Lecture 5
子集反演 与 二项式反演

中山大学 智能工程学院
金恺

Outline

- 接下来的两次课，学习**反演方法**

  - 本周内容：
    - 1、 子集反演
    - 2、 二项式反演
    - （有共同点：都是容斥原理的推广）

  - 下周内容
    - 1、 莫比乌斯反演
    - 2、 单位根反演

1、子集反演定理

- 考虑定义在$\{1,\cdots,n\}$的每个子集上的函数f与g 。

- **定理一**
  - 若$f(S) = \sum_{T\subseteq S} g(T)$,
  - 则$g(S) = \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T)$。

- **定理二**
  - 若$f(S) = \sum_{T\supseteq S} g(T)$,
  - 则$g(S) = \sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T)$。

定理二可以利用定理一来证。

证明（定理一）

- 当$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T)$，求证$g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$

- 右式$= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$

$$= \sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\sum_{Q\subseteq T} g(Q)$$
$$= \sum_{Q\subseteq S} g(Q)\sum_{Q\subseteq T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}$$
$$= \sum_{Q\subseteq S} g(Q)\sum_{T\subseteq (S\setminus Q)}(-1)^{|S\setminus Q|-|T|}$$
$$= \sum_{Q\subseteq S} g(Q)\,[(S\setminus Q)=\emptyset] = g(S).$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{T\subseteq X}(-1)^{|X|-|T|}\\ &=\sum_{i=0}^{|X|}\binom{|X|}{i}(-1)^{|X|-i}1^{i}\\ &=(1-1)^{|X|}=[X=\emptyset]\end{aligned}}$$

例1.1 整除

- 给定n个正整数$A_1, \dots, A_n$。 $n \le 15$
- 问，1~M 中有多少个数被**奇数个**A_i整除？ $M \le 10^5$.

对于$\{1,\dots,n\}$的任何一个子集 $S=\{i_1,\dots, i_k\}$，定义
$g(S)$表示 [1,m]中有多少个数满足，被$A_{i_1},\dots,A_{i_k}$整除
且 不被其他A_i整除}|。
即，$|\{1 \le x \le M \mid A_1,\dots A_n$中能整除 x 的恰为 $A_{i_1},\dots,A_{i_k}\}$

目标：$\sum_{|s|为奇数} g(S)$

举例：n=4。
目标是 g({4}) + g({3}) + g({2}) + g({1}) + g({2,3,4}) + g({1,3,4}) + g({1,2,4})+g({1,2,3})

如何计算 $\sum_{|S|\text{为奇数}} g(S) = ?$

$S=\{i_1,\ldots, i_k\} \subseteq \{1,\ldots,n\}$。

$g(S)$表示 $[1,m]$中有多少个数满足，被$A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$整除
且 不被其他A_i整除}|。
即，|{$1\le x\le M$ | $A_1,\ldots A_n$中能整除 x 的**恰为** $A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$}

$f(S)$表示 $[1,m]$中有多少个数满足，被$A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$整除
~~且 不被其他A_i整除~~}|。
即，|{$1\le x\le M$ | $A_1,\ldots A_n$中能整除 x 的**包含** $A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$}

观察 $f(S) = \sum_{T\supseteq S} g(T)$。

举例说明：比如n=4。 //这里用二进制描述集合
f(1011) = g(1011) + g(1111)。
f(1010) = g(1010) + g(1011) + g(1110) + g(1111)
= sum g(1?1?)

$g(S) = |\{1 \le x \le M \mid x$被$A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$整除 且 不被其他$A_i$整除$\}|$。

$f(S) = |\{1 \le x \le M \mid x$被$A_{i_1},\ldots,A_{i_k}$整除$\}|$。

$$f(S) = \sum_{T \supseteq S} g(T)\text{。} \qquad f(S) = \left\lfloor \frac{M}{LCM(A_{i1},\ldots,A_{ik})} \right\rfloor\text{。}$$

