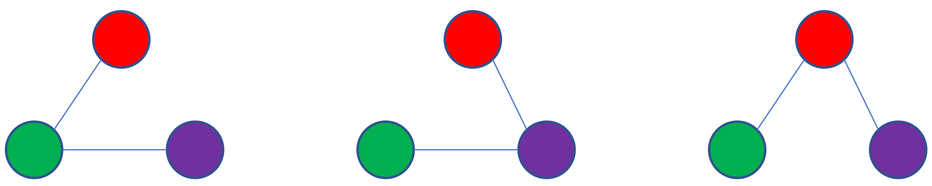
Lecture 3
——映射方法

中山大学 智能工程学院
金恺

Outline

- 一、Bijective proof（一一映射方法）
  - 组合计数三大常用方法:
    - 一一映射
    - Double counting（下周内容）
    - 容斥原理

- 二、Cayley formula。完全图生成树的个数。



例1 cycle partition （轮换分解）

- **问题：** 将1,...,n分解为干个cycle，有多少种方案？
- **举例**： n=3．(1)(2)(3)，(12)(3)，(13)(2)，(23)(1)，(123)，(132)
- **观察**
  - 一个cycle分解 **一一对应** 一个排列（在上节课最后讲过）
- 因此，答案为$n!$。
- **重要概念**：排列p所对应的 cycle分解叫做p的"**轮换分解**"。

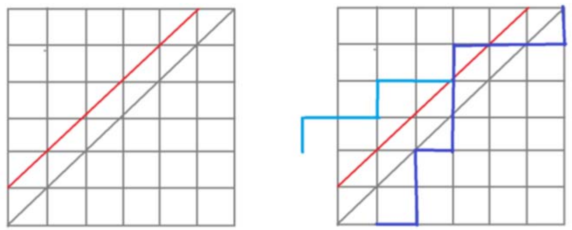
- **相关结论**：$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$。

例2 路径计数

- **问题：** 从(0,0)走到(m,n)，向上/向右，有多少条路径?
- **观察**
  - 每条路径 一一对应 多重集合$\{\underbrace{R,\dots,R}_{m个},\underbrace{U,\dots,U}_{n个}\}$的一个全排列。
  - 这种全排列的个数为$\binom{m+n}{m}$。
- 结论，路径数为$\binom{m+n}{m}$。

例3 只能走下三角的路径计数 Catalan数

- **问题描述：** 从(0,0)走到(n,n)，向上/向右，有多少条路径满足路径上未经过 $\{(x,y) \mid x<y\}$ 中的点。



从(0,0)到(n,n)的不到红线的路径数

=从(1,0)到(n,n)的不到红线的路径数

=从(1,0)到(n,n)路径数 - 从(1,0)到(n,n)的到过红线的路径数

=从(1,0)到(n,n)路径数 - 从(-1,2)到(n,n)的路径数 (见上图)

例4 CRT（中国剩余定理）

给定$m_1,\ldots,m_k$两两互素

给定 $0 \le a_i < m_i$。求 N（非负整数）满足$\begin{cases} N = a_1 (mod\ m_1) \\ \vdots \\ N = a_k (mod\ m_k) \end{cases}$

- 令$\mathbf{Z}_n$={0,⋯,n-1}（模n的剩余系）。记$m=m_1*\cdots*m_k$。
- $f(N)=(N \bmod m_1,\cdots, N \bmod m_k)$ 是$\mathbf{Z}_m \rightarrow \mathbf{Z}m_1*\cdots*\mathbf{Z}m_k$ 的一个函数。
- CRT定理说明了，可以从每个象$(a_1,\cdots,a_k)$找到它的一个原象N。
- 由于每个象都有原象，进一步得f是 一个**一一映射（有唯一原象）**
  - Why? 不会有多个原象，否则 原象数$>m_1*\cdots*m_k$，但是原象只有m个。

例5 奇数因子

- **问题**：自然数1~100 中有多少个含有奇数个因子？
- **观察**：
  - N的因子两两成对： k 映射到N/k（一一映射）
  - 唯独 $N=k^2$时，k无法和另一个一对。
  - 故，完全平方数有 奇数个因子。其他数有偶数个因子。
- **答案**：
  - 1~100中有10个完全平方数。答案为10.

