



单位代码 10006

学 号 19241004

分 类 号 O175.12

北京航空航天大学  
BEIHANG UNIVERSITY

# 毕业设计(论文)

## 捕食模型的极限环分析 —三维捕食模型的极限环算法化分析

|         |         |
|---------|---------|
| 学 院 名 称 | 中法工程师学院 |
| 专 业 名 称 | 理科试验班类  |
| 学 生 姓 名 | 魏宏都     |
| 指 导 教 师 | 牛薇      |

2023 年 5 月

论文封面书脊

捕食  
模型  
的极  
限环  
分析  
三维  
捕食  
系统  
的极  
限环  
算法  
化分  
析

魏  
宏  
都

北  
京  
航  
空  
航  
天  
大  
学

# 北京航空航天大学

## 本科生毕业设计（论文）任务书

### I、毕业设计（论文）题目：

捕食模型的极限环分析——三维捕食模型的极限环算法化分析

### II、毕业设计（论文）使用的原始资料（数据）及设计技术要求：

运用数学建模方法和计算机符号计算技术来研究生态系统中的复杂现象为基本手段，从生态系统中复杂的种群数量周期性变化入手，讨论分析判断三维及高维微分方程系统极限环个数的算法。

### III、毕业设计（论文）工作内容：

- 1、构建了确定三维捕食系统 LV 模型极限环存在性以及数量的算法；
- 2、给出了自然界客观存在的三维捕食系统，即天敌-捕食者-猎物系统的数学建模；
- 3、针对天敌-捕食者-猎物系统应用本文提出的算法并验证了其正确性。

### IV、主要参考资料：

[1] M. P. Barnett. Symbolic calculation in the life sciences — some trends and prospects. In

Proceedings of the First International Conference on Algebraic Biology (Tokyo, Japan, November 28 - 30, 2005), pages 1 - 18. Universal Academy Press, Inc., Tokyo, 2005.

等 40 篇文献资料:

《多项式系统的实根分离算法及其应用》陆征一 何碧 罗勇 科学出版社

## 中法工程师学院 理科试验班类 192411 班

学生：魏宏都

毕业设计（论文）时间：2022 年 10 月 12 日至 2023 年 05 月 17 日

答辩时间：2023 年 05 月 24 日

成绩：

指导教师：牛薇

兼职教师或答疑教师（并指出所负责部分）：


系（教研室） 主任（签字）：



## 本人声明

我声明，本论文及其研究工作是由本人在导师指导下独立完成的，在完成论文时所利用的一切资料均已在参考文献中列出。

作者：魏宏都

签字：

时间：2023 年 5 月



## 捕食模型的极限环分析——三维捕食模型的极限环算法化分析

学 生：魏宏都

指导教师：牛 薇

### 摘 要

捕食模型是生态学中的研究重点之一，通常用来描述捕食者和猎物之间的相互作用。极限环是指在一定条件下，捕食者和猎物数量在一定范围内波动，并最终回归到某个特定数量水平的稳定状态。对于三维捕食模型，极限环的分析具有实际意义，可以更好地理解捕食者和猎物之间的动态关系，以及预测它们的数量变化趋势。文章旨在运用算法化方法进行三维捕食模型的极限环分析，为生态学领域的进一步探索提供理论支持。

本文通过运用数学建模方法和计算机符号计算技术来研究生态系统中的复杂现象为基本手段，从生态系统中复杂的种群数量周期性变化入手，讨论分析判断三维及高维微分方程系统极限环个数的算法。通过构建三维捕食系统：天敌-捕食者-猎物模型，并以此为案例进行研究，验证了本文所提出的三维捕食模型极限环存在性判断以及个数判断的算法的可行性，从而最终得出结论。

**关键词：**Lotka-Volterra 模型，极限环，Liapunov 函数，符号计算，中心流形，数学建模



## Limit Cycle Analysis of Predator-Prey Models--

### Algorithmic Analysis in Three-Dimensional System

Author : WEI Hongdu

Tutor : NIU Wei

### Abstract

Predator-prey models are one of the focuses in ecology, usually used to describe the interactions between predators and prey. A limit cycle refers to a stable state in which the populations of predators and prey fluctuate within a certain range under certain conditions and ultimately return to a specific quantity level. For three-dimensional predator-prey models, limit cycle analysis has practical significance, can better understand the dynamic relationship between predators and prey, and predict their quantity change trends.

This article uses mathematical modeling and computer symbolic computation technology as the basic means to study complex phenomena in ecosystems. Starting from the complex periodic changes in population numbers in the ecosystem, we discuss the algorithms for analyzing and determining the number of limit cycles in three-dimensional and high-dimensional differential equation systems. By constructing a three-dimensional predator-prey model, and using it as a case study, we verify the feasibility of the algorithm proposed in this article for determining the existence and number of limit cycles in three-dimensional predator-prey models.

**Key words:** Lotka-Volterra model, limit cycle, Liapunov function, symbolic computation, center manifold, mathematical modeling



# 目 录

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 1 绪论.....                             | 1  |
| 1.1 研究背景.....                         | 1  |
| 1.2 研究目的及意义.....                      | 3  |
| 1.3 研究现状综述.....                       | 4  |
| 2 理论基础及技术方法.....                      | 8  |
| 2.1 中心流形构造.....                       | 8  |
| 2.1.1 一般形式 $n$ 阶中心流形的构造方法.....        | 8  |
| 2.1.2 一般形式的三维系统中心流形的构造方法.....         | 10 |
| 2.2 平面多项式微分系统的线性变换.....               | 14 |
| 2.2.1 Hopf 分叉与极限环.....                | 14 |
| 2.2.2 线性变换与 Liapunov 函数.....          | 15 |
| 2.2.3 由 Maple 实现 Liapunov 函数的计算.....  | 17 |
| 2.3 极限环构造.....                        | 20 |
| 2.3 本章小结.....                         | 21 |
| 3 三维捕食系统极限环的算法化分析.....                | 23 |
| 3.1 三维捕食系统.....                       | 23 |
| 3.2 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型.....           | 24 |
| 3.2.1 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的建立.....      | 24 |
| 3.2.2 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的生物学意义.....   | 25 |
| 3.2.3 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的极限环算法分析..... | 27 |
| 3.3 本章小结.....                         | 31 |
| 结论.....                               | 33 |
| 致谢.....                               | 34 |
| 参考文献.....                             | 35 |





# 1 绪论

## 1.1 研究背景

计算机、数学和生物学发展的交叉学科发展研究是当前新趋势和新热点。其中，基于生物现象的计算研究是一个典型的例子。通过运用数学建模方法，我们能够更好地理解生物系统的本质和行为，为生态保护和生物学研究提供更多思路与方法。数学建模是将现实生活问题或未来某种预测转化为数学问题，并通过求解这些问题来进行研究的过程。在生物学领域，数学建模通常用于对各种生物现象如遗传调控、代谢网络、细胞分裂、群落动态等进行描述和解释。通过建立适当的模型，数学家可以计算和预测这些模型的各种属性并与实验数据进行比较，从而帮助我们更深入地了解生物系统运作的本质和行为，形成更加全面和准确的观点。毫无疑问的是，生物学领域的研究效率也在这个过程中得到了显著的提高。利用计算机高速计算和可视化技术，生物学家们可以更好地处理、分析和理解大量的实验数据。此外，一些特殊的数学方法和算法如深度学习和神经网络等也为生物现象的建模和预测提供了新思路和新方法。这些研究结果不仅能够对已有的实验数据进行验证，还能为全新和类似的生物现象提供预测。此外，生物系统作为一种典型的非线性动力系统，其研究本身也为动力系统理论的发展提供了重要的实际背景。预计未来，交叉学科研究将呈现出更多的发展机遇，更多的生物学问题将被解决。

猎物-捕食者模型(predator-prey)是生态学领域常用的一种建模方法，主要应用于研究动植物群体数量随时间变化的趋势及其原因。早在上世纪 20 年代，美国数学家 Alfred J. Lotka 和意大利数学家 Vito Volterra 几乎同时提出了描述自然界竞争关系的生态系统中种群数量随时间变化的周期性增长和下降的数学模型，称为 Lotka-Volterra (简称 LV) 模型。该模型基于两种相互影响的生物群体，即猎物和捕食者。该模型假设猎物与其食物资源之间的关系呈无限制的指数函数关系，即猎物数量呈指数增长；而捕食者数量则会受到猎物数量的影响，其增长率可能随着猎物数量的下降而减缓，当其数量减少至一定程度后，猎物的数量反而又得到了增长。这种交互关系在 LV 模型中形成了两个循环变量，即猎物和捕食者数量，它们相互影响，从而形成了猎物和捕食者数量的周期性变化。尽管



LV 模型具有建立和仿真简单、直观易懂的优点,但仍存在一些缺陷。例如,该模型未考虑环境、季节、性别、寿命等因素对生物群体生命周期的影响。此外, LV 模型假设种群会以一定速度增长并在达到临界点时崩溃,但在实际应用中,种群数量的增长和下降往往受到多个环境因素的影响。因此,在使用 LV 模型时,需要根据具体情况进行模型参数调整和优化。

近一个世纪以来,生态学领域一直在探讨和研究生态系统中物种间相互作用的规律和特点。猎物-捕食者 LV 模型是生态学领域常用的建模方法,主要用于研究动植物群体数量随时间变化的趋势及其原因。尽管 LV 模型具有建立和仿真简单、直观易懂的优点,但其解释能力仍存在局限。不仅生态学领域,数学家们也对 LV 模型进行了深入探索。发现 LV 模型的微分方程组通常是非线性的,且无法找到初等三角函数表示的解析解,但这些微分方程的解常具有周期性,这一点是难以理解的。比如, Lotka 和 Volterra 最初提出的 LV 模型就是单纯的非线性二阶微分方程,然而其解表现为反复振荡的特点。数值计算表明,当种群数量偏离平衡点时,多次可能的偏离情况都会在首次平衡点附近随着时间增加不断震荡。

事实上,这种周期性变化特征符合数学动态系统中极限环概念,即当观测时间趋向正无穷或负无穷时,种群绘制而成的二维流形中一定存在和其轨迹旋转相交的部分。例如, Rosenzweig-MacArthur 模型描述以兔子和狐狸为例的生态系统,数值计算表明,该模型存在一个稳定的极限环,在初始条件存在差异时,该系统仍旧可以收敛到这个极限环中。这为解的周期性提供了充足说明和补充。极限环的研究长期以来都是理论数学研究的难点,确定其存在性和寻找确切数目非常困难。当 LV 模型的参数改变时,演化可能出现复杂行为,如混沌现象和周期倍增。而对于复杂生态系统,演化行为更加复杂,甚至难以预测。因此,生态系统的研究和模拟需要同时考虑生物种群间的相互作用、环境因素和自然选择等多个因素的影响,以建立更准确的模型。

近年来,人们从生态角度对 LV 模型进行了改进和拓展。例如,我们可以将捕食者-猎物模型扩展到多物种建模中,研究多物种间相互作用及演化趋势。此外,我们可以将 LV 模型与其他生态模型相结合,例如气候模型、土壤水分模型等,以更好地描述生态系统中不同环境因素的复杂相互作用。这些研究对我们理解生物系统的定性行为具有重要实际价值。总之,猎物-捕食者 LV 模型是生态学领域常用的建模方法,其非线性二阶微分方程具有周期性变化特点,可用极限环在数学动态系统中描述;而对于复杂生态系统,



需要同时考虑生物种群间相互作用、环境因素和自然选择等多个因素的影响,以建立更准确的模型。相信随着数学和生态学领域的深入研究,我们对生态系统的理解和掌握也将不断深化。

