Формальные языки

домашнее задание до 23:59 05.03

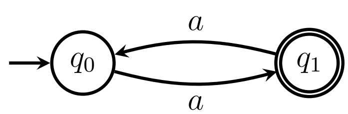
Фадеева Екатерина

1. Доказать или опровергнуть утверждение: произведение двух минимальных автоматов всегда дает минимальный автомат (рассмотреть случаи для пересечения, объединения и разности языков).

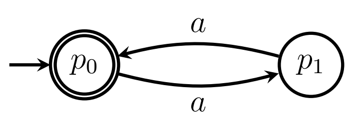
   Построим примеры, которые показывают, что утверждение неверно:

   (a) объединение:

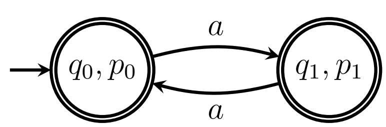
   Регулярному выражению $a(aa)*$ соответствует минимальный (т.к. его вершины не эквивалентны) автомат



   Регулярному выражению $(aa)*$ соответствует минимальный автомат



   Построим автомат-пересечение:

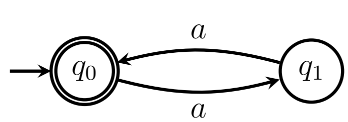


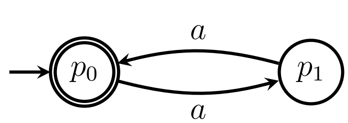
   Но два состояния в этом автомате эквивалентны, значит их можно объединить.

   (b) пересечение: тот-же пример, при этом в автомате-пересечении не будет терминальных вершин, а значит его можно было представить в виде одной вершины, а не двух

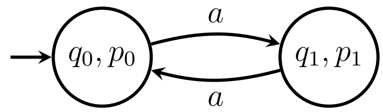
   (c) разность языков:

   Регулярному выражению $(aa)*$ соответствуют минимальные автоматы





   их разность:



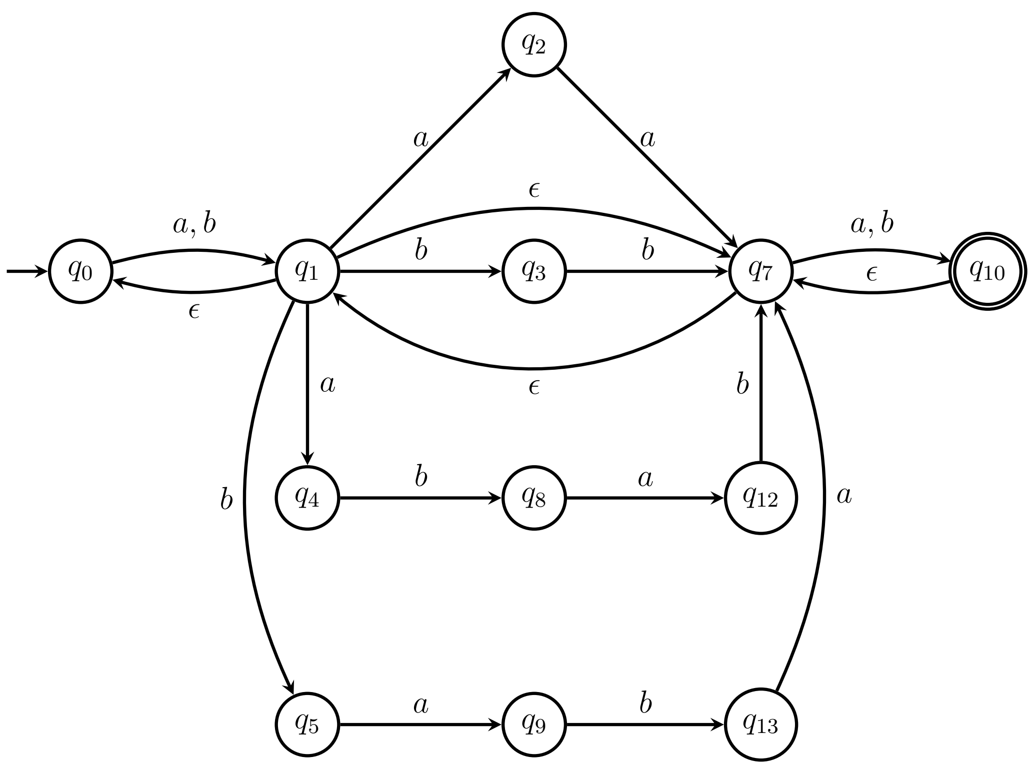
Опять получилось 2 вершины, но они одной терминальной, т.е. можно было бы построить эквивалентный автомат с одной вершиной.

