Lecture 6
莫比乌斯函数 & 莫比乌斯反演

中山大学 智能工程学院
金恺

Outline

子集反演（上周内容）
二项式反演（上周内容）

- 1 积性函数与迪利克雷卷积
  （ Multiplicative function & Dirichlet convolution）
- 2 莫比乌斯函数 & 莫比乌斯反演 ☆
  （Möbius function & Möbius inversion）
- 3 项链问题的两种变形
- 4 容斥原理复习

积性函数

- **定义**： f是**积性**的 $\Leftrightarrow$
  - $f(1)=1$ ， 并且
  - 当$\gcd(a,b)=1$时， $f(ab)=f(a)\,f(b)$。
- **举例**： $f(n)=n$。 $f(n)=[n=1]$。

- **观察**： f的值由素幂位置的值决定。
- **性质**. 若$f()$ 、$g()$ 是积性的，则 $f\,g()$、 $f/g()$也是积性的。
- 证明：
  - $fg(ab)=f(ab)g(ab)=f(a)f(b)g(a)g(b)=fg(a)fg(b)$。
  - $f/g(ab)=f(ab)/g(ab)=f(a)f(b)/(g(a)g(b))=f/g(a)\,f/g(b)$。

例1 正约数个数、正约数之和

- 令**$\sigma(n)$**表示n的正约数的个数
- 当$n = p_1^{a1}\cdots p_k^{ak}$时， $\sigma(n)=(a_1+1)*\cdots*(a_k+1)$。
- σ 是积性的。

$$\sigma(p_1^{u1} \cdots p_k^{uk} q_1^{v1}\cdots q_j^{vj})= (u_1+1)\cdots(u_k+1)(v_1+1)\cdots(v_j+1)$$
$$= \sigma(p_1^{u1} \cdots p_k^{uk})\, \sigma(q_1^{v1} \cdots q_j^{vj})$$

- 令**$\sigma_1(n)$**表示n的正约数之和。
- 当$n = p_1^{a1}\cdots p_k^{ak}$时， $\sigma_1(n)= (1-p_1^{a1+1})/(1-p_1) \cdots (1-p_k^{ak+1})/(1-p_k)$。
- 显然σ_1也是积性的。

Dirichlet convolution

- **定义.**
  - 如果f，g：$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$，
  - $\sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$ 叫做f和g的**迪利克雷卷积**，记作$f*g$。 （也是$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$）
    - $f * g(n) = \sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$
- **性质**. 若f和g都是积性的，则$\sum_{d|n} f(d) g(\frac{n}{d})$是积性的。

证明：

$$(f * g)(ab) = \sum_{d|ab} f(d) g\left(\frac{ab}{d}\right) = \sum_{d_1|a} \sum_{d_2|b} f(d_1 d_2) g\left(\frac{ab}{d_1 d_2}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{d_1|a} f(d_1) g\left(\frac{a}{d_1}\right)}_{(f * g)(a)} \times \underbrace{\sum_{d_2|b} f(d_2) g\left(\frac{b}{d_2}\right)}_{(f * g)(b)}$$

引理1. f 积性 $\Leftrightarrow$ $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ 积性

假定 F是积性的，我们证明 f 是极性的。(另一个方向易证）

$f(1)=F(1)=1$。

假定$n=n_1 * n_2$。 n_1,n_2互质 且>1。要证明 $f(n_1n_2)=f(n_1)f(n_2)$。

- $F(n) = \sum_{d \mid n1n2} f(d) = \sum_{d1 \mid n1,\ d2|n2} f(d_1d_2)$ （d_1,d_2互质）
- 根据归纳假设，$f(d_1d_2)=f(d_1)f(d_2)$， 除了情况$d_1=n_1,d_2=n_2$还不确定。
- 因此， $F(n)= \sum_{d1 \mid n1} f(d_1) \cdot \sum_{d2 \mid n2} f(d_2) - f(n_1)f(n_2) + f(n_1n_2)$
- 因此， $F(n)= F(n_1)\ F(n_2) – f(n_1)f(n_2) + f(n_1n_2)= F(n_1)(n_2)$。
- 因此 $f(n_1n_2) = f(n_1)f(n_2)$。

问题

- 假定 f和F满足关系$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$。
- 如何 从 F 计算 f？

- 莫比乌斯反演!