而直到今天,在对以 LV 系统为代表的非线性动力系统进行研究时,数学家们发现,对于非线性动力系统来说,计算出其存在解的精确解析解是一项非常困难的任务。这是由于非线性动力系统的方程包含复杂的非线性函数,难以找到解析解来描述它们之间的关系。因此,为了更好地理解越来越复杂的动力系统所描述的各种生物现象,需要进行更多的定性分析来研究这些系统的稳定性、分叉及极限环。在过去几十年中,许多数学家提出和完善了系统地研究该问题的理论和方法。其中, Aleksandr M. Liapunov 提出了 Liapunov 稳定性理论,使我们能够判断一个非线性动力系统是否是稳定的。Heinz Hopf 提出了 Hopf 分叉,它指的是当一个参数变化时,动力系统可能会从一个稳定态转移到另一个稳定态。Jules H. Poincaré 则提出了 Poincaré 映射,这是一种用于研究非线性动力系统的多维相空间的工具。而 Vladimir I. Arnold 则提出了 Arnold 扭曲理论,将动力系统的演化看作相空间中的镜面变换,使我们能更好地理解非线性动力系统的演化。这些名字可以被大写的数学家们提出的经典方法如今在动力系统领域广泛应用。但即便如此,在没有强大的计算工具帮助下,用传统的标准数学方法来着手定性分析具有生物背景的非线性动力系统仍然是一项困难的任务。事实上,生态系统的复杂性是难以估计的,一个相对复杂的生态系统中就有着数量庞大的各种参数和变量,它们之间的相互作用也非常复杂。如果采用传统的数值方法进行分析,当参数变化不大或复解的虚部很小时,我们就可能得到错误的结论,这是无法避免的。因此,现在出现了许多新型的计算工具和方法,以帮助我们更好地研究非线性动力系统的演化。其中比较常见的是计算机模拟方法,这种方法可以通过计算机模拟来预测非线性动力系统的演化趋势。此外,还有一些新兴的方法,例如符号动力学、复杂网络等,都被广泛应用于生态学和生物学领域,从而使我们更好地理解非线性动力系统演化规律的难度有所降低。总之,对于更深刻地理解生态系统和生物现象来说,非线性动力系统的研究是大有裨益的。虽然这项工作充满挑战,但随着新型计算工具和方法的不断发展,我们相信对非线性动力系统的理解和掌握也将不断深化。

## 1.2 研究目的及意义



正如前文所提到的那样,在生物科学研究中广泛应用已久的标准数学方法和数值处理手段其实存在很大程度上的局限性,这也使得运用符号和代数计算进行的定性分析成为一定程度上更好的选择。事实上,符号方法设计的代数计算和推导,目前在相关领域的应用尚处于初级阶段,符号计算在生物学及相关学科中的应用场景不断拓宽、应用数量不断增长。

在本文中,我们应用代数方法来检测 LV 模型的稳态,分析其稳定性并构造出相应生物模型的极限环。对生物系统定性分析的各种问题进行了系统的研究和调查,将计算机技术与数学方法相结合运用软件 Maple 对此生物模型进行探讨,我们将解释如何将这些问题表述为代数问题,以及如何使用代数方法将其解决。

### 1.3 研究现状综述

正如前本文主要研究了生物学经典捕食系统中三维 LV 模型的极限环存在情况,并对其定性分析和讨论极限环的个数。在这个过程中,我们运用符号和代数计算的方法来研究生态系统的动力学特征。事实上,以代数分析和符号计算为代表的数学方法在生物学中有着颇为广泛的应用。生化动力学、生物工程、基因调控网络等领域都需要运用代数和符号计算来模拟生物系统的行为,并从中研究生物学的各种问题。例如,在生化动力学中,代数和符号计算可以用来模拟化学反应和代谢过程,从而研究细胞内的生物化学行为。在生物工程中,代数和符号计算可以帮助科学家设计优化的生物合成途径。在基因调控网络中,代数和符号计算可以用来研究转录因子相互作用和基因表达调控机制等生物学问题。在进化遗传学、医学和种群动力学等领域<sup>[1]</sup>,代数和符号计算也都发挥了不可替代的作用。

基于代数的统计方法在生物学中发挥着重要作用,可以帮助我们更好地理解生物系统的运作规律和发现潜在的科学现象和生物机制。生物学作为一门研究生命起源、演化和结构的科学,与数学和统计学之间存在密切的联系。药物设计实验以及医疗决策的临床医学研究是生物学中应用代数统计方法的一个重要领域。在药物筛选试验中,代数统计方法可以处理大量的特征和药效测定数据,并找到最优的药物结构,提高治疗效果和减少副作用;在医疗决策中,代数统计方法可以对大量的临床数据和影像学数据进行分析和处理,辅助医学诊断和治疗,提高精准度和效率。DNA 测序和基因组学是现代生物学中非常重要的领域,代数统计方法被广泛应用于这些领域。比如,在 DNA 序列比对和



基因组比较中,代数统计方法可以处理大量的序列信息,提供可靠的比对结果和演化树结构推断。同时,代数统计方法也可以用于解决人类遗传学中的一些基础问题,如人类群体分化、基因流动和自然选择等等。生化反应速率和平衡常数的确定是生物学中一个非常重要的问题,这是因为它涉及到生物系统的反应动力学过程。代数统计方法可以被用来求解方程组和非线性模型,从而推导出化学反应式的重要参数,例如反应速率常数和平衡常数。这将有助于我们更好地理解生物系统中的反应动力学过程,并为相关问题的研究提供了新的思路和方法。除此之外,代数统计方法还被应用于生物序列进化树的分析和构建、生物信息学数据挖掘、网络分析以及生物系统动力学模拟等领域。其中,Gröbner 基是代数统计方法中一个重要的工具,被广泛应用于上述领域中。例如, B. Sturmfels 等人使用 Gröbner 基的代数方法分析了贝叶斯网络<sup>[2]</sup>和生物序列进化树<sup>[3]</sup>; N. Yildirim 则研究了 Gröbner 基在细化序次酶反应速率常数方面的应用<sup>[4]</sup>。综上所述,代数统计方法在生物学中具有非常重要的地位和价值,可以用于解决各种复杂的生物问题,帮助我们更好地理解生物系统的运作规律,发现新的科学现象和生物机制。未来,随着计算机技术和数据科学的不断发展,代数统计方法在生物学中的应用也将越来越广泛,为生物学研究提供更多的思路和方法

国内外很多学者也运用代数方法定性分析了与本文主题直接相关的生物学问题。早期是在求解多项式方程组的过程中,率先将代数方法应用在生物学稳态问题上的,如 D. Wang 研究的神经网络多项式集<sup>[5]</sup>。还有一些工作是对特殊生物模型求解多项式方程组问题进行的稳定分析,如 L. Liu 等人<sup>[6]</sup>通过研究 Liapunov 函数和 Lasalle 不变集的结构,利用 W. Wu 的特征及方法<sup>[7]</sup>分析了几种不同类型的 LV 模型,并对其全局稳定性问题给出了解释。对于生化反应网络中出现的多项式系统族, B. Gatermann 等人用图表示了系统,并证明了这种系统的解结构在很大程度上由图的性质决定。他们还多项式系统做了大量的工作,例如,对实正稳态的数量的分析<sup>[8]</sup>,稳定稳态的数量的分析<sup>[9]</sup>,以及通过考虑基于 toric 变化的图的结构和使用 Gröbner 基的方法来分析 Hopf 分叉<sup>[10]</sup>。将量词消去应用于稳定性分析问题是 H. Hong 等人<sup>[11]</sup>在某些数值积分方案中首创的。在 A. Weber 论文中<sup>[12]</sup>,对于几种流行病模型,通过量化宽松确定疾病存在时稳态的存在性,并通过基于量化宽松的简化分析无疾病稳态的稳定性,这种定量宽松方法也应用于 Hopf 分叉的分析。El Kahoui 和 A. Weber 在其首创工作<sup>[13]</sup>中,推导出了动力系统存在 Hopf 分岔的条件,这些条件分别用 Hurwitz 行列式和系统 Jacobi 矩阵特征多项式的常数项给出,并将确定



Hopf 分岔存在的问题简化为 QE 问题。实解方法在稳定性分析中的应用是由 D. Wang 和 B. Xia 在<sup>[14]</sup>中提出的。他们通过实解分类和三角分解的方法,提出了一类生物系统的实稳态检测和稳定性分析的一般方法,并成功地分析了几个生物系统的稳定性<sup>[15]</sup>。离散动力系统的稳态和稳定性主要采用纯数学方法进行分析。对于有限动力系统,现有的研究大多集中在随机布尔网络。最近,基于 Gröbner 基<sup>[16]</sup>和 SAT 算法<sup>[17]</sup>的方法被应用于确定性布尔网络的稳态检测。也有一些关于利用符号计算对非生物问题的动力系统定性分析的工作,这类应用主要是关于平面多项式微分系统极限环数的确定和中心条件的推导,如 X. Jin 和 D. Wang 在<sup>[18]</sup>和 V. G. Romanovski 等人在<sup>[19]</sup>的工作等。温州大学数学与信息科学学院院长陆征一博士团队自上世纪 90 年代以来,就针对捕食系统以及 LV 模型的极限环和其他相关问题进行了长期而深入的研究:1993 年他们证明了基于系统  $k$  阶单调性,若两个物种边界平衡点不稳定则系统是全局稳定的,并就此对 Goh 猜想给出了一些解释<sup>[20]</sup>;1994 年他们修正了 LV 模型 Lasalle 不变集的力学方法,证明了对于一类 LV 模型,其局部渐进稳定正平衡点必须是全局稳定的<sup>[21]</sup>;1995 年他们提出对于一个没有时滞种内竞争的二维 LV 模型,当且仅当系统的交互矩阵满足一定条件时,该系统是全局稳定的<sup>[22]</sup>;1995 年他们提出了时滞可以使二维 LV 模型合作系统具有无界解,从而证明了合作系统中的时滞在持久性问题上是有危害的<sup>[23]</sup>;1997 年他们证明了具有弱对角占优相互作用矩阵的 LV 模型唯一的正平衡点是全局稳定的<sup>[24]</sup>;1999 年他们证明了具有齐次 Neumann 边界条件的 LV 模型在相互作用矩阵定性稳定的条件下是全局稳定的<sup>[25]</sup>;1999 年他们研究了一类 LV 模型离散扩散系统,描述了一种从扩散系统稳定性分析中检验多项式正定性的力学方法,并在四维以下证明了 Hofbauer-So-Takeuchi 猜想<sup>[26]</sup>;2001 年他们推进了相关的研究,在具有极限环的三维 LV 模型竞争系统的六类 Zeeman 分类中,除第 27 类(异斜环)情形外,在第 26 类、第 28 类和第 29 类中都构造了两个极限环,从而系统的给出了部分 Hofbauer-So-Takeuchi 猜想的答案<sup>[27]</sup>;2002 年他们进一步推进了相关研究,构造了具有异质环的三维 LV 模型竞争系统的极限环,对 Hofbauer-So-Takeuchi 猜想给出了部分答案<sup>[28]</sup>;2003 年他们提出了一种计算非线性算子的 Adomian 多项式的可靠方法,该方法通过符号运算实现,通过数学计算软件 Maple 使得微分方程的 Adomian 分解方法流程化<sup>[29]</sup>;2004 年他们基于微分方程组解的单调流理论,将 Routh-Hurwitz 定理和多元多项式的实根隔离算法应用于一类 LV 模型中,并于数学计算软件 Maple 中实现了对应确定非线性动力学系统平衡点位置和稳定性的算法<sup>[30]</sup>;2006 年他们提出 Adomian 分解方法的



