Lecture 7
生成函数

中山大学 智能工程学院
金恺

Outline

- 一、生成函数：介绍与定义、入门范例
- 二、常用运算法则
- 三、应用1：生成函数求解递推式
- 四、应用2：利用概率生成函数求解随机变量的期望、方差等。

一、生成函数：介绍与定义、入门范例

- 生成函数，也叫母函数。英文叫做。Generating Function。
- 把**离散数列**与**形式幂级数**对应起来。
- 是组合数学中的一种重要工具。有一系列精妙的使用方法。

- 可分为三类：
  - 普通生成函数 （本周学习）
  - 指数型生成函数 （下周学习）
  - 迪利克雷生成函数

普通生成函数的定义

- 对有限数列 $\{a_i\}(i=0,1,\ldots N)$，定义它的生成函数为
$$\sum_{i=0}^{N} a_i x^i。$$
- 对于无限数列 $\{a_i\}(i=0,1,\ldots)$，定义它的生成函数为
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i。$$
- 举例
  - $(2,3,0,4) \leftrightarrow 2+3x+4x^3.$ $(1,1,\ldots) \leftrightarrow 1/(1-x).$
- 生成函数是形式幂级数，不带入 x 的具体值，故不考虑敛散性。

【例1】砝码称重计数

- 假定有四个砝码，重量分别为1，2，3，5克。
- 用g_n表示称出n克的方案数（比如g_5=2)。如何求出整个序列g_0~g_{11}?
- 设$G(x)=g_0+g_1x+\ldots+g_{11}x^{11}$ 为 $(g_0, g_1,\ldots, g_{11})$的生成函数。
- **观察** $G(x)= (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5)$。

右式中，展开后的16项，分别对应 16种选砝码的方案（项的次数为总重）。
例：$1*1*1*x^5=x^5$，$1*x^2*x^3*1= x^5$，对应2个总重为5的方案{5}, {2,3}.
因此 右式中x^n的系数=总重为n的方案数，即g_n。故右式 = G(x)。

【例2】取球方案计数

- m种颜色的球，每种颜色的各1个。取出n个球有多少方案？
- m种颜色的球，每种颜色的各**无穷**多个。取出n个球有多少方案？

- 第一个问题方案数的母函数

$$G(x) = (1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n$$

- 第二个问题方案数的母函数

此步骤需广义二项式定理

$$G(x) = (1+x+x^2+\cdots)^m = (1-x)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m-1} x^n.$$

答案与其他组合方法去计算的结果是一致的！

广义二项式定理(*)

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

其中，n为正整数，组合数

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

事实上牛顿还将二项式定理推广到了幂为一般实数的情形，即

$$(x+y)^\alpha=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^{\alpha-k}y^k$$

其中，α可以取任意实数，而

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$
$$=\frac{(\alpha)_k}{k!}$$

【例3】装水果问题

- 装入n个水果满足下列条件，方案数=?
  - 苹果个数 必须为偶数。
  - 香蕉个数 必须为5的倍数。
  - 最多选4个橘子。
  - 最多选1个梨子。

$$A(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \frac{1}{1-x^2}$$

$$B(x) = 1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + \cdots = \frac{1}{1-x^5}$$

$$O(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

$$P(x) = 1 + x$$

$$\begin{aligned} A(x)B(x)O(x)P(x) &= \frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5}\frac{1-x^5}{1-x}(1+x) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \quad = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \end{aligned}$$

可以看到借助GF
简化了计算！

【例4】一个拆分问题（编程计算）

- **问题描述**：把n分成若干个2,3,4之和。拆分只与分出的数的可重集合有关，而与顺序无关(即，2+2+3，2+3+2是同一个拆分）。求拆分数。
  - **举例**：输入n=10，输出5　(2+2+2+2+2=2+2+2+4=2+4+4=3+3+2+2=3+3+4)
- **解答**：$G(x)= g_0 + g_1x + g_2x^2+ g_3x^3+\cdots$

$$=(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^4+x^8+\cdots)$$

$$=((1-x^2)(1-x^3)(1-x^4))^{-1}$$

- 记$H(X)= 1/G(X)= (1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)= 1-x^2-x^3-x^4+x^5+x^6+x^7-x^9$
- 为了方便，不妨设$H(X) =h_0+h_1x+h_2x^2+\cdots+h_9x^9$，其中$h_0=1$。

