Apuntes Final

Rafael Dubois
Universidad del Valle de Guatemala
dub19093@uvg.edu.gt

4 de junio de 2021

Clase positiva y negativa

Un conjunto no vacío $\mathbb{P}$ con elementos de un campo $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ es una clase positiva si cumple

- Cerradura de la suma: $a, b \in \mathbb{P} \implies a + b \in \mathbb{P}$.
- Cerradura del producto: $a, b \in \mathbb{P} \implies a \cdot b \in \mathbb{P}$.
- Tricotomía: Si $a \in \mathbb{F}$, entonces se cumple exactamente una entre $a \in \mathbb{P}$, $-a \in \mathbb{P}$, y $a = 0$.

Una clase negativa relativa a $\mathbb{P}$ se define como $\mathbb{N} = \{-a : a \in \mathbb{P}\}$. La existencia de estas clases en un campo implica la existencia de un orden en el mismo.

Desigualdad triangular

Sean x y y elementos de un campo ordenado por $\geq$. Se cumple la desigualdad triangular:

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Propiedad arquimediana

Un campo $\mathbb{F}$ es arquimediano si cumple la propiedad arquimediana, la cual es que para todo $x \in \mathbb{F}$ existe algún $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x < n$.

Métricas y espacios métricos

Sea X un conjunto y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que para todo a, b y c elementos de X se cumple

- Positividad: $d(a, b) \geq 0$, con caso de igualdad $d(a, b) = 0 \iff a = b$.
- Reflexividad: $d(a, b) = d(b, a)$.
- Desigualdad triangular: $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

Se dice que (X, d) es un espacio métrico y d es una métrica sobre X. Se puede demostrar que siempre se cumple $|d(a, b) - d(b, c)| \leq d(a, c)$.

Desigualdades locas

Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

Ninkowski

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Topología de $\mathbb{R}^n$

Sea X un conjunto no vacío. Una familia de conjuntos τ de X es una topología sobre X si

- $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.
- $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.
- $A_i \in \tau$ y $A_j \in \tau$ implica que $A_i \cap A_j \in \tau$.

Los elementos de τ se llaman abiertos.

Bolas abiertas y cerradas

Sea (M, d) un espacio métrico.

- Se le llama bola abierta de centro a y radio $r > 0$ al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in M \ni d(x, a) < r\}.$$

- Se le llama bola cerrada de centro a y radio $r > 0$ al conjunto

$$\overline{B_r}(a) = B_r[a] = \{x \in M \ni d(x, a) \leq r\}.$$

Subconjunto acotado

Un subconjunto de un espacio métrico (M, d) es acotado si está contenido en una bola.

$$A \subseteq M \text{ es acotado} \iff \exists r > 0, a \in M \ni A \subseteq B_r(a).$$

Es decir, $A \subseteq M$ es acotado si para todo $x \in A$ se tiene $d(x, a) < r$ para algún $a \in M$.

Definición de abierto

Dado un espacio métrico (M, d), se dice que un conjunto $\mathcal{U} \subseteq M$ es abierto si

$$\forall a \in \mathcal{U}, \exists r > 0 \ni B_r(a) \subseteq \mathcal{U}.$$

Topología de abiertos

Resulta que entonces $\emptyset$ y M son abiertos, la unión de cualquier cantidad de abiertos siempre es un abierto, y la intersección de cualquier cantidad FINITA de abiertos siempre es un abierto. Es decir, todo espacio métrico es una topología (mas no se cumple que toda topología sea un espacio métrico). La familia de todos los subconjuntos abiertos de M es la topología de dicho conjunto.

Definición de cerrado

Dado un espacio métrico (M, d), se dice que un conjunto $\mathcal{F} \subseteq M$ es cerrado si $\mathcal{F}^{\complement}$ es abierto.

Vecindad

Sea un espacio métrico (M, d) y $x \in M$, entonces cualquier conjunto que contiene un abierto A tal que $x \in A$ es una vecindad de x.

Punto interior

Un punto $x \in M$ es un punto interior de $A \subseteq M$ si A es una vecindad de x.

Punto de acumulación

Un punto x es punto de acumulación (o punto límite) para un conjunto $A \subseteq M$ si cada vecindad de x contiene al menos un punto de A distinto de x. Es decir, si

$$(B_r(x) - \{x\}) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0.$$

Interior de un conjunto

El conjunto de todos los puntos interiores de A se llama interior de A, y se denota por $\text{int}(A)$. Además, se cumple que $\text{int}(A)$ es el abierto más grande de A, y es la unión de todos los abiertos en A.

Cerradura de un conjunto

El conjunto intersección de todos los cerrados en A se llama cerradura de A, y se denota por $\bar{A}$. Además, se cumple que $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño de A. Se tiene $A = \bar{A}$ si y solo si A es cerrado. Además, si F es un cerrado que contiene a A, se da $A \subseteq \bar{A} \subseteq F$.

Frontera de un conjunto

La frontera ∂A de un conjunto A se define como $\partial A = \bar{A} - \text{int}(A)$. Es decir, la frontera de A son todos los elementos que están en su cerradura pero no en su interior.

Derivado de un conjunto

El conjunto de todos los puntos de acumulación de A es el derivado de A, y se denota por A'.

Densidad

Sea X un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que A es denso (o siempre denso) si y solo si $\bar{A} = X$.

Propiedades

- Si $A \subset B$ entonces $A' \subset B'$.
- $A' \cup B' = (A \cup B)'$.
- A es cerrado si y solo si $A' \subset A$.
- Si F es un cerrado y $A \subset F$ entonces $A' \subset F$.
- $A \cup A'$ es cerrado para todo A. Es más, $\bar{A} = A \cup A'$.
- Si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$.
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.
- $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subseteq \text{int}(A \cup B)$.
- $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \text{int}(A \cap B)$.
- $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \neq \text{int}(A \cup B)$.
- $\bar{A}^{\complement} = \text{int}(A^{\complement})$.
- $\bar{A} = \{x : d(x, A) = 0\}$.
- $A \subseteq X$ es denso $\iff$ A solo está contenido en un cerrado, que es X $\iff$ el único conjunto abierto disjunto de A es el vacío $\iff$ A interseca a cada conjunto abierto no vacío $\iff$ A interseca cada bola abierta.
- La unión de abiertos es siempre abierta.
- La intersección de cerrados es siempre cerrada.
- La unión de cerrados es cerrada si no es una unión infinita.
- La intersección de abiertos es abierta si no es una intersección infinita.

Conexidad

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es disconexo si existen E y F subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que

- $A = E \cup F$,
- $E \cap \overline{F} = \emptyset$,
- $\overline{E} \cap F = \emptyset$.

Las últimas dos condiciones, juntas, significan que E y F son conjuntos separados. Se dice que si un conjunto A no es disconexo, entonces es conexo.

Compacidad

Cubierta abierta

Si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos U, entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de E si

$$E \subseteq \bigcup \left\{ U : \ U \in \mathcal{U} \right\}.$$

Se dice que $\mathcal{V}$ es una subcubierta abierta de $\mathcal{U}$ si $\mathcal{V}$ también es cubierta abierta de E y además $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$.

Definición de compacidad

Un conjunto E es compacto si toda cubierta abierta $\mathcal{U}$ de E tiene una subcubierta abierta finita $\mathcal{V}$. Nótese que el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) no es compacto. Sea $\mathcal{U} = \{(-n, n) : \ n \in \mathbb{N}\}$, que es cubierta abierta de $\mathbb{R}$. Sin embargo, ningún subconjunto finito $\mathcal{V}$ de $\mathcal{U}$, al unirlo, puede cubrir a $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}$ no es compacto.

Límite de una sucesión

Se dice que una sucesión (a_n) converge al número L (denotado $a_n \to L$) si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$. Si existe tal $L \in \mathbb{R}$, es el límite de (a_n):

$$L = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Teorema de unicidad del límite

El límite de una sucesión, si existe, es único.

Convergencia implica cota

Toda sucesión convergente está acotada.

Convergencia absoluta

Si $a_n \to L$ entonces $|a_n| \to |L|$.

Suma y multiplicación de límites

Si (a_n) y (b_n) son sucesiones convergentes a L_a y L_b respectivamente, entonces las sucesiones $(a_n + b_n)$ y $(a_n \cdot b_n)$ convergen a $L_a + L_b$ y $L_a \cdot L_b$ respectivamente.

Límite de la sucesión inversa multiplicativa

Si (a_n) es una sucesión convergente a $L \neq 0$, entonces $a_n \neq 0$ a partir de algún $N \in \mathbb{Z}^+$ y se tiene

$$\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{L}.$$

Límite de una sucesión no negativa

Si (a_n) es una sucesión de términos no negativos tal que esta es convergente a L, entonces $L \geq 0$.

Comparación de límites

Si para todo $n \in \mathbb{N}$ (o a partir de un punto) se cumple $a_n \leq b_n$, pero además $a_n \to l_a$ y $b_n \to l_b$, se debe cumplir $l_a \leq l_b$.

Multiplicación por constante

Si (a_n) es una sucesión convergente a L y α es una constante, entonces $\alpha a_n \to \alpha L$.

Sucesión de Cauchy

Una sucesión (a_n) es de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo m y n enteros mayores o iguales que N se cumple $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Una sucesión es convergente si y solo si es de Cauchy. Además, si una sucesión es de Cauchy entonces $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

Sucesión divergente

Una sucesión (a_n) tiende a infinito si para todo $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M$.

Teorema de compresión

Sean $x_n < y_n < z_n$ sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Teorema de convergencia monótona

Si una sucesión (x_n) es monótona creciente, esta converge si y solo si está acotada.

Subsucesión

Para una función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, $(x_{g(n)})$ es una subsucesión de (x_n).

Convergencia de subsucesiones

Si $x_n \to L$, entonces cualquier subsucesión de (x_n) converge también a L.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Si (x_n) es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces existe alguna subsucesión convergente de (x_n).

Teorema de acotación de sucesiones de Cauchy

Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ es acotada.

Límite de una sucesión de Cauchy

Si se tiene $X' \to L$ donde X' es subsucesión de X, una sucesión de Cauchy, también $X \to L$.

Criterio de convergencia de Cauchy

Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}^n$ es convergente si y solo si es de Cauchy. Se dice que un espacio métrico en el que cada sucesión de Cauchy converge es un espacio completo.

Herramientas de convergencia

Crear una sucesión

Si se desea demostrar que $a_n \to L$, es posible definir r_n tal que $a_n = L + r_n$ y demostrar que $r_n \to 0$.

Desigualdad de Bernoulli

Si se desea acotar una sucesión, resulta útil la desigualdad de Bernoulli:

$$\forall x > -1: \ (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Teoremas de Stolz-Cesáro

Caso 0/0

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ cuyos límites son ambos cero, donde b_n es estrictamente monótona y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Entonces, se tiene también que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$. Nota: L puede ser $\pm\infty$.

Converso

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones en $\mathbb{R}$ tales que b_n es estrictamente creciente cuyo límite es $L_b = \infty$, pero también se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R}$ y además $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} \in \mathbb{R} - \{1\}$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Sucesiones funcionales

Definición de acotación funcional superior

Una función $f: X \to \mathbb{R}$ se dice acotada superiormente si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $|f(x)| < c$.

El supremo e ínfimo de una función

Se define $\sup(f) = \sup\{f(x) : x \in X\}$ e $\inf(f) = \inf\{f(x) : x \in X\}$. Entonces, el supremo de f es la cota superior más pequeña de la imagen de f mientras el ínfimo de f es la cota inferior más grande de la imagen de f.

Condiciones de acotación

Una función f está acotada superiormente si $\sup(f) < \infty$. Análogamente, se dice que f está acotada inferiormente si $-\infty < \inf(f)$.

Definición de límite de una función

Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo un punto de acumulación x_0. Para una función f definida en I (aunque no necesariamente en x_0), se dice que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

donde $L \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema de Heine-Borel

$S \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado si y solo si S es un compacto.

Teorema de Weierstrass

Función Lipschitz

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz si existe A positivo tal que para todo $x, x' \in I$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|.$$

Contracción

Si f es Lipschitz para A menor a 1, entonces se dice que f es una contracción.

Orden α

Se dice que f es Lipschitz de orden $0 < \alpha \leq 1$ si existe A positivo tal que para todo $x, x' \in I$:

$$|f(x) - f(x')| \leq A|x - x'|^\alpha.$$

Teorema de continuidad uniforme en Lipschitz

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es Lipschitz de orden α, entonces f es uniformemente continua.

Valores extremos

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice para f:

Máximo local

Se tiene un máximo local en $c \in A$, si existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ de c tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo x en la vecindad.

Mínimo local

Se tiene un mínimo local en $c \in A$, si existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ de c tal que $f(x) \geq f(c)$ para todo x en la vecindad.

Valor extremo

Se tiene un valor extremo si se tiene un mínimo o máximo, global o local en un punto.

Teorema de valores extremos de Fermat

Si $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ tiene un valor extremo local en un punto interior $c \in A$, y si f es diferenciable en c, entonces $f'(c) = 0$.

Punto crítico

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Se dice que un punto interior $c \in A$ es un punto crítico de f si $f'(c) = 0$ o si la derivada no existe en c. Si $f'(c) = 0$, se dice que el punto es estacionario.

Teorema de Rolle

Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), y es tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema del valor medio de Lagrange

Suponga que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corolario 1

Suponga que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, f es constante sobre (a, b).

Corolario 2

Sean f y g funciones de (a, b) en $\mathbb{R}$ funciones diferenciables en (a, b). Si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = g(x) + C$ para alguna constante C.

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean f y g funciones de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b). Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

Teorema de Caratheōdory

Sea f una función definida en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea $c \in I$. Entonces, f es una función diferenciable en c si y solo si existe una función φ que es continua en c y cumple:

$$f(x) - f(c) = (x - c)\varphi(x), \quad \forall x \in I.$$

En este caso, $\varphi(c) = f'(c)$.

Teorema de la regla de la cadena

Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$, sean $g : I \to \mathbb{R}$ y $f : J \to \mathbb{R}$ con $f(J) \subseteq I$, y sea $c \in J$. Si f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en c y

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c))f'(c).$$

Derivada de una función inversa

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ y $B = f(A)$, sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función inyectiva en A con inversa $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en el punto interior $c \in A$ y f^{-1} es diferenciable en el punto interior $f(c) \in B$, entonces necesariamente $f'(c) \neq 0$ y

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Si $d = f(c)$, entonces $c = f^{-1}(d)$ y tenemos la formulación equivalente

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}.$$

Funciones crecientes y decrecientes

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferenciable sobre (a, b).

- f es creciente si y solo si $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- f es decreciente si y solo si $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Polinomio de Taylor

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y suponga que f es diferenciable n veces. El polinomio de Taylor de grado n para f centrado en $c \in (a, b)$ es entonces

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a\frac{f^{(k)}}{k!}(x - c)^k.$$

Con esto es posible escribir $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, donde R_n es el error o residuo entre f y P_n.

Teorema de Taylor

Supóngase que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es diferenciable $n+1$ veces y sea $c \in (a, b)$. Entonces, para todo $x \in (a, b)$ existe ξ entre c y x tal que el residuo para P_n es

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - c)^{n+1}.$$

Criterio de la primera derivada

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, c) y (c, b).

- Si existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ tal que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$, entonces f tiene un máximo relativo (local) en c.
- Si existe una vecindad $(c - \delta, c + \delta)$ tal que $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (c - \delta, c)$ y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (c, c + \delta)$, entonces f tiene un mínimo relativo (local) en c.

Criterio de la segunda derivada

Sea I un intervalo con x_0 un punto interior de I, y sea $n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 2$. Suponga que las primeras n derivadas de una función f son continuas en x_0, y además $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ pero $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

- Si n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0$, entonces f tiene máximo relativo (local) en x_0.
- Si n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0$, entonces f tiene mínimo relativo (local) en x_0.
- Si n es impar, entonces f no tiene máximo ni mínimo relativo en x_0.

Funciones convexas y cóncavas

Función convexa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que f es convexa (abierta hacia arriba) sobre I si para todo $s, t \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que

$$f\big(\lambda s + (1 - \lambda)t\big) \leq \lambda f(s) + (1 - \lambda)f(t).$$

Función cóncava

Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Se dice que f es cóncava (abierta hacia abajo) sobre I si su inverso aditivo es una función convexa.

Desigualdad de Jensen

Sea f una función convexa y sean $w_i \geq 0$ tales que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Entonces, para todo x_i se cumple

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i).$$

Lema de las tres cuerdas

La función $f : I \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si para todo $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ se tiene que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Criterio de funciones crecientes

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, y para $a \in I$ sea $f_a : I - \{a\} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Entonces, f_a es creciente en el intervalo I.

Derivadas laterales

Las derivadas laterales de $f : I \to \mathbb{R}$ para el punto $a \in I$ se definen:

$$f'(a^-) = \sup\{f_a(x) : x \in I, x < a\},$$
$$f'(a^+) = \text{ínf}\{f_a(x) : x \in I, x > a\}.$$