2024.3.11

1. $BA=3$ $[5\times5]$

$AB=5$ $[3\times3]$

$ABD=15$ $[3\times1]$

DC 不允许

$A(B+C)$ 不允许

2. (a) $A\times B$ 第二列

(b) A 第一行 $\times B$

(c) A 三行 $\times B$ 五列

(d) ~~(d) 行×D~~

CD 第一行 $\times$ 五第一列

3. $AB+AC=\begin{bmatrix}0&7\\0&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1\\6&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&8\\6&9\end{bmatrix}$

$A(B+C)=\begin{bmatrix}3&8\\6&9\end{bmatrix}$

4. $BC=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $A(BC)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}0&7\\0&7\end{bmatrix}$ $(AB)C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

$(AB)C=A(BC)$

5. $A\times A=\begin{bmatrix}1&2b\\0&1\end{bmatrix}$ $A^3=\begin{bmatrix}1&3b\\0&1\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}$ $A^3=\begin{bmatrix}2^3&2^3\\0&0\end{bmatrix}$

同理 $A^5=\begin{bmatrix}1&5b\\0&1\end{bmatrix}$ $A^5=\begin{bmatrix}2^5&2^5\\0&0\end{bmatrix}$

$A^n=\begin{bmatrix}1&nb\\0&1\end{bmatrix}$ $A^n=\begin{bmatrix}2^n&2^n\\0&0\end{bmatrix}$

6. $(A+B)=\begin{bmatrix}2&2\\3&0\end{bmatrix}$ $(A+B)^2=\begin{bmatrix}10&4\\6&6\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}$, $B^2=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}7&0\\6&0\end{bmatrix}$ $A^2+B^2+2AB=\begin{bmatrix}16&2\\8&0\\3&0\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}$

$A^2+AB+BA+B^2=\begin{bmatrix}10&4\\6&6\end{bmatrix}=(A+B)^2$

7. $AF=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}$

$E(AF)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a+b\\c&c+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&a+b\\a+c&a+b+c+d\end{bmatrix}$

(b) $(EA)F=E(AF)$

乘法组合

10. $FA=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\c&d\end{bmatrix}$

$E(FA)=\begin{bmatrix}a+c&b+d\\a+2c&b+2d\end{bmatrix}$

$E(FA)\neq F(EA)$ 不可交换乘法

11. 列向量计算时在右侧

行向量而在左侧

$(EA)F=E(AF)$ 从而相同

乘法组合

13. $AB=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=BA=\begin{bmatrix}a&b\\0&0\end{bmatrix}$

$b=0=c$

$AC=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=CA=\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}$

$\therefore a=d$

$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

且 $AB=BA$, $AC=CA$ $\therefore A=kI$

15. (a) 对

(b) 不对, $A(a\times b)$, $B(b\times a)$

(c) 对

(d) 不对 $B=0$

17. (a) $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

(b) $[3\ -2]\begin{bmatrix}1&0&4\\1&0&6\end{bmatrix}=[1\ 0\ 0]$

(c) $\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}$ $[3\ -2]\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=[0\ 1]$

(d) $A^3\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1\\3&-2\end{bmatrix}=[3\ -2]$

18. (a) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&2/3\\3&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$

19. (a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

(c) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

(d) $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$

$\rightarrow A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

21. $A^2=\begin{bmatrix}0&0&4&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}0&0&0&8\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

$A^4=0$

$AV=\begin{bmatrix}0\\2y\\2z\\2t\end{bmatrix}$

$A_V=\begin{bmatrix}2y\\2z\\2t\\0\end{bmatrix}$

$A^2V=\begin{bmatrix}4z\\4t\\0\\0\end{bmatrix}$ $A^3V=\begin{bmatrix}8t\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$A^4V=0$

23. (a) $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A^2=0$

(b) $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ $A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A^3=0$

25. $A=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}[1\ 0\ 0]+\begin{bmatrix}b\\e\\h\end{bmatrix}[0\ 1\ 0]+\begin{bmatrix}c\\f\\i\end{bmatrix}[0\ 0\ 1]$

