定量研究

专题报告

证券研究报告

兴业证券 INDUSTRIAL SECURITIES

分析师：
徐寅
xuyinsh@xyzq.com.cn
S0190514070004

西学东渐--海外文献推荐系列之七十八

2020 年 5 月 28 日

报告关键点

本文提出了一个灵活的、统一的、以组合为核心的归因框架。它把事前(ex ante)和事后(ex pose)归因统一到了一个框架内。可以采用同样的方法对组合的 alpha、预期风险、收益等各种属性进行归因。

相关报告

《西学东渐--海外文献推荐系列之七十七》
《西学东渐--海外文献推荐系列之七十六》
《西学东渐--海外文献推荐系列之七十五》

团队成员：

投资要点

- 西学东渐，是指从明朝末年到近代，西方学术思想向中国传播的历史过程。西学东渐不仅推动了中国在科学技术和思想文化方面的发展，也有力地促进了社会与政治的大变革。在今天，西学东渐仍有其重要的现实意义。作为 A 股市场上以量化投资为研究方向的卖方金融工程团队，在平日的工作中，常常深感海外相关领域的研究水平之高、内容之新。而这也促使我们通过大量的材料阅读，去粗取精，将认为最有价值的海外文献呈现在您的面前！
- 本文提出了一个灵活的、统一的、以组合为核心的归因框架。它把事前(ex ante)和事后(ex pose)归因统一到了一个框架内。可以采用同样的方法对组合的 alpha、预期风险、收益等各种属性进行归因。
- 目前应用最多的归因方法往往指组合收益的事后归因，我们可以从本文看到，归因应用可以更加广泛，无论在事前还是事后、包括对组合的 alpha、风险、收益都可以进行归因，更重要的是作者把这些归因都纳入到了一个统一的、简洁优雅的框架之中。此外，目前收益归因最常用的回归方法也可以纳入到作者的归因框架之中。

风险提示：文献中的结果均由相应作者通过历史数据统计、建模和测算完成，在政策、市场环境发生变化时模型存在失效的风险。

目录

报告正文

归因——事前和事后归因的统一框架

文献来源：

Richard Grinold. Attribution[J]. Journal of Portfolio Management, 2006.

推荐原因：

本文提出了一个灵活的、统一的、以组合为核心的归因框架。它把事前(ex ante)和事后(ex pose)归因统一到了一个框架内。可以采用同样的方法对组合的 alpha、预期风险、收益等各种属性进行归因。

我们的思考：

目前应用最多的归因方法往往指组合收益的事后归因，我们可以从本文看到，归因应用可以更加广泛，无论在事前还是事后、包括对组合的 alpha、风险、收益都可以进行归因，更重要的是作者把这些归因都纳入到了一个统一的、简洁优雅的框架之中。此外，目前收益归因最常用的回归方法也可以纳入到作者的归因框架之中。

1、引言

本文提出了一个灵活的、统一的、以组合为核心的归因框架。它把事前(ex ante)和事后(ex pose)归因统一到了一个框架内。事前分析我们关注组合风险、超额收益的来源，以及阻碍我们更有效实施策略的地方。事后分析我们主要关心我们预测是否准确，组合的表现以及风险控制的效果。

我们通过分析组合之间的协方差（或相关系数）矩阵来解决这些问题。这需要对资产特征进行建模，如把 alpha、风险、收益作为组合。然后我们对这些资产特征的协方差矩阵进行建模。

把资产特征当做组合是一种不寻常的方法，它的好处是：我们可以用极其类似的方法解决上述所有问题。

本文的方法中有两个主要步骤：

- 借助协方差矩阵来构建归因的框架
- 分析协方差矩阵

我们从如何将组合的特征（超额、风险、转换系数、预期效用损失）与协方差矩阵对应起来开始，随后我们引入一个基础的风险预测分析模型，然后将各种细节落实，使得它能够进行组合归因。再之后我们展示如何把事前分析超额和风险的分析方法用于事后分析。最后，我们会展示该方法的通用性与灵活性：通过收益回归进行归因的方法也可以并入我的框架之中。

在归因方面已有大量的研究。Google 搜索“portfolio attribution”有 172000 个结果。我们的方法基于以下学者的横截面收益回归框架：Fama and

MacBeth[1973]、Rosenberg and McKibben[1973]、Fama and French[1993]。

我也参考了 Clark, de Silva and Thorley[2002,2005]中的思路：在不考虑成本及其他约束的情况下，实施效率可以由你想要持有的组合与你实际持有组合的差别来刻画。他们将事前和事后分析联系到了一起，并且用已实现信息系数（realized information）作为转换系数的近似。

本文框架中 backlog 的概念类似于他们研究中“未实施的最优权重”；本文框架中机会集（opportunity set）类似于他们的已实现离散程度。但出发点和具体的方法是不同的。我试图搭建一个大的框架，类似一台大型实验设备，可以研究风险、实施效率、收益等方面的所有问题。实际上，我最初的动机是时间序列上的 alpha 分解模型。在研究过程中，我发现可以将 Clark, de Silva and Thorley 的方法与 Grind and Kahn[2000]的方法结合起来，构建一个统一的归因框架。

2、事前分析

我们将从一些资产组合理论的简单结果出发，展示如何使用协方差矩阵（或者说方差、波动率、相关系数）分析出组合的一些特性。这种分析方法可以将看似割裂的几个方面统一到一个框架内。

我们定义 N 个资产之间的协方差矩阵为 V，其中第 n 行 m 列元素$V_{n,m}$代表估计的资产 n 和 m 之间的协方差。这里的风险估计都是年化后的结果。任一组合 P 的权重为$\boldsymbol{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$，它们不需要加和为 1，也不需要元素非负。

任意组合 P 的方差和协方差如下：

$$\omega_{P,P} = \sum_{n=1,\mathrm{N}} \sum_{m=1,N} p_n \cdot \mathrm{V}_{n,m} \cdot p_m$$

$$\omega_P = \sqrt{\sum_{n=1,\mathrm{N}} \sum_{m=1,N} p_n \cdot \mathrm{V}_{n,m} \cdot p_m} \tag{1}$$