改进方案,以获得非线性微分方程响应在固定时间间隔序列的中的近似解,这种修正的方法可以在一定误差范围内提供十分接近的精确解<sup>[31]</sup>;2007年他们提出一种考虑周期性变化稀释率的 Beddington-DeAngelis 食物链趋化器模型,得到了该模型具有底物和猎物的子系统的周期解,并通过对边界周期解的稳定性分析,了解了捕食者的入侵阈值、绘制了相应的不同参数分岔图<sup>[32]</sup>;2008年他们以 Zeeman 分类为标准,在带极限环的三维 LV 模型中,对第 30 类和第 31 类的多个极限环进行了算法化的分析<sup>[33]</sup>;2009年他们证明了时滞可变 LV 模型合作系统的持久性,即对于某些相同长度的时滞,系统具有与相应无时滞系统相似的恒久性,但对于一般时滞的情形,时滞可能会破坏系统的恒久性<sup>[34]</sup>;2010年他们考虑了一类具有时滞的永久稳定的  $n$  维 LV 模型,给出不受时滞大小限制的三种此类 LV 模型的永存性条件<sup>[35]</sup>;2011年他们将几何判据和时间平均性质应用于 LV 模型,得到了全局渐近稳定性的一些相关结果并对 LV 模型三维的转化可能性进行了一些猜想<sup>[36]</sup>;2016年他们进一步推进了研究,证明了上述的部分猜想,并研究了种群动态中具有 Gompertz 增长的三位竞争模型,利用其几何判据和时间的平均性质,给出了 Gompertz 模型全局渐近稳定性的新判据<sup>[37]</sup>;2017年他们提出了非线性自治微分方程平衡全局渐近稳定性的一般判据,并应用该准则得到了在总人口数不变的情况下,SEIRS 模型全局渐近稳定性的结果,对于上述猜想和永久免疫问题给出了一些回答<sup>[38]</sup>;2019年他们优化了 Lasalle 不变集的解法,并得到了一类八维 LV 模型全局稳定性的充要条件<sup>[39]</sup>。



## 2 理论基础及技术方法

### 2.1 中心流形构造

#### 2.1.1 一般形式 $n$ 阶中心流形的构造方法

中心流形定理是微分方程稳定性理论的核心之一，通过该理论可以在求解高阶微分多项式系统解结构方面具有广泛的应用。许多领域，如生物学、化学、物理学和工程学等，需要对动态系统进行定性分析以了解其行为和性质。然而，由于这些系统的方程往往非常复杂，难以直接求解，因此我们需要采用数学方法来简化问题。对于这个问题来说，中心流形定理无疑提供了一个理想的解决办法。其指出，当某个点的特征根具有负实部时，该点附近的解可以表示为具有更低阶导数的解和中心子空间中的解之和。该定理将高维动态系统转化为低维中心流形上的系统，简化求解过程。

在实践中，当我们构造出特定的三维捕食系统 LV 模型时，直接处理高维问题往往是困难的。我们需要在保留系统一定性质的前提下，通过构造中心流形来对三维 LV 模型进行降维，将其转换为计算软件 Maple 可以求解的二维 LV 模型。具体而言，我们可以通过计算 LV 模型的特征值和特征向量来确定系统的中心流形，然后将 LV 模型投影到中心流形上，从而简化问题。

考虑如下满足平衡点为原点的多项式微分系统：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x), x \in R^n \\ f(0) &= 0\end{aligned}\quad (2.1)$$

我们不难发现， $Ax$  为函数  $f(x)$  的线性部分，其中方阵  $A = Df(0)$  是 Jacobi 矩阵中  $f$  的形式。

假定方阵  $A$  的特征值没有零实部，由 Hartmann 定理可知：对于系统(2.1)来说，它的解和线性部分的解有着相同的定性特征。特别地，如果方阵  $A$  的特征值具有正实部，则该系统原点是不稳定的；反之，如果方阵  $A$  的全部特征值都具有负实部，则该系统原点是稳定的；如果方阵  $A$  的特征值具有零实部时，我们很难计算出其在远点附近的解，因





为解的形态相当复杂。

下面一个部分, 我们假定线性部分是具有非正实部特征值的  $n$  阶方阵, 由高等代数的基本知识不难得到, 存在使得方阵  $A$  与一个对角矩阵相似的线性变换  $L$ :

$$\begin{aligned} x &= Ax + R(x), x \in R^n \\ LAL^{-1} &= K = \begin{pmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中  $R(x) = o(|x|^2)$ ;  $K_1$  和  $K_2$  均为常数矩阵, 他们的秩分别记作  $k_1$  和  $k_2$ , 矩阵  $K$  的秩为  $k$ , 那么我们有  $k = k_1 + k_2$ , 且  $K_1$  的特征值具有零实部,  $K_2$  的特征值具有负实部。

此时我们进行变换  $(m, n) = Kx$ , 则系统(2.2)变为如下的系统(2.3):

$$\begin{aligned} \dot{m} &= K_1 m + R_1(m, n) \\ \dot{n} &= K_2 n + R_2(m, n) \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中  $R_1$  和  $R_2$  光滑, 于是我们得到  $R_1(0) = R_2(0) = 0, DR_1(0) = DR_2(0) = 0$ 。

定义 2.1.1 若  $(m(0), g(m(0)))$  是曲面  $n = g(m)$  上的一点, 则系统(3)过  $(m(0), g(m(0)))$  的解  $(m(t), g(t))$  也位于  $n = g(m)$  上, 即有  $n(t) = g(m(t))$  存在, 此时我们称曲面  $n = g(m)$  为系统(3)的不变流形。

如果  $R_1$  和  $R_2$  恒为零, 则很显然系统(2.3)具有两个不变流形  $m = 0$  和  $n = 0$ 。其中不变流形  $m = 0$  称为稳定流形, 当它的初值被限制在  $m = 0$  上时, 系统的解趋于原点。此时, 不变流形  $n = 0$  称为中心流形。那么此时所有的解指数级地趋向于  $\dot{m} = K_1 m$  的解, 即中心流形上的方程决定了整个系统解的性质和状态。

定理 2.1.2 若  $R_1, R_2 \in C^\infty$ , 则  $\forall s < \infty$ , 存在系统(3)的中心流形  $n = g(m)$ , 当  $|m| < \delta_s$  时,  $g \in C^s$ 。注意, 这里的  $C^s$  取决于  $s$  的选取。

在这个中心流形上, 系统(2.3)具有  $k_1$  维的形式如下所示:

$$\dot{m} = K_1 m + R_1(m, g(m)), m \in R^{k_1} \quad (2.4)$$

下面这个定理 2.1.3 保证了  $k_1$  维系统(2.4)与原系统具有相同的渐近行为(在原点一定范围的邻域内)。



## 定理 2.1.3

(a) 假定  $k_1$  维系统(4)的原点是局部稳定的（渐近稳定的，不稳定的），则系统(3)的原点也是局部稳定的（渐近稳定的，不稳定的）；

(b) 假定  $k_1$  维系统(4)的原点时局部稳定的，如果  $(m(t), n(t))$  是系统(3)的解，且  $(m(0), n(0))$  足够小，则必然存在(4)的解  $e(t)$  使得，当  $t \rightarrow \infty$  时， $m(t) = e(t) + o(e^{-st})$ ,  $n(t) = g(e(t)) + o(e^{-st})$ , 其中常数  $s > 0$ 。

下面一个部分，我们会给出  $g(m)$  的求法，也就是找到其对应的  $n$  阶近似的中心流形。

在系统(3)的第二个方程中，我们做变换  $n = g(m)$ ，由链式法则可以得到以下两个式子：

$$\dot{n} = Dg(m)\dot{m} = Dg(m)[K_1 m + R_1(m, g(m))] = K_2 g(m) + R_2(m, g(m))$$

或

$$N(m) = Dg(m)[K_1 m + R_1(m, g(m))] - K_2 g(m) - R_2(m, g(m)) = 0$$

且上述两个等式满足边界条件  $g(0) = Dg(0) = 0$ 。一般来说，这个偏微分方程我们无法找到它的精确解的，但实际上我们完全可以利用其解的 Taylor 展开式对其做任意次数的近似。

定理 2.1.4 若一个函数  $\varphi(x)$  满足  $\varphi(0) = D\varphi(0) = 0$ ，且存在  $r > 1$  使得当  $|x| \rightarrow 0$  时，有  $N(\varphi(x)) = o(|x|^r)$ ，则当  $|x| \rightarrow 0$  时，有  $g(x) = \varphi(x) + o(|x|^r)$ 。

以上部分详细论述了对于  $n$  阶系统而言，其中心流形的构造方法。在 2.1.2 一节中，我们将给出对于本文所主要应用的一般形式的三维系统来说，构造中心流形的详细过程。

## 2.1.2 一般形式的三维系统中心流形的构造方法

根据 2.1.1 一节的结论，我们首先构造线性变换矩阵  $L$ ，使得系统(1)的 Jacobi 矩阵如下所示：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



当方阵  $A$  具有一个负的特征值, 记作  $\lambda$ , 和一对共轭的纯虚特征值, 记作  $\pm \omega i (\omega \neq 0)$  时, 方阵  $A$  成为如下分块对角形方阵:

记方阵  $B$  为

$$B = A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

则我们有

$$\lambda = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\lambda \omega^2 = \det A$$

$$\omega^2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}a_{21} - a_{23}a_{32} - a_{31}a_{13}$$

方阵  $B$  的代数子矩阵可化简为:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = a_{11}^2 + \omega^2 + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31}$$

$$B_{22} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = a_{22}^2 + \omega^2 + a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32}$$

$$B_{33} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = a_{33}^2 + \omega^2 + a_{23}a_{32} + a_{13}a_{31}$$

对方阵  $B$  的代数子矩阵进行求和可得:

$$B_{11} + B_{22} + B_{33} = \omega^2 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})^2 \neq 0$$

故方阵  $B$  具有一般性, 此时我们可以假定  $B_{11} \neq 0$ , 令  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  为方阵  $A$  对应于  $\lambda$  的左特征向量, 因此我们可以得到:

$$\gamma A = \lambda \gamma$$

此时我们再来考虑特征方程组中的后两个方程

$$\gamma_1 b_{12} + \gamma_2 b_{22} + \gamma_3 b_{32} = 0$$

$$\gamma_1 b_{13} + \gamma_2 b_{23} + \gamma_3 b_{33} = 0$$

若令特征向量分别为:



$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{32} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{11}$$

$$\gamma_2 = -\begin{vmatrix} b_{12} & b_{32} \\ b_{13} & b_{33} \end{vmatrix} = B_{21}$$

$$\gamma_3 = \begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{vmatrix} = B_{31}$$

记  $\alpha = (0,1,0)(A - \lambda I) = (b_{21}, b_{22}, b_{23})$ ,  $\beta = (0,0,1)(A - \lambda I) = (b_{31}, b_{32}, b_{33})$ , 则此时我们得到  
的变换矩阵  $L_1$  为:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ B_{11} & B_{21} & B_{31} \end{pmatrix}$$

按照这种方法, 利用矩阵  $L_1$ , 方阵  $A$  可以分块变成上三角形矩阵, 即:

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & K_1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

此时我们再令变换矩阵  $L_2$  为:

$$L_2 = \begin{pmatrix} I & (K - \lambda I)^{-1} K_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及  $L = L_2 L_1$ , 则我们可以验证:

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

综合以上讨论, 我们得到推论 2.1.5。

推论 2.1.5 若一  $3 \times 3$  的方阵  $A$  具有一个负的实特征值  $\lambda$  和一对共轭的纯虚特征值  $\pm \omega i (\omega \neq 0)$ , 则存在如上所示的矩阵  $L = L_2 L_1$ , 使得:

$$LAL^{-1} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$



注意这里, 子矩阵  $\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$  有一对共轭的纯虚特征值  $\pm \omega i (\omega \neq 0)$ , 即子矩阵满足

$$c_{11} + c_{22} = 0 \text{ 且 } c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0。$$

