

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2021 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

承 诺 书

我们仔细阅读了《全国大学生数学建模竞赛章程》和《全国大学生数学建模竞赛参赛规则》（2019 年修订稿，以下简称为“竞赛章程和参赛规则”，可从全国大学生数学建模竞赛网站下载）。

我们完全清楚，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式，包括电话、电子邮件、“贴吧”、QQ 群、微信群等，与队外的任何人（包括指导教师）交流、讨论与赛题有关的问题；无论主动参与讨论还是被动接收讨论信息都是严重违反竞赛纪律的行为。

我们完全清楚，抄袭别人的成果是违反竞赛章程和参赛规则的行为；如果引用别人的成果或资料（包括网上资料），必须按照规定的参考文献的表述方式列出，并在正文引用处予以标注。

我们以中国大学生名誉和诚信郑重承诺，严格遵守竞赛章程和参赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛章程和参赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们授权全国大学生数学建模竞赛组委会，可将我们的论文以任何形式进行公开展示（包括进行网上公示，在书籍、期刊和其他媒体进行正式或非正式发表等）。

我们参赛选择的题号（从 A/B/C/D/E 中选择一项填写）： A

我们的报名参赛队号（12 位数字全国统一编号）： 202120006046

参赛学校（完整的学校全称，不含院系名）： 桂林电子科技大学

参赛队员（打印并签名）：1. 张滢

2. 江海瑶

3. 谭前程

指导教师或指导教师组负责人（打印并签名）： 数模组

（指导教师签名意味着对参赛队的行为和论文的真实性负责）

日期： 2021 年 9 月 12 日

（请勿改动此页内容和格式。此承诺书打印签名后作为纸质论文的封面，注意电子版论文中不得出现此页。以上内容请仔细核对，如填写错误，论文可能被取消评奖资格。）

赛区评阅编号（由赛区组委会填写）：

2021 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

编 号 专 用 页

赛区评阅记录（可供赛区评阅时使用）：

评 阅 人						
备 注						

送全国评阅统一编号（由赛区组委会填写）：

全国评阅随机编号（由全国组委会填写）：

（请勿改动此页内容和格式。此编号专用页仅供赛区和全国评阅使用，参赛队打印后装订到纸质论文的第二页上。注意电子版论文中不得出现此页。）

射电望远镜主动反射面的最优调整

摘要

FAST 大口径射电望远镜是目前世界上单口径最大的、精度最高的射电望远镜，其通过了主动反射面系统实现高精度的指定跟踪。因此，优化反射面板的形状调整策略是提高望远镜精准度的重要前提。本文主要讨论工作态反射面板节点的位置调整策略：

针对问题一，当待观测星体位于基准球面正上方时，可根据题目所给信息建立主动反射面、馈源舱等物体的相对位置关系，考虑球面和抛物面各向同性，将三维问题转化为二维模型，通过几何推导得到以理想抛物面顶点位置为参数的方程。为了使得工作态前后节点的距离最小，以最小位移作为目标优化函数，反射面调整条件作为约束，建立节点径向调整模型，并利用内点法对参量进行求解，最终得到的理想抛物面为 $y = \frac{x^2 + y^2}{560.762} - 300.39$ 。

针对问题二，当待观测星体的方位角 α 和仰角 β 分别指定为 36.795° 和 78.169° 时，根据待测天体与照明区域的几何关系，对所有节点进行遍历筛选，得到所有位于照明区域内的节点。为减少计算复杂度，利用旋转矩阵对当前坐标轴进行线性变换，将主索节点变化为。在计算主索节点工作状态前后的径向位移中引入位移偏差量，建立抛物线顶点位置与节点径向伸缩量的单变量方程，以抛物面与节点位移的均方根误差最小作为优化目标，利用牛顿法进行求解。计算结果通过逆变换后得到最终节点的坐标，其中，筛选得到节点的数量为 699 个，顶点的坐标为 $(-49.32, -36.8894, -294.018)$ 。

针对问题三，对离散的反射平面建立了信号反射模型，通过考虑每块反射平面的法向量、入射信号、出射信号与馈源平面的关系，计算出各平面上信号经过反射后投影至馈源平面上的位置和面积。将问题二中给出的工作抛物面调节方案和各主索节点的坐标代入信号反射模型，得到了问题二中工作抛物面的信号比为 1.14%，且馈源舱圆盘 100% 接受到了所有反射平面射到馈源圆盘信号。与此相对的基准球面，其信号比仅为 0.76%，且平均每个反射三角形仅射到盘面的 67.71%。因此，该工作抛物面的性能要好于基准球面。

最后，我们评价了三个问题中模型的优缺点，并给出了改进的思路。由于大量运算是基于代数几何，以上模型能够很好的对不同大小的射电望远镜以及不同方位的星体，具有较好的通用性。

关键字： 反射变换模型 单变量优化模型 内点法 旋转矩阵变换 信号反射模型

一、问题重述

1.1 问题背景

500 米口径球面射电望远镜 (Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope, FAST) 工程被誉为“中国天眼”，在其设计方案中采用了主动反射面的概念。主动反射面的原理是通过动态调整策略不断地改变反射面板的位置，使反射面的馈源照明部分能够实时地调整成高精度的旋转抛物面，在实际工作状态下，对于不同位置的天体，除了反射面板整体要达一个理想抛物面之外，还需要反射尽可能多的天体电磁波，建立不同天体的 FAST 工作抛物线模型，并应用模型求解理想的抛物面。

主动反射面具有两个状态，分别是基准状态与工作状态。当反射面处于基准态时，反射面是一个半径 $R = 300m$ ，口径 $D = 500m$ 的球面即基准球面；当作为工作状态时，形状将会被调整为一个口径约为 300 米的抛物面。基准球面与馈源舱接收平面是同心圆，其半径差为 $F = 0.466R$ 。基准球面上的局部反射板可以被调整为一个近似旋转抛物面，馈源舱接受平面的中心即为焦点。

主动反射面共有主索节点、节点间连接主索和反射面板 2226 个、6525 根和 4300 块，在反射面板调节中，径向伸缩范围为 $-0.6 \sim +0.6m$ ，促动器伸缩基准球面球面径向趋向球心方向为正向，以基准球面球心作为原点，主索节点调节后导致相邻节点的变化幅度不超过 0.07%。

根据以上已知信息与限制条件，根据问题建立数学模型，并设计求解方法解决如下问题：

1. 天体 S 方位角 α 为 0° ，仰角 β 为 90° ，结合题目已给信息与反射面板调节情况，建立理想抛物面模型。
2. 天体的方位角 α 为 36.7° ，仰角 β 为 78.169° ，建立理想抛物面与反射面板调节模型，使得反射面板能够最接近与理想抛物面，计算抛物面顶点坐标以及调节之后反射面 300 米口径内的主索节点编号、坐标，以及给出各促动器的伸缩量。
3. 在问题二所设计的反射面调节方案基础上，分别计算基准反射球面信号接受比与调节后馈源舱的信号接受比，并作出对比分析。

二、问题分析

2.1 问题一分析

首先，根据题目所给的待测天体、主反射面、基准球面与馈源舱的位置关系，利用几何知识将问题转化为二维，建立主反射面的变化策略模型，从而得到关于理想抛物面

顶点位置为参数的方程。其次需要对理想抛物面进行量化,由于主索节点位置径向变化量总和越小越好,于是以总索长变化最小作为目标函数,以题目所给对反射面板调节规则作为约束条件,经过优化参数得到最优的主反射面变位策略,利用内点法进行求解单变量优化问题,得到理想抛物面的顶点位置以及理想抛物面方程。

2.2 问题二分析

由于本问题中待测天体不再是位于基准球面正上方,而是指定了待测天体的方位角与仰角,则可根据待测天体与照明区域口径的几何关系得到调节后反射面 300 米口径的主索点;为了减少后续建模的计算复杂度,需要利用旋转矩阵对这些节点进行坐标变换,使得照明区域内节点正对馈源舱。

