Lecture 8
指数型生成函数

中山大学 智能工程学院
金恺

上周内容回顾。

- 一、生成函数：介绍与定义、入门范例
- 二、常用运算法则
- 三、应用1：生成函数求解递推式
  - Hanoi tower序列，Fibonacci序列，Catalan序列。
- 四、应用2：利用概率生成函数求解随机变量的期望、方差等。

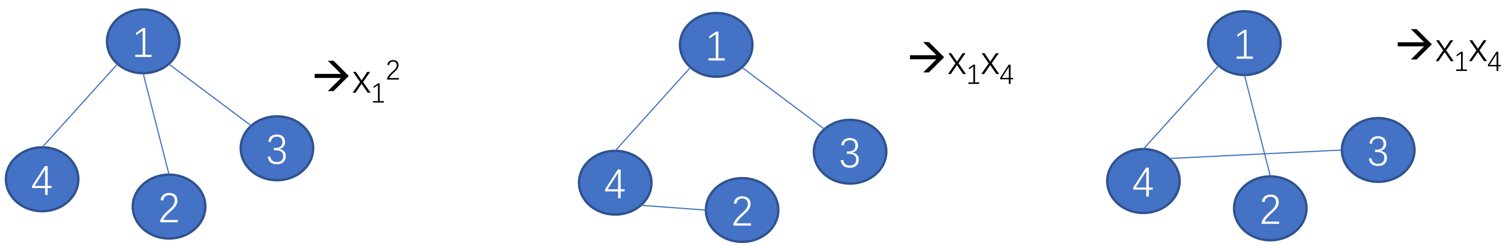
Outline

- 一、　普通生成函数的2个例题。

- 二、 指数型生成函数
  - 定义及基本性质
  - 组合对象的拼接问题
  - 多重集合的排列问题
  - 例题剖析

例1 Cayley公式的“母函数”证明

- 为每个生成树定义一个“项”：$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\deg(i)-1}$ 注意都是n-2次的项)



- 定义F_n为这些“项”的和。 F_n是关于$x_1,\ldots,x_n$的多项式。
- **定理**. $F_n(x_1,\ldots,x_n)= (x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$。
- **推论**. 生成树个数为n^{n-2}.
  - Proof: 生成树个数 = F_n中各项系数之和 = n^{n-2}。

证明

求证$F_n(x_1,\ldots,x_n)= (x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$

F_n为生成树对应的“项”的和

- 归纳法。n =3显然成立。 $(x_1+x_2+x_3)$
- 假定n-1成立， 下证明n成立。

- Claim 1： F_n 中不含 x_n的那些项 之和 = $(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-2}$ 。
- 证明:
  - 1. 不含x_n的项 <==> 节点n为叶子的生成树。因此，左式转换为：
    枚举所有 节点n为叶子的生成树，求它们的对应“项”的和。
  - 2. 节点n为叶子，且节点n连接到节点1， 对应“项”和为$F_{n-1}\ x_1$。
  - 节点n为叶子，且节点n连接到节点2，对应“项”和为$F_{n-1}\ x_2$。
  - 节点n为叶子，且节点n连接到节点n-1，对应“项”和为$F_{n-1}\ x_{n-1}$。
  - 因此，所求答案为 $F_{n-1}\cdot(x_1+\ldots+x_{n-1})$。即， $(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-2}$。

证明(continue)

求证$F_n(x_1,\ldots,x_n)= (x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$

F_n为生成树对应的"项"的和

- Claim 1： F_n 中不含 x_n的那些项 之和 = $(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-2}$ 。
- 换言之，不含x_n的项，F_n 与$(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-2}$ 的系数相同。
- 再观察：不含x_n的项，$(x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$ 与$(x_1+\ldots+x_{n-1})^{n-2}$ 的系数相同。
- 因此，得到：
- Claim 2. 不含x_n的项，F_n 与 $(x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$ 系数相同。
- 根据F_n的对称性，
  - 对于不含x_i的项，F_n 与 $(x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$ 系数相同。 (i=1,2,….,n 都成立)
- 这说明，F_n 与 $(x_1+\ldots+x_n)^{n-2}$ 每一项系数相同 (从而定理成立)
  - 因为每一项要么不含x_1，要么不含x_2，……，要么不含x_n。

例2 三元组计数问题

- **题意**：给定N个整数A_1~A_N. N<=40000. $|A_i|<=20000$.
- 对所有的S（范围-60000~60000），求有多少个(i,j,k)满足
  - (1) $A_i+A_j+A_k=S$ 且 (2) $i<j<k$。
  - 换言之，要在集合A中选到3个数（不重复选），和为S
- 目标：$\Sigma_{i<j<k}\ x^{Ai}x^{Aj}x^{Ak}$