我们于是注意到变换矩阵  $L$  的每一个元素都可视为方阵  $A$  中特定元素  $a_{ij}$  的有理函数, 它完全是通过如上的构造给出的。

利用变换  $(m, n) = Kx$ , 可以将系统(1)转化为具有分块对角形线性部分  $K(m, n)$  的系统, 如下所示:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= k_{11}m_1 + k_{12}m_2 + R_{11}(m_1, m_2, n_1) \\ \dot{m}_2 &= k_{21}m_1 + k_{22}m_2 + R_{12}(m_1, m_2, n_1) \\ \dot{n}_1 &= \lambda n_1 + R_2(m_1, m_2, n_1) \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据定理 2.1.4, 在原点附近充分小的邻域内, 我们完全可以做出如下假设

$$n_1 = g(m_1, m_2) = \sum_{i=2}^n g_i(m_1, m_2)$$

其中  $g_i(m_1, m_2) = r_{ij} \sum_{j=0}^u m_1^j m_2^{u-j}$  为  $m_1$  和  $m_2$  的  $u$  次齐次多项式。

将  $n_1 = g(m_1, m_2)$  代入系统(5)的第三个等式中, 我们可以得到:

$$\dot{n}_1 = \frac{\partial g(m_1, m_2)}{\partial m_1} \dot{m}_1 + \frac{\partial g(m_1, m_2)}{\partial m_2} \dot{m}_2 = \lambda g(m_1, m_2) + R_2(m_1, m_2, g(m_1, m_2))$$

然后通过比较两边同类项的系数, 不难发现我们事实上得到了一个以  $r_{ij}$  为主元的线性方程组。进行求解可以确定  $g_i(m_1, m_2) (i = 2, \dots, n)$ , 从而进一步得到其  $n$  次近似后的中心流形  $g(m_1, m_2)$ 。

最后, 我们将解出来的  $n_1 = g(m_1, m_2)$  代入  $\dot{m}_1$  和  $\dot{m}_2$ , 得到化简后对应的二维系统:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= k_{11}m_1 + k_{12}m_2 + R_{11}(m_1, m_2, g(m_1, m_2)) \\ \dot{m}_2 &= k_{21}m_1 + k_{22}m_2 + R_{12}(m_1, m_2, g(m_1, m_2)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

由定理 2.1.3, 该系统(2.6)与原系统在零点的充分小领域内具有相同的解结构。我们于是可以直接应用有关平面微分多项式系统研究的成熟方法和大量成果辅助研究。据此,



不难得到原三维系统在原点邻域内的解的性质。

在本文中，中心流形主要用于将三维捕食系统 LV 模型进行降维，转化为二维系统 LV 模型，从而调用数学计算软件 Maple 中相对应的函数包、子函数包以及对应算法，计算出 Liapunov 函数，应用极限环个数判定定理，可以得出最终结论。

## 2.2 平面多项式微分系统的线性变换

本节主要研究经过中心流形构造方法降维之后的平面多项式微分方程系统，即当维度  $k=2$  时，此时系统可以表示为以下一般形式：

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= P_1(u_1, \dots, u_m, x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= P_2(u_1, \dots, u_m, x, y) \\ \Omega(u_1, \dots, u_m, x, y)\end{aligned}\quad (2.7)$$

系统(7)的 Jacobi 矩阵可以表示为：

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dP_1}{dx} & \frac{dP_1}{dy} \\ \frac{dP_2}{dx} & \frac{dP_2}{dy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

为了清楚方便地表示系统(2.7)的性质，简化接下来一个部分的计算，我们假定：

$$\begin{aligned}p &= -(a+d) \\ q &= ad-bc \\ \Delta &= p^2-4q\end{aligned}$$

### 2.2.1 Hopf 分叉与极限环

Hopf 分叉是动力系统中一种重要的特殊情况，在各种分叉中占据着特殊地位。该分叉可以导致系统从稳态中产生极限环，从而使得系统的行为变得更加复杂和难以理解。Hopf 分叉发生时，系统的 Jacobi 矩阵会出现一对纯虚数特征值，而其他特征值则无实部为零的情况。这种情况下，系统中的解会在稳定平衡点附近转向或者周期性震荡，在某些情况下甚至可能出现混沌现象。Hopf 分叉也因此称为动力系统中非常重要的一个概念，从而用来描述许许多多现象，例如声波、光波等的产生。在理论数学领域，Hopf 分叉当前的研究主要集中于当稳态通过远离虚轴的特征值运动来改变系统稳定性的情况。这种



情况下,系统的 Jacobi 矩阵经过一定的变换可以被分解为实对称矩阵和反对称矩阵的和。通过这种分解,我们可以得到系统在特定条件下的线性化模型,从而进一步研究系统的 Hopf 分叉。

定义 2.2.6 若形如系统(7)的系统,其 Jacobi 矩阵有一对纯虚数特征值且此时该系统的 Hopf 分叉发生在  $p=0, q>0$  的情况,此时该系统称为中心-焦点型。

首先,我们需要检查稳态点是否是无参数系统(7)的 Hopf 分叉点,或者确定参数  $u$  满足一定条件时,使得系统(7)称为一个中心-焦点型,此时将这个问题表述为一个半代数系统,如下式所示:

$$\{P_1=0, P_2=0, p=0, q>0\} \cup \Omega$$

通过高等代数常见的三角集、Gröbner 基、量词消去以及分离实数等方法可以对此时的系统进行求解。

### 2.2.2 线性变换与 Liapunov 函数

假定当系统(7)达到稳态时,  $x=\bar{x}, y=\bar{y}$ , 即  $(\bar{x}, \bar{y})$  是系统的稳态点。现在再次假定系统(7)为中心-焦点型,既满足条件  $p=0, q>0$  的条件,我们想要确定 Hopf 的分叉点  $(\bar{x}, \bar{y})$  的稳定性,并从  $(\bar{x}, \bar{y})$  出发构造极限环。目前已有的研究通常通过使用 Poincaré-Birkhoff 范式法、Liapunov 函数法、连续函数法、平均法和本征谐波平衡法等。在本文中,为了方便后续数学计算软件 Maple 的使用,我们采用 Liapunov 函数法。该方法的核心是构造 Liapunov 函数,适用于某一特定类型的系统。

为了方便地解决这个问题,我们在此处进行一个线性变换:

$$x = -\frac{1}{c}Y - \frac{a}{c\delta}X + \bar{x}, y = -\frac{1}{\delta}X + \bar{y}, t = \frac{\tau}{\delta} \quad (2.8)$$

其中  $\delta = \sqrt{-a^2 - bc}$ , 然后我们可以将系统(2.7)转化为如下的一般形式:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\tau} &= Y + P(u, \delta, \bar{x}, \bar{y}, X, Y) \\ \frac{dY}{d\tau} &= -X + Q(u, \delta, \bar{x}, \bar{y}, X, Y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中  $P$  和  $Q$  是由括号内元素组成的多项式,显而易见的是,  $P$  和  $Q$  对于  $x$  和  $y$  的总次



数至少为 2。

定理 2.2.7 若系统可以构造一个 Liapunov 函数  $L(X,Y)$ ，使得其在原点  $(0,0)$  附近是局部正定的，且此时沿该微分方程系统积分曲线的微分是确定的，则原点的稳定性可由微分符号来确定。

我们可以应用 Poincaré 方法进一步对系统(2.9)进行处理，假设该系统的 Liapunov 函数为如下多项式的形式：

$$L(X,Y) = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \sum_{j=3}^{\infty} \sum_{i=0}^j f_{i,j-i} X^i Y^{j-i}$$

其中系数  $f_{i,j-i}$  是未知的，我们不难发现  $L(X,Y)$  在原点  $(0,0)$  附近是正定的，根据定理 2.2.7，我们现在计算  $L(X,Y)$  沿系统(2.9)积分曲线的微分：

$$\frac{dL(X,Y)}{d\tau} = \frac{\partial L(X,Y)}{\partial X}(Y+P) + \frac{\partial L(X,Y)}{\partial Y}(-X+Q)$$

此时我们令：

$$\frac{dL(X,Y)}{d\tau} = v_3 Y^4 + v_5 Y^6 + \dots + v_{2l+1} Y^{2l+2} + \dots$$

其中系数  $v_{2l+1}$  也是未知的。通过待定系数法，使得上述方程中相同  $X,Y$  级数的系数相等，我们于是得到了一个有关于  $f_{i,j-i}$  和  $v_{2l+1}$  的线性方程组。求解这些方程组，我们可以依次解出这些待定的系数（如果该方程组有解）。那么对于原点  $(0,0)$  系统(2.9)的稳定性，即对于平衡点  $(\bar{x}, \bar{y})$  系统(2.7)的稳定型也就是即原系统的稳定性都可以由  $\frac{dL}{d\tau}$  的符号来决定，这也就是说我们需要关注第一个非零的  $v_{2l+1}$  的符号。上述判定系统稳定性以及极限环的方法，我们总结概括为以下定理 2.2.8。

定理 2.2.8 对于系统(2.7)所示的系统，任意给定位于稳定点  $(\bar{x}, \bar{y})$  时参数  $u$  的值  $\bar{u}$ （满足  $p=0, q>0$ ），令  $\bar{v}_{2l+1} = v_{2l+1} |_{u=\bar{u}}$ ，我们做出如下讨论：

(a)如果有一个整数  $k \geq 1$ ，使得  $\bar{v}_3 = \bar{v}_5 = \dots = \bar{v}_{2k-1} = 0$ ，但  $\bar{v}_{2k+1} \neq 0$ ，那么此时当  $\bar{v}_{2k+1} > 0$  时，系统(7)是不稳定的，当  $\bar{v}_{2k+1} < 0$  时，系统(2.7)是稳定的；

(b)如果对于所有可能的  $l$  来说， $\bar{v}_{2l+1} = 0$  恒成立，那么此时系统(2.7)是中心-焦点型稳





定的,但不是渐近稳定的。

在定理 2.2.8 的情况(a)中,系统(2.7)位于稳态的平衡点  $(\bar{x}, \bar{y})$  是该系统的  $k$  阶焦点;在定理 2.2.8 的情况(b)中,  $(\bar{x}, \bar{y})$  是系统(2.7)的中心,于是确定焦点的稳定性问题就可以简化为确定  $v_{2l+1}$  的符号问题,从而可以用我们上述讨论的代数方法求解。需要指出的是,到这一步为止,尽管我们已经了降维、线性变换等大量的简化工作,直接计算出系统的 Liapunov 函数依然是一件很困难的事情。我们依然需要借助数学计算软件 Maple 中函数包 Epsilon 中的子函数包 Miscel 的 licon 函数进行计算,这一部分我们将在接下来一小节中详细介绍函数的调用过程。

当系统(2.7)的稳态  $(\bar{x}, \bar{y})$  是其  $k$  阶焦点时,我们可以通过小扰动在  $(\bar{x}, \bar{y})$  附近构造  $k$  个极限环,在 2.3 一节中,我们将展示按照此法构造极限环的过程。

### 2.2.3 由 Maple 实现 Liapunov 函数的计算

换等大量的简化工作,直接计算出系统的 Liapunov 函数依然是一件很困难的事情。我们依然需要借 Maple 是一款强大的科学和工程计算软件。其内置了超过 5000 个计算命令,可用于解决微积分、微分方程、统计学和动力系统等各种数学问题。Maple 拥有许多先进的功能和技术,可以帮助用户进行复杂的数学计算。除此之外,Maple 还支持互联网连接,使得使用者能够与其他用户共享自己的计算结果或查找其他人公开分享的代码等信息。Maple 的符号计算技术是其最大的优势之一。符号计算是一种基于代数运算的计算方法,在处理含有变量或未知数的数学表达式时十分有效。Maple 能够自动化地进行符号计算,并输出精确的、可读的数学表达式。Maple 还支持无限精度数值计算,这是因为它使用的是多精度算法。这种算法可以通过在计算机上存储和处理更多的位数来获得更高的计算精度。对于需要高精度计算的任务,Maple 是一个很好的选择。Maple 还提供了 4GL 语言,这使得用户可以使用类似于编程语言的方式来操作 Maple。4GL 语言非常强大,可以大幅提高用户的操作效率,并可以编写自定义函数和程序。最后,Maple 的互联网连接功能使得用户可以更方便地分享自己的计算结果和代码,也可以在互联网上查找其他人公开分享的代码等信息。一言以蔽之,Maple 是一款非常优秀的科学和工程计算软件,它具有许多先进的功能和技术,可以帮助用户解决各种数学问题。Maple 的符号计算和无限精度数值计算功能非常强大,同时还拥有 4GL 语言和互联网连接等特