2. Для регулярного выражения:

$$(a \mid b)^+(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*(a \mid b)^+$$

Построить эквивалентные:

(a) Недетерминированный конечный автомат



(b) Недетерминированный конечный автомат без ε-переходов

В любой строке, подходящей под

$$(a \mid b)^+(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*(a \mid b)^+$$

символы, подходящие под часть

$$(aa \mid bb \mid abab \mid baba)^*$$

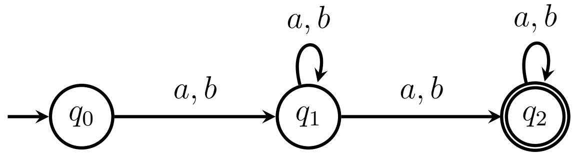
можно приписать первой части этого регулярного выражения

$$(a \mid b)^+$$

Тогда достаточно строить автомат для регулярного выражения

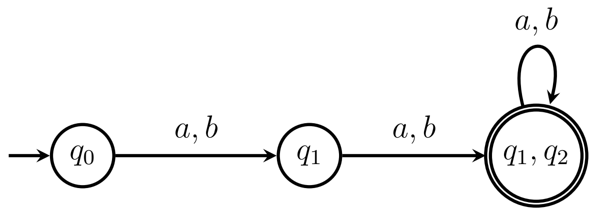
$$(a \mid b)^+(a \mid b)^+$$

.



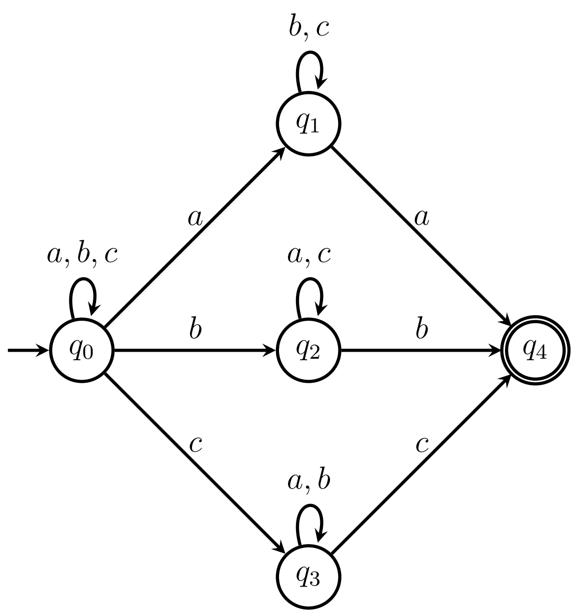
(c) Минимальный полный детерминированный конечный автомат

Детерминизируем автомат из (b):



Далее применяем алгоритм минимизации: вершина q_0 не эквивалентна вершине q_1, т.к. их различает строка a, а остальные пары вершин не эквивалентны, потому что одна из них обязательно терминальная, а другая нет. Т.о. автомат не изменится, т.е. нарисованный автомат уже минимальный.

3. Построить регулярное выражение, распознающее тот же язык, что и автомат:



Построим регулярное выражение последовательно:

Петля в q_0 :

$$(a \mid b \mid c)^*$$

Верхний путь:

$$a(b \mid c)^*a$$

Средний путь:

$$b(a \mid c)^*b$$

Нижний путь:

$$c(a \mid b)^*c$$

Три пути вместе:

$$(a(b \mid c)^*a \mid b(a \mid c)^*b \mid c(a \mid b)^*c)$$

Три пути вместе с петлей в начале:

$$(a \mid b \mid c)^*(a(b \mid c)^*a \mid b(a \mid c)^*b \mid c(a \mid b)^*c)$$

4. Определить, является ли автоматным язык $\{\omega\omega^r \mid \omega \in \{0,1\}^*\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.

   Пусть этот язык L является автоматным. Тогда по лемме о накачке существует такое n, что $\forall w \in L\colon |w| > n, \exists x, y, z : xyz = w, y \neq \epsilon, |xy| \leq n; \forall k \geq 0\colon xy^kz \in L$

   Возьмем строчку $w = 1^{n+1}001^{n+1}$ и x, y, z из теоремы. $x = 1^{|x|}, y = 1^{|y|}, z = 1^{n+1-|x|-|y|}001^{n+1}$

   $xyyz = 1^{n+1+|y|}001^{n+1}$

   $|y| > \epsilon \Rightarrow xyyz \notin L$, получим противоречие. Т.о., язык не является автоматным.

