Domácí úkol z ILG

Skupina 10:

xshish02 Sviatoslav Shishnev
xplank03 Filip Plánka
xshevc01 Aleksandr Shevchenko
xshuku00 Elmar Shukurov

Příklad 1

$$x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -1$$
$$-x_1 + cx_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1$$
$$2x_3 + (-8c-15)x_4 = 25$$
$$2x_3 + c^2x_4 = c^2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & c & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8c-15 & 25 \\ 0 & 0 & 2 & c^2 & c^2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & c-1 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8c-15 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & c^2+8c+15 & c^2-25 \end{array}\right)$$

Pokud na hlavní diagonále nejsou nuly, máme 1 řešení

($x_n = \frac{\text{něco - něco}}{\text{ne nula}}$ - jediné řešení).

① $c^2 + 8c + 15 = 0$ $c = -5 \vee c = -3$

a) $c = -5$: $0 \cdot x_4 = 0$

$x_4 = t$, $t \in \mathbb{R}$, libovolné, protože $c - 1 \neq 0$

nekonečně mnoho

b) $c = -3$: $0 \cdot x_4 = -16$

žádné řešení

② $c - 1 = 0$
$c = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -23 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & -24 \end{array}\right)$$

$24x_4 = -24 \Rightarrow x_4 = -1$
$2x_3 - 23x_4 = 25 \Rightarrow x_3 = 1$
$6x_3 + 6x_4 = 0$
$6 - 6 = 0$ není rozpor.
$x_2 = t$; $x_1 = t - 1$, $t \in \mathbb{R}$

nekonečně mnoho

Jinak existuje jenom jedno konkrétní $x_4 = \frac{c^2-25}{c^2+8c+15}$, jedno $x_3 = \frac{25 + (8c+15)x_4}{2}$ a tak dále $\Rightarrow$ 2 řešení není možné.

a) práv. 1 řeš: $c \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -3; 1\}$
b) nekon. mnoho: $c \in \{-5; 1\}$
c) žádné : $c \in \{-3\}$
d) práv. 2 řeš: $\emptyset$
e) alespoň 2 : = nekon. mnoho $c \in \{-5; 1\}$

Příklad 2

$$\begin{vmatrix} c-1 & 1 & c-1 \\ 5 & c-1 & -1 \\ 2 & 1 & c-1 \end{vmatrix} = 0$$

Uděláme substituci $c-1 = t$.

$$\begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 5 & t & -1 \\ 2 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 + 5t - 2 - 2t^2 + t - 5t = t^3 - 2t^2 + t - 2 =$$

$$\begin{matrix} t & 1 & t \\ 5 & t & -1 \end{matrix}$$

$$= t^2(t-2) + (t-2) = (t-2)\underbrace{(t^2+1)}_{>0} = 0$$

$$t = 2 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

Příklad 4

$$\begin{aligned} 2x + 100y - 3z &= 237 \\ -4x + 3y + 250z &= 681 \\ 50x - 2y + 3z &= 178 \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{řádky}]{\text{prohazujeme}} \quad \begin{aligned} 50x - 2y + 3z &= 178 \\ 2x + 100y - 3z &= 237 \\ -4x + 3y + 250z &= 681 \end{aligned}$$

$x^{(0)} = 3{,}0$ $\quad \varepsilon = 0{,}01$

$y^{(0)} = 2{,}0$

$z^{(0)} = 2{,}5$

$$x = \frac{1}{50}(178 + 2y - 3z)$$

$$y = \frac{1}{100}(237 - 2x + 3z)$$

$$z = \frac{1}{250}(681 + 4x - 3y)$$

Nakreslíme výslednou tabulku:

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$z^{(k)}$
0	3,0	2,0	2,5
1	3,49	2,3752	2,7513376
2	3,48992774	2,38274157	2,75124595

$|x^{(2)} - x^{(1)}| < \varepsilon$

$|y^{(2)} - y^{(1)}| < \varepsilon$

$|z^{(2)} - z^{(1)}| < \varepsilon$

$$\boxed{\begin{aligned} x &\approx 3{,}48992774 \\ y &\approx 2{,}38274157 \\ z &\approx 2{,}75124595 \end{aligned}}$$

Příklad 3

$$f: R^3 \longrightarrow R^2$$

$$[x, y, z]^T \longrightarrow [x+y-z,\ y \cdot x]^T$$

uděláme protipříklad

$$f(\bar{a}+\bar{b}) \overset{?}{=} f(\bar{a}) + f(\bar{b})$$

$$\bar{a} = (3,3,3),\ \bar{b}(4,4,4)$$

$$f(7,7,7) \overset{?}{=} f(3,3,3) + f(4,4,4)$$

$$[7, 49] \neq [7, 25]$$

$$\boxed{f \text{ není lineární transformace}}$$

Příklad 5

$$\bar{a}_1 = (2, 1, -4)$$

$$\bar{a}_2 = (x, y, z)$$

$$x \cdot 2 + y + (z \cdot -4) = 0$$

například $\bar{a}_2 = (2, 0, 1)$

$$\bar{a}_3 = (a, b, c)$$

$$\begin{cases} 2a + b - 4c = 0 \\ 2a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow b - 5c = 0 \Rightarrow b = 5c$$

například $\bar{a}_3 = (1, -10, -2)$

Ověříme jestli tvoří bazi

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = 4 + 0 - 4 = 0$ ✓

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3 = 2 - 10 + 8 = 0$ ✓ hurá!

$\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3 = 2 + 0 - 2 = 0$ ✓

$$\boxed{\langle (2,1,-4),\ (2,0,1),\ (1,-10,-2) \rangle}$$