- **其他解法：**
  - 自然数$N = p_1^{a_1} \ldots p_t^{a_t}$的因子个数为 $(a_1+1)\ldots(a_t+1)$。也能得到相同结论。

例6 数N拆分为k个非负数的和

- **问题描述**：正整数N分成写成**非负**整数$x_1,\cdots,x_k$的和，有多少方案。
  - 比如N=4, k=3的方案有15个。
    - 0+0+4　0+1+3　0+2+2　0+3+1　0+4+0
    - 1+0+3　1+1+2　1+2+1　1+3+0
    - 2+0+2　2+1+1　2+2+0
    - 3+0+1　3+1+0
    - 4+0+0
- **递推解法**:$F[n,k]= \text{sum}_{0<=j<=n} F[n-j,k-1]$.
- 有没有通项公式?

通项公式

- **观察**:
  - 每一种这种拆分 **对应** {N个**O**,k-1个**|**} 的一个排列。
    - 0+0+4 ⇔ ||OOOO
    - 1+2+1 ⇔ O|OO|O
    - 2+1+1 ⇔ OO|O|O
    - 3+1+0 ⇔ OOO|O|
  - k-1块隔板将N个O分成了k段，第i段的个数 对应x_i。
  - 这种排列的个数为$\binom{N+k-1}{k-1}$
- **答案**: $\binom{N+k-1}{k-1}$。

例7 数的“2的幂”分拆

- **题目描述：** 将数n(<=10^6)分为2的幂(例如3=1+1+1=1+2)，有多少种方案？（本题中拆分只与数的可重集合有关，而与顺序无关。例如1+2与2+1被认为是同一种方案。）求递推式。

$$f(n)=\begin{cases} f(n-1) & n\equiv 1 \pmod 2 \\ f(n-1)+f(n/2) & n\equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

WHY?含1的f(n-1)。不含1的f(n/2)。

例8 一个拆分恒等式的证明（思考4min）

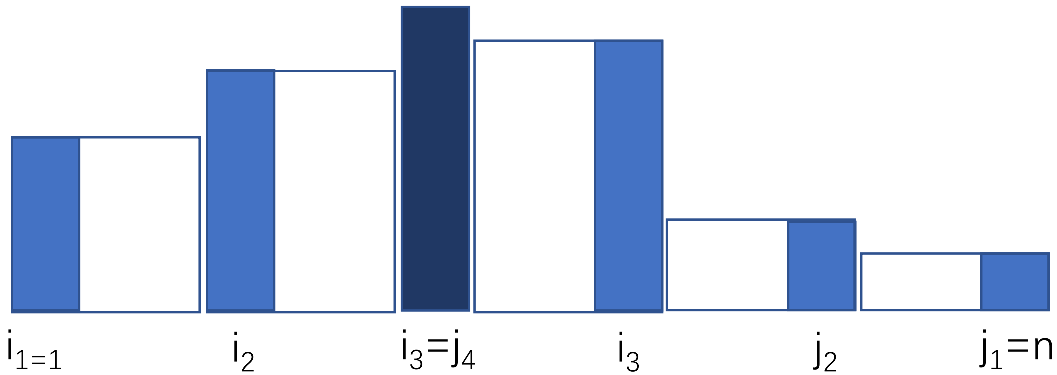
- **求证**：
  - N 的 各部分两两不等的分拆数= N 的各部分都是奇数的分拆数
- **举例：** $N=6$.
  - 异拆分： 6，1+5，2+4，1+2+3
  - 奇拆分： 1+1+1+1+1+1， 1+1+1+3， 1+5， 3+3
- **构建一一对应**。 （从一个奇拆分找一个对应的异拆分）
  - 假设 $(2k+1)$有a个，且 $a = b_1+b_2+\ldots+b_t$，$b_1<\ldots<b_t$均为2的幂)
  - 将这a个$(2k+1)$ 替换为 如下数字：$b_1(2k+1),\ldots,b_t(2k+1)$ （各不相同）
- **举例：**
  - **1+1+1+3 → 1+2+3，1+1+1+1+1+1+1→2+4，1+5→1+5，3+3→6.**

例9 一个难度大一点的例子。

- **题目描述：** 求有多少个1~n的排列 $(h_1,\ldots,h_n)$，
  它具有恰好 <u>A个左极大元素</u> 和 <u>恰好B个右极大元素</u>。
  - h_i是**左极大**的 $\Leftrightarrow$ $h_i = \max_{j \le i}\{h_j\}$；
  - h_i是**右极大**的 $\Leftrightarrow$ $h_i = \max_{j \ge i}\{h_j\}$。
- **举例：**
  - 对于排列 (<u>3</u>, 1, 2, <u>5</u>, 4, **<u>9</u>**, 7, <u>8</u>, <u>6</u>)。 A=3, B=3。
  - 对于排列 (<u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>4</u>, <u>5</u>, <u>6</u>, <u>7</u>, <u>8</u>, **9**)。 A=9, B=1。
- **举例**：
  - A=1, B=2, n=4. 符合条件的排列为：(<u>4</u>,1,2,<u>3</u>) (<u>4</u>,2,1,<u>3</u>)