$=A$

27. (1) 点积

$$\begin{bmatrix}0&0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\0\\0\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}0&0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\x\\0\end{bmatrix}=0$$

(2) 矩阵

$$\begin{bmatrix}x\\x\\5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&x&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&x_1&x_1\\0&x_2&x_2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\x\\x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&x_1\\0&0&x_2\\0&0&x_3\end{bmatrix}$$

29. $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $E_{31}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$

$$E=E_{31}E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}$$

$$EA=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

30. $$EA=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\-2&0&1\\8&5&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&1&3\end{bmatrix}$$

$$D-\frac{cb}{a}=\begin{bmatrix}1&1\\1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\-c/a&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\0&D-cb/a\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}-2\\8\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}0&1\\5&3\end{bmatrix},\ a=2,\ b=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}$$

31. $$\begin{bmatrix}A&-B\\B&A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Ax-By\\Bx+Ay\end{bmatrix}$$

32. $AX=A[X_1\ X_2\ X_3]$

$=AX_1+AX_2+AX_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$[AX_1\ AX_2\ AX_3]$

33. $A[X_1\ X_2\ X_3]=I$

$$A\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$Ax=b\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}$$

~~$x=bA^{-1}=b[x_1\ x_2\ x_3]$~~

~~$=3x_1+5x_2+8x_3$~~

~~$=\begin{bmatrix}3\\3\\16\end{bmatrix}$~~

$$x=A^{-1}b=[x_1\ x_2\ x_3]\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}$$

$$=3x_1+5x_2+8x_3=\begin{bmatrix}3\\8\\16\end{bmatrix}$$

1. $A^{-1}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}0&-3\\-4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&0\end{bmatrix}$ $B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&0\\-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $C^{-1}=\begin{bmatrix}7&-4\\-5&3\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}1&2\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $(x+2y=1)\times 3 = 3x+6y=3$

$3x+6y=0$

5. ~~$U^2=I$ $U=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ $U^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=U$~~

$U=\begin{bmatrix}1&a\\0&-1\end{bmatrix}$ $U^{-1}=\begin{bmatrix}1&a\\0&-1\end{bmatrix}$ $U^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

6. (a) $AA^{-1}=I$ $AB=AC$ $(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C$ $B=C$

(b) $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}a&0\\0&a\end{bmatrix}$ $AB=\begin{bmatrix}a&a\\a&a\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}2a&-a\\-a&2a\end{bmatrix}$ $AC=\begin{bmatrix}a&a\\a&a\end{bmatrix}$

7. (a) $Ax=(0,0,1)$ 时

$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $A_1x_1+A_2x_2=0=A_3x_3=1$

$0\neq 1$

(b) $b_1+b_2=b_3$ 时有解

(c) 消去，没有自由元

8. (a) $c_1+c_2=c_3$ $Ax=0$ $\begin{bmatrix}c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}=0$ $x=(1,1,-1)$

(b) 若 $c_1+c_2=c_3$ 消去 $\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&2\\0&0&\end{bmatrix}$ $0+0=0$ 无自由元

10. $A=\begin{bmatrix}0&0&0&2&1&0&0&0\\0&0&3&0&0&1&0&0\\0&4&0&0&0&0&1&0\\5&0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&0&0&0&0&0&0&0\\0&4&0&0&0&0&1&0\\0&0&3&0&0&1&0&0\\0&0&0&2&1&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&\frac{1}{5}&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&0&0&\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{1}{5}\\0&0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{3}&0&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}3&2&0&0\\4&3&0&0\\0&0&6&5\\0&0&7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&0&0&1&0&0&0\\4&3&0&0&0&1&0&0\\0&0&6&5&0&0&1&0\\0&0&7&6&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&0&0&1&0&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0&-\frac{4}{3}&1&0&0\\0&0&6&5&0&0&1&0\\0&0&\frac{7}{6}&6&0&0&-\frac{7}{6}&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3&0&0&0&9&-6&0&0\\0&\frac{1}{3}&0&0&-\frac{4}{3}&1&0&0\\0&0&6&0&0&0&1&0\\0&0&\frac{7}{6}&6&0&0&-\frac{7}{6}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&3&-2&0&0\\0&1&0&0&-4&3&0&0\\0&0&1&0&0&0&6&-5\\0&0&0&6&0&0&-7&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&0&0\\-4&3&0&0\\0&0&6&-5\\0&0&-7&6\end{bmatrix}$