任意两个组合 X、Y 的协方差，可以表示为：

$$\omega_{X,Y} = \sum_{n=1,\mathrm{N}} \sum_{m=1,N} x_n \cdot V_{n,m} \cdot x_m$$

$$\omega_{X,Y} = \omega_X \cdot \rho_{X,Y} \cdot \omega_Y \tag{2}$$

组合 P 的 alpha 为(alpha 是关于资产年化收益的预测，$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N\}$)：

$$\alpha_P = \sum_{n=1,N} \alpha_n \cdot p_n \tag{3}$$

组合 P 的信息比率 P 为$\mathrm{IR_p}$，其定义是单位风险下的预期 alpha。

$$IR_p \equiv \alpha_P / \omega_P \tag{4}$$

我们的投资目标是最大化风险调整后的收益：

$$U_P = \alpha_P - \frac{\lambda}{2} \cdot \omega_{P,P} \tag{5}$$

也就是 alpha 减去风险的惩罚。当然，实际构建组合时还需要考虑交易成本和其他限制。

我们以公式（5）无约束无成本下的最优解开始，这个最优解我们称之为组合Q，其持仓为$\mathbf{q}=\{q_1,q_2,\dots,q_N\}$，可以通过解如下方程获得：

$$\alpha_n=\lambda\cdot\sum_{m=1,\mathrm{N}}V_{n,m}\cdot q_m \tag{6}$$

其中求和部分$\sum_{m=1,\mathrm{N}}V_{n,m}\cdot q_m$是资产 n 与组合Q 的协方差。我们把它写作$\omega_{n,Q}$。因此公式（6）可以写作

$$\alpha_n=\lambda\cdot\omega_{n,Q} \tag{7}$$

组合 Q 的 alpha 和收益调整后的收益分别是：

$$\alpha_Q=\lambda\cdot\omega_{Q,Q}$$

和

$$U_Q=\frac{\lambda}{2}\cdot\omega_{Q,Q} \tag{8}$$

如果我们结合公式（3）和公式（7），并且有$\sum_{n=1,N}p_n\cdot\omega_{n,Q}=\omega_{P,Q}$，我们可以将任意组合 P 的 alpha 和信息比率写为：

$$\alpha_P=\lambda\cdot\omega_{P,Q}=\lambda\cdot\omega_Q\cdot\rho_{P,Q}\cdot\omega_P \tag{9}$$

将公式（9）的除以ω_P得到以下公式：

$$IR_P=\lambda\cdot\omega_Q\cdot\rho_{P,Q} \tag{10}$$

任意组合 P 与理想组合 Q 的相关系数$\rho_{P,Q}$，我们称之为转换系数(transfer coefficient)。它是衡量实施效率的指标。公式（10）表明：

- 让组合 P = Q，那么$\rho_{P,Q}=1$，组合 Q 的信息比等于$\lambda\cdot\omega_Q$。
- 组合 Q 的信息比最高，因为$\rho_{P,Q}\le 1$，最高的信息比为：

$$IR\equiv IR_Q=\lambda\cdot\omega_Q \tag{11}$$

组合 B 代表组合 P 与 Q 之间的差别。组合 B 我们称之为 backlog，它代表我们由组合 P 到理想组合 Q 所需要进行的一篮子交易。组合 P 与组合 Q 相比，我们的效用损失，即是 backlog 的方差：

$$U_Q-U_P=\frac{\lambda}{2}\cdot\omega_{B,B} \tag{12}$$

有读者可能会问，这和归因有什么关系？这部分核心思想是：风险，alpha，实施效率，效用损失可以通过协方差来表示。我们后边会展示，组合的其他特点也可以通过协方差来表达。因此，如果我们想建立一个灵活统一的归因框架，我们就需要如何解读协方差的信息。

2.1、非结构化模型

我们从非结构化的资产入手：在相对简单的环境下，我们可以得出更复杂环境里同样成立的基础思想。

X 和 Y 分别代表两个组合，每个组合都是 N 个元素的多空持仓权重：$\mathbf{x}=\{x_1,x_2,\dots,x_N\}$和$\mathbf{y}=\{y_1,y_2,\dots,y_N\}$。X 与 Y 组合的协方差是

$$\omega_{X,Y}=\sum_{n=1,N}\sum_{m=1,N}x_n\cdot V_{n,m}\cdot y_m \tag{13}$$

我们可以将它写为

$$\omega_{X,Y}=\sum_{n=1,N}x_n\cdot\sum_{m=1,N}V_{n,m}\cdot y_m$$
$$\omega_{X,Y}=\sum_{n=1,N}x_n\cdot\omega_{n,Y} \tag{14}$$

其中$\omega_{n,Y}$是资产 n 与组合 Y 的协方差。我们可以把x_n看做在资产 n 的暴露，$\omega_{n,Y}$代表了资产 n 与组合 Y 的关系。取极限后得到：

$$\frac{\partial\omega_{X,Y}}{\partial x_n}=\omega_{n,Y} \tag{15}$$

我们可以调换 x 和 y 的顺序：

$$\omega_{X,Y}=\omega_{Y,X}=\sum_{n=1,N}y_n\cdot\omega_{n,X} \tag{16}$$

至此，$\omega_{X,Y}$ 拆解为$x_n\cdot\omega_{n,Y}$(或$y_n\cdot\omega_{n,X}$)，实际上，这种拆解在结构化（或更复杂）的情形下依然成立。在以上的基础上再加上一些理论基础和统计技术，这个过程会更加优雅简洁，但其本质没变。

假设 X 和 Y 都是组合 P，那么方差等于协方差$\omega_{P,P}=\omega_P^2$，协方差、组合 P 的风险ω_P如下：

$$\omega_{P,P}=\sum_{n=1,N}\sum_{m=1,N}p_n\cdot V_{n,m}\cdot p_m$$
$$\omega_P=\sqrt{\sum_{n=1,N}\sum_{m=1,N}p_n\cdot V_{n,m}\cdot p_m} \tag{17}$$

结合公式（2），我们可以得到：

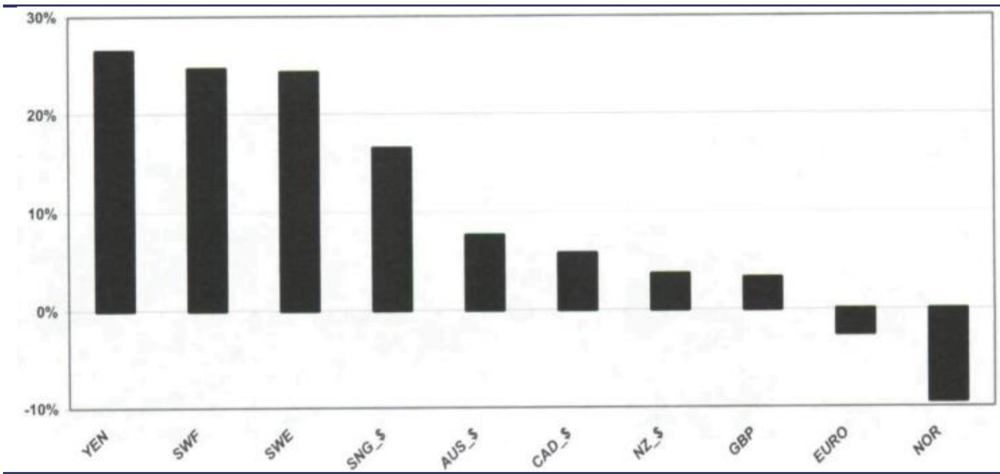
$$\omega_{P,P}=\sum_{n=1,N}p_n\cdot\omega_{n,P} \tag{18}$$