观察

- 假定左极大的位置 为 $i_1<i_2<\cdots<i_A$，右极大的位置为$j_1>j_2>\cdots>j_B$



- i_k~i_{k+1}-1这一段最高的位置在i_k 。这些位置构成“**左起第k段**”。
- 若左起第k段要求填入的数字集合为L_k，该段有 $(|L_k|-1)!$ 种填法。
    - 注意，**此段每一种填法对应了 L_k的一个 圆排列!**
- **右边第k段有类似结果。**

统计

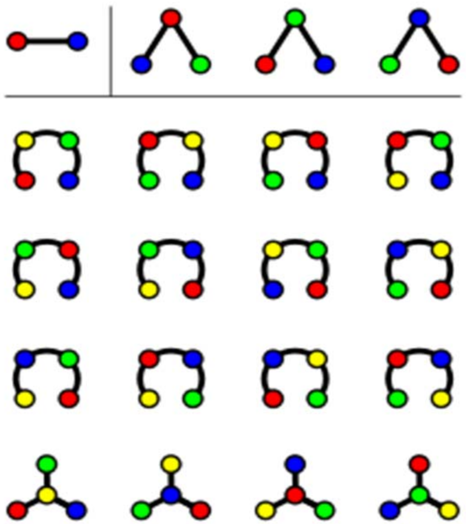
- 每一个满足条件的排列可以这样来产生:
  - 先将1~n-1分为 (A-1) + (B-1) 个cycles。
  - 再选其中的 A-1个cycles放到 n 左边，B-1个cycle放到 n 右边。
    - 左边的cycle 需要按最大元 递增顺序排列。
    - 右边的cycle 需要按最大元 递减顺序排列。
- 这样产生的每个排列都是满足条件的。不重复，不遗漏。

- 因此答案为$\begin{bmatrix} n-1 \\ A+B-2 \end{bmatrix}\binom{A+B-2}{A-1}$

一个合法序列 一一对应了一对 (α,β)，其中
α是 (A+B-2)-cycle partition of {1,...n-1},
β是 (A+B-2) 选 A-1 的一种选法。

例10 Cayley formula （凯莱公式）

- 给定一个n个点的完全图，求它的生成树的个数 S_n。
- n个有区分的节点，能连成多少种不同的树

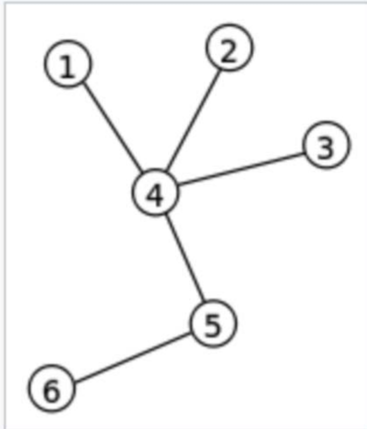


Cayley formula: $S_n=n^{n-2}$.

证明框架：一个生成树T 对应
一个整数序列 $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_{n-2})$，$1\le a_i\le n$.

树→序列 （Prüfer 序列）

- T→***a***：在第*i*步，删除最小标号的叶子节点v，并且将 序列中的a_i设置为v的邻居节点的标号。
- **举例**：见右图。该树对应的序列为(4,4,4,5)。
- **性质**：若树中某点*i*的度数为d_i，则它的Prufer序列中恰好有d_i-1个*i* （总共$\Sigma(d_i\text{-}1)=n\text{-}2$个数).
- 证明。
  - 课上板书证明。
  - （归纳法。最小标号点v之外部分为T’）



A labeled tree with Prüfer sequence {4,4,4,5}.

这种变换是一一映射吗？

- 令G表示n个点的完全图。
- 令W表示**G**的所有生成树的集合。
- 令D表示所有长为n-2、取值1~n的序列的集合。
- 用 f(T) 表示 T 的 Prüfer序列（见上页的定义）
- f 是 W到D的 一一映射吗？如果是，那么$|W| = n^{n-2}$，公式得证。

- 如何证明 f 是一一映射呢？
  - 需要证明，对于D中每一个序列$\boldsymbol{a}$，存在唯一的T，它的Prüfer序列为a。

给定序列$\boldsymbol{a}$，如何找（所有）T使得T的Prüfer序列为a?

