3.3

1. $\begin{bmatrix} 2&4&6&4&b_1\\ 2&5&7&6&b_2\\ 2&3&5&2&b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&4&6&4&b_1\\ 0&1&1&2&b_2-b_1\\ 0&-1&-1&-2&b_3-b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&4&6&4&b_1\\ 0&1&1&2&b_2-b_1\\ 0&0&0&0&b_3-2b_1+b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2&4&6&4&4\\ 0&1&1&2&-1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1&2&3&2&2\\ 0&1&1&2&-1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&0&1&-2&4\\ 0&1&1&2&-1\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$ 列空间 $(2,2,2)$ $(4,5,7)$

零空间包括由 $(-1,-1,1,0)$ 和 $(2,-2,0,1)$

$x_p=(4,-1)$

所有解 $x = x_p + x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix}2\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1&3&3\\ 2&6&9\\ -1&-3&3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1&3&3&1\\ 2&6&9&5\\ -1&-3&3&5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&3&3&1\\ 0&0&3&3\\ 0&0&6&6 \end{bmatrix}$ $x_p=(-2,0,1)$

$x = x_p + x_3 \begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix} = (-2,0,1) + x_3\begin{bmatrix}-3\\1\\0\end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1&2&-2&b_1\\ 2&5&-4&b_2\\ 4&9&-8&b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&2&-2&b_1\\ 0&1&0&b_2-2b_1\\ 0&0&0&b_3-2b_1-b_2 \end{bmatrix}$ $b_3-2b_1-b_2=0$

$x_p=(5b_1-2b_1, b_2-2b_1, 0)$ $x = \begin{bmatrix}5b_1-2b_1\\ b_2-2b_1\\ 0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1&3&1&b_1\\ 3&8&2&b_2\\ 2&4&0&b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&3&1&b_1\\ 0&-1&-1&b_2-3b_1\\ 0&-2&-2&b_3-2b_1 \end{bmatrix}$ $b_3-2b_1=2(b_2-3b_1)$

$4b_1+b_3-2b_2=0$ 在A列空间中

$r_3-2r_2+4r_1$

11. $[x\ x\ x]$ 者解为 $\begin{bmatrix}2\\4\\0\end{bmatrix}$，而A仅为 1×3 无法在3维. 同理 x_n

13. (a) x_n 和 x_p 组合 (c) $\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\sqrt{2}$ $x_p\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$ 2

(b) x_p 可以有多个 (d) x_n 为原点

15. 0；$c_3\neq0$；都有可能

16. 3；行；不；R^3中；$A=\begin{bmatrix}1&1&1&2&5\\1&1&0&3&6\\1&0&0&4&7\end{bmatrix}$

18. (a) $\begin{bmatrix} 1&4&0\\ 2&11&5\\ -1&2&10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&4&0\\ 0&3&5\\ 0&6&10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&4&0\\ 0&3&5\\ 0&0&0 \end{bmatrix}$ Rank=2

$\begin{bmatrix} 1&0&0\\ 4&3&0\\ 0&5&0 \end{bmatrix}$ Rank=2

(b) $\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&1&q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&q-2\end{bmatrix}$ $q\neq 2$, rank $=3$; $q=2$, rank $=2$ A^T同

21.(a) $x+y+z=4$ $\begin{bmatrix}1&1&1&4\end{bmatrix}$

$x_p=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$ $x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

(b) $x+y+z=4$
$x-y+z=4$ $\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&-1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&-2&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&4\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

$x_p=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}$ $x=\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

22. $Ax=b$, $Ax=B$ if $Ax=b$ has many solutions

$Ax_1=b$ $Ax_2=b$ $A(x_1-x_2)=0$ 即 $Ax=B$ 不能再唯一 $A(x+x_1-x_2)=B$

可解. B的维数大于A

25.(a) b无解 $r<m$ 或 $r<n$

(b) $r=m$, $r<n$

(c) $r<m$, $r=n$

(d) $m=n=r$

27. A为三角矩阵 $R=\mathrm{rref}(A)=I$. 主元存在,对角线不为0

29. $[R\ d]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$, $x_n=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$[R\ d]=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&0&1&2\\0&0&0&5\end{bmatrix}$ $x_n=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ 无解. ~~1+2~~ $5\neq 0$

30. $\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\1&3&2&0&5\\2&0&4&9&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&3&0&-3&3\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-4\\0&3&0&0&9\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0&-4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$

$x_p=\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\2\end{bmatrix}$ $x_n=x_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$