至此，我们将方差的一部分$p_n\cdot\omega_{n,P}$归因到了资产 n 上，表示成比例就是$P_n\cdot\omega_{n,P}/\omega_{P,P}$。

我们以 10 种主要货币的多空组合为例进行展示和说明。其中日元 YEN 的风险贡献最高。

如果我们希望减少组合的风险，那么应该减少日元 YEN、瑞士法郎 SWF、瑞典克朗 SWE 的配置。增加诸如欧元 EURO 或者挪威克朗 NOR 的配置也可以降低组合的主动风险。

图表 1、每个资产的风险贡献



资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

我们将会通过两个方式解释公式（18）中的风险配置。第一种方式基于相关系数。我们可以将协方差分解为：

$$\omega_{n,P} = \omega_n \cdot \rho_{n,P} \cdot \omega_P \tag{19}$$

其中ω_n是资产 n 的风险，ω_P是组合 P 的风险，$\rho_{n,P}$是资产 n 和组合 P 的相关系数。我们定义：

$$\psi_{P,n} \equiv \frac{p_n \cdot \omega_n}{\omega_P} \tag{20}$$

方差中归因到资产 n 的部分可以写为：

$$\frac{p_n \cdot \omega_{n,P}}{\omega_{P,P}} = \psi_{P,n} \cdot \rho_{n,P}$$

其中

$$\sum_{n=1,N} \psi_{p,n} \cdot \rho_{n,p} = 1 \tag{21}$$

我们可以把$\psi_{P,n}$视为组合 P 在资产 n 暴露的衡量标准，$\rho_{n,P}$是资产 n 和组合 P 的相关系数。实际上，如果 N 个资产不相关，$\psi_{P,n}$就等于$\rho_{n,P}$。

图表 1 中的数字详细列示在了图表 2 之中。列 1 是每个资产的多空持仓，USD 的持仓等于这些货币持仓总和取负数，在这个例子中大约为 8%。第二列代表每个资产与总组合 P 的相关系数$\rho_{n,P}$。第三列展示的是衍生的暴露$\psi_{P,n}$，最后一列是$\psi_{P,n} \cdot \rho_{n,P}$。

有一个看似悖论的事情，提高权重最大的挪威克朗 NOR 配置比例会减少组合的风险，原因是我们做空了约 25%的欧洲货币，做多欧元和挪威克朗 NOR 还不足以与之平衡。

图表 2、货币资产组合的风险归因

	p(n)	rho(n,P)	psi(P,n)	product
YEN	-9.62%	-0.554	-0.477	26.44%
SWF	-10.47%	-0.472	-0.522	24.62%
SWE	-12.14%	-0.425	-0.570	24.25%
SNG_$	-11.65%	-0.435	-0.379	16.48%
AUS_$	8.54%	0.184	0.413	7.60%
CAD_$	9.38%	0.175	0.327	5.74%
NZ_$	5.39%	0.132	0.272	3.60%
GBP	-2.45%	-0.315	-0.102	3.22%
EURO	1.40%	-0.378	0.067	-2.53%
NOR	12.94%	-0.156	0.606	-9.43%

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

2.2、结构化模型

在本部分，我们可以将风险，alpha，信息比，和效用损失归因到特定的因子而不只是归因到资产本身，如流动性因子，成长因子。我们可以将这些因子转换为特定的组合，然后通过计算我们的组合与流动性因子组合、成长因子组合之间的相关系数来进行归因。

$\mathbf{S_j}: j = 1, \ldots, J$是 J 个可能的收益来源。每个收益源都对应一个组合——源组合(source portfolio)，每个源组合的持仓如下$\mathbf{s_j'} = \{s_{1,j}, s_{2,j}, \ldots, s_{N,j}\}$，其中$s_{n,j}$代表源组合 j 在资产 n 上的持仓。每个源组合，我们都可以计算出其风险、alpha、信息比。任意两个源组合之间的协方差和相关系数可以计算如下：

$$\omega_{j,k} = \sum_{n=1,N} \sum_{m=1,N} s_{n,j} \cdot V_{n,m} \cdot s_{m,k} \qquad (22)$$
$$\omega_{j,k} = \omega_j \cdot \rho_{j,k} \cdot \omega_k$$

这里仍然使用具有代表性的例子来进行说明。在我之前的文章中，我们将 alpha 分为 3 个部分：FAST（快速变换的信号），SLOW（缓慢变化的信号），INT（intermediate）是处于二者中间变化水平的信号。此外，还有理想组合 Q，实际组合 P。图表 3 展示了这 5 个组合的风险、alpha、信息比 IR。他们之间的相关系数如图表 4 所示。

图表 3、五种组合的属性

position	risk	alpha	IR
FAST	4.00%	4.00%	1.00
INT	3.00%	2.25%	0.75
SLOW	2.00%	1.00%	0.50
Q	6.65%	11.07%	1.66
P	4.77%	5.81%	1.22

s

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

图表 4、组合 PQ 与源组合的收益相关系数

correlations	FAST	INT	SLOW
rho<j,Q>	0.601	0.451	0.301
rho<j,P>	0.231	0.584	0.536

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

图表 3、4 的结果与我们初步的推断一致。没有交易成本的情况下，组合 Q 将最偏重 FAST 信号而非 INT 或 SLOW 信号。但最终实现的组合会不得不受到交易费用约束，因此更加偏重于 INT 与 SLOW 信号，组合 P 也与 INT 和 SLOW 信号的相关系数更高。rho<j,Q>那行数据很有趣，因为它们代表了源组合的转化系数。

为了分析任意组合，我们使用回归的方法进行分解，使得它们可以被源组合解释。对任意组合 X 的回归如下：

$$x_n = \sum_{j=1,J} s_{n,j} \cdot \beta_{X,j} + \epsilon_{X,n} \tag{23}$$

回归将组合 X 分成可以被源组合解释的部分：$\sum_{j=1,J} s_{n,j} \cdot \beta_{X,j}$ 和无法被源组合解释的残差部分，$\boldsymbol{\epsilon}'_{\mathbf{X}} = \{\epsilon_{X,1}, \epsilon_{X,2}, \ldots, \epsilon_{X,N}\}$。回归的特性使得残差与源组合不相关：

$$0 = \sum_{n=1,\mathrm{N}} \sum_{m=1,N} s_{n,j} \cdot V_{n,m} \cdot \epsilon_{X,m} \tag{24}$$

其中 j=1,2,…,J

对组合 P 和 Q 的回归结果列示在图表 5。例子中组合 Q 是三种源组合加权而成的结果，因此回归的 R 方是 1。对于实际的组合 P，其回归的 R 方是 0.8734，即可以通过源组合解释其 87.34%的风险。

图表 5、组合 PQ 的回归系数与 R 方

beta	FAST	INT	SLOW	R-sqrd
beta<j,Q>	1.58	1.22	1.99	100.00%
beta<j,P>	0.75	0.96	1.66	87.34%