其次,引入工作状态前后主索节点的位移偏差向量,建立径向伸缩量与抛物线顶点的单变量方程;在第一问已有模型的基础上,以均方根误差最小作为目标优化函数,结合已给反射板调节约束条件,利用牛顿法进行计算求解位移偏差量,从而计算下拉索径向伸缩量与抛物面顶点位置。最后对节点坐标进行旋转矩阵的逆变换得到各节点的坐标。

2.3 问题三分析

问题三基于问题二中给出的工作抛物面调节方案,需要分别计算基准球面与工作抛物面反射信号至馈源舱的接收比,并将两者进行进行比较。根据接受比的定义,将接收比分别理解为每个平面反射信号占总反射信号的比与每个平面反射信号占馈源圆盘的比。通过计算每个平面的法向量,可以计算出入射信号和出射信号的关系,并以此得到信号反射至馈源舱平面上的坐标和面积,并与馈源舱圆盘的面积进行比较,可以得到题中给出的信息比的结果。

三、 模型假设

- 假设 1: 面板是无孔且不影响天体电磁波的反射;
- 假设 2: 电磁波信号是直线传播且传播方向为平行传播;
- 假设 3: 认为反射面板之间不产生二次反射;
- 假设 4: 相邻节点之间的距离不发生改变。

四、符号说明

表 1 本文所用的主要符号以及其描述和单位

符号	描述	符号	描述
α	方位角	β	仰角
R	基准球面半径	f	焦径比
F	两同心圆的半径差	P	两倍焦距
h	抛物面顶点与基准面的相对位置	L_i	第 i 个节点的位移量
L_{OM}	原点 O 到 M 点的欧几里得距离	L_{ON}	原点 O 到 N 点的欧几里得距离
\mathbf{n}	法向量	R	旋转矩阵
Δ_c	照明区域内节点的偏差分布向量	δ_c	主索节点与理想抛物面的距离

五、模型建立与求解

5.1 问题一的模型建立

5.1.1 旋转抛物面的确定

反射面基准球面在按拟定的理想抛物面逐渐变化成瞬时抛物面时，主索节点位移沿着球心的方向（径向）进行变化，主索节点在径向上的位移量与瞬时抛物面的变形策略有关，抛物面方程的焦比 $f = F/R$ ，抛物面顶点与基准球面的相对位置 h 决定变形策略，由于球面和抛物面都具有各向同性特点^[1]，所以分析变形策略时，可以将问题简化到二维空间，用圆弧代替基本球面、用抛物线代替抛物面。现在以基准球面球心作为坐标原点，圆弧和抛物面方程如下，球的半径为 $R = 300m$ 且抛物面的口径也等于 $D_p = 300m$ ，如图 1：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ x^2 + 2Py + 2P(R + h) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中 P 是馈源舱中点至基准球面底点的距离。可以解得：

$$y = \frac{x^2}{4(F + h)} - (R + h) \quad (2)$$

由于 F 与 R 已知，故该旋转抛物面的变化仅与抛物面顶点与基准球面的相对位置 h 决定。通过调整 h 的值，可以得到满足焦距条件的一簇旋转抛物面。根据^[2]等人的研究，

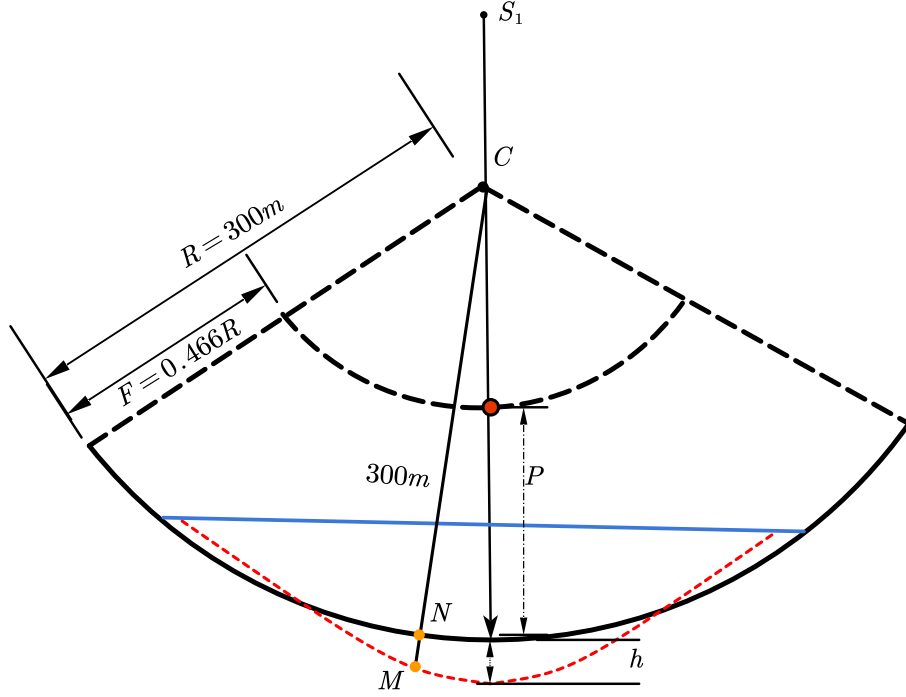


图 1 主动反射面示意图

主索节点的变形策略影响理想抛物面的选择。

5.1.2 径向上主索点的位移模型

一般来说，主索节点的变形策略有如下几个^[3]：

1. 主索节点径向位移最小；
2. 抛物面弧长与切面弧长差最小；
3. 抛物面边缘与球面平滑过渡。

因为圆弧与抛物线都关于 y 轴对称，所以只需研究左侧的节点变化情况。抛物线的口径等于 $300m$ ，取一条由原点 O 出发的射线，分别交球面以及抛物面于 M 点和 N 点（如图 1），设该射线与 x 轴的夹角为 θ ，其中 θ 的步长为 $\frac{\pi}{360}$ 则可以得到该射线公式为

$$y = x \tan \theta, \theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad (3)$$

因为促动器在理想状态下沿径向伸缩，所以主索节点的位移轨迹也沿径向运动。设主索节点 N 位移后距离球心 L_{OM} ，主索节点 N 位移后距离球心 L_{ON} ，节点沿径向方向所产生的位移为 L_x 。

$$L_x = L_{ON} - L_{OM} \quad (4)$$

联立方程 (3) 和 (4)，以及抛物线方程可得方程 $y = \tan \theta x$ 与方程 $y = \frac{x^2}{4(f+h)} - (R+h)$

的交点 $P_1(x_1, y_1)$:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{300}{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}} \\ y_2 = -\frac{300 \tan(\theta)}{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}} \end{cases} \quad (5)$$

通过欧几里得距离可求出 $O(0,0)$ 点和与 $M(x_1, y_1)$ 之间的距离 L_{OM}

$$L_{OM} = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} \quad (6)$$

联立方程 (3) 和 (4), 以及圆的方程可得方程 $y = \tan\theta x$ 与方程 $y = \frac{x^2}{4(f+h)} - (R+h)$ 的交点 $P_2(x_2, y_2)$:

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{5}(-2) \left(\sqrt{(5h+699)((5h+699)\sec^2(\theta)+801)} - (5h+699)\tan(\theta) \right) \\ y_2 = \frac{2}{5}\tan(\theta) \left((5h+699)\tan(\theta) - \sqrt{(5h+699)((5h+699)\sec^2(\theta)+801)} \right) \end{cases} \quad (7)$$

