Division décimale

Objectifs (savoir-faire) :

- Effectuer une division euclidienne à la calculatrice (cf I.2.)
- Effectuer une division décimale à la main (cf II.2.)
- Effectuer une division décimale à la calculatrice (cf II.1.)
- Savoir diviser (mentalement) un nombre par 10, 100, 1000 (cf III.1.)
  (diviser un nombre par 10, 100, 1 000, c'est le multiplier par 0.1, 0.01, 0.001)
- Savoir diviser (mentalement) un nombre par 0.1, 0.01, 0.001 (cf III.2.)
  (diviser un nombre par 0.1, 0.01, 0.001, c'est le multiplier par 10, 100, 1 000)
- Vérifier si un entier en divise un autre à la main (cf IV.1.)
- Vérifier si un entier en divise un autre à la calculatrice (cf IV.1.)
- Connaître et utiliser les critères de divisibilité (cf IV.1.)
- Bien distinguer la première famille de critères (qui porte sur le dernier chiffre, cf IV.2.) et la deuxième (qui porte sur la somme des chiffres, cf IV.2.).

Objectifs (apprendre) :

- – La division euclidienne met en jeu deux entiers (cf I.)
  – La division décimale met en jeu deux nombres (entiers ou non, cf II.1.).
  – Dans tous les cas, on ne divise jamais par 0.
- Pour la division euclidienne : (cf I.3.)
  $$\boxed{\text{Dividende} = \text{Quotient} \times \text{Diviseur} + \text{Reste} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \text{Reste} < \text{Diviseur}}$$
- Pour la division décimale : (cf II.1.)
  $$\boxed{\text{Dividende} = (\text{Quotient décimal}) \times \text{Diviseur}}$$
- Définition de la divisibilité (cf IV.1.) : un entier a divise un entier b quand le reste de la division euclidienne de b par a vaut 0, c-à-d quand le quotient décimal est entier.
- Quand un entier a divise un entier b, la quotient de la division euclidienne et le quotient décimaux sont égaux et on a (cf IV.1.) :
  $$\boxed{\text{Dividende} = \text{Quotient} \times \text{Diviseur}}$$
- Par définition, un entier est pair lorsqu'il est divisible par 2 (cf IV.1.).
- Si a est un nombre non nul, alors $a \div a = 1$ (le quotient décimal d'un nombre par lui-même vaut 1, cf II.1.).
- Si a est un nombre, alors $a \div 1 = a$ (cf II.1.)

I Division euclidienne (rappels)

1. À la main

On effectue la division de 324 par 7 :

$$\begin{array}{r|l} 404 & 7 \\ \cline{2-2} -35 & 5 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 404 & 7 \\ \cline{2-2} -35 & 57 \\ \cline{1-1} 54 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

Lorsque le diviseur à deux chiffres ou plus, il faut connaître ses multiples jusqu'à 9 fois. Il faut donc écrire ceux-ci préalablement si besoin.

On va effectuer la division euclidienne de 163 967 par 27.

$$\begin{array}{r|l} 163\,967 & 27 \\ \cline{2-2} -162 & 6\,072 \\ \cline{1-1} 19 & \\ 196 & \\ -189 & \\ \cline{1-1} 77 & \\ -54 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcr} 2\times 27 & = & 54 \\ 3\times 27 & = & 81 \\ 4\times 27 & = & 108 \\ 5\times 27 & = & 135 \\ 6\times 27 & = & 162 \\ 7\times 27 & = & 189 \\ 8\times 27 & = & 216 \\ 9\times 27 & = & 243 \end{array}$$

Le quotient de la division eucldienne de 163 967 par 27 par 6 072 et son reste est 23.

On a donc : $163\,967 = 6\,072 \times 27 + 23$

2. À la calculatrice

On cherche à effectuer la division euclidienne de 163 967 par 27 à l'aide de la calculatrice.

MÉTHODE :

1. Entrer la division à la calculatrice. Prendre la **partie entière** du résultat obtenu. C'est le quotient.
2. Effectuer le produit du quotient et du diviseur.
3. Retirer le produit précédent au dividende. C'est le reste.

Exemple : On cherche à effectuer la division euclidienne de 163 967 par 27 à l'aide de la calculatrice.

Étape 1 : On entre $\boxed{163\,967 \div 27}$
La calculatrice affiche : $\boxed{6072.85185}$

Le quotient de la division euclidienne est donc 6 072 (qui est bien le quotient trouvé plus haut).

Étape 2 : On entre : $\boxed{6072 \times 27}$
La calculatrice affiche : $\boxed{163\,944}$

Étape 3 :

$$\begin{array}{r|l} 163\,967 & 27 \\ \cline{2-2} -163\,944 & 6\,072 \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

3. Propriétés importantes

$$\boxed{\text{Dividende} = \text{Quotient} \times \text{Diviseur} + \text{Reste}}$$

On a donc aussi :

$$\boxed{\text{Reste} = \text{Dividende - Quotient} \times \text{Diviseur}}$$

De plus :

- Effectuer une division euclidienne, c'est chercher le plus grand nombre de fois que le diviseur va dans le dividende.
- Par conséquent, le reste est nécessairement plus petit que le diviseur. On retient :

$$\boxed{0 \leqslant \text{Reste} < \text{Diviseur}}$$

Exemple :

1. Dans une division euclidienne où le diviseur est 6, quels sont les restes possibles ? Combien y en a-t-il ?
2. Dans une division euclidienne où le diviseur est 24, combien y a-t-il de restes possibles ?

Solution :

1. Lorsqu'on effectue une division euclidienne dont le diviseur est 6, les restes possibles sont 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Il y en a 6 en tout.
2. Lorsqu'on effectue une division euclidienne dont le diviseur est 24, il y a 24 restes possibles (de 0 à 23 inclus)

II Division décimale

1. Introduction

La **division décimale** est une opération notée ÷.

Dans une division décimale, le dividende et le reste peuvent être des nombres quelconques, contrairement à la division euclidienne, qui ne met en jeu que des entiers.

Le diviseur d'une division décimale ne doit jamais être nul (comme pour une division euclidienne).

Le résultat d'une division décimale s'appelle le **quotient décimal**.

Exemple : En utilisant la calculatrice, donner le résultat de $63 \div 12$ et de $12.45 \div 5$

Solution : $63 \div 12 = 5.25$ et $12.45 \div 5 = 2.49$

Le quotient décimal vérifie l'égalité suivante :

$$\boxed{\text{Dividende} = (\text{Quotient décimal}) \times \text{Diviseur}}$$

Exemple : On vérifie que $5.25 \times 12 = 63$ et que $2.49 \times 5 = 12.45$

Propriété :
- Le quotient décimal d'un nombre par lui-même vaut 1.
  Par exemple, $5.2 \div 5.2 = 1$, $0.07 \div 0.07 = 1$.
- Lorsqu'on divise un nombre par 1, le quotient est égal au dividende.
  Par exemple, $5.2 \div 1 = 5.2$, $0.07 \div 1 = 0.07$

2. Quotient décimal lorsque le dividende et le diviseur sont entiers

Méthode :
- On procède comme pour une division euclidienne.
- Lorsque la division euclidienne est terminée, si le reste n'est pas nul :
  - On écrit un virgule après le dernier chiffre du quotient de la division eucl-dienne.
  - On continue les calculs de la même façon, en descendant à chaque étape une décimale ou le chiffre 0 s'il n'y en a plus.