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

我们回头再看公式（23）（24），残差部分与所有的源组合都无关。组合 X 的风险、残差组合$\boldsymbol{\epsilon}'_{\mathbf{X}}$的风险，和二者之间的相关系数关系如下：

$$\omega_{\epsilon X} = \omega_X \cdot \rho_{X,\epsilon(X)} \tag{25}$$

其中 $\omega_{\epsilon X}$ 是残差组合$\boldsymbol{\epsilon}'_{\mathbf{X}}$的风险，$\omega_X$是组合 X 的风险，$\rho_{X,\epsilon(X)}$是二个组合的相关系数。

例子中，$\rho_{P,\epsilon(P)}$=0.355。回归的 R 方为：

$$\sqrt{1-\rho_{X,e(X)}}$$

在这个框架下，任意组合 X 和 Y 的协方差可以写作：

$$\omega_{X,Y}=\sum_{j=1,J}\beta_{X,j}\cdot\omega_{j,Y}+\omega_{\epsilon(X),\epsilon(Y)} \qquad (26)$$

其中$\beta_{X,j}$是组合X与源组合j的回归系数，$\omega_{j,Y}$是组合Y与源组合j的协方差。$\omega_{\epsilon(X),\epsilon(Y)}$是X与Y回归残差组合的协方差。$\sum_{j=1,J}\beta_{X,j}\cdot\omega_{j,Y}$部分是可以被源组合解释的部分，$\omega_{\epsilon(X),\epsilon(Y)}$是无法被源组合解释的部分。

我们可以进一步将组合X和Y的相关系数归因到源组合上：

$$\rho_{X,Y}=\sum_{j=1,J}\psi_{X,j}\cdot\rho_{j,Y}+\rho_{x,\epsilon(X)}\cdot\rho_{\epsilon(X),Y} \qquad (27)$$

在公式（27）中：

$$\psi_{X,j}\equiv\frac{\beta_{X,j}\cdot\omega_j}{\omega_X} \qquad (28)$$

$\psi_{X,j}$是原始回归系数根据源组合j和组合X的不同风险水平调整后的标准暴露。如果我们把源组合的风险水平都调整到与组合X相同，那么$\psi_{X,j}$就是回归的系数。

我们还可以把$\psi_{X,j}$看做“伪相关系数”。$\beta_{X,j}$代表每单位组合X含有多少单位的源组合j，但$\psi_{X,j}$则是无量纲的，当源组合之间的相关系数为0时，$\psi_{X,j}$就是相关系数。

组合P的一部分风险$\beta_{p,j}\cdot s_j$满足$\omega_j\cdot\beta_{p,j}=\omega_P\cdot\psi_{p,j}$。因此，我们可以将风险归因到组合j上。

➢ **风险归因**

我们可以使用公式（27）将组合Q的方差归因到3个源组合上。当X=Y时，公式（27）必然为1，这意味着我们分解了所有的风险（即方差）。

图表6展示了组合P和Q的分解过程，每行的数字加和为1.组合Q的风险可以全部被源组合所解释，组合P的风险有12.66%没有被源组合解释。从中可以发现，交易成本对于组合实际执行的影响：对于组合Q，57.16%的风险可以归因到FAST信号，但实际执行后（组合P），FAST信号贡献的风险比例不到15%。

图表6、组合PQ的风险预算

Risk Budget	FAST	SLOW	INT	Residual
Q	57.16%	24.86%	17.98%	0.00%
P	14.59%	35.41%	37.34%	12.66%

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

➢ **alpha和信息比**

这一部分我们试图分解组合的alpha，由我们之前的分析：

$$\alpha_P=\lambda\cdot\omega_{p,Q}=\lambda\cdot\omega_Q\cdot\rho_{P,Q}\cdot\omega_P=IR\cdot\omega_P\cdot\rho_{p,Q} \qquad (29)$$

组合P的alpha取决于以下3个部分：

- IR部分，代表组合本来有的alpha

- 组合的风险水平ω_P
- 转换系数$\rho_{P,Q}$

我们可以将公式（29）应用于任意源组合，对于源组合 j，我们可以得到：

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \lambda\cdot\omega_{j,Q} \\ &=\lambda\cdot\omega_Q\cdot\rho_{j,Q}\cdot\omega_j \\ &=\mathrm{IR}\cdot\omega_j\cdot\rho_{j,Q}\end{aligned} \tag{30}$$

为了进一步分析，我们需要对转换系数$\rho_{P,Q}$进行深入的研究。根据公式(27)，转换系数可以归因到源组合部分和残差部分：

$$\alpha_P = IR\cdot\omega_P\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{P,j}\cdot\rho_{j,Q}+\rho_{P,\epsilon(P)}\cdot\rho_{\epsilon(P),Q}\} \tag{31}$$

归因到源组合 j 的部分是$\psi_{X,j}\cdot\rho_{j,Q}$，其中$\rho_{j,Q}$是源组合 j 的转换系数，$\psi_{X,j}$是组合 P 对于源组合 j 的标准暴露。

图表 7、组合 P 的 alpha 分解

Alpha Report			
portfolio	*P*		
IR	1.66		
risk_*P*	4.77%		
Source	FAST	INT	SLOW
expo: psi<*P*,*j*>	0.631	0.606	0.697
risk<j>	3.01%	2.89%	3.33%
TC: rho<*j*,*Q*>	0.601	0.451	0.301
*IR**risk**TC*	3.01%	2.17%	1.66%
source alpha	6.85%		
Residual			
expo: rho<*P*,e(*P*)>	0.356		
residual risk <Q>	1.70%		
TC: rho<e(*P*),*Q*>	0		
residual alpha	0.00%		
Totals			
portfolio Alpha	6.85%		
portfolio *TC*	0.862		

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

图表 7 展示了组合 P 的 alpha 分解。第一部分展示了无约束情况下的最大可能 alpha，即给定 IR 和ω_P的情况下（转换系数假设为 1），组合的 alpha 可以达到 7.94%。

图表 7 的第二部分展示了各个源组合对于 alpha 的贡献。源组合 j 的贡献是$\mathrm{IR}\cdot\omega_P\cdot\{\psi_{P,j}\cdot\rho_{j,Q}\}$。其中$\mathrm{IR}\cdot\omega_P$是可达到最大的 alpha，$\rho_{j,Q}$是源组合 j 的转换系数。具体来说，我们在 SLOW 信号源上的暴露$\psi_{\mathrm{P,SLOW}}$=0.097，转换系数$\rho_{\mathrm{SLOW},Q}$=0.301，因此我们可以把 7.94%*{0.697*0.301}=1.66%归因到 SLOW 信号源上。