直接计算将到达$O(n^3)$的时间复杂度。

- **快速解法**：
  - $(\Sigma_i\ x^{Ai})^3 = \Sigma_i\ x^{3Ai} + 3 * \Sigma_{i\neq j}\ x^{2Ai}x^{Aj} + 6 * \Sigma_{i<j<k}\ x^{Ai}x^{Aj}x^{Ak}$
  - $(\Sigma_i\ x^{2Ai}) * (\Sigma_i\ x^{Ai}) = \Sigma_{i\neq j}\ x^{2Ai}\ x^{Aj} + \Sigma_i\ x^{3Ai}$。
  - 利用下式先算出$\Sigma_{i\neq j}\ x^{2Ai}x^{Aj}$，然后利用上式算出$\Sigma_{i<j<k}\ x^{Ai}x^{Aj}x^{Ak}$。

背景：多项式乘法可以快速计算——$O(n \log n)$。

因此黄色部分可以快速计算。而$\Sigma_i\ x^{3Ai}$容易得到。

指数型生成函数定义

假如$\langle f_n \rangle$是一个序列，我们定义$\hat{\boldsymbol{F}}(\mathbf{x}) = \sum_{n\geq 0} \frac{f_n}{n!} x^n$ 为该序列的指数生成函数(exponential generating function)，简称EGF。

说明：加上hat是为了与普通生成函数 $F(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$做区分。

$\langle f_n \rangle$的EGF也可以理解为 $\langle f_n / n! \rangle$的 OGF

- 举例：
  - EGF<1,1,1,⋯>=e^x。
  - EGF<1,p,p^2,⋯>=e^{px}。

为什么叫做 指数生成函数(exponential generating function)呢？

因为<1,1,1,…>的EGF 为 e^x。

例3 求排列数、圆排列数 的EGF。

- 排列数$p_n=n!$ 1,1,2,6,24,⋯
- 圆排列$q_n=(n-1)!$. 0,1,1,2,6,⋯.

- $\hat{P}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i}{i!} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

- $\hat{Q}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{i!} x^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x^i = \ln \frac{1}{1-x}$

- 我们发现 $\hat{P}(x)=\exp(\hat{Q}(x))$。

并非是一个巧合！ 见后面分析。

问题：如果$\langle a_n \rangle$的EGF为$\hat{A}(x)$，$\langle b_n \rangle$的EGF为$\hat{B}(x)$，
那么$\hat{A}(x)\hat{B}(x)$是 哪个序列的EGF?

- $\hat{A}(x)\hat{B}(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{i!} x^i\right)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{0} \frac{a_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{0} \frac{n!}{i!\,(n-i)!} a_i b_{n-i}\right) \frac{x^n}{n!}$$

- **答案**：对应的序列为$\langle c_n \rangle$,其中 $c_n = \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$.

$$\langle a_n \rangle \xrightarrow{\text{EGF}} \hat{A}(x)$$
$$\langle b_n \rangle \xrightarrow{\text{EGF}} \hat{B}(x)$$
$$\langle c_n \rangle,\ c_n = \sum_{i=0}^{0} \binom{n}{i} a_i b_{n-i} \xrightarrow{\text{EGF}} \hat{A}(x)\hat{B}(x)$$

(二项式卷积)

$$\langle a_n \rangle \xrightarrow{\text{OGF}} A(x)$$
$$\langle b_n \rangle \xrightarrow{\text{OGF}} B(x)$$
$$\langle c_n \rangle,\ c_n = \sum_{i=0}^{0} a_i b_{n-i} \xrightarrow{\text{OGF}} A(x)B(x)$$

(卷积)

应用1：组合对象的拼接问题

- 假设有n个点，标号各不相同。连成一棵树有几种方案？
  - $t_n = n^{n-2}$ （Cayley公式）；$t_0=0$
- 假设有n个点，标号各不相同。连成一个圈有几种方案？ （不允许重边自环）
  - $c_n=(n-1)!/2$ $(n>2)$；$c_0=c_1=c_2=0$

- **问题.** 假设有n个点，要连成一个“**含一棵树及一个环**”的图，方案数a_n=?
  - 易知：$a_n = \sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!j!} t_i c_j$。 换句话说，$\langle a_n \rangle$ 是 $\langle t_n \rangle$ 与 $\langle c_n \rangle$的二项式卷积！
- 根据上述结论，可知 $\hat{A}(x) = \hat{T}(x)\hat{C}(x)$.

通过此例，发现EGF的一个价值：

求出两类代标号对象（比如树，环）的EGF后，

它们的“拼接对象”的EGF可以快速求出。

应用1：组合对象的拼接问题（II）

- **问题**：假设有n个节点。要组成3棵树。方案数 f_n 如何计算？
  - $t_n = n^{n-2}$ （Cayley公式）；$t_0=0$。
  - $\langle t_n \rangle$的EGF记作 $\hat{T}(x)$。
  - $\langle f_n \rangle$的EGF记作 $\hat{F}(x)$。
- **结论**. $\hat{F}(x) = \frac{1}{3!}\left(\hat{T}(x)\right)^3$。 Why?
  - 观察 $f_n = \frac{1}{3!}\left(\sum_{i_1+i_2+i_3=n} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\right)$
  - $\frac{1}{3!}\left(\hat{T}(x)\right)^3 = \frac{1}{3!}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{i!} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{i!} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t_i}{i!} x^i\right)$

$$= \frac{1}{3!} \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i_1+i_2+i_3=n} \frac{t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3}}{i_1!i_2!i_3!}\right) x^n$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{3!}\sum_{i_1+i_2+i_3=n} t_{i_1} t_{i_2} t_{i_3} \frac{n!}{i_1!i_2!i_3!}\right)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{x^n}{n!} = \hat{F}(x)$$

先考虑“三棵树有顺序区分时”的方案数。除以3！，得到“无顺序区分时”的方案数

应用1：组合对象的拼接问题（III）

- **问题**：假设有n个节点。要组成**若干**棵树。方案数 g_n 如何计算？
  - $t_n = n^{n-2}$ （Cayley公式）；$t_0=0$。
  - $\langle t_n \rangle$的EGF记作 $\hat{T}(x)$。
  - $\langle g_n \rangle$的EGF记作 $\hat{G}(x)$。
- **结论**. $\hat{G}(x) = EXP\left(\hat{T}(x)\right)$ 。 Why?
  - $g_n = \sum_{k\geq 0} g_n^{(k)}$； 其中$g_n^{(k)}$ 表示 组成 k 棵树的方案数。
  - 根据上一题推广可知，$\langle g_n^{(k)} \rangle$的EGF 为 $\frac{1}{k!}\left(\hat{T}(x)\right)^k$ 。
  - 因此，$\langle g_n \rangle$的EGF 为$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\left(\hat{T}(x)\right)^k = EXP\left(\hat{T}(x)\right)$。

注意这里的“树”
也可以换做别的组合对
象！比如“圈”！

从而知道$\hat{P}(x)$=exp($\hat{Q}(x)$)

补充说明

- 给定一个多项式 A(x) 的前n项系数。
- **定理**. EXP(A(x)) 的前n项系数，可以 O(n log n)时间计算。
- **定理**. LN(A(x)) 的前n项系数，可以O(n log n)时间计算。
  - （这个要求A(x)的常数项不为0）
- 本课程不要求掌握这些的定理的细节。

$$\exp\left(A(x)\right) = \sum_{i\geq 0} \frac{A(x)^i}{i!}.$$

$$\ln\left(1 - A(x)\right) = -\sum_{i\geq 1} \frac{A(x)^i}{i}$$

应用2：多重集合的排列问题

定理. 考虑某个有限多重集 $S=\{n_1\ 1, \ldots, n_k\ k\}$。将它的$r$-排列的个数记作$t_r$。

令$\hat{G}_i(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{i!}x^i$。

则$\langle t_r \rangle$的EGF $\sum_{r\geq 0} t_r \frac{x^r}{r!}$ 等于 $\hat{G}_{n_1}(x) \cdot \hat{G}_{n_2}(x) \cdot \cdots \cdot \hat{G}_{n_k}(x)$。

（也就是说，$t_r/r!$ 等于 右边这个多项式中 x^r的系数。）

举例验证。 $S = \{1, 1, 2, 2, 2\}$。 $r=3$。

$(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2)(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3)$ 中 x^3的系数为

$1 * \frac{1}{3!} + \frac{1}{1!} * \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} * \frac{1}{1!} = \frac{7}{6}$。 另一方面，$t_r/r! = 7/6$。

定理的证明

$\hat{G}_i(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{i!}x^i$。

- 令$\hat{G}(x) = \hat{G}_{n_1}(x) \cdot \hat{G}_{n_2}(x) \cdot \cdots \cdot \hat{G}_{n_k}(x)$
- 求证：r-排列数$t_r = \hat{G}(x)$中x^r的系数乘以$r!$。

- $\hat{G}(x)$中x^r的系数乘以$r!$。

$$=r!\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_k=r\\ m_1\le n_1,\\ \ldots,\\ m_k\le n_k}}\left(\frac{1}{m_1!}\cdots\frac{1}{m_k!}\right)$$

$$=\sum_{\substack{m_1+\cdots m_k=r\\ m_1\le n_1,\\ \ldots,\\ m_k\le n_k}}\left(\frac{r!}{m_1!\ldots m_k!}\right)$$

容易看出，这就是 $\boldsymbol{S}$的 r-排列数 t_r.