- 利用G(X)H(X)=1,可以知道
  - $g_0 = 1$
  - $g_1h_0 + g_0h_1=0$
  - $g_2h_0 + g_1h_1 + g_0h_2=0$
  - …
  - $g_9h_0 + g_8h_1 + \cdots + g_1h_8 + g_0h_9 = 0$
  - …
- 可依次解出$g_1 \sim g_8$。对于$n \geq 9$。有表达式:
  - $g_n+g_{n-1}h_1+\cdots.+g_{n-9}h_9 = 0$
  - 即$g_N=-h_1g_{n-1}-\cdots-h_9g_{N-9}$.
- 用这样的递推式，改写成矩阵形式。便可快速计算g_n.

Outline

- 一、生成函数：介绍与定义、入门范例
- 二、常用运算法则
- 三、应用1：生成函数求解递推式
- 四、应用2：利用概率生成函数求解随机变量的期望、方差等。

二、常用运算法则

- **Scaling rule**

$$< f_0\ f_1\ f_2 .... > \Leftrightarrow F(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} < cf_0\ cf_1\ cf_2 .... > \Leftrightarrow F_c(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} cf_n \cdot x^n \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n \\ &= cF(x) \end{aligned}$$

- **Addition rule**

$$< f_0\ f_1\ f_2 .... > \Leftrightarrow F(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$$

$$< g_0\ g_1\ g_2 .... > \Leftrightarrow G(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} g_n \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} < f_0 + g_0\ f_1 + g_1\ f_2 + g_2 .... > \Leftrightarrow F_{f+g}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + g_n) \cdot x^n \\ &= F(x) + G(x) \end{aligned}$$

- **Right_shift rule**

if $< f_0\ f_1\ f_2 .... > \Leftrightarrow F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$,

then

$$\begin{aligned} < 0, 0, \ldots, 0, f_0\ f_1\ f_2 .... > \Leftrightarrow F_0(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} \cdot x^n \\ &= x^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n \\ &= x^k F(x) \end{aligned}$$

- **Derivative rule**

$$< f_0\ f_1\ f_2 .... > \Leftrightarrow F(x) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n$$

$$\begin{aligned} < f_1\ 2f_2\ 3f_3 .... > \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_n \cdot x^{n-1} &\\ = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot x^n &\\ = F^{'}(x) & \end{aligned}$$

Rule 5 (Product Rule). *If*

$$\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x),$$
$$\langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle \longleftrightarrow B(x),$$

then $$\langle c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots \rangle \longleftrightarrow A(x) \cdot B(x),$$

where $$c_n ::= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0.$$

The sequence <c0, c1, c2, . . .> is the convolution of <a0, a1, a2, . . .> and <b0, b1, b2, . . .>.

	b_0x^0	b_1x^1	b_2x^2	b_3x^3	$\ldots$
a_0x^0	$a_0b_0x^0$	$a_0b_1x^1$	$a_0b_2x^2$	$a_0b_3x^3$	$\ldots$
a_1x^1	$a_1b_0x^1$	$a_1b_1x^2$	$a_1b_2x^3$	$\ldots$	
a_2x^2	$a_2b_0x^2$	$a_2b_1x^3$	$\ldots$		
a_3x^3	$a_3b_0x^3$	$\ldots$			
$\vdots$	$\ldots$				

【例5】 $(0^2,1^2,2^2,3^2,\cdots)$对应的母函数?

$$\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle \longleftrightarrow \frac{1}{1-x}$$

$$\langle 1,2,3,4,\ldots\rangle \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\langle 0,1,2,3,\ldots\rangle \longleftrightarrow x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\langle 1,4,9,16,\ldots\rangle \longleftrightarrow \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\langle 0,1,4,9,\ldots\rangle \longleftrightarrow x\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Outline

- 一、生成函数：介绍与定义、入门范例
- 二、常用运算法则
- 三、应用1：生成函数求解递推式
- 四、应用2：利用概率生成函数求解随机变量的期望、方差等。

三、应用1：求解递推式（的通项）

- 三个例子
  - 1、汉诺塔序列。

    $$f_n = 2f_{n-1} + 1;\ f_0 = 0.$$

  - 2、Fibonacci序列。

    $$f_n = f_{n-1} + f_{n-2};\ f_0 = 0, f_1 = 1.$$

  - 3、Catalan数序列。

    $$f_n = \sum_{k=1}^{n} f_{n-k} f_{k-1};\ f_0 = 1.$$

- 一般性理论
  - 生成函数解线性常系数齐次递推关系。

【例6】汉诺塔序列

- $f_n = 2f_{n-1} + 1;\ f_0 = 0.$
- 令$F(x) = \ f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \ldots$
- 根据递推式:
  - $f_0 = \ 0$
  - $f_1 x \ = \ (2f_0 + 1)x$
  - $f_2 x^2 \ = \ (2f_1 + 1)x^2$
  - $\cdots$
- $F(x) = 2xF(x) + x(1 + x + x^2 + \cdots)$
- $F(x) = 2xF(x) + x/(1 - x)$
- $F(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$
- $F(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$
- $F(x) = \left(1 + 2x + 2^2x^2 + \cdots\right)$

  $-\left(1 + x + x^2 + \cdots\right)$

于是 $F_n = 2^n - 1.$

【例7】Fibonacci序列

- $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$; $f_0 = 0, f_1 = 1$.
- 令$F(x) = \ f_0 + f_1 x + f_2 x^2 \ldots$
- 根据递推式:
  - $f_0 = \ 0$
  - $f_1 x = x$
  - $f_2 x^2 \ = \ (f_1 + f_0)x^2$
  - $f_3 x^3 \ = \ (f_2 + f_1)x^3$
  - $\cdots$
- $F(x) = xF(x) + x^2 F(x) + x$
- $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- $F(x) = \frac{A}{1-ax} + \frac{B}{1-bx}$
- 解得:
- $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$,$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$
- $F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(Aa^n + Bb^n)x^n$
- 故, $f_n = Aa^n + Bb^n$
- $= \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)/\sqrt{5}$

【例8】Catalan序列

$$f_n=\sum_{k=1}^{n} f_{n-k}f_{k-1};\ f_0=1.$$

$$\begin{aligned}
1&: f(0)=1\\
x&: f(1)=f(0)\cdot f(0)\\
x^2&: f(2)=f(0)\cdot f(1)+f(1)\cdot f(0)\\
x^3&: f(3)=f(0)\cdot f(2)+f(1)\cdot f(1)+f(2)\cdot f(0)\\
+)&\ \vdots
\end{aligned}$$

进行如上形式化的演算，冒号左边分别乘以等号的两边再相加，的 1 移到左边，对于第一列提出一个 $xf(0)$,剩下的是 $F(x)$ ，

$$\begin{aligned}
F(x)-1&=F(x)(xf(0)+x^2f(1)+\dots)\\
&=F(x)\cdot x\cdot(f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\dots)\\
&=xF^2(x)
\end{aligned}$$

- $xF(x)^2-F(x)+1=0$
- $F(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. （另一个$\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$不满足F(0)=1）
- 由广义二项式定理 即Newton二项式定理
- $F(x)=\frac{1}{2x}\left(1-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4x)^k\right)$
- 可解得
  - $f_n=\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-1)^n4^{n+1}$。
- 进一步可化简为 $f_n=\binom{2n}{n}/(n+1)$。
  - （最后这步在作业中验证）

一般性结论（简介）

下面介绍通过**生成函数**解**线性常系数齐次递推关系**的理论

定义： $a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots c_k a_{n-k} = 0$

$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1}$

若 $c_1, c_2, \ldots, c_k; d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$ 均为常数，

