

基于有限元方法的炉温曲线设计

摘要

随着电子产业的快速发展，电路板制造表面组装技术显得尤为重要，回流焊的效果直接影响电路板的功能效果与使用周期。因此，合理控制回焊炉的炉温曲线设置，对于保障产品质量具有十分重要的作用。本文通过建立基于传热学的机理模型，对炉温曲线控制作出如下研究。

针对问题一：针对问题一，根据附件数据信息，对炉温各区域进行连续平滑处理，得到炉温曲线，并根据传热学基本原理，分析焊接区域与温区温度导热情况和边界条件，依此建立稳态二维传热方程模型。利用已知附件数据求解模型中的未知参数，得到最终模型。将题目所设温度及过炉速度代入模型，即可得到炉温曲线以及对应时间下的焊区各点具体温度。小温区 3、6、7 中点及小温区 8 结束处焊接区域中心的温度分别为 112.7°C 、 164.7°C 、 193.1°C 、 233.4°C 。

针对问题二：在基于问题一所建立的模型上，根据制程界限建立模型条件约束项，将研究对象变为单变量约束问题，对炉温和焊接区域温度进行约束，在传送带过炉速度范围内进行线性搜索，从而得到满足约束条件下的最大传送带过炉速度 $81.9\text{cm}/\text{min}$ 。

针对问题三：优化目标是阴影面积最小，转化为以边界时间作为上下界的曲线积分数值最小，结合制程界限和题目所给信息建立约束条件，从而得到优化模型。本文将多参数未知的复杂问题转变为寻找特殊边界点坐标关系问题，从而简化边界时间的计算。计算结果为最小面积为 994.56 cm^2 ，各温区温度的设定值分别为 165°C 、 192°C 、 219°C 、 245°C ，传送带的过炉速度为 $68\text{ cm}/\text{min}$ 。

针对问题四：，为了简化模型，于是将曲线两侧对称问题转化为两侧面积近似相等问题，并以两侧面积商值逼近 1 作为目标函数来描述对称指标，该问题化简为与问题三类似的面积的优化模型。根据坐标相关关系计算未知参数并代入目标函数，结合题目信息和制程界限建立约束条件，利用软件求得最优解。计算结果如下：各大温区温度的设定值分别为 185°C 、 205°C 、 225°C 、 246°C ，传送带的过炉速度为 $77.32\text{ cm}/\text{min}$ 。

最后，由于我们的模型所使用的数值方法较效率较高，且有限元方法相较于有限差分方法有更高的精度和鲁棒性，在实际的生产中有较高的实用性和精确性。

关键字： 含参非稳态一维传热模型 有限元方法 双变量优化模型 多目标优化模型

一、 问题重述

电路板在回焊炉中加热使得电子元件自动焊接到电路板上，在生产过程中，温度控制的精确程度，将直接影响产品的最终质量。目前关于这方面的研究多是基于实验测试完成，通常成本较高。本文通过建立机理模型对回焊炉的温度进行探讨。

某回焊炉内部具有 11 个小温区以及炉前区域和炉后区域，从功能角度划分成四个大温区：预热区、恒温区、回流区和冷却区。每个小温区长度为 30.5 cm，每两个小温区之间设有 5 cm 的间隙，炉前区域和炉后区域长度均为 25 cm。回焊炉开启一定时间后，炉内气温可达到稳定，将电路板放置在传送带上即可匀速进入炉内进行焊接作业。回焊炉所在环境为室温 25°C，且回焊炉中仅小温区可进行人为温度控制，其余间隙、炉前区域和炉后区域都无任何温度控制操作，但此类区域需考虑相邻温区的温度影响。

附件为某次实验中，通过温度传感器测试焊接中心区域得到的炉温曲线数据，该实验对于大温区设定的温度分别为 175°C（小温区 1 5）、195°C（小温区 6）、235°C（小温区 7）、255°C（小温区 8 9）及 25°C（小温区 10 11）；传送带的速度为 70 cm/min；焊接区域厚度为 0.15 mm。当焊接区域中心温度达到 30°C 时，温度传感器开始工作，本次计时从电路板进入回焊炉开始。

实际生产中可调整各温区温度以及传送带的速度，在以上实验的基础上，温区可进行 $\pm 10^\circ\text{C}$ 范围内的调整。调整时要求小温区 1 5 与 8 9 中的温度保持一致，小温区 10 11 中的温度保持 25°C。传送带过炉速度的调节范围为 65 100 cm/min。另外炉温曲线还需要满足制程界限，详见如下表：

1.1 需要解决的问题

1. 环境温度 75°C, II层服装厚度为 6mm, II层服装厚度为 6mm, III层服装厚度为 5mm, 工作时间为 90 分钟，测量得到附件二中的人皮肤外侧温度数据。建立数学模型计算温度分布。
2. 环境温度 65°C, IV厚度为 5.5mm, 确定II层的最优厚度，使得在工作 60 分钟时人体皮肤外侧温度不超过 75°C, 且超过 44°C 时间不超过 5 分钟。
3. 环境温度 80°C, 确定II, IV层的最优厚度，使得在工作 30 分钟时人体皮肤外侧温度不超过 75°C, 且超过 4°C 时间不超过 5 分钟。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

高温作业专用服装分为四层，其中第四层为空气层，其余三层均有不同的热力学属性。首先，需要明确传热过程中，三种传热方式在该环境下的影响，并忽略影响较小的

方式。其次，将该问题简化为一维传热问题，并需要对问题一中外界环境 75°C 的温度条件，II层厚度为 6 mm、IV层厚度为 5 mm 的边界条件和附件一中给出的假人皮肤外侧温度的边界条件，建立非稳态的一维传热模型，并以外界与第一层、第三层与第四层之间的换热系数作为参数，构建双变量优化模型，通过最优化方法求出最符合给定边界条件的换热系数，并计算残差以检验拟合效果。