性,因此备受许多专业数学家青睐。在本文中,我们将使用 Maple 作为计算 Liapunov 函数的工具。

在本节中,我们以耗散动力系统(dissipative dynamical system)为例,介绍由数学计算软件 Maple 中函数包 Epsilon 中的子函数包 Miscel 的 licon 函数实现系统 Liapunov 函数的计算过程。

胶束形成是多个学科和领域涉及的现象,出现在诸如食物消化、化学分离、表面催化和药物传递等许多化学、生物和工业过程中。研究表明,胶束形成的动力学过程通常是高度非线性的,而且还受到各种因素的影响。为了模拟胶束形成过程,科学家们通常采用非线性动力系统,并将其建模为一个耗散动力系统。在这种系统中,能量会从系统中流失,导致系统向稳态演化。此演化可以使用动力学方程来描述,这些方程常常是高度非线性的。科学研究中,我们需要建立此系统的模型,以更好地理解胶束形成。通常,我们使用一组偏微分方程来表示此过程,其中包括涉及物质扩散、反应和传递等过程的变量,以及其他相关变量的出现。由于胶束形成具有复杂性和多变性,因此相应的方程组也会比较复杂。在建模过程中,需要考虑各个变量之间的相互作用及其时间上的演化过程,还需要对各种物理和化学参数进行建模,以便进行计算实验的模拟。除此以外,此模型还需要考虑外部条件的影响,例如环境温度、压力等。

耗散动力系统的具体建模过程在这里不再赘述,该系统的平面微分方程表达式如下所示:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mu - xy^2 - x(r + \alpha) \\ \frac{dy}{dt} &= rx + xy^2 - \eta y\end{aligned}\quad (2.10)$$

其中  $x$  和  $y$  分别是活性自由亲性单体和胶束的无量纲浓度,速率系数  $\alpha$  和  $\eta$  代表了相应物质的化学性质,  $\mu$  和  $r$  是两个内在的参数,需要注意的是,所有的变量和参数都是严格大于零的。

该系统的 Jacobi 矩阵为:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\bar{y}^2 + r + \alpha) & -2\bar{x}\bar{y} \\ r + \bar{y}^2 & 2\bar{x}\bar{y} - \eta \end{bmatrix}$$

为了使该系统形式简单直观,我们不妨令:



$$\beta = r + \bar{y}^2, \gamma = -\alpha(r\bar{x} - 2r\bar{y} - 2\alpha\bar{y} + \bar{x}\bar{y}^2 - 2\bar{y}^3)$$

此时将线性变换(8)代入系统(10)中, 整理后, 该系统可化为(由于 licon 函数的应用要求, 在整理线性变换后的系统时我们需要舍去多项式中变量总次数小于 2 的项):

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= Y - \frac{\alpha + \beta}{\beta\delta^3} X^3 + \frac{1}{\beta\delta^2} X^2 Y + \frac{\gamma}{\alpha\beta\delta^2} X^2 - \frac{2\bar{y}}{\beta\delta} XY \\ \frac{dY}{d\tau} &= -X - \frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\beta\delta^4} X^3 + \frac{\alpha}{\beta\delta^3} X^2 Y + \frac{\gamma}{\beta\delta^3} X^2 - \frac{2\alpha\bar{y}}{\beta\delta^2} XY\end{aligned}$$

观察该系统此时的形式特点, 为了使该系统形式更为简单直观, 我们不妨令:

$$Q = -\frac{\alpha(\alpha + \beta)}{\beta\delta^4} X^3 + \frac{\alpha}{\beta\delta^3} X^2 Y + \frac{\gamma}{\beta\delta^3} X^2 - \frac{2\alpha\bar{y}}{\beta\delta^2} XY$$

于是最终, 该系统可化为:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{d\tau} &= Y + \frac{\delta}{\alpha} Q \\ \frac{dY}{d\tau} &= -X + Q\end{aligned}\quad (2.11)$$

然后我们按照 Maple 中函数包的调用格式依次调用函数包 Epsilon 和子函数包 Miscel (Epsilon 函数包是 Dongming Wang 于 2003 年开发的用于完善 Maple 进行多种复杂代数计算的手段)。

接下来, 我们按照 licon 函数的调用说明输入多项式  $P, Q$  以及想要计算的 Liapunov 函数, 此时要按照如图 2.1 所示的形式和要求对多项式进行整理:

M4. licon \_\_\_\_\_  
Inputted an odd integer  $m > 2$ , an odd integer  $n > m$ , a polynomial  $P$  of the form  $y + P(x, y)$ , and a polynomial  $Q$  of the form  $-x + Q(x, y)$ , where  $P$  and  $Q$  are polynomials in  $x$  and  $y$ , with terms of total degree  $> 1$ , licon( $P, Q, m, n$ ) returns a list  $[v_m, v_{m+2}, \dots, v_n]$  of polynomials in the coefficients of  $P$  and  $Q$ , called the *Liapunov constants* of the differential system

$$\frac{dx}{dt} = y + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + Q(x, y).$$

图 2.1 licon 的调用说明

最终, 我们通过计算得到了该系统的 Liapunov 函数, 其中第一个 Liapunov 函数为:

$$v_3 = \frac{\alpha}{3\beta\delta^3} - \frac{\alpha + \beta}{\beta\delta^3} - \frac{2\alpha\bar{y}\gamma}{3\beta^2\delta^5} + \frac{2\bar{y}\gamma}{3\alpha\beta^2\delta^3} + \frac{2\gamma^2}{3\alpha\beta^2\delta^5}$$

其分子展开后有 21 项, 后续五个 Liapunov 函数分别由 166、663、1819、4074、7957 个项组成, 在这里不在一一给予展示。



## 2.3 极限环构造

本节主要研究经过中心流形构造方法降维之后在研究平面多项式微分系统中的极限环是否存在以及其数量方面，我们面临着相当棘手的难题。这个问题不仅困扰着动力系统的定性理论研究，而且对生物系统的定性行为有很大的影响。因此，通过研究极限环的行为以及分叉理论，我们可以更好地理解复杂的生物现象。动力系统极限环是一种具有特殊动力学行为的周期解，与其他类型的周期解不同的是，它们是稳定的，因此在实际问题中很可能出现。然而，在确定平面多项式微分系统是否存在极限环以及极限环的数量方面，仍然存在相当大的难度。分叉理论是一种研究系统变化及其影响的数学工具，可以帮助我们更好地了解系统的性质和特点。它提供了一种描述系统如何从一个状态转移到另一个状态，并预测该过程中可能发生的分支和变化的框架。使用分叉理论，我们可以分析和探究动力系统中微小的变化，从而更加深入地了解系统的行为。研究极限环的行为可以帮助我们更好地理解生物系统的定性表现。因此，研究极限环在生物系统中的行为可以提供有关这些复杂现象的深入见解。通过理解系统如何变化以及它们可能经历的分叉，我们可以更好地预测和控制生物系统中的周期性行为。总之，研究分叉理论和极限环的行为对于理解动力系统的特点和生物系统的定性行为至关重要。虽然确定平面多项式微分系统中的极限环是否存在和数量是一个相当困难的问题，但通过分叉理论和其他数学工具的使用，我们可以更好地理解这些现象，并预测和控制系统的行为。在这个部分，我们将论述在计算出系统 Liapunov 函数的前提下，如何通过极限环构造来确定极限环的个数。

基于之前对 Hopf 分叉现象的研究分析，当系统(2.7)的平衡点  $(\bar{x}, \bar{y})$  为其  $k$  阶焦点时，我们可以通过在该焦点周围进行小扰动来构建小振幅极限环。经过 2.2 一节的线性变换，我们不难把系统(2.7)的平衡点  $(\bar{x}, \bar{y})$  变换为原点  $(0,0)$ （即系统(2.9)的平衡点），使之成为新系统的  $k$  阶焦点。现在，我们通过对系统(2.9)作小扰动，即可观察到  $k$  个小幅极限环的分叉现象。

由此可见，确定极限环个数的关键是要确定系统焦点的阶数，这样我们才能准确地计算出小幅极限环的数量。

当系统(2.7)不涉及任何参数时，我们可以检查其平衡点  $(\bar{x}, \bar{y})$  是否为  $k$  阶焦点，或者



通过求解半代数系统方程  $S$  的条件, 找到使得系统(2.7)成为  $k$  阶焦点的参数  $u$  ( $u$  可解且存在)。于是, 我们现在关注如下限制条件:

$$\{P_1 = 0, P_2 = 0, p = 0, q > 0, \delta^2 - q = 0, v_3 = \dots = v_{2k-1} = 0, v_{2k+1} \neq 0\} \cup \Omega$$

要构造  $k$  个小振幅极限环, 我们需要找到半代数系统方程  $S$  的实解, 并且要求这个实解可以用有理数、根式或有理区间来表示。如果  $k < m$  (其中  $m$  是参数的个数), 我们可以通过求解满足系统焦点为  $k$  阶时的特定值来计算出其他  $m - k$  个参数, 这样半代数系统方程  $S$  所组成的系统就会具有有限个解。接下来, 为了找出真正的解, 我们需要使用三角分解、Gröbner 基和实解分离等方法, 辅之以各种软件工具的组合。一旦找到实解, 我们可以选择一个足够小的值来扰动系统(7)中  $P$  和  $Q$  系数, 从而使得扰动系统的 Liapunov 函数在  $(0,0)$  附近具有交替变换的符号, 即  $v_l v_{l+2} < 0$ 。这样, 焦点就会产生至多  $k$  个小振幅极限环。这种方法是典型的分叉理论中生成小振幅极限环的技术, 而我们的目标就是通过这种手段来实现生成极限环的结果。因此, 通过选取正确的参数值, 可以简单有效地构造出任意数量的小振幅极限环, 这为实际应用提供了很大的帮助。

确定以  $(\bar{x}, \bar{y})$  为中心的条件是一个更加复杂的问题, 因为定理 2.2.8(b)中的条件是由无限多个等式在有限数量的变量中给出的。因此, 确定这样的条件显然并非易事。我们需要利用计算出的 Liapunov 函数来建立使得  $(\bar{x}, \bar{y})$  成为中心的必要性条件。然而, 要将这些必要性条件转化为充分性条件, 则需要更加复杂的数学技术和代数计算。例如, 在<sup>[40]</sup>中, 我们可以看到证明所建立的必要性条件的充分性需要极其困难而繁琐的推导和计算。这使得从 Liapunov 函数推导中心条件, 进而讨论具有高阶焦点的系统成为一项巨大的挑战, 即使在功能强大的计算机上也难以解决。为了解决这个问题, 我们需要确定参数  $u$ , 即使得 Liapunov 函数  $v_3, v_5, \dots$  都为 0。这需要使用极为复杂的代数方法。可事实上是, 即使使用这种代数方法, 现在的研究成果总是依旧无法给出解答。

## 2.4 本章小结

本章介绍了对于一般的三维及高维系统求解极限环数量的理论基础及技术方法, 即按照高维系统中心流形降维-平面系统线性变换化简-Maple 计算 Liapunov 函数-由 Liapunov 函数构造分析极限环个数的一般流程进行研究, 如图 2.2 所示。接下来一个部