通过欧几里得距离可求出 $O(0,0)$ 点和 $N(x_2, y_2)$ 之间的距离 L_{ON}

$$L_{ON} = \sqrt{(x_2 - 0)^2 + (y_2 - 0)^2} \quad (8)$$

为得到理想的抛物面, 且得到最优的变形策略, 对所有的变形策略进行分析, 从主索节点径向位移最小即促动器工作行程最短考虑, 可得最优化目的为:

$$\arg \min_h \sum_{i=1}^i L_i(h), n \in [1, 2, \dots, 60] \quad (9)$$

由于求解这个离散问题的精度取决与 θ 的步长, 而降低步长会显著增加计算复杂度, 故将该问题等效转化为一个连续性问题, 通过计算抛物面与球面间的面积^[1], 从而确定理想抛物面抛物面顶点与基准球面的相对位置 h 。

$$\arg \min_h \int_{-150}^0 \left| -x\sqrt{R^2 - x^2} - \frac{x^2}{4 * (F + h)} + R + h \right| dx \quad (10)$$

通过求解这个单目标优化问题进而得到抛物面顶点与基准面的相对位置 h 的值, 我们将变量 h 、 F 等代入 (2) 中, 就可以得到理想抛物面的方程。

5.2 问题一模型求解

在问题一中, 馈源舱的 z 轴坐标为 $R - F = 300 - 0.466 * 300 = 160.2$, 口径 D 为 $300m$ 。

5.2.1 内点法

为了求解单变量优化问题中的参数, 我们使用常用的内点法对参量进行求解, 内点算法通过利用障碍函数组合约束条件和目标函数来求解约束优化问题. 具体来说, 一般约束最优化问题首先转换为标准格式

$$\begin{aligned} & \text{Min } f(x) \\ & \text{s.t. } h(x) = 0, x \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

然后非负约束条件通过在目标函数上增加了障碍项来取代,

$$\begin{aligned} \text{Min } \psi_\mu(x) &:= f(x) - \mu \sum \ln(x_i) \\ \text{s.t. } h(x) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mu > 0$ 是一个障碍参数.

必要的 KKT 条件 (例如, 假设梯度 h 是线性无关的) 为

$$\begin{aligned} \nabla \psi_\mu(x) - y^T A(x) &= 0 \\ h(x) &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $A(x) = (\nabla h_1(x), \nabla h_2(x), \dots, \nabla h_m(x))^T$ 的维度是 $m \times n$. 或者

$$\begin{aligned} g(x) - \mu X^{-1}e - y^T A(x) &= 0 \\ h(x) &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

这里 X 是一个对角矩阵, 如果 $i \in I$ 其对角线元素 i 的值为 x_i , 否则为 0. 引进对偶变量 $z = \mu^{-1}e$, 则

$$\begin{aligned} g(x) - z - y^T A(x) &= 0 \\ h(x) &= 0 \\ ZXe &= \mu e \end{aligned} \quad (15)$$

该非线性系统可以通过牛顿法求解. 设 $L(x, y) = f(x) - h(x)^T y$, $H(x, y) = \nabla^2 L(x, y) = \nabla^2 f(x) - \sum_{i=1}^m y_i \nabla^2 h_i(x)$, (15) 的雅克比矩阵为

$$\begin{pmatrix} H(x, y) & -A(x)^T & -I \\ -A(x) & 0 & 0 \\ Z & 0 & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g(x) - z - y^T A(x) \\ -h(x) \\ ZXe - \mu e \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d_\psi \\ -d_h \\ d_{xz} \end{pmatrix} \quad (16)$$

由于 $\delta z =$, 有 $[H(x, y) + X^{-1}Z] \delta x - A(x)^T \delta y = -d_\psi - X^{-1}d_{xz}$, 因此 (16) 可以化简为:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H(x, y) + X^{-1}Z & -A(x)^T \\ -A(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} d_\psi + X^{-1}d_{xz} \\ -d_h \end{pmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} g(x) - A(x)^T y - \mu X^{-1}e \\ -h(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

因此, 非线性约束问题可以通过如下方法迭代地求解

$$x := x + \delta x, y := y + \delta y, z := z + \delta z \quad (18)$$

其搜索方向 $\{\delta x, \delta y, \delta z\}$ 由求解前面的雅克比方程组 (17) 得到.

将问题一中数据代入 (10), 使用内点法对 h 进行求解, 在 9 次迭代后, 求得 $h = 0.390m$. 此时主动反射面的径向位移如图 2 所示:

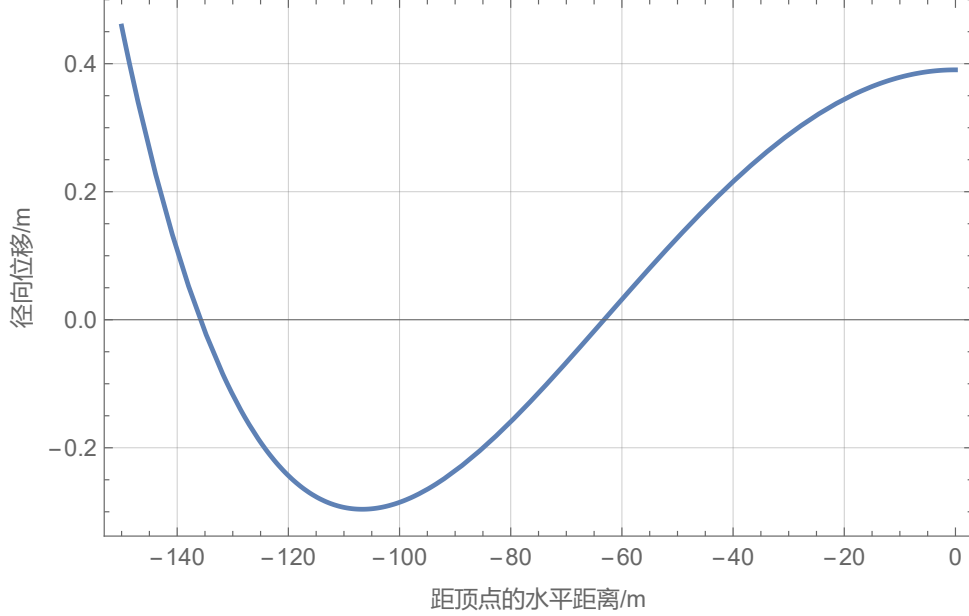


图 2 径向位移图

最终得到理想抛物面为:

$$y = \frac{x^2 + y^2}{560.762} - 300.39 \quad (19)$$

5.3 问题二的模型建立

5.3.1 照明区域内主索节点选取

当天体的方位角 α 为 36.795° , 仰角 β 为 78.169° 时, 由于照明区域时以口径 300 的近似旋转抛物面, 于是需要在 2226 个主索节点中选取位于该口径内的所有主索节点。根据位置关系与几何分析可知, 口径内的主索节点位于切平面以下, 其中切平面 Γ 的法向量方向指向被观测天体, 记切平面与基准球心 C 的距离 d_Γ , 主反射面与基准球体的剖面见图 3:

分析位置关系, 记平面 Γ 的法向量为 \mathbf{n} , 则由平面 Γ 的法向量与待观测星体的方位角 α 仰角 β 关系如下所示:

$$\mathbf{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha, \tan \beta) \quad (20)$$