2.2 问题二的分析

由于问题二只改变了环境温度和第四层厚度，只需对问题一中提出的模型进行修改，使用问题一中计算出的换热系数，并将第二层的厚度作为参数，重新设计边界条件和初值，建立单变量优化模型，以皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 300 秒作为约束条件，通过最优化或求解子问题求解满足条件的高温作业服最优设计。

2.3 问题三的分析

与问题二类似，问题三中待优化的参数为II层和IV层的厚度。考虑到作业员穿服的重量和舒适性，以及穿服制作的成本，以两层的厚度作为参数，建立多目标优化模型。以皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 300 秒作为约束条件，综合考虑制作成本、重量和舒适性，求解满足条件的高温作业服最优设计。最后，对一些影响作业服性能的参数做灵敏度分析，探究这些参数与传热性能和温度变化之间的关系。

三、 模型假设

1. 假设初始状态时，作业服每一处温度均为人体温度；
2. 假设在传热过程中，不存在汗液等物质蒸发和传热的过程；
3. 假设在传热过程中，隔热材料的比热容、密度等物理性质不随温度变化；
4. 假设在传热过程中，热量以垂直于人体皮肤方向传递；
5. 假设在传热过程中，各层之间紧密连接，无缝隙。

四、 符号说明

五、 传热系统的构建

5.1 传热模型的物理背景和模型选择

5.1.1 稳态模型与非稳态模型

稳态传热指传热系统中各点的温度仅随位置而变化，不随时间而改变。非稳态传热，是指物体的温度随时间而变化的导热过程。根据题目所给信息可知，所需建立的数

表 1 本文所用的主要符号以及其描述和单位

符号	描述	单位	符号	描述	单位
t	时间	s	L_i	第 i 层的右边界距表面的距离	m
x	距服饰表面的距离	m	λ_i	第 i 层热传导率	$W/(m \cdot K)$
ρ_i	第 i 层密度	kg/m^3	h	换热系数	$W/(m^2 \cdot K)$
C_{pi}	第 i 层比热	$J/(kg \cdot K)$	d_i	第 i 层介质的厚度	m
T_{env}	环境温度	$^{\circ}C$	T_b	皮肤表面温度	$^{\circ}C$

学模型为非稳态传热模型，控制方程中含有位置和时间项。

5.1.2 传热方式

热力学的三种传热方式分别是：

1. 热传导：

热传导是介质内无宏观运动时的传热现象，其在固体、液体和气体中均可发生，但严格而言，只有在固体中才是纯粹的热传导，而流体即使处于静止状态，其中也会由于温度梯度所造成的密度差而产生自然对流，因此，在流体中热对流与热传导同时发生。主要使用傅里叶定律和热扩散方程定义和计算。^[1]

傅里叶传热定律时热传导基本定律，描述了温度差与热流密度之间的关系，表达式如下：

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad (1)$$

其中， q 为热流密度， λ 为传热系数， $\frac{\partial T}{\partial x}$ 表示在空间节点上的温度差，基于傅里叶定律可建立热传导模型。

2. 热对流：

热对流流体中质点发生相对位移而引起的热量传递过程，其主要特点是只能发生在流体至终，且必然同时伴有流体本身分子运动的导热作用^[2]。结合本次题目所给条件可知，高温试验主要以强迫对流形式实现热传递。

对流传热的基本计算公式是牛顿冷却公式，当流体被加热或冷却时，传热方程如下所示：

$$\Phi = h\Delta t = \begin{cases} h(t_w - t_f) & (\text{流体被加热时}) \\ h(t_f - t_w) & (\text{流体被冷却时}) \end{cases} \quad (2)$$

其中， h 表示表面传热系数。

对于本题，第一层材料与环境接触并与高温环境中的空气发生对流传热。

3. **热辐射**：物体由于热的原因而发出的辐射能的现象成为热辐射，物体之间通过热辐射而交换热量的过程为辐射传热，与导热和对流不同的时，热辐射不需要通过中间介质而远距离传播^[3]。辐射传热主要通过斯泰潘-玻尔兹曼定律计算：

$$E = \varepsilon \sigma T^4 \quad (3)$$

其中， σ 为斯泰潘-玻尔兹曼常数， $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ ， ε 为黑体辐射发射率。

在本题中，辐射传热主要发生在第四层材料与皮肤之间，由于空气层较薄，对于辐射热量的吸收较少，高温作业服辐射发射率较低，于是可以认为传热模型中辐射传热的作用很小，可以忽略不计。

5.1.3 边界条件

常见的边界条件可以分为三类，将 $T(x, y, z, t)$ 记为物体的温度分布函数， Γ 记为物体的边界曲面。

1. **第一类边界条件**：给定边界上的温度值；

$$T(x, y, z, t)|_{(x,y,z) \in \Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (4)$$

2. **第二类边界条件**：给定边界上温度的梯度值，或者给出边界上的热流密度；

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{(x,y,z) \in \Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (5)$$

3. **第三类边界条件**：给定边界物体与周围流体间的表面传热系数和周围流体温度。

$$\left(\frac{\partial T}{\partial n} + \sigma T \right) \Big|_{(x,y,z) \in \Gamma} = f(x, y, z, t) \quad (6)$$

5.1.4 模型维度说明

高温试验中温度在人体和作业服的分布均为三维，结合题目已给条件进行分析，考虑以下假设：

1. 实验中作业服的边界条件为均匀分布，热传递过程垂直于皮肤表面；
2. 实验环境中的高温为均匀热源，热量传递过程也为均匀受热；

基于以上假设前提，于是可将三维模型看作一维传热模型的拓展，因此建立一维传热模型能够有效简化模型。

5.2 传热模型的建立

在该问题中，由于可以忽略模型中的热辐射，并简化为非稳态以为传热模型，仅研究从传热服表面至人体皮肤表面的传热过程，简略的示意图如图 1所示。

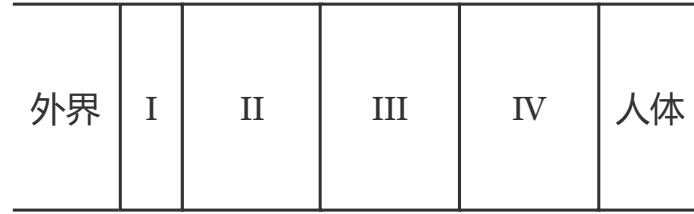


图 1 一维传热模型的示意图

5.2.1 各层间传热方式

由于外界与第I层、第III层与第IV层间介质的物态不同，且各层之间介质之间的热力学性质也不相同，因而需要对每一层的边界条件进行判断。

1. 第I层材料

由于外界为热空气为流体，第一层材料为固体，故第I层材料的边界条件为第三类边界条件，为对流传热过程。而材料内部为传导过程。

2. 第II层材料

第II层材料两边均界为均为固体，仅需要考虑内部的热传导。

3. 第III材料

第III层材料的右边界为固气交界，但由于第四层空气较薄，无法形成有效的空气对流传热，故仅考虑热传导过程。而左边界介质均为固体，仅需考虑内部的热传导。

4. 第IV材料

材料的右边界为人体表皮，血液的流动会带走大量的热量，故右边界的边界条件为第三类边界条件，为对流传热过程。而材料内部为热传导过程。

根据假设，各层之间紧密连接，可以忽略界面热阻，其内部的温度和热流密度均连续，故可以将四层材料转化为同一层不同介质下的材料，对其密度、比热和热传导率进行定义：

$$\{\rho, C_p, \lambda\} = \begin{cases} \{\rho_1, C_{p1}, \lambda_1\} & \text{if } 0 \leq x \leq L_1 \\ \{\rho_2, C_{p2}, \lambda_2\} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_2 \\ \{\rho_3, C_{p3}, \lambda_3\} & \text{if } L_2 \leq x \leq L_3 \\ \{\rho_4, C_{p4}, \lambda_4\} & \text{if } L_3 \leq x \leq L_4 \end{cases} \quad (7)$$

由于该问题涉及不同时间下传热的过程，故为非稳态问题，根据热力学第一定律建立非稳态偏微分方程。

$$\rho C_p \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \right) \quad (8)$$

由于作业服两端均为第三类边界条件，传导的热量均由对流换热带走。在初始状态下，根据假设，作业服各处的温度均为人体温度，作业服两侧的边界条件和初值条件为

$$\begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{env} - \Theta(t, 0)) \\ -\lambda_4 \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 (\Theta(t, L_4) - T_b) \\ T(0, x) = T_b \end{cases} \quad (9)$$

其中， h_1 和 h_2 分别为左端对流传热和右端对流传热的换热系数， T_b 为人体表面温度。

结合以上的分析，建立模型如下：

$$\begin{cases} \text{热传导方程:} & \rho C_p \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \right) \\ \text{边界条件:} & \begin{cases} -\lambda_1 \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=0} = h_1 (T_{env} - \Theta(t, 0)) \\ -\lambda_4 \frac{\partial \Theta(t, x)}{\partial x} \Big|_{x=L_4} = h_2 (\Theta(t, L_4) - T_b) \end{cases} \\ \text{初始条件:} & \Theta(0, x) = T_b \end{cases} \quad (10)$$

5.3 模型求解方法

偏微分方程很少有显式的闭式解。有限元分析方法是一种数值求解偏微分方程的技术。首先，有限元法能够求解几乎任意形状区域上的偏微分方程。其次，该方法非常适合于在大型偏微分方程上使用。对于一个有限元分析，需要一个区域的离散表示，偏微分方程和连接方程和区域的边界条件。

5.3.1 离散区域的构建

在该问题中，由于模型为一维偏微分方程组，通过对时空中连续的状态指定离散化的节点，进而根据变分法和加权等效积分法等，将所有里三单元联系起来，变成一个总的刚度矩阵进行求解，从而给出一个插值函数的解，在多层介质的耦合问题中，有限元方法无论是在精度还是网格的生成上都有较大的优势。

将左边界定为 0，在有限元方法中定义两节点之间最大的间距为 $1 \times 10^{-6} \text{m}$ ，针对不同的介质厚度，节点的个数会有不同的变化。

5.3.2 有限元法的介绍

对于一般的有限差分方法，网格间距通常为定值，使用有限元法的好处之一就是该方法在离散度的选择方面提供了极大的自由（同时包括用于离散空间和离散基函数的单元的离散度选择）。如图 2 中的例子，函数 u （蓝色实线）通过 u_h （红色虚线）进行逼近，后者是线性基函数的线性组合（ i 用黑色实线表示）。线性基函数的系数由 u_0 到 u_7 表示。

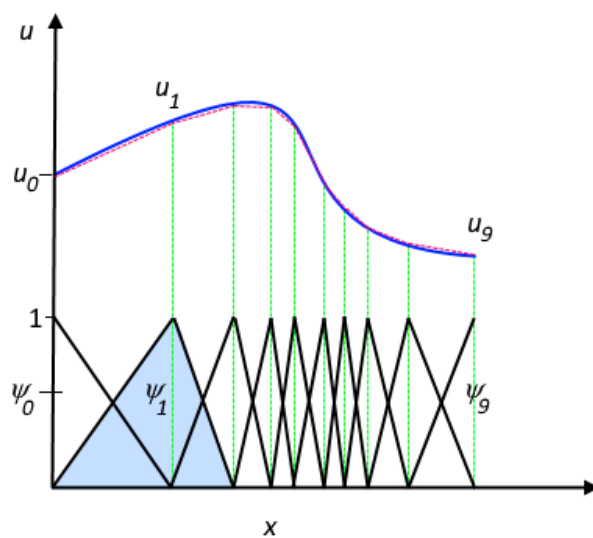


图 2 有限元方法在不同梯度下单元的间距变化

针对不同介质的热力学参数的差异导致的梯度变化,使用有限元法相较于有限差分法,能够更加精细的描绘各边界之间的温度变化,也避免了有限差分法在梯度变化处的振荡现象。

5.3.3 有限元的计算方法：基函数和试函数^[4]

对于一个同时具有时间变量和空间变量的传热方程，有

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k \nabla T) = g(T, t, \mathbf{x}) \quad (11)$$

在稳定状态下，(11) 中的温度场的时间导数为 0. 模型域 Ω 的域方程如 (12)

$$\nabla \cdot (-k \nabla T) = g(T, \mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

此外，假定沿边界的温度一直，热通量的表达式也已知。

首先将方程 (12) 的两边都乘以一个试函数 ϕ ，并在域 Ω 上积分：

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-k \nabla T) \phi dV = \int_{\Omega} g \phi dV \quad (13)$$

使用伽辽金法，假定试函数 ϕ 与方程的解 T 属于希尔伯特空间 \mathcal{H} ，即 $\phi \in \mathcal{H}, T \in \mathcal{H}$. 使用 Green 第一恒等式，得到以下方程：

$$\int_{\Omega} k \nabla T \cdot \nabla \phi dV + \int_{\partial\Omega} (-k \nabla T) \cdot \mathbf{n} \phi dS = \int_{\Omega} g \phi dV \quad (14)$$

若此等式对 \mathcal{H} 中所有试函数均成立，则 (14) 是 (13) 的弱形式公式（变分公式）。

其次，要实现离散化，需要在无限维希尔伯特空间 \mathcal{H} 中找到 (14) 的近似解，如此，有 $T \approx T_h$. 这表明，近似解可以表示成一组属于 \mathcal{H} 子空间的基函数 ψ 的线性组合：

$$T_h(\mathbf{x}) = \sum_i T_i \psi_i(\mathbf{x}) \quad (15)$$

由此，对每个试函数 ψ_j 而言，方程 (14) 的离散化形式即为：

$$\sum_i T_i \int_{\Omega} k \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dV + \sum_i \int_{\partial\Omega} (-k T_i \nabla \psi_i) \cdot \mathbf{n} \psi_j dS = \int_{\Omega} g \left(\sum_i T_i \psi_i \right) \psi_j dV \quad (16)$$

其中的未知数，就是函数 $T(\mathbf{x})$ 的近似解中的系数 T_i . 这样，我们可以将 (16) 转变为一个方程组，该方程组与有限维函数空间具有相同的维度。

一旦体系被离散化并被施加了边界条件后，根据以下表达式就可以得到一个方程组：

$$\mathbf{A} \mathbf{T}_h = \mathbf{b} \quad (17)$$

其中， \mathbf{T} 是未知矢量，且 $\mathbf{T}_h = \{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_i, \dots, \mathbf{T}_n\}$ ， \mathbf{A} 则是一个系统矩阵，如果源函数在温度方面是非线性的，或者传热系数取决于温度，那么该方程组也是非线性的，矢量 \mathbf{b} 就成为了未知系数 T_i 的一个非线性函数。

两个相邻的基函数共享两个三角形的单元。因此，两个基函数之间有一些重叠。但假如两个基函数不共享单元，它们也可能有一个共同的单元顶点。当这基函数重叠时，方程 (16) 具有非零值，且对系统矩阵的贡献也是非零的。当没有重叠时，积分为零，因此对系统矩阵的贡献也为零。

这意味着，在从 1 到 n 的节点上，对 (16) 的方程组中的每个方程来说，它们都只能从共享同一个单元的相邻节点中得到若干个非零的项。方程 (17) 中的系统矩阵 A 变得稀疏，而对于重叠的矩阵分量才有非零项。这一代数方程组的解可以作为该偏微分方程的近似解。网格越稠密，近似解就越接近真实解。

而对于非稳态问题，根据伽辽金方法，每个试函数 ψ_j 的离散弱公式化形式可以写作：

$$\rho C_p \frac{\partial T_i}{\partial t} \sum_i \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dV + \sum_i T_i \int_{\Omega} k \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dV + \sum_i \int_{\partial \Omega} (-k T_i \nabla \psi_i \cdot \mathbf{n}) \psi_j dS = \int_{\Omega} g (\sum_i T_i \psi_i) \psi_j dV \quad (18)$$

在此处，系数 T_i 是时变函数，而基函数和试函数则仅依赖于空间坐标。同时，时间域上的时间导数并非离散的。

所以，我们需要对时间域也使用有限元法。一般来说，可以使用有限差分方法对时间域进行离散化，其最简单的形式可以用下面的差分近似法来表示：

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} \approx \frac{T_{i,t+\Delta t} - T_{i,t}}{\Delta t} \quad (19)$$

(19) 给出的是 (18) 的两个可能的有限差分逼近。当未知系数 $T_{i,t}$ 以 $t + \Delta t$ 的形式表示时，可以得到

$$\rho C_p \left(\frac{T_{i,t+\Delta t} - T_{i,t}}{\Delta t} \right) \sum_i \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dV + \sum_i T_{i,t+\Delta t} \int_{\Omega} k \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dV + \sum_i \int_{\partial \Omega} (-k T_{i,t+\Delta t} \nabla \psi_i \cdot \mathbf{n}) \psi_j dS = \int_{\Omega} g (\sum_i T_{i,t+\Delta t} \psi_i) \psi_j dV \quad (20)$$

在面对线性问题时，在每一个时间步长上都要求解一个线性方程组。如果是非线性的问题，则必须在每个时间步长内求解相应的非线性方程组。由于在 $t + \Delta t$ 处的解是被方程 (20) 隐含地给出的，所以这种时间推进方案被称为隐式法。

第二种方法是基于 t 处的解：

$$\rho C_p \left(\frac{T_{i,t+\Delta t} - T_{i,t}}{\Delta t} \right) \sum_i \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dV + \sum_i T_{i,t} \int_{\Omega} k \nabla \psi_i \cdot \nabla \psi_j dV + \sum_i \int_{\partial \Omega} (-k T_{i,t} \nabla \psi_i \cdot \mathbf{n}) \psi_j dS = \int_{\Omega} g (\sum_i T_{i,t} \psi_i) \psi_j dV \quad (21)$$

该式表明，一旦在某一给定时间上的解 (T_i, t) 已知，那么方程 (21) 就能显式地给出在 $t + \Delta t (T_i, t + \Delta t)$ 处的解。换言之，对于一个显式的时间推进方案，不需要在每个时间步长上都求解一个方程组。时间推进方案被称为显式法。

在对该问题的求解中，我们使用的计算软件会根据具体问题自动在显示和隐式步进法之间切换，同时会根据数值解的时间演化来自动地控制多项式的阶次以及步长。

六、 问题一

高温作业专用服装分为四层，其中第四层为空气层，均有不同的热力学属性。根据上文提出的模型 (10)，需要对其中未知的参数 h_1, h_2 进行辨识。

6.1 问题一的模型建立

首先，对附录二中所给出的假人皮肤外侧的测量温度进行分析，如图 3 所示。

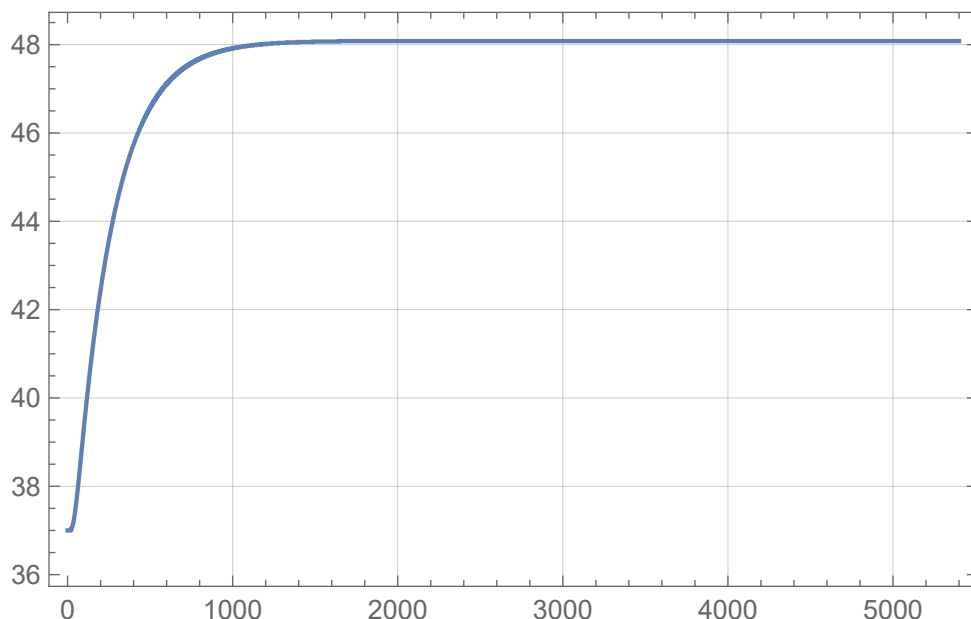


图 3 假人皮肤外侧的测量温度

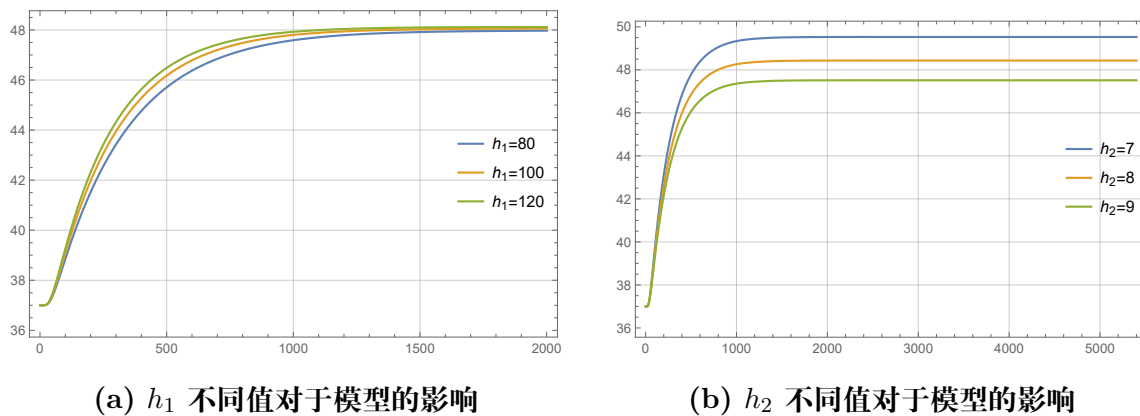
从图中可以看出，从 0 秒到 1000 秒中，假人皮肤表面的温度从 37°C 迅速上升到 48°C 左右并在接下来的几千秒内保持基本不变。