莫比乌斯函数μ

- **递归定义**： $\sum_{d|n} \mu(d)=[n=1]$。 (1)
- **举例**：
  - $\mu(1)=1$
  - $\mu(2)=-1$
  - $\mu(3)=-1$
  - $\mu(4)=0$
  - ……

  - 注意μ是积性函数。

    [n=1]是积性函数（容易验证）。 即， $\sum_{d|n} \mu(d)$是个积性函数
    根据引理1， μ积性 ⇔ $\sum_{d|n} \mu(d)$ 积性. 因此， μ积性

莫比乌斯函数μ 的显性定义

- 只需要知道μ 在素数幂p^k的值。
- 不难推出， $\mu(p)= -1$。$\mu(p^k)= 0$ $(k>1)$。

- 从而 $\mu(n)=$ $(-1)^r$, 如果$n=p_1\ldots p_r$。
- 0, 如果n含平方因子。

莫比乌斯反演公式

- $F(n)=\sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n)=\sum_{d|n} \mu(n/d)\, F(d)$ 。
- 等价的说，$F=f*1 \Leftrightarrow f=\mu*F$
- **证明一**：
  - $F=f*1 \quad \Rightarrow \quad F*\mu=(f*1)*\mu=f*(1*\mu)=f*\varepsilon=f$。
    - （用到未证明的结合律，作业中验证）(容易验证$f*\varepsilon=f$)。
- **证明二**：
  - $\sum_{d|n} \mu(n/d)\, F(d) = \sum_{d|n} \mu(n/d) \sum_{d'|d} f(d')$
    $=\sum_{d'|n} f(d') \sum_{d''d'|n} \mu[(n/(d'd''))]$ // 利用$d = d'\, d''$
    $=\sum_{d'|n} f(d') \sum_{d''|(n/d')} \mu[(n/d')/d'']$
    $=\sum_{d'|n} f(d') \sum_{d|(n/d')} \mu[(n/d')/d] \quad =\sum_{d'|n} f(d')\, [n/d'=1] = f(n)$

例2 莫比乌斯反演求欧拉函数φ(n)

= 1~n中和 n互质的数的个数。

- **观察**：$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ （注意：这意味着 φ是积性函数）
- 证明：1~n可以分成若干类。与n的最大公约数为d的视作一类。
  - 给定n的因子d，有多少k属于1~n且gcd(k,n)=d？
  - 令k=k'd。有多少k'属于1~n/d且gcd(k', n/d)=1？　　答案为φ(n/d)。
  - 因此 $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$。
    - $\sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d,d'):dd'=n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d,d'):dd'=n} \varphi(d') = \sum_{d'|n} \varphi(d')$
- 根据莫比乌斯反演，$\varphi(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) = n \sum_{d|n} \frac{1}{d} \mu(d)$
- 式子展开，得到：$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$。

p_1~p_r代表n的所有素因子

- $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$
- $\varphi(n) = \sum_{d|n} \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}}\, \mu(\mathrm{d})$
- 令 id(n)=n，得到 $\varphi=\mathrm{id} * \mu$。这个式子一会要使用。

- 上面式子显示了最重要的两个积性函数φ与μ的联系

例3 求证 $\sum_{d|n}\mu(d)\sigma(\frac{n}{d}) = 1$

回顾：$\sigma(n)$为n的正约数个数。

思考1分钟

例3 求证 $\sum_{d|n}\mu(d)\sigma(\frac{n}{d}) = 1$

回顾：$\sigma(n)$为n的正约数个数。

证明:

令$h(n) = 1$为常数函数。

$\sigma(n) = \sum_{d|n} h(d) \Leftrightarrow h(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\sigma(\frac{n}{d})$。

例4 1~n中两两互素的数对的个数

- 定义R(n) $= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\gcd(i,j)=1]$。 即1~$n$中两两互质的数对 (i, j)个数。
- 求R(n)的简化表达式。

用$\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$ 取n =gcd(i,j)

- $R(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d|i,d|j}\mu(d)$

$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[d|i且d|j]$

$=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$

可以O(n)计算 ☺

例5 项链计数II——无循环节

$$T(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)k^{\frac{n}{d}}$$

原题：$a_1\sim a_n$属于$1\sim k$。有多少解？循环同构视作同一个解。
n个珠子，颜色属于$1\sim k$，项链个数$T(n)$=？

变种：n个珠子，颜色属于$1\sim k$，无循环节，项链个数$M(n)$=？

观察：$T(n)=\sum_{d\mid n}M(d)$。也就是说，$T=M*1$.

$\eta T=\varphi * k^n = (id*\mu)*k^n = id*(\mu * k^n)$.
$\eta T=\eta(M*1) = id*(\eta M)$
因此 $\eta M=\mu * k^n$。 即， $M=n^{-1}(\mu * k^n)$

这里用到消去律

$(id * (\eta M))\ (n)$
$=\sum_{d\mid n} d\cdot(\eta M)(n/d)$
$=\sum_{d\mid n} d\cdot n/d\ M(n/d)$
$=n\sum_{d\mid n} M(n/d)$
$=\eta\ (M*1)\ (n)$

$$M(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)k^{\frac{n}{d}}$$

ηT，ηM表示的是函数：$\eta T(i)=iT(i)$；$\eta M(i)=iM(i)$

例6 项链计数III——恰好k种颜色

- **问题**：恰好k种颜色，长度为n。项链个数 S_k=?
- 用T_k表示原问题（可使用颜色1~k，不需全用）的解数。*(固定n)*
- **观察** $T_k = \sum_{0\le j\le k}\binom{k}{j}S_j$。
- 用二项式反演可以解出
  - $S_k = \sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}T_j$。
- 可化简得：$S_k = \frac{k!}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\left\{{n/\mathrm{d} \atop k}\right\}$ （化简过程如下）