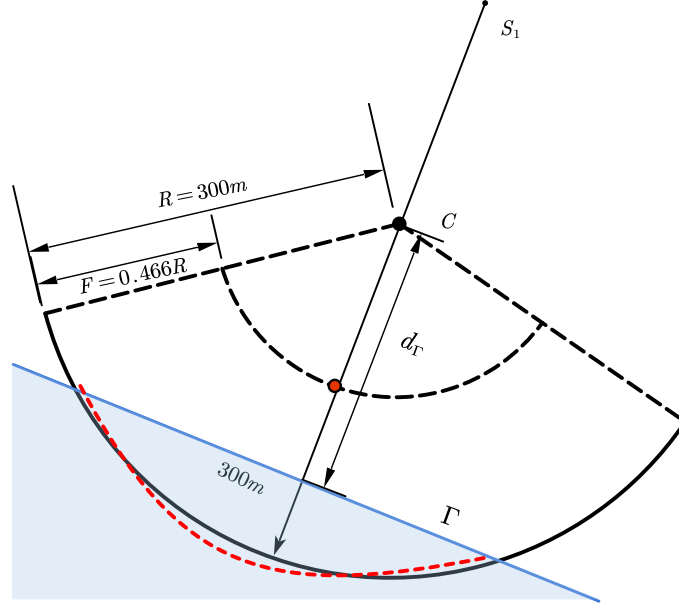


图 3 切平面与基准球面剖面示意图

设平面 Γ 表达式为: $Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 $A = \cos \alpha, B = \sin \alpha, C = \tan \beta$. 由题目所给信息可知, 又因为基准球半径 $R = 300$, 基准球心作为坐标原点, 根据勾股定理容易求得基准球心与平面 Γ 的距离. 关系式如 (21)

$$D = d_{\Gamma} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (21)$$

其中 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

在照明区域内的每一个主索节点的坐标 (x_i, y_i) 都满足以下条件:

$$Ax_i + By_i + Cz_i + D \leq 0 \quad (22)$$

对附件所给的全部节点进行遍历, 从而计算得到位于照明区域内的所有主索节点。

5.3.2 节点坐标的线性变换

由于在本题中的待测天体的方位角 α 为 36.795° , 仰角 β 为 78.169° , 为了简化计算, 则需要对节点进行坐标变换, 根据已知方向角与俯仰角, 以坐标系的三个坐标轴 x, y, z 分别作为旋转轴, 并借助旋转矩阵进行坐标的变换^[4]。

绕 z 轴进行逆时针旋转 θ_1 角度时, 记 $R_z(\theta_1)$ 为旋转矩阵, 则满足下列等式:

$$R_z(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$z' = R_z(\theta_1)z$$

绕 y 轴进行逆时针旋转 θ_2 角度时, 记 $R_y(\theta_2)$ 为旋转矩阵, 则满足下列等式:

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$y' = R_y(\theta_2)y$$

绕 x 轴进行逆时针旋转 θ_3 角度时, 记 $R_x(\theta_3)$ 为旋转矩阵, 则满足下列等式:

$$R_x(\theta_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 \\ 0 & \sin \theta_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$x' = R_x(\theta_3)x$$

三维旋转矩阵可通过公式 (23) (24) (25) 相乘得到, 于是在旋转后的新坐标可表示为:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$W = R_x(\theta_3)R_y(\theta_2)R_z(\theta_1)$$

5.3.3 主索节点坐标的精度调整

在基准态时球面上一点记为 $M(x, y, z)$, 在工作态时被调节为抛物面后的点记为 $N(x_0, y_0, z_0)$, 指向球心的单位向量为 $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T$, 记 d 为偏差量, 满足 $d = MN$, 当节点 M 位于调整抛物面的内侧时取正值, 在抛物面的外侧时取负值, 于是 N 的坐标可由下式表示^[5]:

$$\begin{cases} x_0 = x + p_x d \\ y_0 = y + p_y d \\ z_0 = z + p_z d \end{cases} \quad (27)$$

其中, 向量 \mathbf{p} 称为主索节点 M 的参考方向, 向量 $\mathbf{d} = \mathbf{p}d$ 称为主索节点 M 的偏差向量。

由于工作态反射面为旋转抛物面, 所以 M 点经过调整后的到的 N 点位于工作抛物面上, 于是 N 满足理想抛物面方程 (2), 从而解得偏差量 d 的表达式:

$$z + p_z d = -\frac{(x + p_x)^2 + (y + p_y)^2}{4(F + h)} - 300 - h \quad (28)$$

其中, $F = 0.466R$, $R = 300$, 上式可知, 只要求出理想抛物面参数的 h , 即可计算得到偏差量 d , 从而得到工作状态时在照明区域内的主索点坐标。另外, d 的实际意义是每个主索点的径向伸缩量。

为了使得工作状态的主索网能够最接近理想抛物面, 设置优化的目标函数为主索节点表面与理想抛物面的均方根误差最小^[1], 均方根误差计算式如下:

$$\delta_c = \sqrt{\Delta_c^T \Delta_c / n} \quad (29)$$

其中, n 表示在照明区域内的总节点个数, Δ_c 是照明区域内节点的偏差分布向量, 满足 $\Delta_c = [d_{c1}^T, d_{c2}^T, \dots, d_{cn}^T]^T$, δ_c 表示主索节点与理想抛物面的距离。

综上可知, 目标优化函数为

$$\arg \min_h \delta_c(h) = \sqrt{\Delta_c^T \Delta_c / n} \quad (30)$$

5.4 问题二的模型求解

首先, 当天体的方位角 α 为 36.795° , 仰角 β 为 78.169° 时, 根据 (20) 和 (21) 可知, 切平面 Γ 的表达式为

$$0.800784x + 0.598954y + 4.77383z + 1267.2 = 0 \quad (31)$$

照明区域内的主索节点均满足:

$$0.800784x + 0.598954y + 4.77383z + 1267.2 \leq 0 \quad (32)$$

通过对全部主索节点进行遍历, 选取出满足条件即位于照明区域内的所有主索节点, 示意图见图 4。经过计算的到照明区域内含有 **699** 个节点, 如: A_0, B_1, C_1 等, 节点编号已写入附件 4。

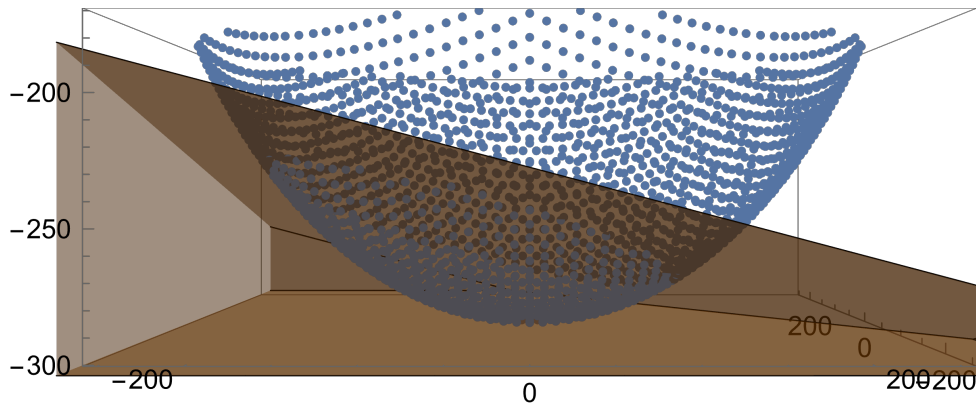


图 4 筛选照明区域内节点过程示意图

由于已知待测天体的方位角 α , 仰角 β 已知, 于是根据 (26) 对照明区域内的主索节点进行坐标的线性变换, 计算得到的旋转矩阵 W 为:

$$W = \begin{bmatrix} 0.98637 & -0.010189 & 0.164181 \\ -0.010189 & 0.992379 & 0.122801 \\ -0.164181 & -0.122801 & 0.9787 \end{bmatrix} \quad (33)$$