将附件二中的数据转换为温度关于时间的函数 $\Theta^*(t)$ ，题中所给环境温度为 75°C，II 层厚度为 6 mm、IV 层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟。代入已知，通过最小二乘法建立关于左端和右端换热系数 h_1, h_2 的双变量参数估计模型：

$$(\hat{h}_1, \hat{h}_2) = \arg \min_{h_1, h_2} \sum_{t=0}^{5400} [\Theta(t, L_4) - \Theta^*(t)]^2 \quad (22)$$

其中 \hat{h}_1, \hat{h}_2 为 h_1, h_2 的最优估计值。

根据上图 (a) 可知，在其他条件不变的情况下， h_1 初值主要影响高温试验中的传热速度， h_1 的数值越大，传热达到稳态的时间较短，传热的速度越快， h_1 的数值越小，传热达到稳态的时间较长，传热的速度较慢。从而可以推断，左端换热系数对于传热达

图 4 h_1, h_2 的灵敏度分析

到稳态的速度影响较大。

观察图 (b) 可知, 在其他条件不变的情况下, h_2 的初值主要影响高温试验中达到稳态时的温度, h_2 数值越大, 达到稳态时的温度就越低, 反之, h_2 的数值越小, 达到稳态时的温度越高。从而推测, 右端换热系数会对达到稳态时的温度有较大的影响。

6.2 问题一的模型求解

6.2.1 拟牛顿算法

牛顿法属于利用一阶和二阶导数的无约束目标最优化方法。基本思想是, 在每一次迭代中, 以牛顿方向为搜索方向进行更新。牛顿法中的 Hesse 矩阵 HH 在稠密时求逆计算量大, 也有可能没有逆 (Hesse 矩阵非正定)。拟牛顿法提出, 用不含二阶导数的矩阵替代牛顿法中的 Hesse 矩阵的逆, 然后沿搜索方做一维搜索。根据不同的构造方法有不同的拟牛顿法。本文使用的为 BFGS 法。

Algorithm 1 拟牛顿 BFGS 法**输入:**

目标函数 $f(x), g(x) = \delta f(x)$, 初始点 $x_0 = (a_0, b_0)$, 步长 α , 精度要求 $\varepsilon > 0$, 以及初始对称正定阵 $B_0, k = 0$.

- 1: 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$, 若 $\|g_k\| \leq \varepsilon$, 则停止计算, 输出 x_k 作为极小值点;
- 2: 解以下线性方程组得到 d_k , $B_k d_k = -g_k$;
- 3: 求解 α_k , 使得 $f(x_{(k)} + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha \geq 0} f(x_{(k)} + \alpha d_k)$, 更新 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$;
- 4: 根据校正公式确定 B_{k+1} ,

$$B_{k+1} = \begin{cases} B_k & \text{if } y_k^T s_k \leq 0 \\ B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} & \text{if } y_k^T s_k > 0 \end{cases}$$

- 5: 令 $k = k + 1$, 转到步骤 1.

输出:

返回: $x_k = (a_k, b_k)$

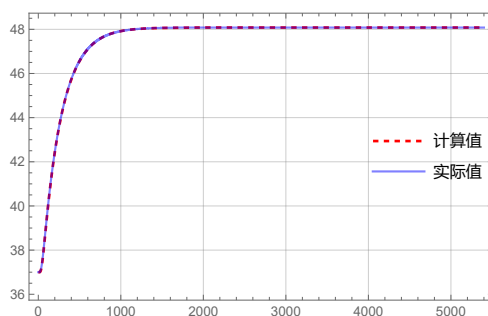
6.2.2 参数求解及结果

使用拟牛顿算法对模型 (22) 进行求解, 经过 17 次迭代后, 得到最优的换热系数以及误差分析如表 2。

表 2 最优换热系数及误差分析表

$h_1/\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	$h_2/\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$	残差平方和	最大误差/ $^{\circ}\text{C}$
120.618	8.366	0.059	0.02

拟合的结果如图 5所示。

**图 5 问题一拟合结果**

6.3 传热的时间-空间图像

通过有限元法计算得到的时间-空间-温度图以及稳态的空间-温度图如图 6:

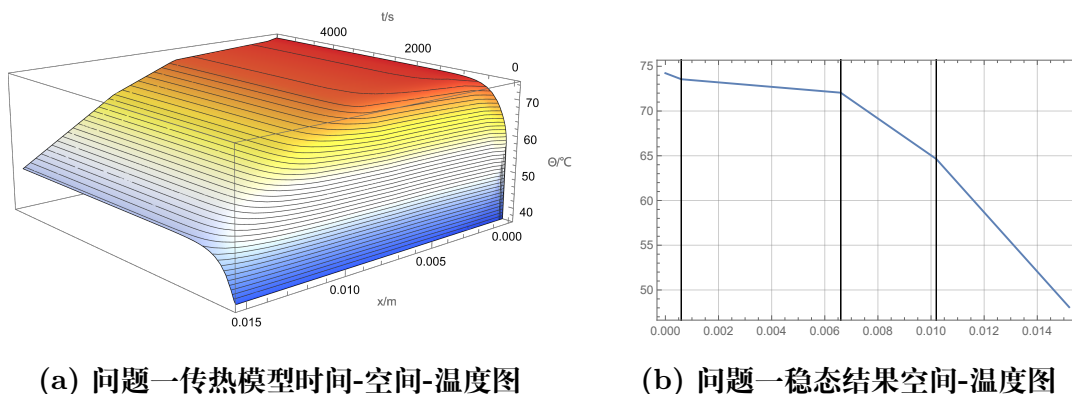


图 6 问题一结果图

七、 问题二

使用问题一中计算出的换热系数, 考虑成本和重量, 并将第二层的厚度作为最小化参数, 重新设计边界条件和初值, 建立单变量优化模型, 以皮肤外侧温度不超过 47°C , 且超过 44°C 的时间不超过 300 秒作为约束条件, 通过求解子问题求解满足条件的高温作业服最优设计。

7.1 问题二的模型建立

记函数 $\Theta(t, x; d)$ 为第二层厚度为 $d = L_2 - L_1$ 时传热方程的解。

由于只需考虑第II层厚度, 而在作业服设计中, 越小的厚度可以带来越小的生产成本和重量, 故优化目标为第II层厚度最小。

对于题中所给的约束条件, 由于外界热源始终存在且温度不变, 随着时间的推移, 在到达稳态前, 作业服各处温度均会随时间上升, 所以约束条件可以转变为:

1. 稳态 (60 分钟) 皮肤外侧温度等于 47°C ;
2. 55 分钟时温度等于 44°C .

即

$$\begin{cases} \Theta(3600, L_4; d) = 47^{\circ}\text{C} \\ \Theta(3300, L_4; d) = 44^{\circ}\text{C} \\ 0.025 \geq d \geq 0.0006 \end{cases} \quad (23)$$

又可以将该条件转化为方程组

$$\begin{cases} \Theta(3600, L_4; d) - 47 = 0 \\ \Theta(3300, L_4; d) - 44 = 0 \\ 0.025 \geq d \geq 0.0006 \end{cases} \quad (24)$$

通过二分法求解 d 的零点并进行比较。

7.2 问题二的模型求解

7.2.1 二分法

由于 d 有给定的区间且需要求方程零点，故使用二分法求解 d 的零点，二分法的算法流程如下。

Algorithm 2 二分法

输入:

精确度 ξ , 区间 $[a, b]$

- 1: 验证 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 若不然, 则停止;
- 2: **while** $|a - b| < \xi$ **do**
- 3: 计算区间 $[a, b]$ 的中点 $c = (a + b) / 2$, 并计算 $f(c)$;
- 4: 若 $f(c) = 0$, 则 c 就是方程的零点;
- 5: 若 $f(a) * f(c) < 0$, 令 $b = c$, 否则, 令 $a = c$;
- 6: **end while**

输出:

零点 c

7.2.2 参数求解过程与结果

根据条件优先级, 首先对于第一约束条件即

$$\begin{cases} \Theta(3600, L_4; d) - 47 = 0 \\ 0.025 \geq d \geq 0.0006 \end{cases} \quad (25)$$

进行条件求解, 根据二分法可计算结果, 该解不存在零点; 其次对于第二约束条件即

$$\begin{cases} \Theta(3300, L_4; d) = 44^\circ\text{C} = 0 \\ 0.025 \geq d \geq 0.0006 \end{cases} \quad (26)$$

利用二分法进行求解, 取以上两个条件解的范围集合并以最小厚度作为第二层作业服的最优厚度。

最终得到第二层的最优厚度为：17.591 mm. 在该厚度下，60 分钟时皮肤表层的温度为 44.078°C，且温度大于 44°C 的时间为 299 秒 (4 分 59 秒)，满足题中约束。根据该结果可列出表 3：

表 3 最优厚度及温度分析表

最优厚度	60 分钟时体表温度/°C	温度大于 44/°C 时间
最优解： 17.591	44.078°C	299 秒

通过有限元法计算得到的时间-空间-温度图以及稳态的空间-温度图如下：

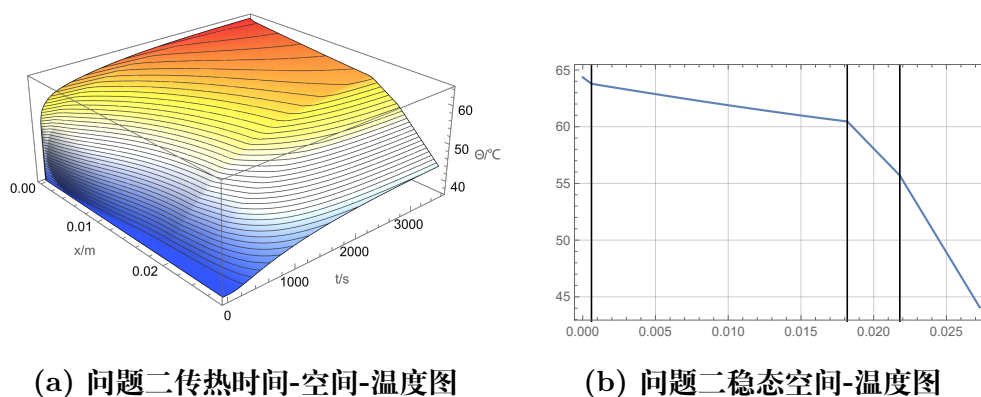


图 7 问题二结果图

八、 问题三

与问题二类似，问题三中需要对第II和II层的厚度进行参数辨识。根据题中所给的两个关于温度和时间约束，同时考虑作业服的制造成本与重量，建立多目标优化模型，经分析后使用线性规划模型求解最优厚度。

8.1 问题三的建立

记函数 $(t, x; d_2, d_4)$ 为第二、四层厚度为 $d_2 = L_2 - L_1$ 、 $d_4 = L_4 - L_3$ 时传热方程的解。

对于题中所给的约束条件由于外界热源始终存在且温度不变，随着时间的推移，在到达稳态前，作业服各处温度均会随时间上升，所以约束条件可以转变为

1. 稳态 (30 分钟) 皮肤外侧温度等于 47°C;
2. 25 分钟时温度等于 44°C。

将该条件转化为方程组，即

$$\begin{cases} \Theta(1800, L_4; d_2, d_4) - 47 = 0 \\ \Theta(1500, L_4; d_2, d_4) - 44 = 0 \\ 0.0006 \geq d_2 \geq 0.025 \\ 0.0006 \geq d_4 \geq 0.064 \end{cases} \quad (27)$$

8.1.1 优化目标

首先, 为了满足成本和重量等因素, 问题三的主要目标是找到第二层和第四层厚度之和最小的参数值, 即

$$\min d_2 + d_4 \quad (28)$$

其次, 由于题中所给条件中, 第IV层为空气层, 而第II层的密度远大于空气, 为降低防护服总体重量, 并减少生成成本, 需要尽可能最大化第IV层的厚度 (也即尽量最小化第II层的厚度), 即

$$\max d_4 \quad \text{or} \quad \min d_2 \quad (29)$$

综上, 建立多目标优化模型如下:

优化目标:

$$\begin{cases} \min d_2 + d_4 \\ \min d_2 \end{cases} \quad (30)$$

使得

$$\begin{cases} \Theta(1800, L_4; d_2, d_4) - 47 = 0 \\ \Theta(1500, L_4; d_2, d_4) - 44 = 0 \\ 0.0006 \geq d_2 \geq 0.025 \\ 0.0006 \geq d_4 \geq 0.064 \end{cases} \quad (31)$$

8.2 问题三的模型求解

8.2.1 线性规划

根据以上所建立的非线性规划模型求最优解, 与问题二类似, 分别根据各个约束条件得到解的范围取交集, 得到可行解集。

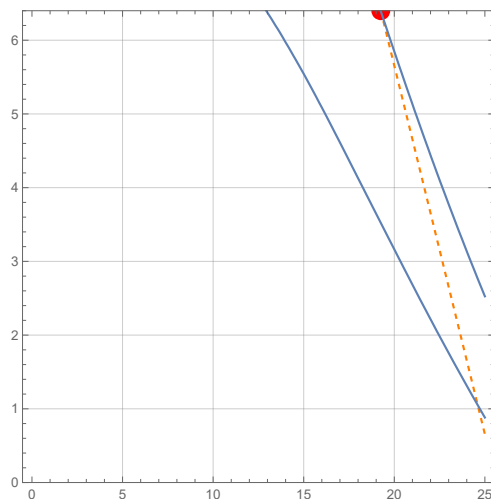
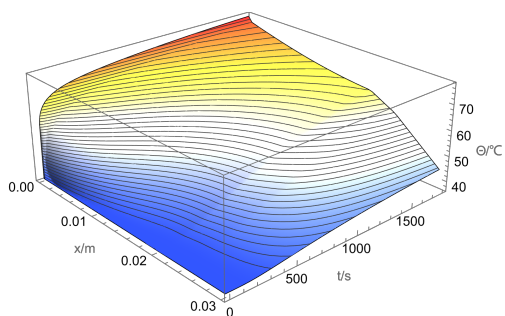
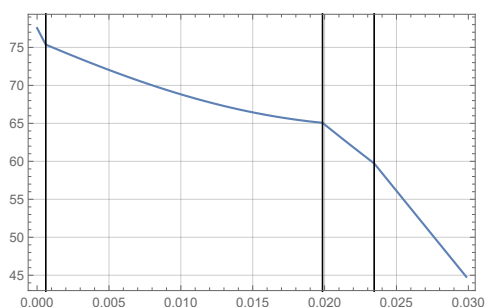


图 8 线性规划求解过程

得到约束方程的可行解集，观察结果的可行解范围，可将其看作是线性规划求解问题。根据目标函数的表达式可画出目标直线（虚线），在本题中，图 8 标记红点处即为目标函数在可行解中的最小值即最优解：第二层的厚度为 **19.255 mm**，第四层的厚度为 **6.4 mm**。在该厚度下，30 分钟时皮肤表面的温度为 44.799°C ，且温度大于 44°C 的时间为 299 秒（4 分 59 秒），满足题中约束。传热温度分布结果如图 9：



(a) 问题三传热时间-空间-温度图



(b) 问题三稳态空间-温度图

图 9 问题三结果图

参考文献

- [1] 百度百科【百度百科·热传导】百度百科·热传导 [EB/OL] (2021-8-30)[2021-8-30].<https://baike.baidu.com/item/热传导>
- [2] 百度百科【百度百科·热对流】百度百科·热对流 [EB/OL]
<https://baike.baidu.com/item/热对流>
- [3] 百度百科【百度百科·热辐射】百度百科·热辐射 [EB/OL]
<https://baike.baidu.com/item/热辐射>
- [4] COMSOL【有限元法 (FEM)】有限元法 (FEM) 详解 [EB/OL]
<http://cn.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>