作业3 （DDL:12月23日 上课时提交）

- 0 完整阅读lecture 5.ppt lecture 6.ppt（包含课上未讲解的最后几页）。
- 1 关于子集反演公式的两个形式：
  - (1) 若$f(S) = \sum_{T\subseteq S} g(T)$，则$g(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。
  - (2) 若$f(S) = \sum_{T\supseteq S} g(T)$，则$g(S) = \sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。

  假定(1)成立。利用(1)来证明(2)。仅需给出(2)的证明。
- 2. 证明以下等式。σ_1, σ的定义见lecture 6 例1.
  - id * **1** = σ_1。 **1*1**= σ。 这里**1**表示常数函数$f(n)$=1。
- 3. 证明迪利克雷卷积符合
  - **结合律**： $(a*b)*c= a*(b*c)$。
  - **消去律**： 若$a*b=a*c$，则$b=c$。 （这里假定a是积性函数）。

- 4. 从$\{1,2,\ldots,n\}$中取 r 个数($1 \le r \le n$)。不能选相邻元素。求方案数。
- 5. 证明$n! = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D_i$.（$D_n$表示$n$元素的错排的方案数）

  然后利用此公式，通过反演求出D_n 的计算公式，并算出D_6。

  最后，用 $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$验证计算结果。
- 6. 课上提到$\sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{|T|}{2}\right\rceil}\binom{|T|}{2i-1} = 2^{|T|-1}$。求证$\sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil}\binom{t}{2i-1} = 2^{t-1}$。($t \geq 1$)

- *. 证明 $i \mid \gcd(a,b)$ 等价于 $i|a$ 且 $i|b$。 （无需提交）
- *. 记忆 （无需提交）
  - **子集反演公式、二项式反演公式**（2个形式都需要记）
  - 迪利克雷卷积定义、**莫比乌斯反演公式**

思考题（不提交）

- 1. 求证 $D_n = n \times D_{n-1} + (-1)^n$。

- 2. 设Q_n是$\{1,\ldots,n\}$的排列中不出现12,23,…,(n-1)n 的排列数。
  - (也就是说，i后面不能是i+1)

    求Q_n=? 另外， 求证 Q_n=D_n+D_{n-1}(n≥2)

- 3. https://www.luogu.com.cn/problem/P5505 分特产
- 4. https://darkbzoj.cc/problem/2839 集合计数
- 5. https://cses.fi/problemset/task/1082 约数和之和

思考题（不提交）

- 6. 用讲义4的double counting方法解决 例6（恰好k种颜色）。
- 7. 求证： $g(n)=\sum_{n|N} f(N) \Leftrightarrow f(n)=\sum_{n|N} g(N)\mu\left(\frac{N}{n}\right)$
- 8. 求证：

$$\text{if } F(n)=\prod_{d|n} f(d), \text{ then } f(n)=\prod_{d|n} F\left(\frac{n}{d}\right)^{\mu(d)}.$$

更难的思考题

- 项链计数IV：n个珠子，**恰好用k种颜色**，**无循环节**，项链个数=？