举例：$\boldsymbol{a}$=(4,4,4,5)。可知T 中 1~6的度数分别为1,1,1,4,2,1。

根据 f 的定义，a_1=4是1的邻居。也就是说(1,4)必然属于T。
那么，删除顶点1后，T中2~6的度数分别为1,1,3,2,1。

根据 f 的定义，a_2=4是2的邻居。也就是说(2,4)必然属于T。
那么，删除顶点2后，T中3~6的度数分别为1,2,2,1。

根据 f 的定义，a_3=4是3的邻居。也就是说(3,4)必然属于T。
那么，删除顶点3后，T中4~6的度数分别为1,2,1。

根据 f 的定义，a_4=5是4的邻居。也就是说(4,5)必然属于T。
那么，删除顶点4后，T中5~6的度数分别为1,1。

最后，我们知道T中必然还有一条边(5,6)。因为他两剩余度数为1.

序列→树。

- 首先我们可以根据***a***，算出T中每个节点的度数。

- 让i从1到n-2。找到最小的度为1的节点v, 连接 (v, $a[i]$)，并且将v和$a[i]$的“剩余度数”减1。如此得到n-2条边。

- 最终剩下两个度为1的节点u, v。 增加第n-1条边(u,v)。

根据上面的**推理过程**可以看到，对任何序列a属于D#，
a在f下的原象(preimage)是存在且唯一的。所以f是双射。
(T=$f^{-1}(a)$)可以通过n-1步逐渐确定下来）。

练习(5min)

- 请求出 a=(1,1,3,3,5,5)所对应的 生成树T。然后验算 $f(T)$=a。

Cayley公式的2个更简单的证明将在第4讲第7讲给出。

- Cayley's formula can be strengthened to prove the following claim:

  The number of spanning trees in a complete graph K_n with a degree d_i specified for each vertex i is equal to the multinomial coefficient

$$\binom{n-2}{d_1-1,\, d_2-1,\, \ldots,\, d_n-1} = \frac{(n-2)!}{(d_1-1)!(d_2-1)!\cdots(d_n-1)!}.$$

  The proof follows by observing that in the Prüfer sequence number i appears exactly (d_i-1) times.

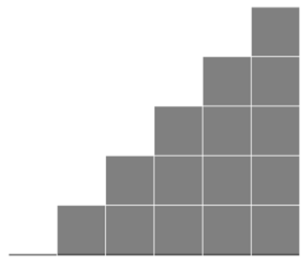
课后练习

- 1. 求出排列 (2,4,8,1,5,7,6,3) 的轮换分解。 (2min)

- 2. 有多少个1~8的排列，它的轮换分解 是$1^1 2^2 3^1$-类型的。
  - $1^1 2^2 3^1$ 表示：分解中有1个长为1的、2个长为2、1个长为3的cycle。

- 3. 棋盘St_n，有n列，高度为0~n-1（如右图）
  - 要摆放n-k个（互不攻击）的车，方案数=$\left\{ {n \atop k} \right\}$.

图 8: St_6



拓展阅读

设n是正整数。对n的一个整数拆分π，用t(π)表示π使用了多少个不同的数。比如说1+1+1+1中只有1个不同的数。1+1+2中有2个不同的数。1+3中有2个。4中有1个，2+2有1个。求证所有拆分方案的t值之和等于所有拆分中1 出现的总次数。（举例n=4时t之和与1总次数同为7） 提示：一一映射。

解答：http://www.matrix67.com/blog/archives/6348

拓展阅读

- https://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem
  Franklin's bijective proof

Kirchhoff's matrix tree theorem (ACM学生要掌握)

- 无向图G的生成树个数=*any* cofactor of the Laplacian matrix of G。
- https://en.wikipedia.org/wiki/Kirchhoff%27s_theorem

Cayley 公式
只是Kirchoff's定理
的一个特殊情况。

An example using the matrix-tree theorem [edit]

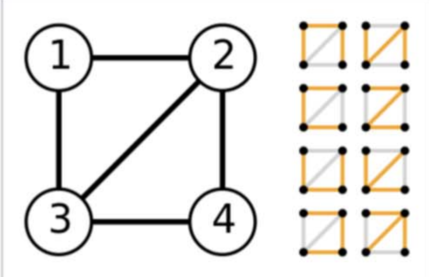
First, construct the Laplacian matrix Q for the example diamond graph G (see image on the right):

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Next, construct a matrix Q^* by deleting any row and any column from Q. For example, deleting row 1 and column 1 yields

$$Q^* = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Finally, take the determinant of Q^* to obtain $t(G)$, which is 8 for the diamond graph. (Notice $t(G)$ is the *(1,1)*-cofactor of Q in this example.)



The Matrix-Tree Theorem can be used to compute the number of labeled spanning trees of this graph.