照明区域内的 699 个主索节点坐标变换前后进行对比的可视化图像见图 5, 其中黄色区域表示节点坐标旋转之前的位置, 蓝色区域表示节点经过坐标旋转之后的位置。

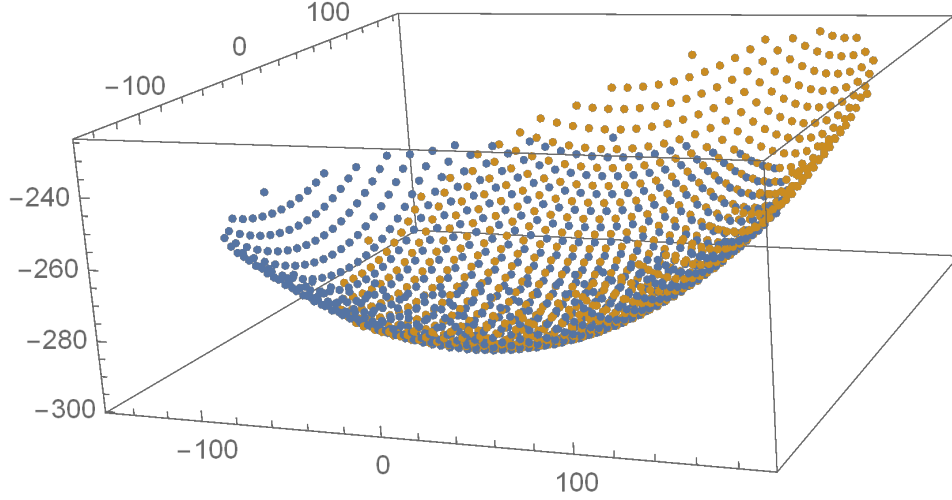


图 5 照明区域内主索节点坐标变换

以最小均方误差 (29) 为优化目标, 利用牛顿法进行求解得到使得均方误差达到最小值时的 h . 根据导数性质, 以当前函数值下降的方向作为计算中迭代的方向。在一维情形中, 对于需要优化的函数 $\delta_c(h)$ 求极值问题转变为使目标函数导数值 $\delta'_c(h)=0$. 牛顿法的更新公式为:

$$x = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (34)$$

牛顿法的算法流程如下:

Algorithm 1 牛顿法

输入:

终止误差 ϵ , 初始点 x_0 , $k = 0$

- 1: 计算 $g_k = \nabla f(x_k)$, 若 $\|g_k\| \leq \epsilon$ 则停止
- 2: 计算 $|a - b| < \xi$
- 3: 计算 $G_k = \nabla^2 f(x_k)$, 并求解线性方程组得到搜索方向 $d_k: G_k d = -g_k$;
- 4: 令 $x_{k+1} = x_k + d_k$, $k = k + 1$, 并转到步骤 1;

输出:

x_k

利用牛顿法求解, 最优解为 $h = 0.802$. 不同 h 下均方误差的值如图 6所示, 由于考虑到径向伸缩的约束条件即 $h \in [-0.6, 0.6]$, 于是取 $h = 0.6$, 此时的均方误差 $MSE = 0.298667$.

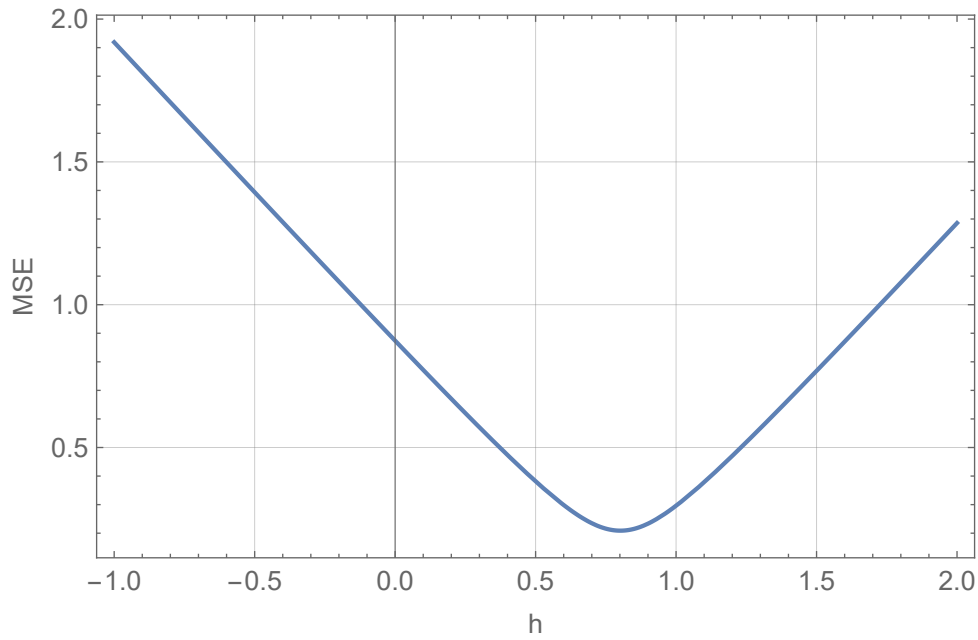


图 6 均方误差最小为目标的计算过程

由公式 (28) 计算得到偏差量 d , 再经坐标系逆变换, 计算得到理想抛物线顶点坐标为: $(-49.32, -36.8894, -294.018)$. 各主索节点的坐标和下拉索的伸缩量已填入附件 4.

5.5 问题三的建立

问题三基于问题二中给出的工作抛物面调节方案, 计算调节后馈源舱的接收比, 并与基准反射球面的接收比进行比较。接受比的定义为馈源舱有效区域接收到的反射信号与 300 米口径内反射面的反射信号之比。对于该定义, 可以得到两个相对合理的解释:

1. 每个被馈源舱接受的平面反射信号占总反射信号的比: 对于每一个反射面反射出的信号, 计算投影至馈源舱圆盘上的面积并求和, 再计算每一块反射面投影至馈源舱圆盘平面上的面积并求和, 将这两个面积作比, 记为接收比。
2. 每个平面反射信号占馈源圆盘的比: 对于一个反射面反射出的信号, 计算投影值至馈源舱圆盘的面积, 并域馈源盘面面积相比, 求和后作平均, 记为接收比。

由于本题中信号可视为直线传播和反射, 使用光线渲染软件对类似的场景进行预模拟, 得到的抛物面上方的信号分布如图 7:

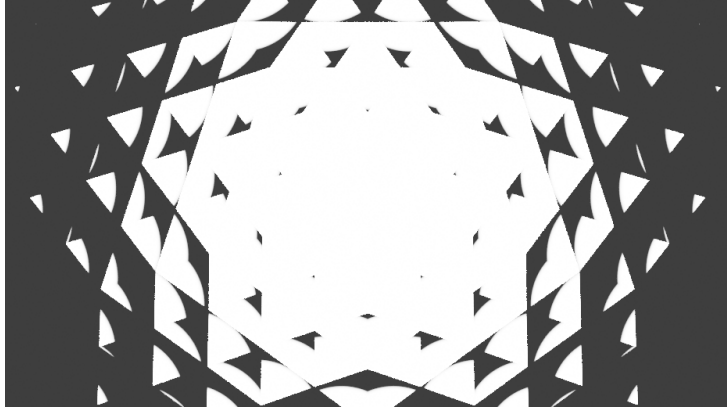


图 7 预模拟的信号分布图

5.5.1 信号反射模型

考虑到每块反射平面是由三个主索节点构成的三角形，而信号视为直线传播，沿垂直方向射向反射面，可以在此条件下构建信号反射模型。^[5]

对任一由 $P_1 = (x_1, y_1, z_1), P_2 = (x_2, y_2, z_2), P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ 构成的平面 Γ ，分别计算两点构成的向量，

$$\begin{aligned} \mathbf{n1} &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ \mathbf{n2} &= (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) \\ [a \ b \ c]^T &= \mathbf{n1} \times \mathbf{n2} \end{aligned} \quad (35)$$

并对两个向量进行叉积和标准化，得到该平面的单位法向量：

$$\mathbf{n}_{\Gamma} = \frac{ab}{\sqrt{\sum (a^2 + b^2)}} \quad (36)$$

对于 Γ 平面中的 P_1 点，入射信号的单位向量为 $\mathbf{v}_{in} = (0, 0, -1)$ ，而出射信号的方向沿穿过 P_1 点的单位法向量对称，如图 8 所示：