则上式称为 k 阶的**线性常系数齐次递推关系**

设序列 a_n 的生成函数为 $G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

由递推关系有

$x^k(a_k + c_1 a_{k-1} + \ldots + c_k a_0) = 0$

$x^{k+1}(a_{k+1} + c_1 a_k + \ldots + c_k a_1) = 0$

$\vdots$

等式两边相加，得

$G(x) - \sum_{h=0}^{k-1} a_h x^h + c_1 x[G(x) - \sum_{h=0}^{k-2} a_h x^h] + \ldots + c_k x^k G(x) = 0$

移项整理

$(1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k)G(x) = \sum_{h=0}^{k-1}[c_h x^h(\sum_{j=0}^{k-1-h} a_j x^j)]$

令 $P(x) = \sum_{h=0}^{k-1}[c_h x^h(\sum_{j=0}^{k-1-h} a_j x^j)]$

$R(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_k x^k$

于是 $G(x) = \frac{P(x)}{R(x)}$

学习网址：
https://zhuanlan.zhihu.com/p/345811471 (概要)
《具体数学 第二版》7.3 SOLVING RECURRENCES

Outline

- 一、生成函数：介绍与定义、入门范例
- 二、常用运算法则
- 三、应用1：生成函数求解递推式
- 四、应用2：利用概率生成函数求解随机变量的期望、方差等。

三、应用2：概率生成函数 & 求解 离散型随机变量的期望、方差等。

- 假设X是一个离散型随机变量。取值为非负数。
  - $Pr(X=0)=p_0$，$Pr(X=1)$的概率为p_1,….
- $F(x)=p_0+p_1x+\cdots.+p_ix^i+\cdots$ 叫做X的**概率生成函数**。
  Probability Generating Function
- $F'(x)=p_1+2p_2x+\cdots i\,p_i\,x^{i-1}+\cdots$
- 所以 $E(X)=p_1+2p_2+\cdots+ip_i=F'(1)$。
- $F''(x)=2*1\,p_2+\cdots i(i-1)\,p_i\,x^{i-2}+$
- $F''(1)=2*1\,p_2+\cdots i(i-1)pi+\cdots.$
- $F''(1)+F'(1)=1^2\,p^1+2^2p_2+\cdots+i^2p_i=E(X^2)$
- 所以$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=F''(1)+F'(1)-F'(1)^2$

【例9】 Cards（编程计算题）

- *有*m张扑克牌，其中有1个大王。
  随机抽n次（抽完放回牌堆）。设T表示 抽中大王的总次数。
  如何计算T^k的期望。 （$1 \le k,n,m \le 5000$)
- 解法：
  - 令p_t表示的“共抽到t个王”的概率。也就是Pr(T=t)。
  - 令$g(x) = p_0 + \ldots + p_n x^n$。 这个是 随机变量T 的概率生成函数。
  - **观察**：$g(x) = [f(x)]^n$，*其中*$f(x) = \frac{1}{m} x + \frac{m-1}{m}$。
    - 共抽n次，第i次抽时有$1/m$概率抽中。
    - 可推出：$f(x)^n$的展开式 中 x^t的系数恰好 p_t。 因此右式=左式。

- *目标:* $E(T^k) = \Sigma_i i^k Pr(T=i) = \Sigma_{i\geq 0} i^k p_i$。
- 转化为下阶乘:
  - $\sum_{i\geq 0} i^k p_i = \sum_{i\geq 0} \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} i^{\underline{j}} p_i = \sum_{j=1}^{k} \left\{ {k \atop j} \right\} \sum_{i\geq 0} i^{\underline{j}} p_i$

回顾普通次幂转化为下阶乘幂。

第二类stirling数可以预处理

- 容易看出 $\Sigma_i\ i^{\underline{j}}\ p_i = g^{(j)}(1)$（作业中验证此式子）

- $g^{(j)}(1)$*的计算:*
  - *利用* $g(x) = f(x)^n$ $f(x) = \frac{1}{m}x + \frac{m-1}{m}$。
  - g的1次导: $(n/m) f(x)^{n-1}$。
  - g的2次导: $n(n-1)/m^2 f(x)^{n-2}$。
  - g的j次导: $n^{\underline{j}} / m^j f(x)^{n-j}$。
  - 因此: 当$j \leq n$时, $g^{(j)}(1) = n^{\underline{j}} / m^j$. 否则为0。