- **效用损失**

我们现在把问题聚焦到：实际持有组合 P 而非组合 Q，我们损失了多少预期效用。之前提到，效用损失与 backlog 的方差正相关：

$$U_Q - U_P = \frac{\lambda}{2} \cdot \omega_{B,B} \quad (32)$$

例子中$\lambda = 25$,要计算效用损失，我们需要知道 backlog 的方差。当组合 X 与 Y 都等于 B 时，我们就可以得到 backlog 的方差。图表 8 展示了效用损失的分解，总的预期效用损失是 1.54%。

图表 8、效用损失分解

Backlog	FAST	INT	SLOW	Residual	Total
util loss	1.20%	0.02%	-0.05%	0.36%	1.54%
rho<B,B>	0.781	0.013	-0.030	0.235	1.00

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

3、事后分析

本文的目标是构建包括事前和事后分析、且以组合为中心的统一归因框架。我们先列示出我们已经实现的和未实现的情况。

本文框架优美对称性的必要条件是我们必须用组合代表收益。这种表示方式在事前和事后都是一样的。事前分析，我们把收益预测表示成一个理想的组合。事后分析中，我们通过后验的视角，将收益表示成事后理想组合。在经过这步的处理后，事后归因步骤实际上与事前分析非常相似。

这种分析下，事前分析的信息比对应事后的机会集(opportunity set)，事前分析的转换系数(transfer coefficient)对应事后分析的实际信息系数（realized IC）。

3.1、事后理想组合

我们以θ_n表示资产 n 的收益。假设我们预测的 alpha 正好是θ_n。使用这些完美预测，我们可以构建什么样的组合呢？我们称之为组合 R，它的持仓与组合 Q 持仓的计算方法相同：

$$\theta_n = \lambda \cdot \sum_{n=1,N} V_{n,m} \cdot r_m \quad (33)$$

按照前面的分解方式，我们可以把公式（33）写为：

$$\theta_n = \lambda \cdot \omega_{n,R} = \lambda \cdot \omega_R \cdot \rho_{n,R} \cdot \omega_n \quad (34)$$

我们根据公式（34）把组合 P 中的若干资产进行合并，这样可以表示任意组合 P 与组合 R 的收益率协方差：

$$\theta_P = \sum_{n=1,N} \theta_n \cdot p_n = \lambda \cdot \omega_{P,R} = \lambda \cdot \omega_R \cdot \omega_P \cdot \rho_{P,R} \quad (35)$$

3.2、机会集和已实现 IC

从公式（35）中我们可以看出，任意组合 P 的已实现收益率与其风险ω_P、与事后理想组合的相关系数$\rho_{Q,R}$都成比例。公式（35）提供了 3 个信息：

- $\frac{\theta_R}{\omega_R}$等于$\lambda \cdot \omega_R$，因为$\rho_{R,R}=1$

- 对任意组合 P，$\frac{\theta_P}{\omega_P}$一定小于等于$\lambda\cdot\omega_R$因为 $\rho_{R,R}\leq 1$
- 相关系数 $\rho_{P,R}$ 与事前分析的转换系数 $\rho_{P,Q}$ 相对应。

我们将 $\rho_{P,R}$ 称之为组合 P 的已实现信息系数（realized IC）。我们称实际收益与预测风险比值的最大值为机会集（opportunity set）。表示为：

$$OS=\frac{\theta_R}{\omega_R}=\lambda\cdot\omega_R \tag{36}$$

因此，解释组合 P 的表现等同于解释相关系数 $\rho_{P,R}$,因为我们有如下公式：

$$\theta_P=OS\cdot\omega_P\cdot\rho_{P,R} \tag{37}$$

公式（37）中将组合 P 的收益分解为 3 个部分：OS 代表可获取的最多有效信息；ω_P代表组合的风险偏好；$\rho_{P,R}$ 代表组合的已实现 IC，表示事后理想组合的执行效率。对于源组合$\mathbf{S}_j; j=1,J$，我们有：

$$\theta_j=OS\cdot\omega_j\cdot\rho_{j,R} \tag{38}$$

相关系数 $\rho_{j,R}$ 是源组合 j 的已实现 IC。如果我们把公式（37）与相关系数的分析—公式（27）相结合，我们可以得到类似于公式（31）的式子：

$$\theta_j=OS\cdot\omega_j\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{P,j}\cdot\rho_{j,R}+\rho_{P,\epsilon(P)}\cdot\rho_{\epsilon(P),R}\} \tag{39}$$

我们回到例子上，看一下这种方法如何落地。我们事后分析只需要 5 个数据：机会集 OS，3 个源组合已实现 IC 即 $\rho_{j,R}$，组合 P 的残差部分与组合 R 的相关系数 $\rho_{\epsilon(P),R}$。在这个例子中，使用月度的残差收益，我们 OS 的值是 10.51。$\rho_{\epsilon(P),R}$ =-0.117，因此残差部分对组合 P 是负贡献。

图表 9 展示了 3 种源组合的表现。已实现 IC 即 rho<j,R>。其中，FAST 和 SLOW 信号的预测比较成功，收益的3.66%都归到FAST 信号源上，它由机会集 OS=10.51、FAST 信号源的风险水平 4%、和已实现 IC=0.087 乘积得到。INT 则表现较差，给组合造成的损失是-1.42%。

图表 9、源组合的表现

Source	FAST	INT	SLOW
risk (omega)	4.00%	3.00%	2.00%
realized *IC* (rho)	0.087	-0.045	0.096
return (theta)	3.66%	-1.42%	2.02%

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

我们可以按照与图表 7 类似的方式，分析我们组合的收益。信息集是 10.51，组合的风险是 4.77%，因此潜在的最大收益是 50.18%。

这个数字并不奇怪，但我们通常只能获取一小部分，获取潜在最大收益的 1/20 就是一个非常优秀的业绩了。

组合收益在三个源组合上的标准暴露正好等于组合 alpha 在三个源组合上的标准化暴露。事前和事后的分析相一致。正如我们以上表述，FAST 和 SLOW 信

号很成功，INT 信号表现较差。

对于 SLOW 信号，暴露是 0.697，已实现 IC（可见于图表 9 和图表 10）是 0.096。因此总的潜在收益中归因到 SLOW 信号的部分是：0.697*0.096=0.067。在本例中，总的潜在收益是 50.18%，因此我们将 0.067*50.18%=3.36%这些收益归因到 SLOW 信号。通过同样的方式，我们可以得到 FAST 和 INT 的归因收益，三种源信号对组合的净贡献是 4.75%。

图表 10、组合 P 的事后分析

Return Report			
portfolio	*P*		
OS	10.51		
risk_*P*	4.77%		
Source	FAST	INT.	SLOW
expo: psi<*P*,*j*>	0.631	0.606	0.697
risk<j>	3.01%	2.89%	3.33%
IC: rho<*j*,*R*>	0.087	-0.045	0.096
*OS**risk**IC*	2.76%	-1.37%	3.36%
source return	4.75%		
Residual			
expo: rho<*P*,e(*P*)>	0.356		
residual risk <Q>	1.70%		
IC: rho<e(*P*),*R*>	-0.117		
OS*risk**IC*	-2.09%		
Totals			
portfolio return	2.66%		
portfolio *IC*	0.053		

资料来源：The Journal of Portfolio Management，兴业证券经济与金融研究院整理

残差暴露 $\rho_{P,\epsilon(P)}$ =0.356，这意味着残差的风险是 $\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}$ =4.77%*0.356=1.7%。残差组合已实现 IC $\rho_{\epsilon(P),R}$=-0.117，因此我们由于残差部分损失是 10.51*{1.7%}*{-0.117}=2.09%。至此，4.75%-2.09%=2.66%，收益分解完成。整个组合的已实现 IC 是 0.06。

4、其他关键点

这里其他关键点包括风险控制、时间序列上的 alpha 分解和与目前行业实践的关系。

4.1、风险控制

我们事后归因主要关注于元素的收益θ_n,这个收益是我们试图预测的。我们这部分集中于探讨风险。我们将资产 n 的超额收益分解为两部分 $X_p = \phi_P + \theta_P$，其中 θ_P 是我们希望获取的收益部分，ϕ_P 是我们希望规避的收益部分。

比如，对于一个行业中性策略，ϕ_p 就是行业的收益。附录说明了如何分解这两种收益。组合 P 的总收益如下：

$$X_p = \phi_P + \theta_P$$
$$\phi_P = \sum_{n=1,N} \phi_n \cdot p_m \quad (40)$$
$$\theta_P = \sum_{n=1,N} \theta_n \cdot p_m$$

每类风险源也都有一个源组合$\widehat{s_k}$，k=1,K，这里我们使用 K，是为了避免和 alpha 源组合混淆。还是继续我们刚刚的例子，K 可以是 K 个行业。我们可以将组合 P 的风险进行分解，方法与我们之前分解 alpha 相同。参考公式（23），我们有：

$$\mathrm{p}_n = \sum_{k=1,\mathrm{K}} s_{n,\mathrm{k}} \cdot \beta_{\mathrm{P,k}} + \epsilon_{\mathrm{P},n} \quad (41)$$

暴露$\widehat{\beta_{P,k}}$和残差$\widehat{\epsilon_P}$与我们对 alpha 源回归获得的暴露和残差显然是不相同的。

我们可以构架一个风险组合 F，其持仓$\mathbf{f} = \{\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_\mathrm{N}\}$，其持仓由以下公式决定：

$$\phi_n = \lambda \cdot \sum_{n=1,N} V_{n,m} \cdot f_m \quad (42)$$

根据目前的结果，希望进行控制的组合 P 收益是：

$$\phi_n = \lambda \cdot \omega_{F,P} = \lambda \cdot \omega_F \cdot \rho_{F,P} \cdot \omega_P \quad (43)$$

组合 F 的希望控制的收益与预测风险比例的最大值为 $\mathrm{CR}=\lambda \cdot \omega_\mathrm{F}$。因此，我们有：

$$\phi_p = \lambda \cdot \omega_{F,P} = CR \cdot \omega_P \cdot \{\sum_{k=1,\mathrm{K}} \psi_{\mathrm{P,k}} \cdot \rho_{\mathrm{k,F}} + \rho_{\mathrm{P},\epsilon(\mathrm{P})} \cdot \rho_{\epsilon(\mathrm{P}),\mathrm{F}}\} \quad (44)$$

为了与 alpha 源组合归因相区分，我给标准化暴露加了帽子符号。这里的方法与之前相同。

一些读者可能会希望我们通过一次归因，将 alpha 和风险分解都完成。这里我使用一句谚语：“the hunter who chases two rabbits won't catch either”（无法将这两件事情一起做好）。

4.2、时间序列上的 alpha 分解

我们前面分析的例子中，alpha 源要么是根据信号变化频率划分（fast slow intermediate），要么就是价值信号、成长信号或情绪信号。我们也可以在时间维度分析 alpha，比如通过 alpha 实现的时间。t 时刻 N 个资产的 alpha 为$\alpha_\mathrm{n}(t)$。在稍早时刻，这 N 个资产的 alpha 是$\alpha_\mathrm{n}(t-\tau), \tau = 1,2,\ldots,\mathrm{T}$。考虑组合$Q(t-\tau)$，其持仓为 $\mathbf{q}(t-\tau)$，我们构建这个组合是基于τ时刻前的所有信息。我们可以把当前的理想组合 $\mathbf{q}(t)$分解为：

- 初始权重 $\mathbf{q}(t-T)$，它代表我们基于 t-T 时刻前的所有信息，在现在持有的组合。
- T 增强部分 $\mathbf{u}(t-\tau)$，它代表仅基于$t-(\tau+1)$到$t-\tau$之间信息我们所构建的组合。

举个例子，如果我们考虑一年内的月频调仓，T=12。那么我们当前有 $\mathbf{q}(t-12)$

——在一年前基于$\alpha(t-12)$就可得的组合，以及 12 个信息增量。初始组合 $\mathbf{q}(t-12)$与 12 个信息增量 $\mathbf{u}(t-\tau),\tau=0,1,\ldots,11$可以作为信号源。他们可以 100%地解释当前理想组合 $\mathbf{q}(\mathrm{t})$。

事前分析可以将组合 q 的暴露归因到这些不同日期的信号源上。然后比较理想组合 q 与实际组合，我们可以获取实际组合在这些不同日期信号源上的暴露。

➢ X,Y 还是 Y,X

我们已经展示了如何对事前 alpha 和事后收益进行建模，使它们与协方差或者相关系数成比例。通过引入多个信息源，我们可以将相关系数分解为标准化暴露与相关系数的乘积之和。暴露是多元的未知变量，它们通过回归得到。转换系数和已实现 IC 是两个已知变量，他们代表两个组合之间的相关系数。通过这样的分析方法，我们可以把事前的相关系数解释为转换系数、事后的相关系数解释为已实现 IC，但暴露在事前和事后定义相同。

对于 alpha，我们可以得到：

$$\alpha_P = IR\cdot\omega_P\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{\mathrm{Q},j}\cdot\rho_{j,\mathrm{R}}+\rho_{\mathrm{P},\epsilon(\mathrm{P})}\cdot\rho_{\epsilon(\mathrm{P}),\mathrm{Q}}\} \tag{45}$$

公式（45）与公式（31）相对应。

对于事后收益，我们有：

$$\theta_P = OS\cdot\omega_P\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{\mathrm{R},j}\cdot\rho_{j,\mathrm{R}}+\rho_{\mathrm{P},\epsilon(\mathrm{P})}\cdot\rho_{\epsilon(\mathrm{P}),\mathrm{R}}\} \tag{46}$$

公式（46）与公式（39）相对应。

最有趣的比较是，当 P 是源组合之一时，比如他是S_ι,那么（45）和（46）式就可以写为：

$$\alpha_\iota = IR\cdot\omega_\iota\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{\mathrm{Q},j}\cdot\rho_{j,\iota}\}$$

和

$$\theta_\iota = OS\cdot\omega_\iota\cdot\{\sum_{j=1,J}\psi_{\mathrm{R},j}\cdot\rho_{j,\iota}\} \tag{47}$$

结合公式（31），我们可以得到更加简洁、合理的结果。组合S_ι的暴露和标准暴露有如下关系：如果$\mathrm{j}\neq\iota$,那么$\beta_{\iota,\mathrm{j}}=\psi_{\iota,j}=0$；如果 j=ι，$\beta_{\iota,\mathrm{j}}=\psi_{\iota,j}=1$。因此我们有：

$$\alpha_\iota = IR\cdot\omega_\iota\cdot\rho_{\iota,Q}$$

和

$$\theta_\iota = OS\cdot\omega_\iota\cdot\rho_{\iota,R} \tag{48}$$

他们取决于转换系数 $\rho_{\iota,\mathrm{Q}}$ 和已实现 IC $\rho_{\iota,R}$。

4.3、与目前行业实践的关系

目前广泛使用的事后分析系统是基于回归的。我们这部分从 K 个因子出发，这些因子包括行业因子和共同因子如市值、估值、流动性等。N 个资产我们有 N 行 K 列的矩阵，每个系数是$\mathrm{x}_{\mathrm{n,k}}$。我们通过广义最小二乘将收益与这些因子联系

起来。

$$\theta_n = \sum_{k=1,\mathrm{K}} x_{\mathrm{n,k}} \cdot f_k + u_n \tag{49}$$

估计的参数f_k通常叫做因子收益，它代表了某个组合的收益。

给定组合 P，其持仓是 $\mathbf{p}=\{p_1, p_2, \ldots, p_N\}$。我们计算组合 P 在因子 k 上的暴露：

$$x_{P,k} \equiv \sum_{n=1,\mathrm{N}} p_n \cdot x_{n,k} \tag{50}$$

组合 P 的收益可以表示为：

$$\theta_P = \sum_{k=1,\mathrm{K}} x_{\mathrm{p,k}} \cdot f_k + \sum_{n=1,\mathrm{N}} p_n \cdot u_n \tag{51}$$

我们把其中 $x_{\mathrm{p,k}} \cdot f_k$ 视为归因到因子 k 的部分，余下部分则为残差。

我们可以换一种角度来看这些方程，这样就可以将它们与前文的框架联系在一起。对于每个因子来说，我们可以通过解以下的方程来将源组合S_k与其持仓$s_{k,n}$联系起来：

$$x_{n,k} = \lambda \cdot \sum_{m=1,\mathrm{N}} V_{\mathrm{n,m}} \cdot s_{k,m} = \lambda \cdot \omega_{n,k} \tag{52}$$

我们可以将组合 P 的暴露写为：

$$x_{P,k} = \lambda \cdot \omega_{P,k} = \lambda \cdot \omega_k \cdot \rho_{k,P} \cdot \omega_P \tag{53}$$

因此因子暴露等于风险厌恶系数乘以源组合与组合 P 的协方差。如果我们用事后分析里的理想组合 R（公式（23）中）与源组合回归：

$$\mathrm{r}_n = \sum_{k=1,K} s_{n,k} \cdot \beta_{R,k} + \epsilon_R(n) \tag{54}$$

我们会发现（附录中有详细说明）：回归的系数$\beta_{R,k}$恰好等于通过（49）式计算的因子收益。因此

$$f_k = \beta_{R,k} = \frac{\omega_R}{\omega_k} \cdot \psi_{R,k} \tag{55}$$

其中$\psi_{R,k}$是经过风险水平调整后的标准暴露。因此，归因到因子 k 的收益可以写为：

$$\begin{aligned} x_{P,k} \cdot f_k &= x_{P,k} \cdot \beta_{R,k} \\ &= \lambda \cdot \omega_R \cdot \omega_P \cdot \psi_{R,k} \cdot \rho_{k,P} \\ &= \mathrm{OS} \cdot \omega_P \cdot \psi_{R,k} \cdot \rho_{k,P} \end{aligned} \tag{56}$$

其中 $\mathrm{OS} = \lambda \cdot \omega_R$是机会集。如果我们将其与公式（46）进行比较，我们可以看到之前我的分析方式是 X,Y 方法，这部分使用的则是 Y,X 方法。

➢ **另外的视角**

组合的残差部分风险是$\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}$。第 j 个源组合的风险乘以其暴露$\beta_{P,j}$为$\omega_j \cdot \beta_{P,j} = \omega_P \cdot \psi_{P,j}$。我们可以将这些乘积视为组合风险、组合 alpha、组合收益的风险配置。

$$\omega_P = 1 \cdot \{ \sum_{j=1,J} (\omega_P \cdot \psi_{P,j}) \cdot \rho_{j,P} + (\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}) \cdot \rho_{\epsilon(P),P} \}$$

$$\alpha_P = IR \cdot \{ \sum_{j=1,J} (\omega_P \cdot \psi_{P,j}) \cdot \rho_{j,Q} + (\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}) \cdot \rho_{\epsilon(P),Q} \} \tag{57}$$

$$\theta_P = OS \cdot \{ \sum_{j=1,J} (\omega_P \cdot \psi_{P,j}) \cdot \rho_{j,R} + (\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}) \cdot \rho_{\epsilon(P),R} \}$$

我们可以从上述的风险归因、alpha 归因、收益归因中看到每个源组合和残差部分的风险。每个归因都可以看做由以下三部分组成；

- 与组合独立的常数如 1，IR 或者 OS
- 风险部分：ω_P代表总体风险，$\omega_P \cdot \psi_{P,j}$是源组合 j 的风险，$\omega_P \cdot \rho_{P,\epsilon(P)}$是残差的风险。
- 相关系数部分：$\rho_{P,R}$，$\rho_{j,R}$，$\rho_{\epsilon(P),R}$分别是是组合 R 与组合 P，源组合 j，残差组合的相关系数。

5、结论

本文提出了一套灵活统一的、以组合为核心的归因框架，这套框架的核心是将相应的问题都转换为组合的形式，它可以使用协方差或者相关系数进行归因。我们说明了在无结构化模型时如何使用这套框架，还说明了在这种情况下如何区别可能的收益或风险来源。

使用这套框架可以进行事前分析，拆解组合的 alpha 和预测风险，同样可以进行事后分析，拆解组合的收益，方法完全相同。对于事前分析，起到关键作用的是转换系数——任意组合与理想组合的相关系数。对于事后分析，我们引入了事后理想组合的概念，起到关键作用的是已实现 IC——任意组合与事后理想组合的相关系数；事前分析的转换系数与事后分析的已实现 IC 的含义是对称的。

本文框架可以包括很多传统的方法：它们都是将收益（或 alpha）通过暴露的概念归因到某些源头上。区别是传统的方法暴露是可以直接获取的，结果（因子收益）是通过多元回归的方法得到的。但本文框架中，暴露是通过多元回归得到的，因子收益是可以直接获取的。

