

Формальные языки

Домашнее задание 5

Фадеева Екатерина

2.
$$\begin{cases} S \rightarrow R S \mid R \\ R \rightarrow a S b \mid c R d \mid a b \mid c d \mid \epsilon \end{cases}$$

Уберём длинные правила:

$$\begin{cases} S \rightarrow R S \mid R \\ R \rightarrow a X \mid c Y \mid a b \mid c d \mid \epsilon \\ X \rightarrow S b \\ Y \rightarrow R d \end{cases}$$

Удалим ϵ -правила:

$$\begin{cases} S \rightarrow R S \mid R \mid S \mid \epsilon \\ R \rightarrow a X \mid c Y \mid a b \mid c d \\ X \rightarrow S b \\ Y \rightarrow R d \mid d \end{cases}$$

Создадим новое стартовое состояние:

$$\begin{cases} S \rightarrow S' \mid \epsilon \\ S' \rightarrow R S' \mid R \mid S' \\ R \rightarrow a X \mid c Y \mid a b \mid c d \\ X \rightarrow S' b \\ Y \rightarrow R d \mid d \end{cases}$$

Удалим цепные правила (цепные пары — (S, S') , (S', S') , (S', R)):

$$\begin{cases} S \rightarrow R S' \mid a X \mid c Y \mid a b \mid c d \mid \epsilon \\ S' \rightarrow R S' \mid a X \mid c Y \mid a b \mid c d \\ R \rightarrow a X \mid c Y \mid a b \mid c d \\ X \rightarrow S' b \\ Y \rightarrow R d \mid d \end{cases}$$

Удалять бесполезные нетерминалы не нужно: все символы достижимы (например из S за один шаг), все нетерминалы порождающие ($S \rightarrow ab, S' \rightarrow ab, R \rightarrow ab, X \rightarrow S'b \rightarrow abb, Y \rightarrow d$).

Уберем правила из нетерминала в терминалы:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow R S' \mid A X \mid C Y \mid A B \mid C D \mid \epsilon \\ S' \rightarrow R S' \mid A X \mid C Y \mid A B \mid C D \\ R \rightarrow A X \mid C Y \mid A B \mid C D \\ X \rightarrow S' B \\ Y \rightarrow R D \mid D \\ A \rightarrow a \\ B \rightarrow b \\ C \rightarrow c \\ D \rightarrow d \end{array} \right.$$

— грамматика в нормальной форме Хомского.

3. Язык $\{a^m b^n \mid m+n > 0, m+n \div 2\}$ является контекстно-свободным, грамматика:

$$\{S \rightarrow a a S \mid S b b \mid a S b \mid a b \mid a a \mid b b\}$$

Любые строки, которые описывает эта грамматика, — одна из строк $a b \mid a a \mid b b$, к которой сколько угодно раз проделывали какие-то из этих операций:

- 1) дописывали слева две буквы a
- 2) дописывали справа две буквы b
- 3) дописывали слева a и справа b .

Тогда в любой такой строке после букв a следуют буквы b , и их суммарное количество четно (т.к. изначально во всех строках $a b \mid a a \mid b b$ оно четно и мы дописываем только четное количество символов).

В другую сторону: для любой строки $a^m b^n$ при $m+n > 0$ и $\div 2$:

- 1) либо в ней $n = 0$, а значит $m \div 2$, т.е. эту строку можно сделать из aa несколькими добавлениями слева букв aa
- 2) либо в ней $m = 0$, тогда можно сделать аналогично добавлениями к bb букв bb справа
- 3) либо $n \neq 0, m \neq 0$, тогда можно сделать такую строку из строки ab добавлениями букв aa слева ($\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ раз) и bb справа ($\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ раз) и если $n \div 2$ и $m \div 2$, то еще одним добавлением a слева и b справа.

Т.о. приведенная грамматика содержит все строки исходного языка и не содержит других строк, значит она описывает этот язык.