Exemple :
- Effectuer la division euclidienne de 15 par 2, puis la division décimale $15 \div 2$.
- Effectuer la division euclidienne de 84 par 25, puis la division décimale $84 \div 25$.
- Effectuer $76.5 \div 6$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \cline{2-2} -14 & 7 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Division décimale : $15 \div 2 = 7.5$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \cline{2-2} -14 & 7.5 \\ \cline{1-1} 10 & \\ -10 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} 84 & 25 \\ \cline{2-2} -75 & 3.36 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

Division décimale : $84 \div 25 = 3.36$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 25 \\ \cline{2-2} -75 & 3.36 \\ \cline{1-1} 90 & \\ -75 & \\ \cline{1-1} 15 & \\ -150 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Division décimale : $76.5 \div 6 = 12.75$

$$\begin{array}{r|l} 76.5 & 6 \\ \cline{2-2} -6 & 12.75 \\ \cline{1-1} 16 & \\ -12 & \\ \cline{1-1} 45 & \\ -42 & \\ \cline{1-1} 30 & \\ -30 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

3. Valeurs approchées du quotient

Lorsque le dernier reste obtenu n'est pas nul, on a seulement obtenu une *valeur approchée par défaut* (ou *tronquée*) du quotient décimale.
On utilise le signe $\simeq$ pour indiquer que l'égalité n'est pas parfaite.

Exemple :
- Calculer la valeur tronquée à 0.1 de $75 \div 13$.
- Calculer la valeur tronquée à 0.01 de $4 \div 7$.

Solution :

$75 \div 13 \simeq 5.7$ (troncature à 0.1)

$$\begin{array}{r|l} 75 & 13 \\ \cline{2-2} -65 & 5.7 \\ \cline{1-1} 100 & \\ 91 & \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

$4 \div 7 \simeq 0.57$ (troncature à 0.01)

$$\begin{array}{r|l} 4 & 7 \\ \cline{2-2} 40 & 0.57 \\ -35 & \\ \cline{1-1} 50 & \\ -49 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

La troncature peut se faire à la calculatrice :

Exemple : À l'aide de la calculatrice, donner la valeur tronquée à 0.001 de $145 \div 17$.

Solution : $145 \div 17 \simeq 8.529$ (troncature à 0.001)

III Division par 10, 100, 1 000 et 0.1, 0.01, 0.001

1. Division par 10, 100, 1 000

Propriété :
- Diviser un nombre par 10, c'est déplacer sa virgule d'une place vers la droite.
  En particulier, $1 \div 10 = 0.1$
- Diviser un nombre par 100, c'est déplacer sa virgule de deux places vers la droite.
  En particulier $1 \div 100 = 0.01$
- Diviser un nombre par 1 000, c'est déplacer sa virgule de trois places vers la droite.
  En particulier $1 \div 1\,000 = 0.001$

Remarque : La propriété se reformule donc en :
- Diviser un nombre par 10 c'est le multiplier par 0.1.
- Diviser un nombre par 100, c'est le multiplier par 0.01.
- Diviser un nombre par 1 000, c'est le multiplier par 0.001.

Exemple : Effectuer mentalement les divisions suivantes : $A = 72 \div 10$, $B = 9 \div 10$, $C = 54 \div 100$, $D = 1\,400 \div 100$, $E = 1\,372 \div 1\,000$, $F = 5 \div 1\,000$

Solution : $A = 7.2$, $B = 0.9$, $C = 0.54$, $D = 14$, $E = 1.372$, $F = 0.005$

2. Division par 0.1, 0.01, 0.001

Propriété :
- Diviser un nombre par 0.1, c'est déplacer sa virgule d'une place vers la gauche.
  En particulier, $1 \div 0.1 = 10$
- Diviser un nombre par 0.01, c'est déplacer sa virgule de deux places vers la gauche.
  En particulier $1 \div 0.01 = 100$
- Diviser un nombre par 0.001, c'est déplacer sa virgule de trois places vers la gauche.

En particulier $1 \div 0.001 = 1\,000$

Remarque : La propriété se reformule donc en :
- Diviser un nombre par 0.1, c'est le multiplier par 10.
- Diviser un nombre par 0.01, c'est le multiplier par 100.
- Diviser un nombre par 0.001, c'est le multiplier par 1 000.

Exemple : Effectuer mentalement les divisions suivantes : $A = 7 \div 0.1$, $B = 101 \div 0.1$, $C = 45.1 \div 0.01$, $D = 0.3 \div 0.01$, $E = 0.004 \div 0.001$, $F = 0.81 \div 0.001$

Solution : $A = 70$, $B = 1\,010$, $C = 4\,510$, $D = 30$, $E = 4$, $F = 810$

IV Divisibilité et critères

Attention, la notion de divisibilité ne concerne que les entiers non nuls, contrairement aux deux parties précédentes, qui mettaient en jeu les nombres décimaux en général.

1. Divisibilité

Lorsque le reste d'une division euclidienne est nul, on a :

$$\boxed{\text{Dividende} = \text{Quotient} \times \text{Diviseur}}$$

Dans ce cas, le quotient de la division euclidienne et le quotient décimal sont égaux.

Définition (diviseurs et multiples) :
- On effectue la division eucldienne d'un entier b par un entier a non nul.
  On dit que a **divise** b lorsque le reste obtenu est nul.
- Dans ce cas, on dit que a est un **diviseur** de b et que b est un **multiple** de a ou bien que b est **divisible** par a.

Exemple : 299 est-il divisible par 13 ? 458 est-il divisible par 13 ?

Solution :

$$\begin{array}{r|l} 299 & 13 \\ \cline{2-2} -26 & 23 \\ \hline 39 & \\ -39 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le reste de la division euclidienne de 299 par 13 est nul, donc 299 est divisible par 13 (on a : $299 = 23 \times 13$.

$$\begin{array}{r|l} 458 & 13 \\ \cline{2-2} -39 & 35 \\ \hline 68 & \\ -\ 65 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

Le reste de la division euclidienne de 458 par 13 n'est pas nul, donc 458 n'est pas divisible par 13.

Propriété : Un entier a divise un entier b lorsque le quotient décimal $b \div a$ est entier.

Exemple : 4 301 est-il divisible par 17 ? 1 192 est-il divisible par 29 ? On peut utiliser la calculatrice.

Solution :
- $4301 \div 17 = 253$, qui est entier, donc 17 divise 4 301.
- $1192 \div 29 \simeq 41.103$, qui n'est pas entier, donc 1 192 n'est pas divisible par 29.

Définition (parité) :

- On dit qu'un entier est **pair** lorsqu'il est divisbile par 2.
- Dans le cas contraire, on dit qu'il est **impair**.

2. Critères de divisibilité (1ère famille)

Par opposition au paragraphe suivant, la première famille de critères n'utilise que le dernier chiffre de l'entier considéré.

Propriété :
- Un entier est pair s'il termine par un chiffre pair (0, 2, 4, 6, 8)
- Un entier est divisible par 5 s'il termine par 0 ou 5.
- Un entier est divisible par 10 s'il termine par 0.

Exemple : 192 et 429 sont-ils pairs ? 556 et 330 sont-ils divisible par 5 ? 2 013 et 500 sont-ils divisibles par 10 ?

Solution :
- 192 est pair, mais pas 429.
- 556 n'est pas divisible par 5, mais 330 l'est.
- 2 013 n'est pas divisible par 10, mais 500 l'est.

Remarque (divisibilité par 100, par 1 000, par 4, par 25) :
- Un entier est divisible par 100 s'il termine par 00.
- Un entier est divisible par 1 000 s'il termine par 000.
- Plus difficile : un nombre est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffre est divisible par 4.
- Un nombre est divisible par 25 s'il termine par 00, 25, 50 ou 75.

3. Critères de divisiblité (2ème famille)

La deuxième famille de critères met en jeu la somme des chiffres de l'entier considéré.

Propriété :
- Un entier est divisible par 3 quand la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un entier est divisible par 9 quand la somme de ses chiffres est divisible par 9

Remarque : Si la somme des chiffres d'un entier n'est pas divisible par 3 (respectivement par 9), cet entier ne l'est pas non plus.

Exemple : 741 est-il divisible par 3 ? Est-il divisible par 9 ?

Solution : $7 + 4 + 1 = 12$, qui est divisible par 3, donc 741 est divisible par 3.
Mais 12 n'est pas divisible par 9, donc 741 n'est pas divisible par 9.