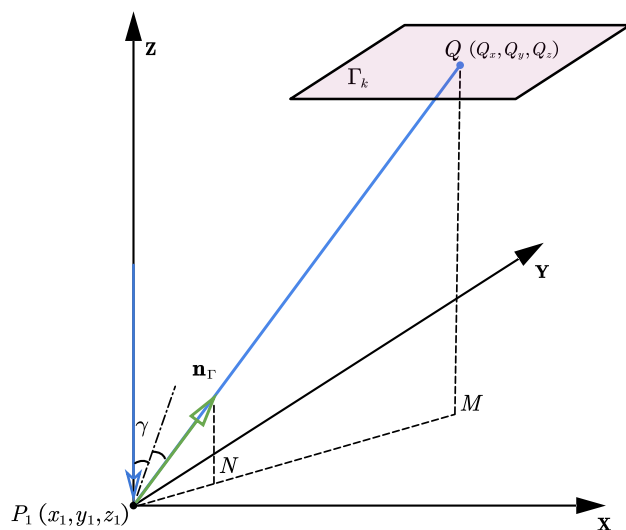


图 8 入射信号、出射信号位置关系

由于馈源舱在 z 轴上的坐标可以通过 $F - R$ 求得, 根据反射定理中入射角等于出射角以及馈源舱所在平面的位置关系等, 可以计算出出射信号的单位向量为:

$$\mathbf{v}_{out} = (2ac, 2bc, 1 - 2(a^2 + b^2)) \quad (37)$$

根据单位向量与实际坐标的数量关系，可以得到

$$\begin{cases} \frac{2ac}{Q_x - x_1} = \frac{1-2(a^2+b^2)}{Q_z - z_1} \\ \frac{2bc}{Q_y - y_1} = \frac{1-2(a^2+b^2)}{Q_z - z_1} \end{cases} \quad (38)$$

其中 $Q_z = F - R$.

根据上述方程组，我们可以得到 Q_x, Q_y 的坐标分别为：

$$\begin{aligned} Q_x &= \frac{2a^2x_1+2b^2x_1+2acz_1+2acQ_z-x_1}{2a^2+2b^2-1} \\ Q_y &= \frac{2a^2y_1+2b^2y_1+2bcz_1+2bcQ_z-y_1}{2a^2+2b^2-1} \end{aligned} \quad (39)$$

同理可得 P_2, P_3 点的出射点。

由于平面上反射变换是一个线性变换, 计算出每个反射面 Γ_i 的三个端点上出射的信号反射到馈源舱平面的坐标 Q_1, Q_2, Q_3 , 便可以计算三个点所围成三角形 \mathcal{T}_i 的面积 S_i .

记馈源舱圆盘为 \mathcal{R} , 其面积为 0.25π , 反射到馈源平面 Γ_k 的总面积为 S_t , \mathcal{R} 与 \mathcal{T} 的交集面积记为 S_{si} , 共有 N 个平面. 第一种信号比 r_1 为:

$$r_1 = \frac{\sum_{i=1}^N S_{si}}{S_t} \quad (40)$$

第二种信号比为 r_2 为:

$$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^N S_{si}}{0.25N\pi} \quad (41)$$

5.6 问题三模型求解

为了减少复杂的空间运算,我们使用第二问中的旋转矩阵,将第二问中的主索节点变换至顶点位于 $(0, 0, -300)$ 处,此时馈源舱圆盘以及馈源舱平面的 z 轴坐标为 $R-F = 160.2$.

问题二中节点共 699 个,平面共 1309 个,所以 $N = 1309$. 在基准球面的状态下,对每个平面分别计算其法向量以及平面中节点的出射点,可以得到图 10

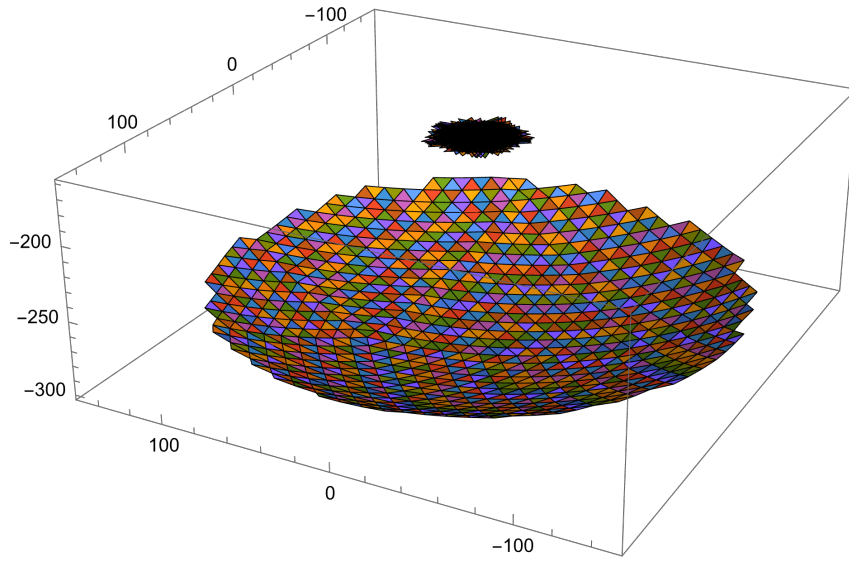


图 9 坐标变换后反射面以及投射至馈源平面信号的示意图 (球面)

根据求出的反射信号三角形,可以得到其 r_1 的值为 $= 0.76\%$, r_2 的值为 67.71% , r_1 的值表明了所有的反射信号,只有 0.76% 投射到了圆盘上,平均每个反射三角形仅占据了盘面的 67.71% 。这是由于有些反射三角形并没有覆盖馈源仓圆盘,且球形反射面的焦点为直线。

而在第二问求出的工作抛物面下,对每个平面分别计算其法向量以及平面中节点的出射点,可以得到

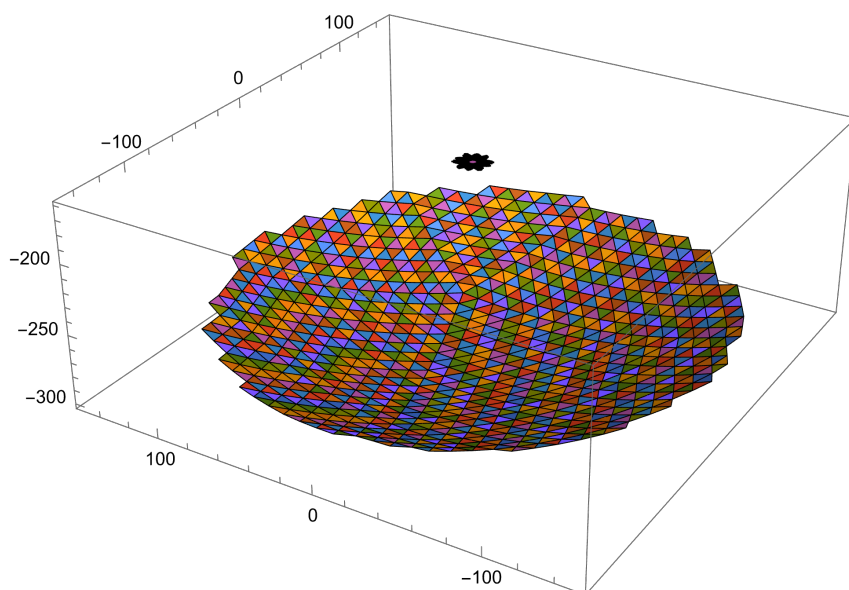


图 10 坐标变换后反射面以及投射至馈源平面信号的示意图（抛物面）

可以看出，该抛物面的汇聚效果比在基准球面下得到的结果更好，印证了第二问中得到的结果。根据求出的反射信号三角形，可以得到其 r_1 的值为 1.1%， r_2 的值为 100%，即抛物面中 1.1% 的信号投射到了圆盘上，平均每个反射三角形占据了盘面 100% 的面积。这意味着抛物反射面上馈源舱能收到的信号和从每块面板收到的信号都要多，证明了使用工作抛物面能够更好的将信号汇聚至馈源舱上。