(分类计算$\boldsymbol{S}$的r-排列数)：

1出现m_1次,⋯,k出现m_k次的归为同一类，
记作$\{m_1,\cdots,m_k\}$

对于$\{m_1,\cdots,m_k\}$这一类r-排列数为$\frac{r!}{m_1!\ldots m_k!}$。

对比

定理. 考虑某个有限多重集 **S**=$\{n_1\ 1, \ldots, n_k\ k\}$。将它的$r$-排列的个数记作$t_r$。

令$\hat{G}_i(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{i!}x^i$。

则<t_r>的EGF $\sum_{r\geq 0} t_r \frac{x^r}{r!}$ 等于 $\hat{G}_{n_1}(x) \cdot \hat{G}_{n_2}(x) \cdot \cdots \cdot \hat{G}_{n_k}(x)$。

EGF适应于排列计数。

定理. 考虑某个有限多重集 **S**=$\{n_1\ 1, \ldots, n_k\ k\}$。将它的$r$-组合的个数记作$s_r$。

令$G_i(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^i$。

则<s_r>的OGF $\sum_{r\geq 0} s_r x^r$ 等于 $G_{n_1}(x) \cdot G_{n_2}(x) \cdot \cdots \cdot G_{n_k}(x)$。

OGF 适应于组合计数。

EGF例题解析

例4 错排的 EGF

- 错排问题：将n个物品分成若干个cycles，每个cycles长度不为1。
- Q问题：将n个物品分成一个cycle，cycle长度不为1。

- Q问题的EGF：$\hat{Q}(x) = \sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}x^i = \ln\frac{1}{1-x} - \mathrm{x}$。

- 错排问题的EGF： $\mathrm{EXP}(\ln\frac{1}{1-x} - \mathrm{x}) = \frac{1}{e^x(1-x)}$。

- 可进一步利用此式子求出错排数D_n的通项公式。
  - 可以展开e^{-x} 与 $(1\text{-}x)^{-1}$，然后乘起来。得到$\langle D_n \rangle$的egf，再反推D_n。

例5 连通图的计数

- 本问题：n个点的连通图的计数。
- P问题：n个点的图的计数。
  - $\mathrm{p}_n = 2^{\binom{n}{2}}$。
  - EGF(<p_n>)=$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n$

- 本问题的EGF为 $\mathrm{L}n\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!}x^n\right)$

例6 着色问题

问题：有n个位置，要用四种颜色（红、黄、蓝、绿）着色。规定红的和黄的只能用偶数次。问一共有多少的着色方案？

解答： 假设

$$F(X)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^2\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)^2=f_0+f_1\frac{x}{1!}+f_2\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

那么答案就是f_n（和定理的证明类似，略）

注意到

$$F(X)=e^{2\mathrm{x}}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{4x}+2e^{2x}+1)$$

泰勒展开即可求得f_n.

如果不关心每个位置是什么颜色，只关心每个颜色取了几种，那么就是个组合问题，而不是排列问题。用OGF

小结

- **Generating function**
  - OGF　　适合多重组合计数问题。
适合求解**递推方程**。
  - EGF　　适合多重排列计数问题。
适合解决“**对象拼接问题**”
- Present another way of counting。
- 运用非常广泛。

备选例题 巧克力问题（编程计算题）

- **题意**：商店中有 c 种巧克力（每种无限）。随机买n块巧克力。
  - 问恰好有m种巧克力被购买了奇数 的概率。（保证m和n同奇偶，c<=100）
- 符合条件的购买序列的个数为g_n。答案为g_n/c^n。
- G(x)= $\binom{c}{m}\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^m\left(\frac{1}{0!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^{c-m}$ 为g序列的EGF。
- G(x)= $\binom{c}{m}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^m\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{c-m}=\frac{\binom{c}{m}}{2^c}(e^x-e^{-x})^m(e^x+e^{-x})^{c-m}$
- 为计算g_n，关键要计算下式的x^n的系数。

$$(e^x-e^{-x})^m(e^x+e^{-x})^{c-m}.$$

- $(\mathrm{e}^{x}-e^{-x})^{m}(\mathrm{e}^{x}+e^{-x})^{c-m}$

$=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}e^{x(m-i)}(-1)^{i}e^{-xi}*\sum_{j=0}^{m}\binom{c-m}{j}e^{x(c-m-j)}e^{-xj}$

$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{i}\binom{m}{i}e^{x(m-2i)}*\sum_{j=0}^{m}\binom{c-m}{j}e^{x(c-m-2j)}$

$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i}\binom{c-m}{j}\binom{m}{i}e^{x(c-2i-2j)}$

$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i}\binom{c-m}{j}\binom{m}{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c-2i-2j)^{k}}{k!}x^{k}$

其x^{n} 的系数=

$$\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i}\binom{c-m}{j}\binom{m}{i}(c-2i-2j)^{\mathrm{n}}$$ 。