分,我们将以一个具体的实例来进行讨论,从对生物学现象的数学建模开始到得出其极限环个数为止,进行系统而整体的探究,实现我们的算法。

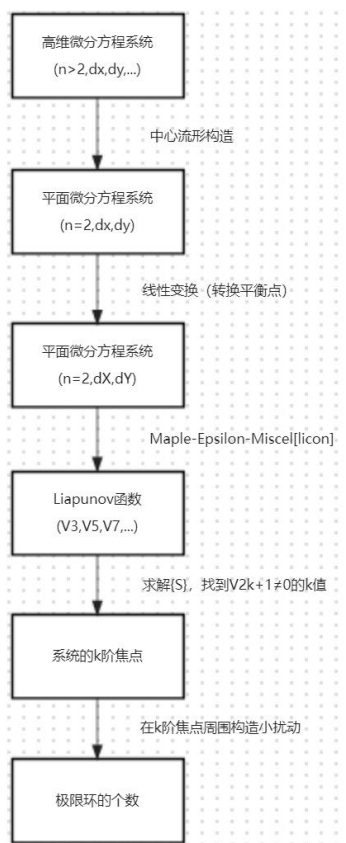


图 2.2 探究高维系统极限环个数的一般流程



### 3 三维捕食系统极限环的算法分析

#### 3.1 三维捕食系统

在生态系统中,捕食者和被捕食者之间的相互作用是生态系统中最基本的动力学过程之一,同时也是这个系统中最重要营养转移途径之一。在其中一种具有三维捕食系统的生态系统中,食草动物、食肉动物和植物构成了这种复杂且精密的生态系统类型。

以森林为例,树木和灌木是森林生态系统的主要植物,它们提供了生态系统基础的生物多样性和群落结构。植物是生态系统中最基本的生物类别之一,因为它们能够通过光合作用将太阳能转化成有机物,成为生态系统中所有生物都需要的能量来源。而在这个系统中,食草动物又包括了鹿、兔子等不同种类,它们依靠吃树叶、嫩枝等植物部位为生。食草动物通过消耗植物来获得能量和营养物质,同时它们还提供给食肉动物一个丰富的食物来源。而食肉动物则包括了狼、豹、猫头鹰等不同种类,它们则依靠捕杀食草动物为生。食肉动物通过消耗食草动物来获得能量和养分,并转化成它们自己的组织和体液。食肉动物在生态系统中具有重要的调节作用,它们可以控制食草动物的数量和行为,并对植物的生长和繁殖产生影响。在生态系统中,捕食者和被捕食者之间的相互作用是一个动态过程,其数量和行为都受到其他物种的影响,从而形成一个错综复杂的生态网。生态系统中的三维捕食关系体现了生态系统的复杂性和多样性,使生态系统能够适应各种环境变化。在这个系统中,三者相互作用,交织成一个错综复杂的生态网,进而维持着生态系统的平衡。如果其中任何一种生物类别数量的变化都可能会对其他生物的数量和行为产生影响,从而影响整个生态系统的平衡。

三维捕食系统的复杂性还在于它具有极强的动态性。在这个系统中,植物可以生长得很高,但由于极端天气或其他自然灾害等原因,它们也可能被迫降低生长高度,否则食草动物无法获得足够的食物。而食草动物的数量过多,则会导致食物资源不足,最终饿死;但如果食草动物数量过少,则会使食肉动物面临口粮短缺而面临存活困境,这些关系相互作用交织在一起,构成了生态系统中更为复杂的捕食系统。

三维捕食系统的形成和演化受许多因素的影响,其中环境因素是最为重要的一个。例



如,在温暖湿润的森林中,植物可能比较茂盛,而在干旱地区的三维捕食系统则可能更为单薄。此外,在局部捕食系统中,生物种类和数量的变化也会对整个生态系统产生重要的影响。例如,过度猎捕某一种动物会导致该物种的数量减少,甚至灭绝,这将对生态系统造成不可逆的影响,可能导致其他物种灭绝。

总的来说,自然界中的三维捕食系统是一个复杂而又精密的生态系统。它通过不同种类生物之间的相互作用,使得自然界保持着动态平衡。这个过程中,生物种类之间不断地演化和进化,形成了各种奇妙的生物多样性,提供了无尽的自然之美。健康的生态系统对于人类的生存和发展来说至关重要,因此保护生态系统并避免破坏它们是我们每个人的责任。

在下一个小节中,我们将通过简单的数学建模来模拟一种三维捕食系统(天敌-捕食者-猎物)的基本行为特征并依照我们在第二章节所介绍的求解高维系统极限环的算法对该系统可能存在的极限环数量进行讨论。

### 3.2 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型

#### 3.2.1 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的建立

天敌-捕食者-猎物系统包括了三个基本角色:捕食者、猎物和天敌。

捕食者是指那些通过捕食其他生物来获取营养的种群。在自然界中,捕食者通常拥有特殊的身体构造和适应性器官,可以帮助它们更容易地攻击、捕杀猎物。肉食动物通常拥有锋利的牙齿、强壮的爪子或者强大的咬合力,这些特殊的适应性器官能够帮助它们快速地杀死猎物并获得营养。而对于其他类型的捕食者,例如寄生虫和真菌等,则依靠不同的方式从宿主身上获得养分。寄生虫通常寄生于其他生物体内,以获取其所需的营养和生存条件。真菌则通过分解死亡的生物体来获得自己所需的营养。在自然界中,猎物通常处于弱势地位,因为它们需要不断地为自己寻找食物、避免被捕食者逐个追杀。由于不同类型的猎物存在,捕食者可以在不同的环境条件下获取到不同类型的营养,也可以适应不同的猎捕方式。例如,在水生生态系统中,鲨鱼和海豚等海洋肉食动物通常会借助强大的咬合力和游泳速度进行猎捕;而在陆地上,狮子和豹子等肉食动物则通常会利用自己的强壮爪子和敏捷身体来追杀猎物。虽然捕食者在自然界中所占的种群数量较少,但它们对维持整个生物群落的稳定性起着至关重要的作用。在三维捕食系统中,猎物数量的变化可能会直接影响到捕食者的数量和分布范围。例如,在驯鹿和狼之间的





捕食关系中,当驯鹿数量减少时,狼可能会开始寻找其他的猎物,或者减少其自身的数量和覆盖面积。与此同时,天敌也可以通过捕食共同的猎物来间接地消减捕食者的数量和分布,从而促进生物群落的稳定发展。以农业生态系统为例,农业害虫数量的增长可能会对农作物带来严重的伤害。为了避免这种情况的发生,人们可以引入天敌来控制害虫的数量。例如,在有机葡萄园中,人们通常会引入蚜茧蜂和蚜虫食蜘蛛等天敌来控制蚜虫数量,从而保护作物并提高收成。

由于天敌-捕食者-猎物系统运作机制十分复杂,其中涉及到许多不同的因素和相互作用关系,在本文中我们默认该系统的基本运作原理如下:

- (1) 捕食者通过消耗猎物获取能量和养分,从而维持自身的生存和繁殖;
- (2) 猎物则依靠数量减少来控制其种群数量,以此保持与其他物种的数量平衡;
- (3) 天敌通过消耗捕食者来影响它们的数量,从而达到间接影响其他物种数量的目的。

我们于是可以用 LV 模型来建立这个三维捕食系统的微分方程组:

令  $x$  表示猎物的数量,  $y$  表示捕食者的数量,  $z$  表示天敌的数量,  $\alpha$  表示猎物出生率,  $\beta$  表示猎物死亡率,  $\gamma$  表示捕食者和天敌的死亡率,  $\delta$  表示捕食者对猎物的消耗效率,  $\varepsilon$  表示天敌对捕食者的消耗效率, 则我们得到如下三个微分方程:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y - \varepsilon yz \\ \frac{dz}{dt} &= \varepsilon yz - \gamma z\end{aligned}\quad (3.1)$$

其中,第一个方程表示猎物数量随时间的变化,第二个方程表示捕食者数量随时间的变化,第三个方程表示天敌数量随时间的变化。

### 3.2.2 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的生物学意义

在这个部分,我们将简要分析系统(12)中三个微分方程所代表的生物学现实意义,以便于我们更好地理解模型的实质,分析实际问题。

第一个方程表示了猎物数量随时间的变化。猎物是生态系统中很重要的一个组成部分,它们是生态系统的底层生物,提供了能量和养分来源。猎物数量的增加通常会导致食草动物数量的增加,这对于整个生态系统的稳定性和平衡性都是至关重要的。在这个



方程中, 我们考虑了两个因素: 猎物的出生率  $\alpha$  和死亡率  $\beta$ 。当猎物数量多时, 它们的出生率会增加, 因为更多的个体表明了更充足的食物和适宜的环境, 这会促进繁殖。但同时, 这些猎物也会遭受捕食者的攻击, 导致死亡率增加。这就是为什么我们使用了一个负相关的项来描述这一过程。在这种情况下, 这个方程可以表示为:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy$$

其中,  $x$  表示猎物数量,  $y$  表示捕食者数量,  $t$  表示时间。这个方程告诉我们, 猎物数量随时间的变化率取决于出生率和死亡率的差异。

第二个方程描述了捕食者数量随时间变化的规律, 捕食者是生态系统中的另一个关键组成部分, 它们主要依赖猎物作为其能量来源。由于捕食者只能以猎物为食, 因此它们的数量受到猎物数量的限制。当猎物数量增加时, 捕食者可以消耗更多的猎物, 从而导致其数量的增加; 但当猎物数量减少时, 捕食者的数量也会相应下降。在这个方程中, 我们考虑了三个因素: 捕食者的死亡率  $\gamma$ 、捕食者对猎物的消耗效率  $\delta$  和天敌对捕食者的消耗效率  $\varepsilon$ 。这三个因素描述了捕食者数量的动态变化过程。随着猎物数量的增加, 捕食者可以消耗更多的猎物, 从而增加其数量; 但当猎物数量不足时, 捕食者的数量将受到影响, 死亡率可能会增加。同时, 自然天敌也会对捕食者数量产生影响, 因为它们直接控制捕食者的数量。这个方程可以表示为:

$$\frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y - \varepsilon yz$$

其中,  $y$  表示捕食者数量,  $x$  表示猎物数量,  $z$  表示天敌数量,  $t$  表示时间。这个方程告诉我们, 捕食者数量随时间的变化率取决于猎物数量、死亡率、消耗效率和天敌数量。

第三个方程描述了天敌数量随时间变化的规律。天敌是生态系统中比较高级别的掠食者, 其数量受捕食者数量的限制, 因为它们通常以捕食者为主要食物来源。随着捕食者数量的增加, 天敌可以消耗更多的捕食者, 导致其数量的增加; 但当捕食者数量减少时, 天敌数量也会相应下降。在这个方程中, 我们考虑了两个因素: 天敌对捕食者的消耗效率  $\varepsilon$  和天敌的死亡率  $\gamma$  (为了讨论方便, 假设天敌死亡率与捕食者死亡率相同)。这两个因素描述了天敌数量的动态变化过程。当捕食者数量增加时, 天敌可以消耗更多的



捕食者,从而导致其数量的增加;然而,当天敌数量过多时,天敌本身也会受到影响,可能会导致死亡率增加。这个方程可以表示为:

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon yz - \gamma z$$

其中,  $z$  表示天敌数量,  $y$  表示捕食者数量,  $t$  表示时间。这个方程告诉我们,天敌数量随时间的变化率取决于捕食者数量、消耗效率和死亡率。

通过这三个方程,我们可以了解生态系统中不同生物种类之间的相互作用和动态演化。这个模型能够帮助我们预测生态系统中不同生物的数量和分布,以便更好地管理和保护自然资源。在实际应用中,我们当然可以使用数值模拟等手段对这些方程进行求解,以获得具体的数值结果。同时,我们也可以根据不同的研究对象和目的,对这个模型进行修改和扩展,以更好地适应不同的生态系统和研究需求。

除了上述的三个方程,还有很多其他关键的因素影响到生态系统的运转和稳定性。例如,环境容纳量  $K$  是指生态系统中能够容纳的最大总个体数,在真实情况下,由于环境条件的限制,生态系统中的生物总量是有一定上限的。此外,气候、土壤、水源、生境等环境因素,也会直接影响到不同生物种类的生存和繁殖。

在实际应用中,如果将这些因素考虑进去,构建更加精细化和复杂化的生态系统模型,毫无疑问能够更好地理解和研究生态系统的动态变化和演化。

### 3.2.3 天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型的极限环算法分析

我们首先构造中心流形对系统(12)进行降维,将其转化为二维的系统进行讨论。

假设系统(12)的平衡点为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 此时对于系统(12)来说,显然存在:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$$