六、 模型评价与推广

6.1 模型优点

1. 问题一的模型先通过旋转抛物面与球面的同向性的特点，则可以将三维简化到二维，而且将三维方程转换为二维方程不失精度而且可以简化了模型，在计算径向位移时，该模型采取单边优化在结果相同时又不会使结果误差大，且该优化减少了计算量。
2. 问题二在建立基本架构的时候，该模型由于了旋转矩阵的方法，使每一个主索节点的坐标代入基本架构时，都能进行二维规划，且在把基本架构变得简单的同时也不改变每个节点的相对位置。然后对简化后的架构通过添加约束条件进行筛选的，忽略了用不上的节点，使筛选后的点集可以简化计算量，在针对每个节点计算偏移量，若对求解精度要求较高，建立了均方误差的模型，用来判断是否贴近理想的抛物面，最后通过单变量求 h 来简化模型。对于不同的 α 和 β ，该模型由于使用了旋转矩阵，有很强的适应性和通用性。
3. 问题三的模型是基于问题二的扩展模型，该模型运用了大量物理知识，使该模型更

贴近实际生活，在考虑每个反射平面，忽略了平面方程，采取直接求平面法向量的形式，通过平面法向量可以忽略掉一些几何问题，在忽略一些几何问题的同时又不让模型出现错误。

6.2 模型改进

1. 我们思考这些变形策略可以更好的分析和思考基准球面转换为工作态的这一过程，以后可以就这些方向推广该模型。在实际的基准态转变为工作态的时候，不仅仅需要考虑主索节点在径向方向上的位移，我们还可以从另外两种角度来分析该变形，在第一问的模型中我们从主索节点的径向位移最短的这个角度思考问题，其实我们还可以从累两个方向思考变形策略，我们可以从抛物线弧长与球面弧长和从抛物面环长与球面环长差最小的角度思考，得到以纬向上主索节点位移量和以经向上主索节点位移量为核心的两种变形策略，这三种变形策略各有优劣，可以综合考虑。
2. 在第二问的模型中，我们的模型忽略了变化幅度不超过 0.07%，若要进一步再深入模型，可以考虑加入这一约束条件，使模型更加的贴近实际。
3. 我们由于忽略了信号的不同传播方式，若想考虑得更加全面，可以考虑添加一些不同信号传播方式，使模型更加贴切实际。

参考文献

- [1] 孔旭; 姜鹏; 王启明. fast 主动反射面索网结构参数变化对索力的影响分析. 天文研究与技术, 12(02):159–165, 2015.
- [2] 朱丽春; 张志伟. fast 主动反射面变形测控方案分析. 工业计量, 20(06):7–9, 2010.
- [3] 李建玲; 彭勃; 柴晓明. fast 照明口径分析. 天文研究与技术, 18(03):301–306, 2021.
- [4] 李明辉; 朱丽春. fast 瞬时抛物面变形策略优化分析. 贵州大学学报 (自然科学版), 29(06):24–28+43, 2012.
- [5] 杜敬利; 利保宏; 杨东武; 崔传贞. 索网主动反射面的形状精度调整研究. 工程力学, 29(03):212–217, 2012.

附录 A 第一问的 mathematica 代码

```

para = Import["C:\\Users\\11588\\Desktop\\A\\附件1.csv"][[2 ;;, 2 ;;]];
Solve[{y == Tan[\\[Theta]] x, y^2 + x^2 == 300^2}, {x, y}]
sphrD = Table[{N[-(300/Sqrt[1 + Tan[\\[Theta]]^2]), 6],
  N[-((300 Tan[\\[Theta]])/Sqrt[1 + Tan[\\[Theta]]^2]),
  6]}, {\\[Theta], (4 \\[Pi])/3, (3 \\[Pi])/2, \\[Pi]/360}][[;; -2]];
SolveValues[{y == Tan[\\[Theta]] x,
  y == x^2/(4*(300*466/1000 + h)) - 300 - h}, {x, y}] // FullSimplify
paraD = Table[{N[
  1/10 (2796 Tan[\\[Theta]] + 20 h Tan[\\[Theta]] - Sqrt[
    20 (838800 + 8796 h + 20 h^2) + (2796 Tan[\\[Theta]] +
    20 h Tan[\\[Theta]])^2]), 6],
  N[2/5 (699 Tan[\\[Theta]]^2 + 5 h Tan[\\[Theta]]^2 -
    Tan[\\[Theta]] Sqrt[(699 + 5 h) (1500 + 5 h +
    699 Tan[\\[Theta]]^2 + 5 h Tan[\\[Theta]]^2)]),
  6]}, {\\[Theta], (4 \\[Pi])/3, (3 \\[Pi])/2, \\[Pi]/360}][[;; -2]];
euD = Table[EuclideanDistance[sphrD[[i]], paraD[[i]]], {i, 1, 60}];
signEuD =
  Table[Sign[paraD[[i, 2]] - sphrD[[i, 2]]]*
    EuclideanDistance[sphrD[[i]], paraD[[i]]], {i, 1, 60}];
ListLinePlot[signEuD /. {h -> 0.39038}, Frame -> True,
  GridLines -> Automatic]
minObj2[hh_?NumberQ] :=
NIntegrate[
  Abs[-Sqrt[300^2 - x^2] - x^2/(4 (300*0.466 + h)) + 300 + h] /. {h ->
    hh}, {x, -150, 0}]
Block[{c = 0}, {FindMinimum[{minObj2[hh], -0.6 <= hh <= 0.6}, hh,
  Method -> "InteriorPoint", StepMonitor :> c++], c}]
Plot[-Sqrt[300^2 - x^2] - x^2/(4 (300*0.466 + h)) + 300 + h /.
  h -> 0.39038, {x, -150, 0}, Frame -> True, GridLines -> Automatic,
  AxesOrigin -> {-150, 0}, FrameLabel -> {"距顶点的水平距离/m", "径向位移/m"},
  PlotStyle -> Thick]

```

附录 B 第二问的 mathematica 代码

```

paraQ2 = Import["C:\\Users\\11588\\Desktop\\A\\附件1.csv"][[2 ;;]];

```

```

Show[ListPointPlot3D[{paraQ2[;; , 2 ;;]], ViewPoint -> Front],
RegionPlot3D[
0.800784 x + 0.598954 y + 4.77383 z + 1267.195756574174` <=
0, {x, -300, 300}, {y, -300, 300}, {z, -300, 500}, Mesh -> None,
PlotStyle -> {Opacity[0.5]}]]
v1 = Cases[
paraQ2, {name_, x_, y_,
z_} -> {0.800784 x + 0.598954 y + 4.77383 z + 1267.20, name, x,
y, z}];

realMesh = Select[v1, #[[1]] <= 0 &][;; , 2 ;;];
realMeshWithoutLabel = realMesh[;; , 2 ;;];
Show[ListPointPlot3D[realMeshWithoutLabel],
RegionPlot3D[(*x^2+y^2+z^2<=300^2&&*)
0.800784 x + 0.598954 y + 4.77383 z + 1267.195756574174` <=
0, {x, -300, 300}, {y, -300, 300}, {z, -300, 500}]]
ListPointPlot3D[{paraQ2[;; , 2 ;;]], realMeshWithoutLabel,
RotationMatrix[{{Cos[36.795 \[Degree]], Sin[36.795 \[Degree]],
Tan[78.169 \[Degree]]}, {0, 0, 1}}} . # & /@
realMeshWithoutLabel], PlotLegends -> {"Raw", "Before", "After"}]
perpVec[{x_, y_, z_}] := {x/Sqrt[x^2 + y^2 + z^2], y/Sqrt[
x^2 + y^2 + z^2], z/Sqrt[x^2 + y^2 + z^2]}
trRealMeshWithoutLabel =
RotationMatrix[{{Cos[36.795 \[Degree]], Sin[36.795 \[Degree]],
Tan[78.169 \[Degree]]}, {0, 0, 1}}} . # & /@
realMeshWithoutLabel;
dList = Table[(-167760.` - 1759.2` h - 4 h^2 +
trRealMeshWithoutLabel[[i, 1]]^2 +
trRealMeshWithoutLabel[[i, 2]]^2 -
559.2` trRealMeshWithoutLabel[[i, 3]] -
4 h trRealMeshWithoutLabel[[i,
3]])/(2 (279.6` perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[3]] +
2 h*perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[3]] -
perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[1]]*
trRealMeshWithoutLabel[[i, 1]] -
perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[2]]*
trRealMeshWithoutLabel[[i, 2]])), {i, 1, 699}];

