1,3) (2,4), (1,4) (2,3) 3种

第二类Stirling数的定义

- 定义：第二类Stirling数
  $\left\{ n \atop k \right\} = n$个物品放入$k$个盒子中（每个盒子非空），方案数。//盒子无区分
  - 举例
    - $\left\{ 4 \atop 2 \right\} = 7$
    {1,2,3} {4}　{1,2,4} {3}　{1,3,4} {2}　{2,3,4} {1}
    {1,2} {3,4}　{1,3} {2,4}　{1,4} {2,3}

- 第一类Stirling数，又叫做Stirling cycle number
- 第二类Stirling数，又叫做Stirling subset number。
  - 不关心 盒子内部的球的排列。　推论：$\left[n \atop k \right] \geq \left\{ n \atop k \right\}$。

- 问题：
  - 对于$n \geq k \geq 1$，如何计算$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$?
  - 对于$n \geq k \geq 1$，如何计算$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$?

递归公式（第二类）

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

- 证明:
  - 考虑第n个元素
    - 要么单独占据一个box。此时$\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$这么多方案。
    - 要么不单独占据一个box。**可以放入的位置恰好k个**。

边界条件: $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$。　　或者: $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0(n > 0)$，$\left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1$。

举例

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

$$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 2 * \left\{ {3 \atop 2} \right\} + \left\{ {3 \atop 1} \right\} = 6 + 1 = 7$$

- {1,2} {3}　插入4可得
  - {1,2,4} {3}
  - {1,2} {3,4}
- {1,3} {2}　插入4可得
  - {1,3,4} {2}
  - {1,3} {2,4}
- {2,3} {1}　插入4可得
  - {2,3,4} {1}
  - {2,3} {1,4}
- 4单独为1组
  - {1,2,3} {4}

递归公式（第一类）

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

- 证明:
  - 考虑第n个元素
    - 要么单独为一个cycle。此时 $\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$这么多方案。
    - 要么插入到之前某个圈里头。**可以插入的位置恰好n-1个**。

边界条件: $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ 。　　或用k=0做边界条件: $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0(n > 0)$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$

举例

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 * \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 + 2 = 11$$

- (1,2) (3)　插入4可得
  - (1,2,4) (3)
  - (1,4,2) (3)
  - (1,2) (3,4)
- (2,3) (1)　插入4可得
  - (2,3,4) (1)
  - (2,4,3) (1)
  - (2,3) (1,4)
- (1,3) (2)　插入4可得
  - (1,3,4) (2)
  - (1,4,3) (2)
  - (1,3) (2,4)
- 4单独为1组
  - (1,2,3) (4)
  - (1,3,2) (4)

两类斯特林数递归公式对比

- 第一类：

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

- 第二类：

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}, \qquad \text{integer } n > 0.$$

- 第一类Stirling数更大
  - 根据定义易得；第二类不关心内部顺序，数量更少。
  - 观察递归方程中首项系数为 n-1（大）和k（小）。

二 阶乘幂 & 普通次幂的转换

- 对于非负整数n，定义

$$x^n = \underbrace{x \dots x}_{n\text{个}x}$$

称之为 <u>x的(普通)n次幂</u>。

阶乘幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1)$$

称之为 x的n次下阶乘幂。

falling factorial power

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1)$$

称之为 x的n次上阶乘幂。

rising factorial power

举例

$$x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x$$
$$x^{\underline{3}} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$
$$x^{\underline{4}} = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+1) = x^2 + x$$
$$x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$
$$x^{\overline{4}} = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

易知，每个阶乘幂 $x^{\underline{n}}, x^{\overline{n}}$ 都是 $x^1 \sim x^n$的线性组合。

2.1 上阶乘幂 化为 普通次幂的和

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

系数为第一类Stirling数

这里当k<0时，$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$=0。

例子

$x^{\overline{4}} = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$

- 证明：　归纳法。假设上式对于n-1成立。

$$x^{\overline{n}} = x^{\overline{n-1}}(x+n-1) \overset{\text{归纳}}{=} \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k (x+n-1)$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \left(x^{k+1} + (n-1)x^k\right)$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (n-1)x^k$$

$$= \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-1 \\ k'-1 \end{bmatrix} x^{k'} + \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (n-1)x^k$$

$$= \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} (n-1)x^k$$

$$= \sum_k \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) x^k = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

2.2 下阶乘幂 化为 普通次幂的和

$$x^{\underline{n}} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k} x^k, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

可以归纳法证
但我们用更**简便**的办法

$$x^{\underline{4}} = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

is just like the formula

$$x^{\overline{4}} = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

可以发现$x^{\underline{n}}$与$x^{\overline{n}}$展开后只是符号有差异。

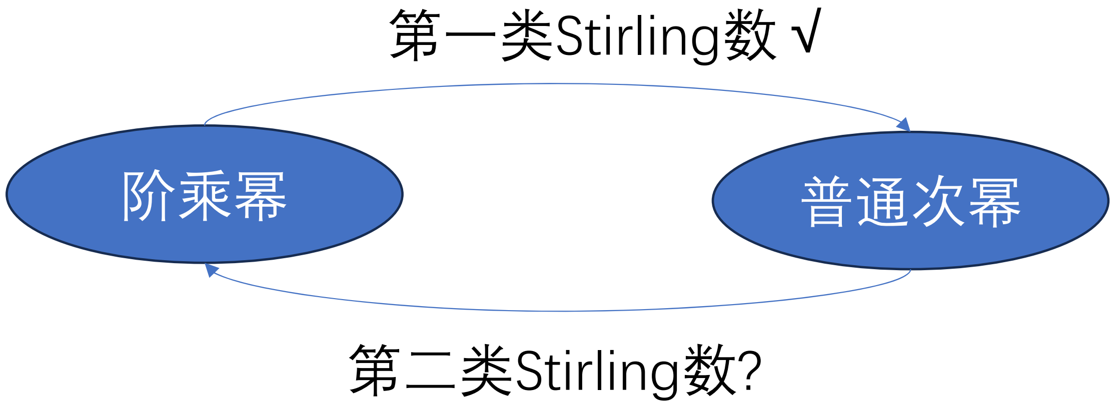
x^k的系数的绝对值是一样的。符号可能相反。

从$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$变为$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(-1)^{n-k}$

Why?

$s(n,k) \coloneqq \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}(-1)^{n-k}$叫做带符号的第一类斯特林数。

What about the reverse?



2.3 普通次幂 化为 下阶乘幂的和

- 举例： $x^4 = x^{\underline{4}} + 6x^{\underline{3}} + 7x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}$。
- 易知， 普通次幂x^k 可写成 $x^{\underline{k}}, x^{\underline{k-1}}, \ldots, x^{\underline{1}}$的线性组合。系数怎么求？

$$x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

系数为第二类Stirling数

- 证明： $x \cdot x^{\underline{k}} = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$, because $x^{\underline{k+1}} = x^{\underline{k}}(x-k)$; hence $x \cdot x^{n-1}$ is

$$\begin{aligned} x\sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k}} &= \sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_k \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} x^{\underline{k}} + \sum_k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} kx^{\underline{k}} \\ &= \sum_k \left(k\left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} \right) x^{\underline{k}} = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}. \end{aligned}$$

2.4 普通次幂 化为 上阶乘幂的和

根据此式，上阶乘相关问题都可以转到下阶乘去处理

观察：$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$

证明：$(-x)^{\underline{k}} = (-x)(-x-1)\ldots(-x-\mathrm{k}+1)$

$$= (-1)^k\, x(x+1)\ldots(x+k-1) \;=\; (-1)^k x^{\overline{k}}$$

利用上述观察以及 $x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$

$$(-x)^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} (-x)^{\underline{k}}$$

$$x^n = \sum_k \left\{ n \atop k \right\} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0;$$

小结　Always possible to convert between ordinary powers and factorial powers by using Stirling numbers.

$$x^{\overline{n}} = \sum_k {n \brack k} x^k, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_k {n \brack k} (-1)^{n-k} x^k, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

$$x^{n} = \sum_k {n \brace k} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

$$x^{n} = \sum_k {n \brace k} (-1)^{n-k} x^{\overline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0;$$

记住下阶乘这2个就行了！
上阶乘比较少用。

$$\begin{tikzcd}
x^{\overline{n}} \arrow[d, bend right, "\text{一类}"'] \\
x^{n} \arrow[u, bend right, "\text{有符号二类}"'] \arrow[d, bend right, "\text{二类}"'] \\
x^{\underline{n}} \arrow[u, bend right, "\text{有符号一类}"']
\end{tikzcd}$$

规律提示
小数 表示成大数的线性组合
系数有符号

三、下阶乘幂的求和 & 普通数幂求和

定义 $\Delta f(x)=f(x+1)-f(x).$ f(x)的离散导数

定义 $\sum_a^b g(x)\,\delta x=\sum_{a\le k<b} g(k)$ g(x)的离散积分 特别留意排除掉b

结论。若 g(x)=Δ f(x)，则 $\boxed{\sum_a^b g(x)\,\delta x}=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a).$

证明: $\sum_{a\le k<b} g(k)=\sum_{a\leqslant k<b}\big(f(k+1)-f(k)\big)=\big(f(a+1)-f(a)\big)+\big(f(a+2)-f(a+1)\big)+\cdots$

$+\big(f(b-1)-f(b-2)\big)+\big(f(b)-f(b-1)\big).$ =f(b)-f(a)

下阶乘幂的离散导数&离散积分

$$\begin{aligned}\Delta(x^{\underline{m}}) &= (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} \\ &= (x+1)x\ldots(x-m+2) \;-\; x\ldots(x-m+2)(x-m+1) \\ &= m\,x(x-1)\ldots(x-m+2) = mx^{\underline{m-1}}\end{aligned}$$

hence the finite calculus has a handy law to match $D(x^m) = mx^{m-1}$:

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\bigg|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}, \qquad \text{for integers } m,n \geqslant 0.$$

This formula is easy to remember because it's so much like the familiar $\int_0^n x^m\,dx = n^{m+1}/(m+1)$.

Falling powers are therefore very nice for sums

例1 计算 $1^2+\cdots+n^2$

$$k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}},$$

hence

$$\sum_{0\leqslant k<n} k^2 = \frac{n^{\underline{3}}}{3} + \frac{n^{\underline{2}}}{2} = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2+\frac{3}{2}) = \frac{1}{3}n(n-\frac{1}{2})(n-1).$$

- 因此 $1^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

- 验算： n=3. $1+2^2+3^2=14$ 3*4*7/6=14.

例2 计算 $1^3+\cdots+n^3$

运用 $x^n = \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$

- 易知$k^3 = k^{\underline{3}}+3k^{\underline{2}}+k^{\underline{1}}$
- 因此$\sum_{0\le k<n} k^3 = \frac{1}{4}n^{\underline{4}} + n^{\underline{3}} + \frac{1}{2}n^{\underline{2}}$
$$= \frac{1}{4}n^{\underline{2}}\big((n-2)(n-3)+4(n-2)+2\big) = \frac{1}{4}n^{\underline{2}}n^{\underline{2}}$$
- 因此，$1^3+\cdots+n^3 = \frac{(n+1)n}{2}\frac{(n+1)n}{2}$
- 即$1^3+\ldots+n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$

类似的，对于任意m，可以求出 $1^m+\cdots n^m$的通项公式。

推广到负数次幂（*）

可以拓展到负数幂。

$$x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+m)}, \qquad \text{for } m > 0.$$

$$\Delta x^{\underline{-2}} = \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x+1)-(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -2x^{\underline{-3}}.$$

Yes — it works! A similar argument applies for all $m < 0$.

$$\sum\nolimits_a^b x^{\underline{m}}\,\delta x = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_a^b, & \text{if } m \neq -1; \\ \left.H_x\right|_a^b, & \text{if } m = -1. \end{cases}$$

四、Stirling数的重要公式、应用。

通项公式 $\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^n$

考虑 n 个互异的球 扔到 k 个**互异的**盒子。
每个都要求非空的方案数设为T；　　那么 T除以k!即为所求。

如何计算T?　　令 X_i 表示第 i 个盒子为空的方案。

$$\left|\overline{X_1}\cap\cdots\cap\overline{X_k}\right| = |\Omega| - \left|\overline{\overline{X_1}\cap\cdots\cap\overline{X_k}}\right| = |\Omega| - |X_1\cup\cdots\cup X_k|$$

$$= |\Omega| - \sum_{\mathrm{i}}|X_i| + \sum_{\mathrm{i}<j}\left|X_i\cap X_j\right| + \cdots + (-1)^k|X_1\cap\cdots\cap X_k|$$

$$=\sum_{t=0}^{k}(-1)^t\sum_{\mathrm{i}_1<\cdots<i_t}\left|X_{i_1}\cap\cdots\cap X_{i_t}\right| = \sum_{t=0}^{k}(-1)^t\binom{k}{t}(k-t)^n$$

例3 www.luogu.com.cn/problem/P8143

- 对于1~n的任何一个排列$p=(p_1,\ldots,p_n)$，可定义一个图$G_p=\{(i,p_i)\}$。
- 该图中每个点的入度、出度均为1。因此为若干个环。
  - 比如p=(6,3,2,7,1,5,4)。 形成这几个环：(1,6,5),(2,3),(4,7)。
  - 比如p=(1,2,4,3)。 形成这几个环：(1), (2), (3,4)。

- **问**：有多少个1~n的排列p*满足：* G_p中有偶数个环（含自环）？

- **观察**：1~n的排列p **一一对应** 将1~n丢入若干个cycle的方案G。
- 将1~n丢入若干cycles的方案中，有多少个具有偶数个cycles?

等价问题：求$\sum_{k为偶数}\left[{n \atop k}\right]$

$$x^{\overline{n}} = \sum_k \left[{n \atop k}\right] x^k, \qquad \text{integer } n \geqslant 0.$$

- x取1，得 n!= $\sum_k \left[{n \atop k}\right] x^k$
- x取-1，得0= $\sum_{k为偶} \left[{n \atop k}\right] - \sum_{k为奇} \left[{n \atop k}\right]$。因此答案为 $n!/2$。

- 注意n=1时，特殊处理。
  - 0改为-1。答案为 (n!-1)/2=0。

例4 vjudge.net/problem/HDU-3625

- **题意**:
  - 有n个房间（编号为1~n）被锁上了。n把钥匙分别放在n个房间里，且每个房间恰好一把。求能成功打开所有房间的概率？
  - 允许最多破坏 k 个门（撬锁）。但房间1的门不允许被破坏。
  - 假设n把钥匙等概率随机到n个房间。每个钥匙在哪个房间是能看到的。
- 举例n=3, k=2。胜率=2/3。
  - 成功 ⇔ 当钥匙1不在房间1。
- 举例n=3, k=1。胜率=1/3。
  - 成功⇔ 钥匙-房间 的关系 形成一个环时（比如(1,2,3),(1,3,2))

解答:

- **构图**：如果房间i内的钥匙打开房间j，则连一条边(i,j)。
- **观察**：有几个环，则需要破坏几个门。
- 另外，1单独一个环不允许。

- 至少破坏 i 个门能打开的方案数
  - $T_i = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}$，（1单独一组的去掉）

- 能打开的方案数为 $T_1+\ldots+T_k$ 。
- 概率为：$T_1+\ldots+T_k$ 除以 n!。