此时我们来计算系统(12)的 Jacobi 矩阵,计算后结果为:

$$\bar{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \bar{y} & -\beta \bar{x} & 0 \\ \delta \bar{y} & \delta \bar{x} - \gamma - \varepsilon \bar{z} & -\varepsilon \bar{y} \\ 0 & \varepsilon \bar{z} & -\gamma \end{pmatrix}$$

下面我们来计算系统(12)的 Jacobi 矩阵的特征值和特征向量,找到其中所有特征值为  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$  和  $\lambda_3$ , 并据此找到其中所有实部为负的特征向量,并把他们记作  $v_1$  和  $v_2$ , 其结果为:



$$\lambda_1 = -0.3$$

$$\lambda_2 = \alpha - \gamma$$

$$\lambda_3 = -\gamma$$

这三个特征值中，显然可以发现  $\lambda_1 < 0$ ，而  $\lambda_2$  和  $\lambda_3$  的实部均为负数。因此，我们选择  $v_1$  和  $v_2$  两个特征向量张成的平面作为中心流形，根据第二章中心流形的有关理论基础，对于这两个向量来说，存在下面两个等式成立：

$$\bar{J}v_1 = \lambda_1 v_1$$

$$\bar{J}v_2 = \lambda_2 v_2$$

求解上述两个等式，我们不难得到如下两个特征向量的值：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\alpha}{\gamma} \end{pmatrix}^T, v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\gamma} & -\frac{\delta\bar{x}}{\gamma(\gamma-\alpha)} & 1 \end{pmatrix}^T$$

则此时，在两个特征向量  $v_1$  和  $v_2$  所张成的平面上，得到了如下的二维系统 LV 模型的微分方程组：

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(\alpha - \gamma u - \beta v) \\ \frac{dv}{dt} &= v(\delta u - (\gamma - \varepsilon w) - \frac{\delta\bar{x}v}{\gamma - \alpha}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中， $w = \frac{\alpha}{\gamma}u + v$  表示平衡点  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  在中心流形上对应的点。

现在我们来证明  $w$  是一个常数。在中心流形上，我们可以将系统沿着特征向量展开成低维的形式。并且特别地，由于特征向量  $v_1$  和  $v_2$  张成的平面是稳定的方向，我们于是便可以将二维系统写成以这两个向量为基向量的线性组合的形式。不难发现，此时我们一定有：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是待定系数，为常数。于是代入  $w = \frac{\alpha}{\gamma}u + v$ ，我们可以得到如下等式：



$$w = \frac{\alpha}{\gamma}u + v = \frac{\alpha}{\gamma}(c_1v_{11} + c_2v_{21}) + c_1v_{12} + c_2v_{22}$$

其中,  $v_{11}$  表示  $v_1$  的第一个分量,  $v_{21}$  表示  $v_1$  的第一个分量,  $v_{12}$  表示  $v_1$  的第三个分量,  $v_{22}$  表示  $v_2$  的第三个分量。而根据  $v_1$  和  $v_2$  是正交单位向量的基本性可知, 我们有  $v_{11} = v_{21} = 0$ ,  $v_{12} = 1$ ,  $v_{22} = 0$ , 于是我们把这些结果代入上式可以得到:

$$w = \frac{\alpha}{\gamma}c_1 + c_2$$

因此, 经过以上的推导, 我们可以很简单的证明  $w$  是一个常数, 它的值是平衡点  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  在中心流形上对应的点  $(u, v)$  的第三个分量。

因此, 根据  $w = \frac{\alpha}{\gamma}u + v$ , 并代入  $w = \frac{\alpha}{\gamma}c_1 + c_2$  展开其中的系数, 我们最终可以将系统(13)

改写为如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= u(\alpha - \gamma u - \beta v) \\ \frac{dv}{dt} &= v[\delta u - \gamma - \frac{\delta \bar{x} v}{\gamma - \alpha} + \varepsilon(\frac{\alpha}{\gamma}c_1 + c_2)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

直到此步, 我们通过构造中心流形完成了对于天敌-捕食者-猎物系统的 LV 模型从三维到二维的降维工作, 使原来复杂的三维系统 LV 模型转化为了相对简单的二维微分方程模型, 下面我们将对转化后的系统(3.3)进行线性变化, 将其平衡点由  $(\bar{u}, \bar{v})$  转换到原点  $(0, 0)$ 。

和之前的线性变换过程类似, 在对系统(14)进行线性变换之前, 我们需要先计算系统(14)的 Jacobi 矩阵, 并对其中一些可能用到的量进行表示:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} -2\gamma + \alpha - \beta\bar{v} & -\beta\bar{u} \\ \delta\bar{v} & -\frac{2\delta\bar{x}}{\gamma - \alpha}\bar{v} + \varepsilon(\frac{\alpha}{\gamma}c_1 + c_2) - \gamma + \delta\bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

此时我们不难得到:

$$a = -2\gamma + \alpha - \beta\bar{v}, b = -\beta\bar{u}, c = \delta\bar{v}$$



由于 2.2.2 一节的线性变换形式(2.8)中我们使用的变量和系统(3.3)中的实际变量存在差异, 所以我们简单修改线性变换形式(2.8)使之符合系统(3.3)中的变量形式, 得到下面的线性变换形式(3.4):

$$u = -\frac{1}{c}V - \frac{a}{ck}U + \bar{x}, v = -\frac{1}{k}U + \bar{y}, t = \frac{\tau}{k} \quad (3.4)$$

其中  $k = \sqrt{-a^2 - bc}$ 。我们于是可以得到实现上述的平衡点转移, 将线性变换(3.4)带入系统(3.3)后可得 (注意在整理过程中, 关注所有项的结果是没有必要的, 由于最终使用的数学计算软件 Maple 函数包 Epsilon 的子函数包 Miscel 中 licon 函数只对变量总次数为 2 以上的项有要求, 所以对于系统(3.3)来说我们实际只需要关注能整理出  $U^2, UV, V^2$  这三种形式的项即可):

$$\begin{aligned} \frac{dU}{d\tau} &= V + \frac{c\delta\bar{x} + a\delta(\gamma - \alpha)}{ck^2(\gamma - \alpha)}U^2 + \frac{\delta}{ck}UV \\ \frac{dV}{d\tau} &= -U + \frac{a^2\gamma(\gamma - \alpha) + \alpha\beta c(\gamma - \alpha) + 2ak\gamma(\gamma - \alpha) - ac\delta\bar{x} - a^2\delta(\gamma - \alpha)}{ck^3(\gamma - \alpha)}U^2 + \frac{2a\gamma + c - a\delta}{ck^2}UV + \frac{\gamma}{ck}V^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

直到此步我们通过线性变换将系统(3.3)的平衡点由  $(\bar{u}, \bar{v})$  转换到了  $(0, 0)$  处, 下面我们将运用数学计算软件 Maple 函数包 Epsilon 的子函数包 Miscel 中 licon 函数对系统(15)的 Liapunov 函数进行计算。

通过计算, 我们得到该系统的第一个 Liapunov 函数为:

$$\bar{v}_3 = \frac{\alpha\beta[a(\delta + 2\gamma) + 1]}{3k^5} - \frac{a^2(-\gamma + \delta)}{k^5} + \frac{\gamma c}{k^4} - \frac{a\delta^2}{3k^3} - \frac{a^3(\delta + 2\gamma)(-\gamma + \delta)}{3ck^5} - \frac{a\gamma(\delta - 2\gamma)}{3ck^4} + \frac{2\alpha\beta c\delta\bar{x}}{3k^4(\gamma - \alpha)^2} - \frac{\alpha\delta\bar{x}[a(\delta + 2\gamma) + c]}{3k^2(\gamma - \alpha)^3} - \frac{c\delta^2\bar{x}}{3k^2(\gamma - \alpha)^2} - \frac{2a\delta^2\bar{x}}{3k(\gamma - \alpha)^5} - \frac{2a^2\delta\bar{x}(-\gamma + \delta)}{3k(\gamma - \alpha)^2}$$

系统(3.5)的其他 Liapunov 函数通过同样的方法也可以计算得出, 只需要改变 licon 函数中的最后一个输入项  $n$  的数值就可以实现, 在这里不做赘述。直到此步我们通过数学计算软件 Maple 函数包 Epsilon 的子函数包 Miscel 中 licon 函数计算出系统(3.5)的 Liapunov 函数  $\bar{v}_3, \bar{v}_5, \bar{v}_7, \dots$ 。下面我们要确定焦点  $(\bar{u}, \bar{v})$  的阶数和稳定性, 并从  $(\bar{u}, \bar{v})$  出发构造小振幅极限环。在这里我们首先考虑系统(3.3)焦点顺序大于 1 的情况。假定  $z$  为一个新的不等式, 此时我们计算多项式集的 Gröbner 基  $G$ , 计算过程和方法如下:

$$P = \{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{p}, k^2 - \bar{q}, \bar{v}_3, zk - 1\}$$

运用数学计算软件 Maple 可以计算得到 Gröbner 基  $G$ 。我们最终得到 Gröbner 基  $G = \{1\}$ 。这意味着  $S$  中的多项式不存在公共的零解。其中我们引入了变量  $z$  并加上方程

$zk-1$  来排除  $k=0$  的情形, 这种方法常常被称作 Rabinowich 技巧。并由此证明了如下的结果。

对于系统(3.3)来说参数均不存在正值, 这使得系统(3.3)称为中心-焦点型, 并由大于 1 阶的焦点或有中心。那么我们知道, 在这种情况下, 对于系统(3.3)来说, 不能在一个焦点附近用小扰动构造 1 个以上的小振幅极限环。所以此时我们做出如下的讨论, 对于任意满足条件的参数和  $(\bar{u}, \bar{v})$  的任何正值而言:

(a) 若  $\bar{v}_3 \neq 0$ , 那么  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  是一个一阶焦点, 当  $\bar{v}_3 < 0$  时  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  渐近稳定, 当  $\bar{v}_3 > 0$  时  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  不稳定;

(b) 若  $\bar{v}_3 = 0$ , 那么  $(\bar{u}_0, \bar{v}_0)$  是一阶的稳定焦点。

最终, 我们通过求解半代数系统  $S = \{\bar{P}_1 = 0, \bar{P}_2 = 0, \bar{\Omega}, \bar{p} = 0, k^2 - \bar{q} = 0, \bar{v}_3 \neq 0, \delta \neq 0\}$ , 证明了对于系统(3.3)来说, 可以通过取参数的特殊值, 构造基于稳态  $(\bar{u}, \bar{v})$  出发构造 1 个小振幅极限环。

为了验证我们的分析结果, 我们运用程序设计软件 Python 来进行数值计算模拟了这个二维系统的一种情况, 并得到了相同的结果, 这部分程序的运行结果如下面的图 3.1 所示:

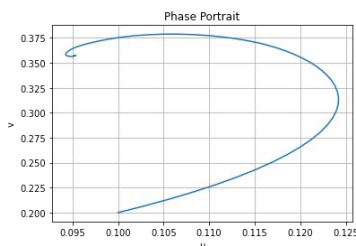


图 3.1 Python 数值模拟结果

由此也可以验证, 我们的结论是正确的。通过天敌-捕食者-猎物模型的实际操作, 证明我们对于三维捕食系统 LV 模型的算法化分析时正确可靠的。

### 3.3 本章小结

本章详细介绍了一种新的三维捕食系统 LV 模型, 在建立和参数标定过程中进行了多角度的分析和讨论。首先, 我们对各变量和参数所代表的实际生物学意义进行深入探究, 明确了它们在捕食系统中的作用和相互关系。接着, 我们对每个微分方程中的一些基本



动态特征进行了清晰的说明和阐释,包括猎物增长速率、捕食者的死亡率和天敌的捕食率等。在理论分析的基础上,本章重点讨论了天敌-捕食者-猎物系统 LV 模型中有关极限环数量的算法化分析方法。我们采用中心流形降维-平面系统线性变换化简-Maple 计算 Liapunov 函数以及由 Liapunov 函数构造分析极限环个数等工作,实现了对于三维及高维微分方程系统的极限环数量判断的研究流程。通过这些方法,我们可以得到该系统中极限环的数量,从而更好地理解并预测捕食系统的稳定性和演化趋势。最后,我们通过 Python 数值模拟得到的结果与算法分析的结论相对比,验证了天敌-捕食者-猎物系统 LV 模型有且仅有一个极限环的结论。同时,证明了本文介绍的三维捕食系统极限环个数分析算法的可行性和准确性。这些理论和实验的综合分析为我们提供了更深入的理解和探索的空间,有助于我们今后在生物学和相关领域的研究中应用这些方法解决实际问题。通过本章内容的深入探讨,我们不仅对三维捕食系统的建立和极限环数量的算法化分析有了更加深入的了解,而且还对如何应用这些方法解决实际问题进行了详细的案例理解。这将为我们在未来的研究中提供有益的参考和借鉴,进一步推动生命科学和复杂系统分析的发展。





## 结论

本文以基于生物现象的计算科学成为学术研究新趋势新热点为研究背景,旨在研究对于传统的高维捕食系统(尤其是三维捕食系统)的 LV 模型,通过计算机符号计算技术实现其极限环存在性的判断以及极限环数量分析的可行性这一课题,提出了一整套简化、计算、分析高维微分方程系统极限环的方法,并用三维捕食系统天敌-捕食者-猎物系统 LV 模型实现了上述算法,得出了可靠的结果。

首先,本文的三维捕食系统 LV 模型极限环的算法包括:使用中心流形的构造过程对高维系统 LV 模型进行降维,使其转化为二维系统 LV 模型;使用线性变换将得到的二维系统 LV 模型进行转化,使其转换为研究更为便捷的二维系统 LV 模型;使用数学计算软件 Maple 求解转化后的二维系统 LV 模型的 Liapunov 函数,并对其符号进行分析;使用极限环的构造过程利用最终得到的二维系统 LV 模型和其 Liapunov 函数,得出系统极限环存在性以及其数量的判断,得到最后的结论。

其后一个部分,本文对自然界中客观存在的三维捕食系统,即天敌-捕食者-猎物系统 LV 模型进行了数学建模,并详细分析了该模型变量和参数的生物学意义,简单给出了该系统中三个微分方程的动态分析和其对应的生物学内涵。在此基础上,应用本文提出的判断三维捕食系统极限环存在性及其个数的算法对建立的新系统进行了分析,得出了天敌-捕食者-猎物系统 LV 模型有且仅有一个极限环的最终结论,并用 Python 编写的程序对该系统进行了数值模拟验证了得到的结论。

在验证三维捕食系统算法可行性的验证中,我不止一次地认识到本文提出的天敌-捕食者-猎物模型仍旧存在着很多问题,不能对生态系统现实中的一些现象给出合理的解释,只能从理论层面给出一个看似合理的结果。在之后的研究中,我会不断改进该模型以及判断系统极限环个数的算法,调整参数与变量的设置以及相应的边界条件、完善极限环的算法细节,使得该系统能够更好地模拟自然界生态系统的实际行为。



## 致谢

光标在空了两个格子的开头不断闪着，我盯着它，看看反光屏幕中的自己，又低头扫了一眼键盘，不知道从何说起。

时光让人随着风荡漾，昨日仿佛依旧是长椅上那艳阳高照的六月天，不知不觉中，它又溜走了近一千五百个昼夜。那年那天，我信心满满却战战兢兢地，无所畏惧而亦步亦趋地，试探性地，踏入了这所学校，一无所知却处处计较得失，真正诠释了什么叫做以物喜以己悲。今年今时，当走出这所学校的日子只剩下两位数时，我也不能完全坦然地讲自己没有患得患失，只是会有了之前从未有过的战战兢兢中求得的自信，亦步亦趋中收获的无畏。生活中依然处处是磕磕绊绊，但那些未曾谋面骤然闯进来的事不再那么使我慌张；也许还是会紧张，但糟糕的表现之后不会再踟蹰不前，掸一掸裤腿的褶皱，就能继续大步流星；当我不再为杂事做出过多的妥协，掌控了自己的时间，那么我的每一个选择无论对错我都欣然接受。也许我没有那么喜欢现在的自己，但我知道如何好好爱不再囿于比较不再自我否定的自己，这样的自己，是自己的自己，谢谢你。

我想要对我的爸爸妈妈说声谢谢，对毕设的指导老师牛薇教授以及小组的成员们致谢，对我的研究生导师田琼教授致谢，对我的辅导员马雨忻学姐致谢，对所有教过我的教授们致谢，对帮助过我的学姐学长同学们致谢，谢谢你们！



## 参考文献

- [1] M. P. Barnett. Symbolic calculation in the life sciences—some trends and prospects. In Proceedings of the First International Conference on Algebraic Biology (Tokyo, Japan, November 28–30, 2005), pages 1–18. Universal Academy Press, Inc., Tokyo, 2005.
- [2] L. D. Garcia, M. Stillman, and B. Sturmfels. Algebraic geometry of Bayesian networks. *J. Symb. Comput.*, 39(3):331–355, 2005.
- [3] L. Pachter and B. Sturmfels. Parametric inference for biological sequence analysis. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 101(46):16138–16143, 2004.
- [4] N. Yildirim. Use of symbolic and numeric computation techniques in analysis of biochemical reaction networks. *Int. J. Quant. Chem.*, 106(1):256–265, 2006.
- [5] D. Wang. *Elimination Practice: Software Tools and Applications*. Imperial College Press, London, 2004.
- [6] L. Liu, Z. Lu, and D. Wang. The structure of LaSalle’s invariant set for Lotka-Volterra systems. *Sci. China (Ser. A)*, 34(7):783–790, 1991.
- [7] W. Wu. On zeros of algebraic equations — An application of Ritt principle. *Kexue Tongbao*, 31(1):1–5, 1986.
- [8] K. Gatermann and B. Huber. A family of sparse polynomial systems arising in chemical reaction systems. *J. Symb. Comput.*, 33(3):275–305, 2002.
- [9] K. Gatermann. Counting stable solutions of sparse polynomial systems in chemistry, volume 286 of *Contemporary Mathematics*, chapter Symbolic Computation: Solving Equations in Algebra, Geometry, and Engineering. American Mathematical Society, 2001.
- [10] K. Gatermann, M. Eiswirth, and A. Sensse. Toric ideals and graph theory to analyze Hopf bifurcations in mass action systems. *J. Symb. Comput.*, 40(6):1361–1382, 2005.
- [11] H. Hong, R. Liska, and S. Steinberg. Testing stability by quantifier elimination. *J. Symb. Comput.*, 24(2):161–187, 1997.
- [12] T. Sturm, A. Weber, E. O. Abdel-Rahman, and M. El Kahoui. Investigating algebraic and logical algorithms to solve Hopf bifurcation problems in algebraic biology. *Math. Comput. Sci.*, 2(3):493–515, 2009.
- [13] M. El Kahoui and A. Weber. Deciding Hopf bifurcations by quantifier elimination in a software-component architecture. *J. Symb. Comput.*, 30(2):161–179, 2000.



- [14] D. Wang and B. Xia. Stability analysis of biological systems with real solution classification. In Proceedings of the 2005 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Beijing, China, July 24–27, 2005), pages 354–361. ACM Press, New York, 2005.
- [15] Z. Lu and Y. Luo. Two limit cycles in three-dimensional Lotka–Volterra systems. *Comput. Math. Appl.*, 44(1):51–66, 2002.
- [16] R. Laubenbacher and B. Sturmfels. Computer algebra in systems biology. *Am. Math. Mon.*, 116(10):882–891, 2009.
- [17] T. Tamura and T. Akutsu. Algorithms for singleton attractor detection in planar and nonplanar AND/OR Boolean networks. *Math. Comput. Sci.*, 2(3):401–420, 2009.
- [18] X. Jin and D. Wang. On the conditions of Kukles for the existence of a centre. *Bull. London Math. Soc.*, 22(1):1–4, 1990.
- [19] M. Han and V. G. Romanovski. Estimating the number of limit cycles in polynomials systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 368(2):491–497, 2010.
- [20] Z. Lu and Y. Takeuchi. Permanence and global attractivity for competitive Lotka–Volterra systems with delay[J]. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, 1994, 22(7):847-856.
- [21] Z. Lu. Computer aided proof for the global stability of Lotka-Volterra systems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1996, 31(12):49-59.
- [22] L. Chen. The effect of delays on the permanence for Lotka-Volterra systems[J]. *Applied Mathematics Letters*, 1995.
- [23] Z. Lu and W. Wang. Global stability for two-species Lotka-Volterra systems with delay[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1997(1):208.
- [24] Z. Lu. Global stability for a Lotka-Volterra system with a weakly diagonally dominant matrix[J]. *Applied Mathematics Letters*, 1998.
- [25] Z. Lu and W. Zhong. Global stability for a Lotka-Volterra reaction-diffusion system with a qualitatively stable matrix[J]. *Mathematical & Computer Modelling*, 1999, 30(9-10):55-62.
- [26] Z. Lu and G. Wang. The Positive Definiteness of a Class of Polynomials from the Global Stability Analysis of Lotka-Volterra Systems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 1999, 38(2):19-27.
- [27] Z. Lu and L. Yong. Two limit cycles in three-dimensional Lotka-Volterra systems[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2002, 44( 1–2):51-66.
- [28] Z. Lu and L. Yong. Three Limit Cycles for a Three-Dimensional Lotka-Volterra



Competitive System with a Heteroclinic Cycle[J].

Computers & Mathematics with Applications, 2003, 46(2-3):231-238.

[29] Z. Lu and W. Chen. An algorithm for Adomian decomposition method[J].

Applied Mathematics and Computation, 2004, 159(1):221-235.

[30] Z. Lu and L. Yong. Stability analysis for Lotka–Volterra systems based on an algorithm of real root isolation[J].

Journal of Computational & Applied Mathematics, 2007, 201(2):367-373.

[31] Z. Lu and J. Yuan. A modified algorithm for the Adomian decomposition method with applications to Lotka–Volterra systems[J].

Mathematical and Computer Modelling, 2007, 46(9-10):1214-1224.

[32] Z. Lu , F. Wang and G. Pang. Analysis of a Beddington–DeAngelis food chain chemostat with periodically varying dilution rate[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 40(4):1609-1615.

[33] Z. Lu , X. Lian and L. Yong. Automatic search for multiple limit cycles in three-dimensional Lotka–Volterra competitive systems with classes 30 and 31 in Zeeman's classification[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 348(1):34-37.

[34] Z. Lu , G. Lu and X. Lian. Delay effect on the permanence for Lotka–Volterra cooperative systems[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(4):2810-2816.

[35] Z. Lu , G. Lu and Y. Enatsu. Permanence for Lotka–Volterra systems with multiple delays[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2011, 12(5):2552-2560.

[36] G. Lu and Z. Lu. Geometric approach for global asymptotic stability of three-dimensional Lotka–Volterra systems[J].

Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2012, 389(1):591-596.

[37] G. Lu and Z. Lu. Geometric approach for global asymptotic stability for three species competitive Gompertz models[J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2017, 445(1):13-22.

[38] C. Gui and Y. Zheng. Geometric approach to global asymptotic stability for the SEIRS models in epidemiology[J]. Nonlinear analysis. Real world applications, 2017.

[39] M. Yang , J. Yang and S. Gao. The LaSalle's invariant sets for a class of Lotka-Volterra prey-predator chain systems[J].

Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 475(1):985-998.

[40] V. G. Romanovski and D. S. Shafer. The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach. Birkh"auser, Boston-Basel-Berlin, 2009.