

2.6

$$1.1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad 3. l_{31} = 1, l_{32} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad Ax = b$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2. Lc = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$Ux = c \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$4. Lc = b: \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$Ux = c$$

$$EUx = \bar{E}c$$

$$Ux = c: \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$7. E_{31} E_{32} E_{21} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$5. EA = U \quad U \perp \Rightarrow \bar{E} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$EA = U \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$8. L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = LU \quad A = U \Rightarrow U = A$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LDU \quad U = D^{-1}A = \begin{bmatrix} D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$9. A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 11 \end{bmatrix} = LDU$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$10. A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$LUX = b \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$a \neq 0, b \neq a, c \neq b, d \neq c$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 31 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$12. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 17 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Ux = c$$

14. (a) 得到 I
(b) ~~E₂₁~~ $E_{32}E_{31}E_{41}I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -d_{21} & 1 & 0 \\ -d_{31} & -d_{32} & 1 \end{bmatrix} = L^{-1}$

(c) $E_{32}E_{31}E_{41}LU = IU = U$
 $\downarrow L^{-1}$

15. $L = L_1, D = D, U = U, L_1^{-1}LD = L_1^{-1}L_1D = ID = D = D,$
 $D, U, U^T = D, UU^T = D, I = D$ 证毕

左下三角 对角矩阵

由上知 $L_1^{-1}LD = D, U, U^T, L = L_1, U = U, \therefore ID = D, I = D = D,$ 证毕

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{U} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ b & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L^{-1}U$

18. $A = \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

L_{31}, L_{41} 均为 0
 L 第一行只有 3 个 0 $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{bmatrix} L_{41}, L_{42}$
 U 下三角仅有 U_{31}, U_{41}, U_{42} 为 0 U 无

$B = \begin{bmatrix} x & x & x & 1 \\ x & x & 0 & x \\ x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x & x & 0 \\ x & 0 & x & x \\ x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \end{bmatrix} U$ 下三角仅有 U_{41}, U_{32}
 $\Rightarrow L_{41}, U_{14}$

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow L$

$A = UL = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

A_2 轴元: 5, 9

A_2 已无需消除, A 的轴元就是 A 的左上角轴元