```

```

tredMeshWL =
  Table[{trRealMeshWithoutLabel[[i, 1]] +
    perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[1]]*dList[[i]],
    trRealMeshWithoutLabel[[i, 2]] +
    perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[2]]*dList[[i]],
    trRealMeshWithoutLabel[[i, 3]] +
    perpVec[trRealMeshWithoutLabel[[i]]][[3]]*dList[[i]]}, {i, 1,
    699}];
dVecResult =
  Total[Table[
    Simplify@(((dList[[i]]*Total[trRealMeshWithoutLabel[[i, ;;]]))^2)/
    Total[trRealMeshWithoutLabel[[i, ;;]]^2)), {i, 1, 699}];
mse[h_] := Sqrt[dVecResult/699]
Plot[mse[h], {h, -1, 2}, GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  FrameLabel -> {"h", "MSE"}]
reTredMeshWL = (RotationMatrix[{{0, 0, 1}, {Cos[36.795 \[Degree]],
  Sin[36.795 \[Degree]],
  Tan[78.169 \[Degree]]}}] . #) & /@ (tredMeshWL /. {h -> 0.6});
RotationMatrix[{{0, 0, 1}, {Cos[36.795 \[Degree]],
  Sin[36.795 \[Degree]], Tan[78.169 \[Degree]]}}] . {0, 0, -300.4}
{-49.32, -36.889381252802764`, -294.01848338493124`}
label = realMesh[;; , 1];
tredMeshWLWithLabel =
  Thread[label -> reTredMeshWL] /. Rule[a_, b_] :> Flatten[{a, b}];
Reduce[z + n*d == ((x + l*d)^2 + (y + m*d)^2)/(4*(F + h)) - R - h, d]
(-4 F h - 4 h^2 - 4 F R - 4 h R + x^2 + y^2 - 4 F z - 4 h z)/(
  2 (2 F n + 2 h n - l x - m y)) /. {F -> 300*0.466, R -> 300}
RotationMatrix[{{Cos[36.795 \[Degree]], Sin[36.795 \[Degree]],
  Tan[78.169 \[Degree]]}, {0, 0, 1}}] // MatrixForm

```

附录 C 第三问的 mathematica 代码

```

{a,b,c}={x2-x1,y2-y1,z2-z1}\[Cross]{x3-x1,y3-y1,z3-z1}/Sqrt[Total[({x2-x1,y2-y1,z2-z1}\[Cross
{ox1,oy1,oz1}={(2 a^2 x1+2 a c z1+320.4` a c+2 b^2 x1-x1)/(2 a^2+2 b^2-1),(2
  a^2 y1+2 b^2 y1+2 b c z1+320.4` b c-y1)/(2 a^2+2 b^2-1),-160.2};
{ox2,oy2,oz2}={(2 a^2 x2+2 a c z2+320.4` a c+2 b^2 x2-x2)/(2 a^2+2 b^2-1),(2
  a^2 y2+2 b^2 y2+2 b c z2+320.4` b c-y2)/(2 a^2+2 b^2-1),-160.2};

```

```

{ox3,oy3,oz3}={((2 a^2 x3+2 a c z3+320.4` a c+2 b^2 x3-x3)/(2 a^2+2 b^2-1),(2
a^2 y3+2 b^2 y3+2 b c z3+320.4` b c-y3)/(2 a^2+2 b^2-1),-160.2);
reflect[{{x1_, y1_, z1_}, {x2_, y2_, z2_}, {x3_, y3_, z3_}}] :=
Evaluate[{{ox1, oy1, oz1}, {ox2, oy2, oz2}, {ox3, oy3, oz3}}]
trigPlaneRawData1 =
Import[""][[2 ;;]];
sphrPlane =
Partition[#, 3] & /@
Select[trigPlaneRawData1,
FreeQ[#, "NULL"] &][[;; , {3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13}]];
trSphrPlane =
RotationMatrix[{{Cos[36.795 \[Degree]], Sin[36.795 \[Degree]],
Tan[78.169 \[Degree]]}, {0, 0, 1}}] . # & /@ # & /@
sphrPlane;
Show[ListPlot3D[(reflect[#] & /@ trSphrPlane), PlotRange -> All,
Mesh -> None]]
Show[ListPlot3D[(reflect[#] & /@ trSphrPlane), PlotRange -> All,
Mesh -> None], ListPlot3D[trSphrPlane, Mesh -> None]]
\[DoubleStruckCapitalR] =
RegionUnion[
Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]]] & /@ (reflect[#] & /@
trSphrPlane)]
Show[RegionPlot[\[DoubleStruckCapitalR]],
Graphics[{Disk[{0, 0}, 0.25]}]]
paraPlane =
Partition[#,
3] & /@ (Select[trigPlaneRawData2,
FreeQ[#, "NULL"] &][[;; , {2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12}]]);
Show[ListPlot3D[(reflect[#] & /@ trParaPlane)[[1 ;; 10]],
Mesh -> None]]
Show[ListPlot3D[(reflect[#] & /@ trParaPlane), PlotRange -> All,
Mesh -> None], ListPlot3D[trParaPlane, Mesh -> None]]
\[DoubleStruckCapitalP] =
RegionUnion[
Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]]] & /@ (reflect[#] & /@
trParaPlane)]
Show[RegionPlot[\[DoubleStruckCapitalP]],

```



```

Graphics[{Disk[{0, 0}, 0.25]}]]
Area[\[DoubleStruckCapitalP]]
totalSqrS =
Total@(Area @@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trSphrPlane))
Total@(Area @@@ (RegionIntersection[
  Disk[{0, 0},
    0.5], #] & /@ (Region[
    Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
      trSphrPlane))))
2762.92/91240.6
3.14/294.841
totalSqrP =
Total@(Area @@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trParaPlane))
Total@(Area @@@ (RegionIntersection[
  Disk[{0, 0},
    0.5], #] & /@ (Region[
    Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
      trParaPlane))))
1309 \[Pi]/89801.7
Total[Area[#] & /@ DiscretizeRegion[#] & /@
  RegionIntersection[#, Disk[]] & /@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trParaPlane)]
Total[Area[#] & /@ RegionIntersection[#, Disk[{0, 0}, 0.5]] & /@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trSphrPlane)]
Area[DiscretizeRegion[(RegionIntersection[#, Disk[]] & /@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trParaPlane))][1]]]
Total[Area[#] & /@ ((RegionIntersection[#, Disk[{0, 0}, 0.5]] & /@
  Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trParaPlane)))]
Total[Area[#] & /@ (DiscretizeRegion @@@ (RegionIntersection[#,

```

```

    Disk[{0, 0}, 0.5]] & /@
    Region[Triangle#[[;; , {1, 2}]]]] & /@ (reflect[#] & /@
    trSphrPlane)))]
1309*0.25*3.14
695.834/1027.57
1309*3.1415
Show[ListPlot3D[(reflect[#] & /@ goodP), PlotRange -> All,
    Mesh -> None], ListPlot3D[goodP, Mesh -> None]]
ListPlot3D[(reflect[#] & /@ goodP), PlotRange -> All, Mesh -> None]

```