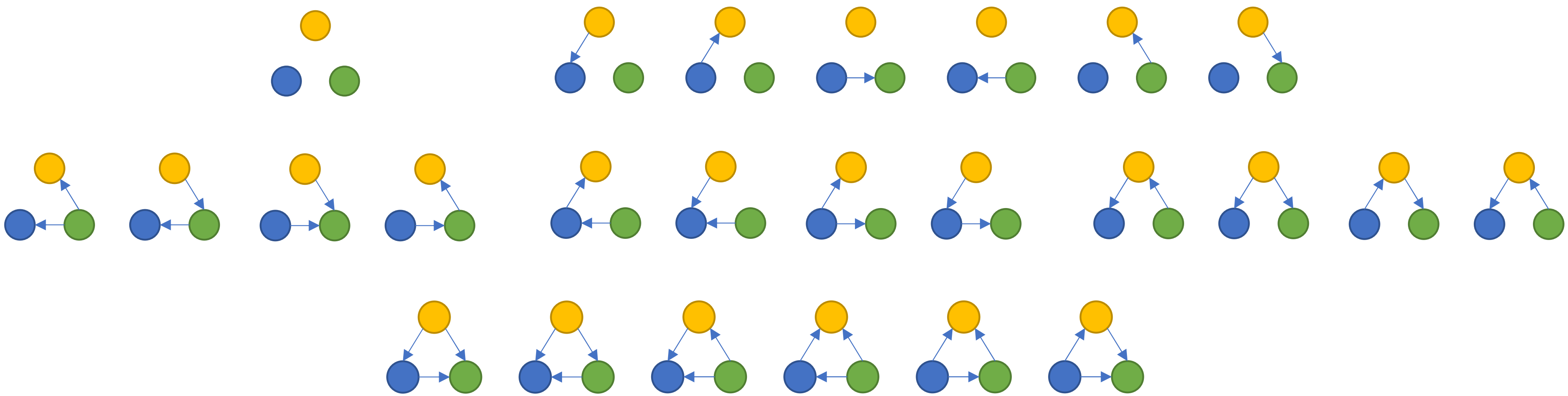
$$\begin{aligned}\sum_{|S|\text{为奇数}} g(S) &= \sum_{|S|\text{为奇数}} \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|T|-|S|} f(T) \\ &= \sum_{T \neq \emptyset} f(T) \sum_{|S|\text{为奇数}, S \subseteq T} (-1)^{|T|-|S|} \\ &= \sum_{T \neq \emptyset} f(T) \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{|T|}{2} \right\rceil} \binom{|T|}{2i-1} (-1)^{|T|-(2i-1)} \\ &= \sum_{T \neq \emptyset} f(T) (-1)^{|T|+1} \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{|T|}{2} \right\rceil} \binom{|T|}{2i-1} \\ &= \sum_{T \neq \emptyset} f(T) (-1)^{|T|+1} 2^{|T|-1}\end{aligned}$$

f好算，g不好算。
利用反演公式，
从f求g。

例1.2 DAG计数

DAG= Direct Acyclic Graph=有向无环图

- **问题**：n个有区分的点上，连有向边（不允许重边），能得到几种DAG？ （简单的说，求n个点的DAG个数）
- **举例**：当n=3时。答案为 1+6+12+6=25.



- 对于$\{1,\ldots,n\}$的任何一个子集S，
  - 令$g(S)$表示：有多少个DAG满足：S的入度为0，$\bar{S}$的入度>0。
    即，入度为0的点集恰好为S
  - 令$f(S)$表示：有多少个DAG满足：S的入度为0~~，$\bar{S}$的入度>0~~。
    即，入度为0的点集包含S。

目标是计算$f(\emptyset)$。

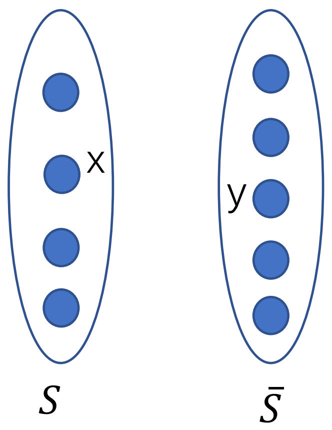
观察 $f(S)=\sum_{T\supseteq S} g(T)$。

观察

$f(S)=2^{|S|(n-|S|)} f_{n-|S|}(\emptyset)$　(1)

（S= ∅时，此等式是平凡的）。

(1)的证明：



①S内部无边！

②S, $\bar{S}$间点对(x,y)
可以选不连边
或者选x→y

③$\bar{S}$内部构成DAG

$f(S)=2^{|S|(n-|S|)}f_{n-|S|}(\emptyset)$.　　$f(S)=\sum_{T\supseteq S}g(T)$.

$f(\emptyset)=\sum_T g(T)=\sum_{T\neq\emptyset}g(T)$ （因为$g(\emptyset)=0$）

$=\sum_{S\neq\emptyset}g(S)=\sum_{S\neq\emptyset}\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$ （子集反演）

$=\sum_{S\neq\emptyset}\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|}2^{|T|(n-|T|)}f_{n-|T|}(\emptyset)$

$=\sum_{T\neq\emptyset}\left(\sum_{S\subseteq T,S\neq\emptyset}(-1)^{|S|}\right)(-1)^{|T|}2^{|T|(n-|T|)}f_{n-|T|}(\emptyset)$

$=\sum_{T\neq\emptyset}\left((-1)^{|T|+1}\right)2^{|T|(n-|T|)}f_{n-|T|}(\emptyset)$

$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}2^{k(n-k)}f_{n-k}(\emptyset)$.

$$\sum_{S\subseteq T,S\neq\emptyset}(-1)^{|S|}$$
$$=\sum_{S\subseteq T}(-1)^{|S|}-(-1)^{|\emptyset|}$$
$$=0-1=-1$$

- 这样就可以从$f_1(\emptyset),\dots,f_{n-1}(\emptyset)$算出$f_n(\emptyset)$。

验证（课上跳过）

- $f_n(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} 2^{k(n-k)} f_{n-k}(\emptyset)$ 。
- 取n=3
- $f_0=1, f_1=1, f_2=3$ 。

- $f_3 = \binom{3}{1}\left((-1)^2\right)2^2 f_2 + \binom{3}{2}\left((-1)^3\right)2^2 f_1 + \binom{3}{3}\left((-1)^4\right)2^0 f_0$

  $= 3 * 4 * 3 \ - \ 3 * 4 * 1 + 1$

  $= 24 + 1 = 25.$

下面说明，子集反演蕴含了容斥原理

也就是说，子集反演为容斥原理的推广

- 已知

$$f(S)=\sum_{T\subseteq S} g(T) \Leftrightarrow g(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T)$$

- 求证
  - 当$A_1,\ldots,A_n$是Ω的子集时，

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{a_1<a_2<\cdots<a_k}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_{a_i}\right|$$

不失一般性可假定$\Omega=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$。否则去掉不在任何$A_i$中的。

求证 $$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{a_1<a_2<\cdots<a_k} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_{a_i}\right|$$

- 对于$S \subseteq \{1,\ldots,n\}$，定义
  - $g(S) = \left|\bigcap_{i\in S} A_i \setminus \bigcup_{i\in\bar{S}} A_i\right|$。
    即，“满足S中所有属性**且**不满足$\bar{S}$中任何属性”的对象个数。
  - $f(S) = \left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$
    即，“满足S所有属性”的对象个数。

观察：$f(S) = \sum_{T\supseteq S} g(T)$。

$$g(\emptyset) = 0$$

$$f(\emptyset) = |\Omega| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

$$g(S) = \left|\bigcap_{i\in S} A_i \setminus \bigcup_{i\in \bar{S}} A_i\right| \qquad f(S) = \left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|$$

$$f(S) = \sum_{T\supseteq S} g(T)$$

$$g(\emptyset) = 0$$

$$f(\emptyset) = |\Omega| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = f(\emptyset) = \sum_T g(T) = \sum_{S\neq\emptyset} g(S) \quad \text{（由于}g(\emptyset) = 0\text{)}$$

$$= \sum_{S\neq\emptyset}\sum_{T\supseteq S}(-1)^{|S|-|T|} f(T) \quad \text{（由子集反演）}$$

$$= \sum_{T\neq\emptyset} f(T) \sum_{\emptyset\neq S\subseteq T}(-1)^{|S|-|T|}$$

$$= \sum_{T\neq\emptyset} f(T)(-1)^{-|T|-1}$$

$$= \sum_{S\neq\emptyset} f(S)(-1)^{|S|-1}$$

$$= \sum_{S\neq\emptyset}\left|\bigcap_{i\in S} A_i\right|(-1)^{|S|-1} \qquad = \sum_{k=1}^{n}\sum_{a_1<a_2<\cdots<a_k}\left|\bigcap_{i=1}^{k} A_{a_i}\right|(-1)^{k-1}$$

小结

- **定理（形式一）**
  - 若$f(S) = \sum_{T \subseteq S} g(T)$，
  - 则$g(S) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$。

定理（形式二）

若$f(S) = \sum_{T \supseteq S} g(T)$，

则$g(S) = \sum_{T \supseteq S} (-1)^{|S|-|T|} f(T)$。

◇ 解题时有个难点在于定义f与g。参见前面的例题。一般策略:

g： 恰好满足S那部分性质，不满足$\bar{S}$中任何属性

f: 满足S中性质，但可以满足其他性质。

◇ 子集反演定理 蕴含了 容斥原理。

许多题目既可用容斥原理，也可用子集反演定理解决。

2、二项式反演定理

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i \Leftrightarrow g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$$

$$\begin{aligned}
\text{右式} &= \textstyle\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} g_j \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \binom{i}{j} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{j} \binom{k-j}{i-j} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \binom{k}{j} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k-j}{i-j} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \binom{k}{j} \sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{k-j-i} \binom{k-j}{i} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \left(\sum_{i=0}^{k-j} (-1)^{i} \binom{k-j}{i} \right) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^{k} g_j \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (1-1)^{k-j} = g_k .
\end{aligned}$$

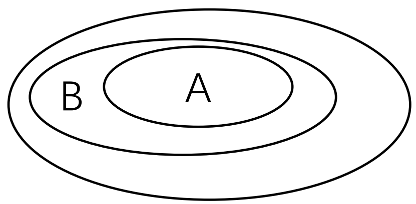
$\binom{k}{i}\binom{i}{j} = \binom{k}{j}\binom{k-j}{i-j}$

Double counting proof

统计有多少个二元组 (A,B) 满足

$A \subseteq B \subseteq \{1,\ldots,k\}$

$|A|=j,\ |B|=i.$



利用子集反演定理来证明二项式反演定理

- $f_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}g_i$，求证 $g_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f_i$
- $F(S):=f_{|S|}$。$G(S)=g_{|S|}$。
- 根据$f_k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}g_i$，得
  - $F(S)=f_{|S|}=\sum_{i=0}^{|S|}\binom{|S|}{i}g_i=\sum_{T\subseteq S}G(T)$
- 根据子集反演定理，
  - $G(S)=\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}f(T)$。
  - 取$k=|S|$，得 $g_k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f_i$

容易看到，
二项式反演是子集反演
的特殊情形。

例2.1 第二类Stirling 数通项公式Revisit

- $\left\{ {n \atop k} \right\}$: n 个有区分的球放入 k 个无区分盒子里，盒子都非空的方案数。
- g_k: 将这些球放入k个有区分盒子里，盒子都非空的方案数。
- $g_k/k! = \left\{ {n \atop k} \right\}$。 因此问题转化为，找 g_k的公式。

观察 $k^n = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i$。

- 定义$f_k = k^n$。
- $f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i$
- $g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f_i$

  $= \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$ 。

证明： 将球1~n放入k个盒子（允许空盒子）方案总数?

第一种计数结果： k^n （显然）

第二种计数结果：

按“非空盒子的编号的集合，记作X”来分类。

总的方案数$= \sum_{X \subseteq \{1,\ldots,k\}} g_{|X|} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i$。

两种计数结果相等。

例2.2 染色问题

- **问题描述**：用颜色1~k着色n个格子（一行n列的n个格子），要求相邻格子不同色，求有多少方案满足<u>每种颜色都使用了</u>。
- **分析**：
  - g_k：问题的答案（每种颜色都使用了至少一次）。
  - f_k：不需要每种颜色都用（每种颜色都允许不使用）时的答案。
  - **观察** f_k好求　　$f_k = k(k-1)^{n-1}$。
  - **观察** $\{f_k\}$与$\{g_k\}$　　$f_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g_i$。
  - *用二项式反演,*
    - $g_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i(i-1)^{n-1}$

(double counting proof)
证明方法类似前一道例题。

考虑计算f_k的第二种方法：
按"至少1次的颜色集合X"来分类。

例2.3 错排问题（经典问题)

- 一个排列$(a_1,\ldots a_n)$如无$a_i=i$，则称为一个“错排”。
  - a_i可以理解为元素i放到那个位置（每个位置放一个元素）。
    - 要求元素1不能去位置1,…,元素n不能去位置n。
- $n!$个排列中，错排有多少个？答案记作D_n。
- *观察:* $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_i$

由此可以推出D_n的表达式。

记$f(n)$=n!，那么 $D_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i!$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i}}{i!} \approx n!\ e^{-1}。$$

错排问题的 容斥原理 解法

- 考虑把e_1~e_n放入位置1~n的所有放置方案。（每个位置放1个）
- 定义属性P_i：e_i不放入位置i。
- 定义集合S_i：满足P_i的放置方案的集合。
- 问题转化为：计算 $|S_1 \cap \cdots \cap S_n|$.
- $|S_1 \cap \cdots \cap S_n| = n! - \left|\overline{S_1} \cup \cdots \cup \overline{S_n}\right|$ (德·摩根定律)

$$= n! - \left|\overline{S_1}\right| - \cdots - \left|\overline{S_n}\right| + \left|\overline{S_1} \cap \overline{S_2}\right| + \cdots + \left|\overline{S_{n-1}} \cap \overline{S_n}\right| - \cdots$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^n \binom{n}{2}(n-n)!$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)!$$

（了解）二项式反演的其他形式

$$f_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} g_i \Leftrightarrow g_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_i$$

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} g(i)$$

$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} f(i)$$

$$f(n) = \sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} g(i) \Leftrightarrow g(n) = \sum_{i=n}^{m} (-1)^{i-n} \binom{i}{n} f(i)$$

证明是类似的。

课后阅读：广义容斥原理（简介）

- 有$A_1,\cdots,A_m$ 这些性质。要计算集合U中满足**恰好n个性质**的元素个数β_n。
- 令 $\alpha_n=\sum|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_n}|$。　注意$\alpha_0$=|U|.
- 举例:

$$\alpha(2)=|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|$$

$$\beta(2)=|A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4|+|A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\cap\bar{A}_4|+|A_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap A_4|$$
$$+|\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3\cap\bar{A}_4|+|\bar{A}_1\cap A_2\cap\bar{A}_3\cap A_4|+|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap A_3\cap A_4|$$

举例说明：β (2)中那些 在 α(2)中记录了1次；
β(3)中那些 在 α(2)中记录了(3 选 2)次；
β(4)中那些 在 α(2)中记录了(4 选 2)次。

- 观察$\alpha_n=\sum_{i=n}^{m}\binom{i}{n}\beta_i$。
- 因此$\boxed{\beta_n=\sum_{i=n}^{m}(-1)^{i-n}\binom{i}{n}\alpha_i\text{。}}$　（根据二项式反演）

有时β难求，α好求，那么可以反演从α得β.

（了解）一般的反演公式

解, 我们首先设法求出相应序列$f(n)$所满足的(累计)关系式

$$\sum_{r=1}^{n} c_{n,r} f(r) = g(n) \qquad (1)$$

其中$g(n)$是已知序列, 然后从中解出

$$\sum_{r=1}^{n} d_{n,r} g(r) = f(n) \qquad (2)$$

(1)与(2)两式互为反演公式.

求解反演就像求解矩阵的逆的过程。

关于错排的一个递推公式（课后阅读）

- $D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$
- 证明： 考虑n个元素$e_1, \cdots, e_n$的错排 (放入位置1~n， e_i不能去位置i)
  - 首先，e_1放入某个位置k（k>1），有$(n-1)$种选择；
  - 分两种情况考虑：
    - 1. e_k放在位置1。相当于e_1与e_k错排。剩下n-2个元素的错排，有D_{n-2}种方案；
    - 2. e_k不放位置1。一一映射到：e_2~e_n的一个错排，有D_{n-1}种方法；
      - （e_k不允许放的位置为 1，不允许放在位置1的是e_k）。
- 综上，n个元素的错排有$(n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}]$种。