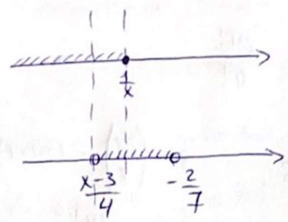
Domací úkol IDM Skupina 5

Příklad 1

$$\exists z \in \mathbb{R}: z \in \left(-\infty, \frac{1}{x}\right\rangle \cap \left(\frac{x-3}{4}, -\frac{2}{7}\right)$$



$$\frac{x-3}{4} < -\frac{2}{7} \qquad \frac{x-3}{4} < \frac{1}{x}$$

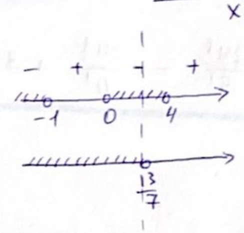
1) $7x - 21 < -8$

$7x < 13$

$x < \frac{13}{7}$

2) $\frac{x^2-3x-4}{4x} < 0$

$\frac{(x+1)(x-4)}{x} < 0$



$\underline{x \in (-\infty; -1) \cup (0; \frac{13}{7})}$

Příklad 2

Pro kter. přir. čísla platí:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) \geq n^2 + 4$$

1) $n = 1$: $L = 1 + 3 = 4$ $P = 1 + 4 = 5$, $L < P$ ✗

$n = 2$: $L = 1 + 3 + 5 = 9$ $P = 4 + 4 = 8$, $L \geq P$ ✓

2) Předpokladáme, že pro $n = k$ platí:

$1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1) \geq k^2 + 4$

3) Ať $n = k+1$: $1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1) + (2(k+1)+1) \geq (k+1)^2 + 4$?

$L = \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2k+1)}_{\text{podle indukč. předpok.}} + (2(k+1)+1) \geq k^2 + 4 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 6 =$

$= (k+1)^2 + 6 > (k+1)^2 + 4 = P$ $L \geq P$.

$\underline{n \in \{n \in \mathbb{N};\ n \geq 2\}}$

Příklad 3 $A, B, C, \dots, Z$ (24 pismen), nevznikne ani OPICE, ani PLES.

Zaprvé najdeme počet variant, kdy vznikne OPICE nebo PLES.

$$|OPICE \cup PLES| = |OPICE| + |PLES| - |OPICE \cap PLES|$$

$$|OPICE| = \binom{24}{5} \cdot (24-5)! = \frac{24!}{5!\,19!} \cdot 19! = \frac{24!}{5!}$$

$$|PLES| = \binom{24}{4} \cdot (24-4)! = \frac{24!}{4!\,20!} \cdot 20! = \frac{24!}{4!}$$

$|OPICE \cap PLES|$: $OP^{IC}_{L}ES$ — OPICLES, OPILCES, OPLICES

$$3 \cdot \binom{24}{7} \cdot (24-7)! = 3 \cdot \frac{24!}{7!\,17!} \cdot 17! = 3 \cdot \frac{24!}{7!}$$

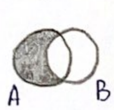
$$|OPICE \cup PLES| = \frac{24!}{5!} + \frac{24!}{4!} - 3 \cdot \frac{24!}{7!}$$

Celkem je $24!$ variant, takže výsledek bude $24! - |OPICE \cup PLES|$

$$\underline{24! - \frac{24!}{5!} - \frac{24!}{4!} + 3 \cdot \frac{24!}{7!}}$$

Příklad 4 Pro libovolné množiny A, B platí ?

$$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$



1) $(A \cup B) \setminus B \subseteq A \setminus B$

$x \in (A \cup B) \setminus B \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin B \Rightarrow$

$x \in A \wedge x \notin B \vee \underbrace{x \in B \wedge x \notin B}_{=0} \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A \setminus B)$

2) $A \setminus B \subseteq (A \cup B) \setminus B$

$x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A \wedge x \notin B \vee \underbrace{x \in B \wedge x \notin B}_{=0} \Rightarrow$

$x \notin B \wedge (x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin B \Rightarrow x \in (A \cup B) \setminus B$

$(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$ <u>platí pro lib. A, B.</u>

Příklad 5

$B_i = [r_i, g_i, b_i] \in M$

$B_i R B_j$ -> rovnají se v alespoň dvou složkách

R - ekvivalence nebo uspořádání?

Relace je ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní

Relace je uspořádání, pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní

Zkusíme ověřit tranzitivitu:

tranz.: $\forall a, b, c \in M$; $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

ať $a = (1, 2, 3)$ $\quad$ aRb ; bRc, ale a není v relaci s c.

$b = (1, 2, 4)$

$c = (5, 2, 4)$

R není tranzitivní => není ani ekvivalence, ani uspořádání.