

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea
in Matematica per l'Ingegneria

Tesi di Laurea

Filtraggio di immagini



Relatori

prof. Nome Cognome

prof. Nome Cognome

firma dei relatori

.....
.....

Candidato

Raffaello Ippolito

firma del candidato

.....

Anno Accademico 2021-2022

♡ *Alla mia regina*

Sommario

Lo studio delle Equazioni alle derivate parziali ed il loro impiego in ambito di filtraggio di immagini.

Ringraziamenti

I candidati ringraziano vivamente il Granduca di Toscana per i mezzi messi loro a disposizione, ed il signor Von Braun, assistente del prof. Albert Einstein, per le informazioni riservate che egli ha gentilmente fornito loro, e per le utili discussioni che hanno permesso ai candidati di evitare di riscoprire l'acqua calda.

Indice

Elenco delle tabelle	7
Elenco delle figure	8
I Introduzione	11
1 Nozioni introduttive	13
1.1 Introduzione	13
1.2 Immagini digitali	13
1.3 Cosa sono i filtri	15

Elenco delle tabelle

Elenco delle figure

1.1	Confronto immagine originale e immagine codificate utilizzando una griglia 4x4.	14
1.2	Confronto immagine originale e immagine codificate utilizzando una griglia 80x80.	14

*If you cannot understand my
argument, and declare
it's Greek to me
you are quoting Shakespeare.*

[B. LEVIN, Quoting Shakespeare]

Parte I

Introduzione

Capitolo 1

Nozioni introduttive

1.1 Introduzione

Le immagini hanno un ruolo fondamentale nelle nostre vite, viviamo di immagini, ne guardiamo tutti i giorni in tutti i contesti, la percezione visiva è sempre il nostro primo riferimento senza la quale ci si sentiamo persi. Viviamo in una società consapevole di ciò e che sfrutta questo aspetto quanto più possibile nei campi più disparati, fotografie, radiografie, ecografie, poster pubblicitari, progetti, etc. E' quindi un problema sempre di grande interesse cercare di sfruttarle al meglio, a tal fine esistono metodi cosiddetti di "filtraggio", tramite i quali intendiamo migliorare la qualità delle nostre immagini, mettere in risalto determinate caratteristiche o nascondere altre.

Viviamo in un'era digitale, le immagini passano generalmente per un calcolatore prima di essere stampate, o in ogni caso possono essere sempre scannerizzate (con strumenti più o meno precisi) così da averne una copia digitale. E' in questa fase che l'immagine subisce il processo di filtraggio, nel calcolatore, quando è in formato digitale, Per capire cos'è un filtro occorre dunque chiedersi cosa sia un'immagine digitale.

1.2 Immagini digitali

Per capire come codificare un'immagine per memorizzarla in formato digitale ci chiediamo prima che cos'è un'immagine.

Forma esteriore degli oggetti corporei, in quanto viene percepita attraverso il senso della vista, o si riflette – come realmente è, o variamente alterata – in uno specchio, nell'acqua e sim., o rimane impressa in una lastra o pellicola o carta fotografica.

Vocabolario Treccani

Un'immagine viene rappresentata, impressa quindi su superfici, cioè oggetti bidimensionali, di dimensioni finite e le vediamo perchè i nostri occhi percepiscono il susseguirsi di colori diversi. Come codificare tali entità? Come tutti gli oggetti reali, sebbene abbiano dimensioni finite, il susseguirsi delle immagini avviene in una maniera che possiamo considerare come continua. Questo è il primo problema che ci si pone quando si pensa a come codificare delle immagini. La soluzione più largamente utilizzata è anche quella più semplice ed intuitiva, ossia di discretizzare tale distribuzione di colori. Dividiamo l'immagine con una griglia ed ad ogni casella, che d'ora in poi chiameremo "pixel", assegniamo un colore. E' ovvio che così facendo si perdono dei dettagli, la quantità di dettagli che riusciamo a conservare può variare enormemente, un minimo si perde sempre ma è un prezzo che siamo disposti a pagare.

Facciamo un esempio



Figura 1.1. Confronto immagine originale e immagine codificate utilizzando una griglia 4x4.



Figura 1.2. Confronto immagine originale e immagine codificate utilizzando una griglia 80x80.

E' semplice vedere come ad una griglia più fitta corrisponda una miglior qualità dell'immagine, questo è il concetto di "risoluzione di un'immagine". Una miglior risoluzione però costa, come anticipato, in termini di memoria. Una griglia 4x4 corrisponde a 16 pixel, ad una griglia 80x80 corrispondono invece 6400 pixel! Questo vuol dire che la seconda immagine pesa 400 volte di più della prima.

Volendo definire in maniera più precisa cosa sia un'immagine digitale, diremmo che è una funzione da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^3 siccome, date in input due coordinate questa funzione ci restituisce un colore (che è formato da 3 canali RGB).

1.3 Cosa sono i filtri

Una volta capito che un'immagine è una funzione possiamo definire un filtro come una seconda funzione che convoluta alla prima dà il risultato richiesto.

Una equazione alle derivate parziali (PDE) esprime una evoluzione, sia u la nostra immagine e u_0 lo stato in cui si trova inizialmente, allora per convoluzione possiamo dire che

$$u(x) = \frac{1}{w(x)} \int \int d(x - \xi) \tilde{d}(u_0(x) - u_0(\xi)) u_0(\xi) d\xi. \quad (1.1)$$

con $w(x) = \int \int d(x - \xi) \tilde{d}(u_0(x) - u_0(\xi)) d\xi$

Prendiamo in esame l'equazione del calore

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & x \in \mathbb{R}^2, t \geq 0. \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (1.2)$$