5. Определить, является ли автоматным язык $\{uaav \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_b \geq |v|_a\}$. Если является — построить автомат, иначе — доказать.

   Пусть этот язык L является автоматным. Тогда по лемме о накачке существует такое n, что $\forall w \in L\colon |w| > n, \exists x, y, z : xyz = w, y \neq \epsilon, |xy| \leq n; \forall k \geq 0\colon xy^kz \in L$

   Возьмем строчку $w = b^{n+1}aa(ba)^{n+1} \in L$ и x, y, z из теоремы. $x = b^{|x|}, y = b^{|y|}, z = b^{n+1-|x|-|y|}aa(ba)^{n+1}$

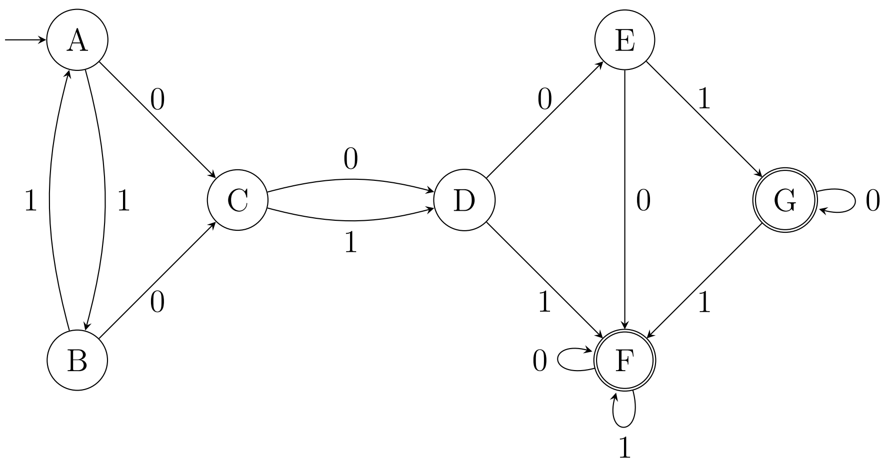
   Тогда $\forall k \geq 0 : b^{n+1+(k-1)|y|}aa(ba)^{n+1} \in L$

   Но при $k = 0$ неравенство $|u|_b \geq |v|_a$ не выполняется, т.к. в единственном способе разделить это слово двумя буквами a получаем $n + 1 - |y| < n + 1$, т.к. $y \neq \epsilon$.

   Получим противоречие, значит язык не является автоматным.

Пример применения алгоритма минимизации

Минимизируем данный автомат:



Автомат полный, в нем нет недостижимых вершин — продолжаем.

Строим обратное δ отображение.

δ^{-1}	0	1
A	—	B
B	—	A
C	A B	—
D	C	C
E	D	—
F	E F	D F G
G	G	E

Отмечаем в таблице и добавляем в очередь пары состояний, различаемых словом ε: все пары, один элемент которых — терминальное состояние, а второй — не терминальное состояние. Для данного автомата это пары

$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G)$

Дальше итерируем процесс определения неэквивалентных состояний, пока очередь не оказывается пуста.

(A, F) не дает нам новых неэквивалентных пар. Для (B, F) находится 2 пары: $(A, D), (A, G)$. Первая пара не отмечена в таблице — отмечаем и добавляем в очередь. Вторая пара уже отмечена в таблице, значит, ничего делать не надо. Переходим к следующей паре из очереди. Итерируем дальше, пока очередь не опустошится.

Результирующая таблица (заполнен только треугольник, потому что остальное симметрично) и порядок добавления пар в очередь.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B							
C	✓	✓					
D	✓	✓	✓				
E	✓	✓	✓	✓			
F	✓	✓	✓	✓	✓		
G	✓	✓	✓	✓	✓		

Очередь:
$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, G), (B, G), (C, G), (D, G), (E, G),$
$(B, D), (A, D), (A, E), (B, E), (C, E), (C, D), (D, E), (A, C), (B, C))$

В таблице выделились классы эквивалентных вершин: $\{A, B\}, \{C\}, \{D\}, \{E\}, \{F, G\}$. Остается только нарисовать результирующий автомат с вершинами-классами. Переходы добавляются тогда, когда из какого-нибудь состояния первого класса есть переход в какое-нибудь состояние второго класса. Минимизированный автомат: