Tahák

Významné čís. řady

▷ **Lomená kvadr.**, abs. konverguje

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

▷ **Harmonická**, určitě diver.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

▷ **Leibnizova**, neabs. konv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots = \ln 2$$

▷ **Grandiho** (osciluje) div.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 \dots = \text{neex.}$$

Nekon. geom. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}, \quad a_1 \neq 0$$

i) $q \in (-\infty, -1\rangle$ osciluje

ii) $q \in (-1, 1)$ konverguje,

$$\boxed{s = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}}$$

iii) $q \in \langle 1, \infty)$

$a_1 > 0$ urč. div. $k\ \infty$

$a_1 < 0$ urč. div. $k -\infty$

Odhad chyby

$k \geq 1$, $a_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \varepsilon, \text{ kde } \varepsilon: 0 < \varepsilon < \int_k^{\infty} a(x)\,dx \quad [a(x) = a_n]$$

Kritéria konvergence

Nutná podmínka konv.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverg.

Srovnávací (často s $\frac{1}{n^2}$ a $\frac{1}{n}$)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ řady s nezáp. čl., ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, že $a_n \leq b_n$ pro $n \geq n_0$:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konv. $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div. $\to \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ div.

Integrální

f-ce f je def. na $\langle 1, \infty)$, kde je kladná a klesající. $a_n = f(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv., pr. kd. konv. $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div., pr. kd. div. $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$

Odmocninové

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s nezáp. čl.

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ konv.

ii) > 1 diver.

iii) $= 1$ nelze rozh.

Podílové

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ s kladn. čl.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ konv.

ii) > 1 div.

iii) $= 1$ nel. rozh.

Leibnizovo (altern. ř.)

$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerost. posl. klad. čísel. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ konv. pr. kd. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Mocninná řada

x_0 – střed

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

$(x_0 - r, x_0 + r)$ obor konv-ce

$r \geq 0$ poloměr konv.

i) $r = 0$ konv. jen $x = x_0$

ii) $r \in (0, \infty)$ konv. $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

iii) $r = \infty$ konv. $x \in (-\infty, \infty)$

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}$$

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|}$$

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

Součet pomocí $()'$ $\int$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x_0 = 0$$

i) spojitá f-ce na $(-r, r)$

ii) $x \in (-r, r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x c_n x^n\,dx \right) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx$$

iii) $x \in (-r, r)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)'$$

Taylorovy a Maclaurinovy řady

f-ce f v x_0 má deriv. n. řádu:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \text{ – Taylorova}$$

$x_0 = 0$ – Maclaurinova

součet: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$

Fourierova řada

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t\,dt \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t\,dt$$

i) sudá $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$, $a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t\,dt$

ii) lichá $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$, $b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t\,dt$

kos. řada – sudé rozšíření

sin. řada – liché rozšíření

Diferenc. počet

$f_c = \{[x, y] \in D(f) : f(x, y) = c\}$

vrstevnice f-ce f na úrovni c

$f'_{x_i}(a_1, \dots, a_n)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n)$

parciální derivace $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$

$y = f(x)$ exp. } 1 prom.

$f(x, y) = 0$ imp.

$\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$

gradient udává směr, ve kt. f nejrychleji roste. Tento směr je zár. ⊥ na vrstevnici procházející bodem a.

Tečná rovina: f v T difer-ná (f, f', f' v T spojené)

$\rho: F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(\dots)(y - y_0) + F'_z(\dots)(z - z_0) = 0$ (imp.)

$\rho: \frac{\partial f}{\partial x}(T)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(T)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$ (exp.)

Stacionární bod x^*: $f'_{x_i}(x^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$

Sedlový bod – stac., ale ne extrém (lokální)

Hessova matice

vázaný extrém f(x) za nějaké podmínky

absolutní extr. uvnitř M nebo na hranici

D_1, D_2 subdet.

$$H = \begin{pmatrix} f''_{x_1 x_1}(x^*) & f''_{x_1 x_2}(x^*) & \dots & f''_{x_1 x_n}(x^*) \\ f''_{x_2 x_1}(x^*) & f''_{x_2 x_2}(x^*) & \dots & f''_{x_2 x_n}(x^*) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f''_{x_n x_1}(x^*) & f''_{x_n x_2}(x^*) & \dots & f''_{x_n x_n}(x^*) \end{pmatrix}$$

i) všechny $D > 0$ – v x^* minimum

ii) $D_1, D_3, \dots < 0$; $D_2, D_4, \dots > 0$ – maximum

iii) někt. sud. < 0 – nenastane extr.

iv) někt. lich. > 0, jiný < 0 – nenast. extr.

v) někt. 0, čili iv) nevyloučili – nelze rozhodnout pomocí tohoto

Integrální počet f-cí 2 prom.

$$\iint_M f(x, y)\,dM = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

(bez () vnitřní zápis)

$$\boxed{\iint_M f(x, y)\,dM = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y)\,dy \right) dx}$$

$$\boxed{\iint_M f(x, y)\,dM = \int_c^d \int_{c(y)}^{d(y)} f(x, y)\,dx\,dy}$$

Trojný integrál

$$\iiint_T u(x, y, z)\,dT = \int_a^b \int_c^d \left(\int_e^f u(x, y, z)\,dz \right) dy\,dx$$

6 mož. pořadí

$$\boxed{\iiint_T u(x, y, z)\,dT = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} u(x, y, z)\,dz \right) dy \right) dx}$$

Transformace do polárn. souř.

$$\boxed{\iint_A f(x, y)\,dx\,dy = \iint_M f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi}$$

F: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $|F'| = \rho$

$F^{-1}(A)$: $\dots \leq \varphi \leq \dots$, $\dots \leq \rho \leq \dots$

Transformace do válcových souřadnic (cylindrické)

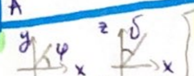
F: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, $|F'| = \rho$

$F^{-1}(A)$: $\dots \leq z \leq \dots$, $\dots \leq \varphi \leq \dots$, $\dots \leq \rho \leq \dots$

$$\boxed{\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz}$$

Trans-ce do kulových (sfér.) souřadnic

$$\boxed{\iiint_A f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,r^2\sin\vartheta\,dr\,d\varphi\,d\vartheta}$$



F: $x = \rho\cos\varphi\sin\vartheta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$, $z = \rho\cos\vartheta$, $|F'| = \rho^2\sin\vartheta$

Numerické řeš. dif. rov. 1. ř.

Eulerova metoda

$\Delta y = k\Delta x$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

x_i	y_i	k

$\Delta y = \dots$

1. Modifik. Eulerova M.

$y_{i+1} = y_i + h k_2$,

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

2. Modifik. Eulerova M.

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, $k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + h, y_i + h k_1)$

Runge-Kutta 4 řádu

$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = f(x_i, y_i)$

$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1)$

$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2)$

$k_4 = f(x_i + h, y_i + h k_3)$

Diferenciální rovnice 1. řádu

Separovatelné

$y' = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$ + singulární řešení (nelze vydělit, zobecn. ř. volbou C)

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

$y = \dots$

Lineární

$y' + f(x) \cdot y = g(x)$

① $y' + f(x) y = 0$

$y' = -f(x) y$

$\frac{dy}{dx} = -f(x) y$

$\frac{dy}{y} = -f(x)\,dx$, $y = 0$ – řeš.

$\ln|y| = \int -f(x)\,dx$

$|y| = e^{\int -f(x)dx} \cdot e^C$

$y_h = K \cdot e^{-\int f(x)dx}$

② $y(x) = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$

$y'(x) = K'(x) e^{-\int f(x)dx} + K(x) e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x))$

$K'(x) e^{-\int f(x)dx} + K(x) e^{-\int f(x)dx} \cdot (-f(x)) + f(x) K(x) e^{-\int f(x)dx} = g(x)$

$K'(x) e^{-\int f(x)dx} = g(x) \mid \cdot e^{\int f(x)dx}$

$K'(x) = g(x) e^{\int f(x)dx}$

$K(x) = \int g(x) e^{\int f(s)ds}\,dx + K$

$y(x) = \left(\int g(x) e^{\int f(s)ds}\,dx + K \right) e^{-\int f(x)dx}$

integ. křivka dif. rovnice – její konkr. (part.) ř. $y(x)$

Jiné zajímavosti

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ pro $k \in (0, 1\rangle$ div., $k \in (1, \infty)$ konv.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konv. $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1\rangle$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$$

Obraz množiny

$f(M) = \{b ;\ \exists a \in M: f(a) = b\}$

Úplný vzor množiny

$f^{-1}(P) = \{a ;\ \exists b \in P\ \ f(a) = b\}$

$f^{-1}(\{0\})$ - uvm

$f^{-1}(0)$ - inverzná funkcia

Vlastnosti funkcií

- ohr. ↑ $\exists c \in \mathbb{R}\ \forall x \in D_f;\ f(x) \leq c$
  - ↓ ohr. $\exists c, d \dots$ $\quad d \leq f(x) \leq c$
- monot
  - rast. $\forall x_1, x_2 \in M;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - kles. $>$
  - nekles. $\geq$
  - nerast. $\leq$
- parita
  - parna (sudá) $\forall x \in D_f;\ f(-x) = f(x)$
  - nep. (lichá) $f(-x) = -f(x)$
  - ! def. obor musí být sym. $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$.
- periodicita $\exists p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \forall x \in D_f;\ f(x \pm p) = f(x)$

Okolí bodu

$\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R};\ |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

a - střed, ε - polomer

Limita postupnosti

a:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0;\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

Veta o dvoch policajtoch

Nech $\lim a_n = \lim b_n = a$, a nech ex. $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_1$ je $a_n \leq c_n \leq b_n$. Potom ex. limita (c_n) a $\lim c_n = a$.

Limita funkcie

- č. A je l. f. $f(x)$ v b. c ak platí:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

spr. zľa: $x-c$, $c-x$

Nespojitost

- 1. druhu (skok)
- 2. druhu

Asymptoty

- zvislá (bez smernice)

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ alebo $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

- šikmá (so smernicou)

$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

$$\boxed{a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]}$$

Derivácia v bode

$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Slovník pro derivacie

Funkce	Derivace	Funkce	Derivace
c (konst)	0	x	1
x^n	$n x^{n-1}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x	a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccotg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\operatorname{tgh} x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\operatorname{cotgh} x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$

Dotyčnica, normála:

$$\boxed{\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\ y - f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}}$$

diferenciál

Tahák

Pravidla derivovania

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Inflexní bod

konvexní ∪ ⇄ konkávna ∩

v něm ex. vlastní der-ce! (tečna)

Priebeh funkcie

1) D_f
2) Parita
3) As-ty
4) Priesečníky s x, y

$f'(x) \to$ monot

$f''(x) \to$ konv/konk

Taylorov polyn.

$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$

+C !

Num rieš. nelin. rovníc

- Graficky +
- m. bisekcie
- m. regula falsi

$x_1 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} \cdot f(b_1)$

- Newtonova m. (dotyčnice)

Podmínky konv.:

1) sp. $f'(x)$, $f''(x)$
2) $f'(x) \neq 0$, $f''(x)$ nemení znam.! $f''(x)$

⇓

poč. $x_0 \in \langle a, b \rangle$

$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- Prostej iterácie $\quad f(x) = \cos x - x \quad \cos x = x \quad g(x) = \cos x$

Podmínky:

1) $g(x)$ dif. na...

$g(\langle a, b \rangle) \subseteq \langle a, b \rangle$

2) Ak $\exists \alpha \in (0, 1)$: $|g'(x)| \leq \alpha$

$\forall x \in \langle a, b \rangle$ $(|g'(x)| < 1)$

⇓

$\exists$ pevný bod f-ce g na $\langle a, b \rangle$

a poč. ap. může být lub. $x_0 \in \langle a, b \rangle$

a $x_1 = g(x_0)$

$\vdots$

$x_k = g(x_{k-1})$

Neurč. integrály

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)|$!

$\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$

$\int a f(x) + b g(x)\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$

$\int u(x) v'(x)\, dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x)\, dx$

$\int f(x)\, dx = \int f[g(t)] g'(t)\, dt$ kde $x = g(t)$

$\int 0\, dx$	c	$\int 1\, dx$	x
$\int x^k\, dx$	$\frac{x^{k+1}}{k+1}$	$\int \frac{1}{x}\, dx$	$\ln|x|$
$\int \sin x\, dx$	$-\cos x$	$\int \cos x\, dx$	$\sin x$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$	$-\operatorname{cotg} x$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$	$\operatorname{tg} x$
$\int e^x\, dx$	e^x	$\int a^x\, dx$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}}$	$\ln|x + \sqrt{x^2 + b}|$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$
$\int \sqrt{x^2 + b}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + b} + \frac{b}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + b}|$, $b \neq 0$			

$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4 \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n))$

$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $n > m$ $\quad D < 0$

$Q_n(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)(x^2 + cx + d)$

⇓

$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b} + \frac{Dx+E}{x^2+cx+d}$

Objem rot. telesa

$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$

Simpsonova metoda

$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

L'Hospitalovo pravidlo

$\left(\frac{0}{0}\right)$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

měníme na derivace ↑↓

Lichoběžn. met.

$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b L(x)\, dx = \frac{b-a}{2}(f(b) + f(a))$

$\int_a^b f(x)\, dx = h(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2} f(x_m))$

Určitý integrál

$\int_a^b 0\, dx = 0 \qquad \int_a^b 1\, dx = b - a$

$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)}$$

$\int \operatorname{tg}(x)\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int e^x \cos(e^x)\, dx = \left| \begin{matrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \cos t\, dt = \sin t + C = \sin(e^x) + C$

$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg}(x) & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = [x \operatorname{arctg}(x)]_0^1 -$

$- \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}[\ln|1+x^2|]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$