1.) Фільтрація (1 лекція)

Фільтрація та моменти зупинки

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Озн Потік σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ назив. фільтрацією, якщо

1. $\forall s < t \quad \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$
2. $\forall A \in \mathcal{F}: \ P(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0$
3. $\bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$

2.) Марковський момент зупинки

Озн Нехай $\mathcal{F}_t$ – фільтрація. Тоді додатньо визначена в.в. $\tau(\omega)$ назив. марковським моментом зупинки, якщо $\forall u \quad \{\tau(\omega) \leq u\} \subset \mathcal{F}_u$

3.) Теорема про марковський момент зупинки

Тв $\tau(\omega)$ – марковський момент зупинки $\Longleftrightarrow \{\tau(\omega) < u\} \subset \mathcal{F}_u$

або

$\tau(\omega)$ – марковський момент зупинки.

Тоді
- $\{\tau(\omega) > u\} \subset \mathcal{F}_u$
- $\{s < \tau(\omega) \leq t\} \subset \mathcal{F}_t$
- $\{\tau(\omega) = t\} \subset \mathcal{F}_t$

4.) Мартингал (2 лекція)

Озн Послідовність вип. вел. $(X_n, \mathcal{F}_n)$ утворює мартингал, якщо $\forall n \quad E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ м.н.

5.) Субмартингал

Озн Послідовність $(X_n, \mathcal{F}_n)$ – утворює субмартингал, якщо $\forall n \quad E(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) \geq X_{n-1}$ м.н.

6.) Супермартингал

Озн Послідовність $(X_n, \mathcal{F}_n)$ - утворює супермартингал, якщо $\forall n$ $E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \le X_{n-1}$ м.н.

7.) Теорема про сподівання субмартингала

Твердження Нехай $(X_n, \mathcal{F}_n)$ - субмартингал.

Тоді $E(X_n | \mathcal{F}_m) \geqslant X_m$ м.н., $n > m$

$EX_1 \le EX_2 \le \dots \le EX_n$.

8.) Теорема про сподівання супермартингала

Твердження $(X_n, \mathcal{F}_n)$ - супермартингал.

Тоді $E(X_n | \mathcal{F}_m) \le X_m$, м.н. $n > m$,

$EX_1 \geqslant EX_2 \geqslant \dots \geqslant EX_n$

9.) Теорема про Перша нерівність Колмогорова, з доведенням (3 лекція)

<u>Твердження</u> (Перша нерівність Колмогорова)

Нехай $(X_n, \mathcal{F}_n)$ – субмартингал.

Тоді $P\{\sup\limits_{k\le n} X_n \ge a\} \le \frac{1}{a} E X_n^+$,

де $X_n^+ = \begin{cases} X_n, & \text{якщо } X_n \ge 0 \\ 0, & \text{якщо } X < 0 \end{cases}$

<u>Дов</u> $\chi_k = \begin{cases} 1, & x_1<a,\ x_2<a, \dots, x_{k-1}<a,\ x_k \ge a \\ 0, & \text{в протилежному випадку} \end{cases}$

$$\{\sup_{k\le n} X_k \ge a\} = \{\sum_{k=1}^{n} \chi_k = 1\}$$

$$P\{\sup_{k\le n} X_k \ge a\} = P\{\sum_{k=1}^{n} \chi_k = 1\} = E\sum_{k=1}^{n} \chi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} E\chi_k$$

$$a E\chi_k \le E(X_n \chi_k) \overset{\text{субмартингал}}{\le} E(E(X_n\chi_k \mid \mathcal{F}_n)) = EX_n\chi_k$$

$$a\sum_{k=1}^{n} E\chi_k \le \sum_{k=1}^{n} E(X_n\chi_k) = EX_n \underbrace{\sum \chi_k}_{\le 1} \le EX_n$$

$$a E\chi_k \le EX_n$$

$$E\chi_k \le \frac{EX_n}{a}$$

$$P\{\sup_{k\le n} X_k \ge a\} \le \frac{1}{a} EX_n^+$$

10.)Теорема про Третя нерівність Колмогорова, з доведенням

Твердження (II нерівність Колмогорова)

Нехай $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал.

Тоді $P\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} \le \frac{1}{a^2}E\xi_n^2$

Дов $\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} = \{\sup_{k\le n}|\xi_k|^2 > a^2\}$

$P\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} = P\{\sup_{k\le n}\xi_k^2 > a^2\} \overset{\text{за I нер. Колмогорова}}{\le}$

ξ_n - мартингал $\Rightarrow$ ξ_n^2 - субмартингал

$\le \frac{1}{a^2}E\xi_n^2$

$P\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} \le \frac{1}{a^2}E\xi_n^2$

11.)Теорема про друга нерівність Колмогорова, з доведенням

Твердження

Нехай $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ - мартингал.

Тоді $P\{\sup_{k\le n}|\xi_n| > a\} \le \frac{1}{a}E|\xi_n|$

Дов $\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} = \{\sup_{k\le n}\xi_k > a\} \cup \{\sup_{k\le n}(-\xi_k) > a\}$

ξ_n - мартингал $\Rightarrow$ ξ_n - субмартингал

ξ_n - мартингал $\Rightarrow$ $-\xi_n$ - субмартингал

$P\{\sup_{k\le n}|\xi_k| > a\} = P\{\sup_{k\le n}\xi_k > a\} + P\{\sup_{k\le n}(-\xi_k) > a\} \overset{\text{за I нер. Колмогорова}}{\le}$

$\le \frac{1}{a}E\xi_n^+ + \frac{1}{a}E(-\xi_n)^+ = \frac{1}{a}E|\xi_n|$

$P\{\sup|\xi_k| > a\} \le \frac{1}{a}E|\xi_n|$

12.) Марковський процес (4 лекція)

Озн Випадковий процес $X(t)$ із значеннями у вимірному просторі $(X, \mathcal{B})$ називається марковським, якщо

$P\{X(t)\in B \mid \mathcal{F}_s\} = P\{X(t)\in B \mid X(s,\omega)\}$, $t>s$

де $X(s,\omega)$ - мінімальна σ-алгебра, породжена $X(s)$

13.) Ймовірність переходу

$$= P\{x(t) \in B \mid \mathcal{F}_s\}$$

14.) Рівняння Колмогорова-Чепмена

Рівняння Колмогорова - Чепмена

$$P(x, t+s, B) = \int_X P(x, t, dy) \cdot P(s, y, B)$$

15.) Обернене рівняння Колмогорова для чисто-розривних процесів

Обернене рівняння Колмогорова для чисто-розривних процесів

$$P(s, x, t, B) - P(s-h, x, t, B) = P(s, x, t, B) - \int_X P(s-h, x, s, dy) \cdot P(s, y, t, B) =$$

$$= P(s, x, t, B) - P(s-h, x, s, \{x\}) \cdot P(s, x, t, B) + \int_{X-\{x\}} P(s-h, x, s, dy) \cdot P(s, y, t, B)$$

$$\frac{P(s, x, t, B) - P(s-h, x, t, B)}{h} = \frac{P(s, x, t, B)}{h} \cdot \left(1 - P(s-h, x, s, \{x\}\right) + \frac{1}{h} \int_{X-\{x\}} P(s-h, x, s, dy) \cdot P(s, y, t, B)$$

$h \to 0$

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial s} = P(s, x, t, B)\,(\lambda(s, x)) + \int_{X-\{x\}} \lambda(s, x) \cdot \Pi(s, x, du) \cdot P(s, y, t, B)$$

16.) Пряме рівняння Колмогорова для чисто-розривних процесів

Пряме рівняння Колмогорова для чисто-розривних процесів

$$P(s, x, t+h, B) - P(s, x, t, B) = \int_X P(s, x, t, dy) \cdot P(t, y, t+h, B) - P(s, x, t, B) =$$

$$= \int_X P(s, x, t, dy) \cdot P(t, y, t+h, \{y\}) \cdot I_B(y) + \int_B P(s, x, t, dy) \cdot P(t, y, t+h, B - \{y\}) -$$

$$- P(s, x, t, B)$$

$$\frac{P(s, x, t+h, B) - P(s, x, t, B)}{h} = \frac{1}{h} \int_X \underline{P(s, x, t, dy)} \cdot P(t, y, t+h, \{y\}) \cdot I_B(y) +$$

$$+ \frac{1}{h} \int_B P(s, x, t, dy) \cdot P(t, y, t+h, B - \{y\}) - \frac{1}{h} P(s, x, t, B)$$

пряме рівняння Колмогорова -

$$\frac{\partial P(s, x, t, B)}{\partial t} = \int_B P(s, x, t, dy) \cdot (-\lambda(t, y)) + \int_X P(s, x, t, dy)\, \lambda(t, y) \cdot \Pi(t, y, B)$$

17.) Однорідний марковський процесй

Однорідні процеси Маркова

Озн Марковський процес з перехідною ймовірністю $P(s,x,t,B)$ називається однорідним, якщо його перехідна ймовірність залежить від $t-s$.

$$P(s,x,t,B) = P(0,x,t-s,B) = P(x,t-s,B)$$

Тоді $P(x,t+s,B) = \int\limits_X P(x,t,dy)\cdot P(y,s,B)$

$$P(0,x,t,B) = P(x,t,B)$$

18.) Про інфінітезимальний оператор напівгрупи

Теорема (проінфінітезимальний оператор)

Нехай T_t – рівномірно неперервна напівгрупа. Тоді виконуються наступні твердження:

(а) $\exists \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}(T_h - I) = A$ – інфін. оп.