1

11. (a) $A+B=0$，0无逆矩阵

(b) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $A+B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

12. $C=AB$ $AA^{-1}=I$, $CC^{-1}=I$

$A^{-1}C=(A^{-1}A)B=B$

$A^{-1}(CC^{-1})=BC^{-1}$

$A^{-1}=BC^{-1}$

13. $M=ABC$

~~$M^{-1}=A^{-1}B^{-1}C^{-1}$~~ ~~$AM^{-1}C=B^{-1}$~~

~~$B^{-1}=AM$~~

$M^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ $CM^{-1}A=B^{-1}$

$B^{-1}=CM^{-1}A$

14. $B=\begin{bmatrix}-1&0\\1&1\end{bmatrix}[A]$

$B^{-1}=[A]^{-1}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}A^{-1}$ 第2行减第1行 第1列减第2列

15. 当有一列为0时，$A^{-1}A=I$ 时

I总有一列为0，不可以

17. (a) E $\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

18. $B=(A^2)^{-1}$ $A^2B=I$ $A(A\cdot B)=I$

$A^{-1}=AB$

22. $\begin{bmatrix}1&3&1&0\\2&7&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1&0\\0&1&-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&7&-3\\0&1&-2&1\end{bmatrix}=[I\,A^{-1}]$

$\begin{bmatrix}1&4&1&0\\3&9&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&1&0\\0&-3&-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-3&\frac{4}{3}\\0&-3&-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-3&\frac{4}{3}\\0&1&1&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=[I\,A^{-1}]$

23. $\begin{bmatrix}2&1&0&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\0&1&2&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0&1&0&0\\0&\frac{3}{2}&0&-\frac{3}{4}&\frac{3}{2}&-\frac{3}{4}\\0&0&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{4}&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}=[I\,A^{-1}]$

24. $\begin{bmatrix}1&a&b&1&0&0\\0&1&c&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&a&0&1&0&-b\\0&1&0&0&1&-c\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&-a&-b+ac\\0&1&0&0&1&-c\\0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$

26. $E_{21}A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}$

$E_{12}E_{21}A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$ $D^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$D^{-1}E_{12}E_{21}A=I$ $A^{-1}=D^{-1}E_{12}E_{21}=\begin{bmatrix}3&-1\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix}0&2&1&0\\2&2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$

29. (a) 对，若有一行0，则AA^{-1}也有一行为0，I不对

(b) 不对，全为1时不行

(c) A^{-1}可逆，$A^2=A\cdot A$

30. $A\vec{I}=\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\a&a&b&0&1&0\\a&a&a&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\a&a&a&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&a-b&a-b&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&b&1&0&0\\0&a-b&0&-1&1&0\\0&0&a-b&0&-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{a-b}&0&-\frac{b}{a(a-b)}\\-\frac{1}{a-b}&\frac{1}{a-b}&0\\0&-\frac{1}{a-b}&\frac{1}{a-b}\end{bmatrix}=\frac{1}{a(a-b)}\begin{bmatrix}a&0&-b\\-a&a&0\\0&-a&a\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}2&c&c\\c&c&c\\8&7&c\end{bmatrix}$ $c\neq 0$, $c=c$, $c=7$

32. $(P-Q)x=0$, $Px=Qx$ 当$x=k\vec{1}$时 $P-Q$奇异

$(pk-qk)x+(pn-qn)x=0$ $pk-qk\neq 0$

33. $\begin{bmatrix}I&0\\C&I\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}I&0\\-C&I\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}A&0\\C&D\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}D&0\\-C&A\end{bmatrix}$

$AD-CA$

$\begin{bmatrix}0&I\\I&D\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-D&I\\I&0\end{bmatrix}$