S_k的简化

- $T_j = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)j^{\frac{n}{d}}$ $\qquad T_k = \sum_{0\le j\le k}\binom{k}{j}S_j$
- $S_k = \sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}T_j$ （反演）

$$= \frac{1}{n}\sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{d|n}\varphi(d)j^{\frac{n}{d}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)\sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^{\frac{n}{d}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{d|n}\varphi(d)k!\left\{{n/\mathrm{d} \atop k}\right\}.$$

m个球放入 盒子1~k，要求每个盒子非空的方案数

$$k!\left\{{m \atop k}\right\} = \sum_{0\le j\le k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^m$$

方法二：参照double counting 那一讲的例题《项链计数》可得S_k公式。

总结

- 迪利克雷卷积：$\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$ ，记作$f*g$。
- **引理.** f 积性 ⇔ $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ 积性
- 莫比乌斯函数定义.：
  - $\sum_{d|n} \mu(d)=[n=1]$ ； 当n含平方因子，μ为0，否则$(-1)^{素因子个数}$。
- *莫比乌斯反演公式:*
  - $F(n)=\sum_{d|n} f(d)$ ⇔ $f(n)=\sum_{d|n} \mu(n/d)\,F(d)$ 。
  - 应用：*建立f,F联系*，$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$，然后利用F 求解f。

常用公式:

$$n=\sum_{d|n}\varphi(d)$$

$$\varphi=\mathrm{id}*\mu$$

例7 容斥原理——计算欧拉函数

- $\varphi(n)$ 的含义为$1\sim n$中与n互素的数的个数。
- 不妨n的不同质因子为$p_1, \dots, p_k$。令A_i为$1\sim n$中被p_i整除的数的集合。
- 则$\varphi(n) = n - \left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right|$ （全体-不互素的）

$$= n - (|A_1| + \ldots + |A_k| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \ldots)$$

$$= n - (\frac{n}{p_1} + \ldots + \frac{n}{p_k} - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} \ldots)$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

$$= n \sum_{d|n} \frac{1}{d} \mu(d)$$

这个例子反应出莫比乌斯函数 与 容斥原理 见的联系。

例8 容斥原理——计算有禁止的排列

- 设Q_n是$\{1,\ldots,n\}$的排列中不出现12,23,…,$(n\text{-}1)n$ 的排列数。
  - (也就是说，i后面不能是i+1)
- 求Q_n=?

- 设A_i表示 出现了$i(i+1)$的排列的集合。
- 观察
  - $|A_{i1}| = (n\text{-}1)!$, $|A_{i1} \cap A_{i2}| = (n\text{-}2)!$, …, $|A_{i1} \cap \ldots \cap A_{ik}| = (n\text{-}k)!$
- 利用容斥原理，即可求出 $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}$

阅读：单位根反演（ACM学生可自学）

$$[k \mid n] = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \omega_k^{in}$$

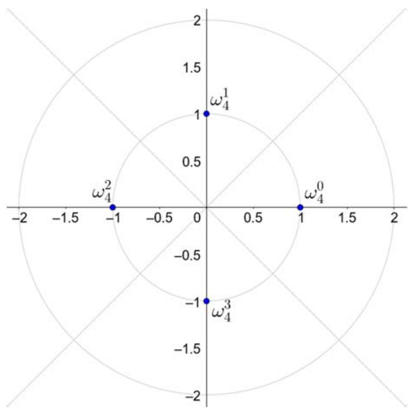
$$\omega_n = \exp(\frac{2\pi i}{n}) = \cos\frac{2\pi}{i} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

如果 $k \mid n$，那么 $\omega_k^n = (\omega_k^k)^{\frac{n}{k}} = 1$，从而 $\omega_k^{in} = 1$，于是右边和式的值等于 k，乘上 $\frac{1}{k}$ 后等于 1。

$$\omega_n^k = e^{\frac{k}{n}2\pi i}$$

如果 $k \nmid n$，那么 $\omega_k^n \neq 1$，此时使用等比数列求和公式求得右边等于 $\frac{\omega_k^{nk} - \omega_k^0}{\omega_k^n - 1} = 0$。

- https://www.cnblogs.com/Samsara-soul/p/16539186.html
- https://www.cnblogs.com/liuzongxin/p/16646024.html
- https://www.codetd.com/article/7584547



对比：[n=1] = sum $_{d|n}$ μ(d)