(б) $\exists \frac{d}{dt}T_t = T_t\cdot A = A\cdot T_t$

(в) $T_t = \exp(tA) = I + \sum\limits_{n=1} \frac{(tA)^n}{n!}$

Дов (а) $\xrightarrow{?!?}$ (б)

$$\frac{1}{h}(T_{t+h} - T_t) = \frac{1}{h}(T_t\cdot T_h - T_t) = \frac{1}{h}T_t(T_h - I) = T_t\cdot \overbrace{\frac{1}{h}(T_h - I)}^{=A} = A\cdot T_t$$

(б) $\xrightarrow{?!?}$ (в)

$$\exp(tA)\cdot\exp(-tA) = I$$

$$\frac{d}{dt}T_t = \frac{d}{dt}(\exp(-tA)) = -A\cdot\exp(-tA) = -\exp(-tA)\cdot A$$

$$\frac{d}{dt}(T_t\cdot\exp(-tA)) = \frac{d}{dt}T_t\cdot\exp(-tA) + T_t\cdot\frac{d}{dt}\exp(-tA) =$$

$$= T_t\cdot A\cdot\exp(-tA) + T_t\cdot\exp(-tA)\cdot(-A) = 0$$

$$T_t\cdot\exp(-tA) = C$$

$$I\cdot I = C$$

$$T_t \cdot \exp(-tA) \cdot \exp(tA) = I \cdot \exp(tA)$$

$$\underline{T_t = \exp(tA)}$$

$\overset{??}{b \Rightarrow a}$

$$T_h \int_0^a T_t\,dt = \int_0^a T_{t+h}\,dt = \left[\begin{matrix} t+h=u \\ dt=du \end{matrix}\right] = \int_h^{a+h} T_u\,du$$

$$\frac{1}{h}(T_h - I)\int_0^a T_t\,dt = \frac{1}{h}\left(\int_0^a T_{t+h}\,dt - \int_0^a T_t\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_h^{h+a} T_t\,dt - \int_0^a T_t\,dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_0^{a+h} T_t\,dt - \int_0^h T_t\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^h T_t \cdot T_a - \int_0^h T_t\,dt\right) = \frac{1}{h}\left(\int_0^h T_t\,dt\,(T_a - I)\right)$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h T_t\,dt \to I \qquad \frac{1}{h}\int_0^h (T_t - I)\,dt \to 0$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} I$$

$$\frac{1}{h}\int_0^h (T_t - I)\,dt \to 0$$

$$\|T_t\| \leq A$$

$$\frac{1}{h}(T_h - I) \xrightarrow[h\to 0]{} A$$

19.) Про рівномірну неперервність напівгрупи

Тв T_t породжений однорідним марковським процесом з перехідною ймовірністю $p(t,x,dy)$ – рівномірно неперервний на проміжку $(0,\infty)$, маємо $\|T_{t+h} - T_t\| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

20.) Напівгрупа

$$T_t \cdot T_s f = T_{t+s} f$$

T_t – напівгрупа

21.)Перше рівняння колмогорова для дифузійних процесів

Теорема (перше рівняння Колмогорова для дифузійних процесів)

Нехай $X(t)$ – дифузійний процес.

Тоді $\frac{\partial F(t,x,\tau,y)}{\partial t} = -a(t,x)\cdot\frac{\partial F(t,x,\tau,y)}{\partial x} - \frac{1}{2} b(t,x)\frac{\partial^2 F(t,x,\tau,y)}{\partial x^2}$

22.)Друге рівняння колмогорова для дифузійних процесів

Теорема (друге рівняння Колмогорова для дифузійних процесів)

Нехай виконуються наступні умови:

① $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-y|\le\delta} dy\, F(t-\Delta t,x,t,y)(x-y) = a(t,x)$

② $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-y|\le\delta} dy\, F(t-\Delta t,x,t,y)(x-y)^2 = b(t,x)$

③ $\exists\ \frac{\partial F(t,x,\tau,y)}{\partial x}$ – непер. по t,x,τ,y, $\exists\ \frac{\partial^2 F(t,x,\tau,y)}{\partial x^2}$

Тоді для неперервного випадкового процесу без післядії щільність $f(t,x,\tau,y)$ задовільняє наступне рівняння

$$\frac{\partial f(t,x,\tau,y)}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(a(\tau,y)\cdot f(t,x,\tau,y)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(b(\tau,y) f(t,x,\tau,y)\right)$$

23.) Дифузійний процес

Озн. Марковський процес $X(t)$ називається дифузійним, якщо виконуються наступні умови:

① $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\int\limits_{|y-x|\ge\delta} dy\, F(t-\Delta t,x,t,y) = 0$ (умова неперервності)

② $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-y|\le\delta} dy\, F(t-\Delta t,x,t,y)(x-y) = a(t,x)$ – коефіцієнт переносу

③ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|x-y|\le\delta} dy\, F(t-\Delta t,x,t,y)(x-y)^2 = b(t,x)$ – коефіцієнт дифузії

24.)Інфінітезимальний оператор

ⓐ $\exists \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_h - I) = A$ – інфін. оп.

25.) Досяжний стан

Стан j називається **досяжним** із стану i, якщо існує $n = n(i,j)$ таке, що

$$p_{ij}^{(n)} \equiv \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) > 0.$$

Для цього факту використовується позначення $i \to j$.

26.) Перехідний стан

Стан i називається **перехідним** якщо, існує ненульова ймовірність, що починаючи з i, ми ніколи не повернемося в стан i. Більш формально нехай випадкова змінна T_i є часом першого повернення в стан i:

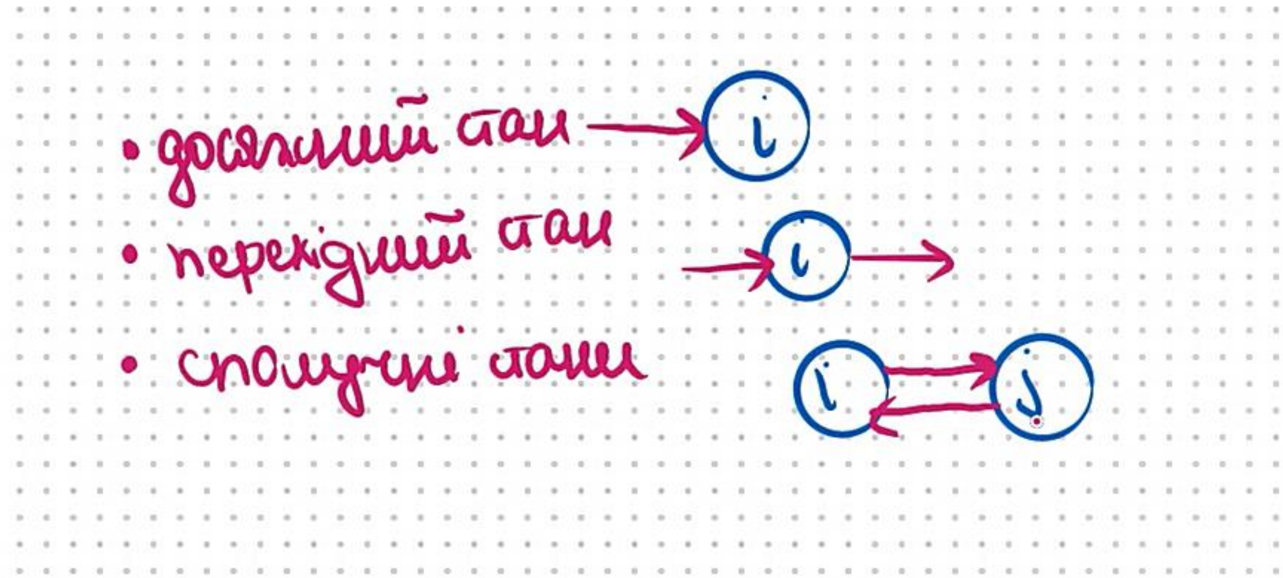
$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i | X_0 = i\}.$$

Тоді стан i є перехідним тоді й лише тоді, коли:

$$\Pr(T_i = \infty) > 0.$$

27.) Сполучний стан

Означення. Стани i та jназиваються *сполучними*, якщо $i \to j, j \to i$.



28.) Чисто-розривний процес

Чисто-розривні марковські процеси

Озн Марковський процес $X(t)$ назив. чисто-розривним, якщо виконуються наступні умови:

(1) $$\frac{1 - P\{t, x, t+h, \{x\}\}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \lambda(t,x)$$ ($\lambda(t,x)$ - вимірна по x, непер. по t) інтенсивність

(2) $$\frac{P\{t, x, t+h, B\}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} q(t,x,B), \quad x \notin B.$$

$$q(t,x,B) = \lambda(t,x) \cdot \Pi(t,x,B)$$

$$\frac{P\{t,x,t+h,B\}}{h} = \Pi(t,x,B), \quad x \in B$$