附录

➢ **组合回归**

把公式（23）表达为矩阵的形式：

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x}} + \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \qquad \text{(A-1)}$$

如果我们两边乘以$\boldsymbol{S}' \cdot \mathbf{V}$

$$\mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} = \{\mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}\} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{X}} + \mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \qquad \text{(A-2)}$$

残差组合与源组合不相关，因此$\mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{x}} = 0$，我们得到：

$$\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}\}^{-1} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{(A-3)}$$

残差组合的风险为：

$$U_Q - U_P = \frac{\lambda}{2} \cdot \omega_{B,B} \qquad \text{(A-4)}$$

任意组合 Y 与残差的协方差为：

$$\omega_{Y,\epsilon(X)} = \mathbf{y}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \cdot \rho_{Y,\epsilon(X)} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\epsilon(X)} \qquad \text{(A-5)}$$

因为$\mathbf{x}' \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{x}} = \mathbf{E}'_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{x}}$，因此我们可以得到：

$$\omega_X \cdot \rho_{X,\epsilon(X)} = \omega_{\epsilon(X)} \qquad \text{(A-6)}$$

➢ **公式（27）的衍生**

我们从公式（26）开始：

$$\omega_{X,Y} = \sum_{j=1,J} \beta_{X,j} \cdot \omega_{j,Y} + \omega_{\epsilon(X)} \cdot \rho_{\epsilon(X),Y} \cdot \omega_Y \qquad \text{(A-7)}$$

通过$\omega_{j,Y} = \omega_j \cdot \rho_{j,Y} \cdot \omega_Y$和$\omega_X \cdot \psi_{X,j} = \beta_{X,j} \cdot \omega_j$，公式（A-7）可以写作：

$$\omega_{X,Y} = \omega_X \cdot \{\sum_{j=1,J} \psi_{X,j} \cdot \rho_{j,Y}\} \cdot \omega_Y + \omega_{\epsilon(X)} \cdot \rho_{\epsilon(X),Y} \cdot \omega_Y \qquad \text{(A-8)}$$

此外,根据公式（A-6），我们有：

$$\omega_{X,Y} = \omega_X \cdot \{\sum_{j=1,J} \psi_{X,j} \cdot \rho_{j,Y} + \rho_{\epsilon(X),X} \cdot \rho_{\epsilon(X),Y}\} \cdot \omega_Y \qquad \text{(A-9)}$$

➢ **收益分析**

$\widehat{\boldsymbol{S}}$是 N*K 矩阵，每行代表一个我们想控制的风险源。**X** 代表超额收益，组合 Y 的持仓 **y** 由式子$\mathrm{X} = \lambda \cdot \mathrm{V} \cdot \mathrm{y}$决定，我们可以做以下回归：

$$\mathbf{y} = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\beta}_Y + \mathbf{E}_Y$$

给定我们想要控制的收益：$\boldsymbol{\phi} = \lambda \cdot \mathbf{V} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{Y}}$，我们想要预测的收益$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Y}}$。组合$\mathbf{f} = \widehat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{Y}}$ 和 $\mathbf{r} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{Y}}$ 是不相关的，$\boldsymbol{\theta}' \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{\phi} = 0$。

➢ **时间序列上 alpha 分解的例子**

对于每个时间$\tau = 0, \mathrm{T}$，通过解方程$\boldsymbol{\alpha}(t-\tau) = \lambda \cdot \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{q}(t-\tau)$。我们定义：

$$\gamma(t-\tau) = \frac{\mathbf{q}'(t-\tau) \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{q}(t-\tau-1)}{\mathbf{q}'(t-\tau-1) \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{q}(t-\tau-1)} \qquad \text{(A-10)}$$

增量组合为：

$$\mathbf{u}(t-\tau) = \mathbf{q}(t-\tau) - \gamma(t-\tau) \cdot \mathbf{q}(t-\tau-1) \qquad \text{(A-11)}$$

公式（A-9）保证了增量组合与原始组合不相关。

➢ **收益回归公式（49）和组合回归公式（54）**

我们从收益回归开始：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\theta} &= \mathbf{X}\cdot\mathbf{f}+\mathbf{u}\\ \mathbf{f} &= \{\mathbf{X}'\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{X}\}^{-1}\cdot\mathbf{X}'\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{\theta}\end{aligned} \tag{A-12}$$

我们将它与组合回归对比：

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{R}}+\mathbf{E}_{\mathbf{R}}\\ \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{R}} &= \{\mathbf{S}'\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}\}^{-1}\cdot\mathbf{S}'\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}\end{aligned} \tag{A-13}$$

通过$\boldsymbol{\theta}=\lambda\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}$和$\mathbf{X}=\lambda\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}$。我们可以得到：

$$\begin{aligned}\mathbf{X}'\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{X} &= \lambda^{2}\cdot\mathbf{S}'\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{S}\\ \mathbf{X}'\cdot\mathbf{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{\theta} &= \lambda^{2}\cdot\mathbf{S}'\cdot\mathbf{V}\cdot\mathbf{r}\end{aligned} \tag{A-14}$$

参考文献

【1】Clarke, Roger, Harinda de Silva, and Steven Thorley. "Performance Attribution and the Fundamental Law of Active Management." Working paper, February 2005

【2】——. "Portfolio Constraints and the Fundamental Law of Active Management." Financial Analysts Journal, September/October 2002, pp. 48-66.

【3】Fama, Eugene F., and Kenneth R. French. "Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds." Journal of Financial Economics Vol. 33, no. 1 (1993). pp. 3-56

【4】Fama, Eugene F., and James MacBeth. "Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests." Journal of Political Economy. May/June 1973, pp. 987-1008.

【5】Grinold, Richard. "Implementation Efficiency." Financial Analysts Journal, September/October 2005, pp. 52-6

【6】Grinold, Richard C , and Ronald N. Kahn. Active Portfolio Management, 2ed. New York: McGraw-Hill. 200

【7】Rosenberg, Barr, and Walt McKibben. "The Prediction of Systematic and Specific Risk in Common Stocks." Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 8, no. 2 (March 1973), pp. 317-333

风险提示：文献中的结果均由相应作者通过历史数据统计、建模和测算完成，在政策、市场环境发生变化时模型存在失效的风险。

分析师声明

本人具有中国证券业协会授予的证券投资咨询执业资格并注册为证券分析师，以勤勉的职业态度，独立、客观地出具本报告。本报告清晰准确地反映了本人的研究观点。本人不曾因，不因，也将不会因本报告中的具体推荐意见或观点而直接或间接收到任何形式的补偿。

投资评级说明

投资建议的评级标准	类别	评级	说明
报告中投资建议所涉及的评级分为股票评级和行业评级（另有说明的除外）。评级标准为报告发布日后的12个月内公司股价（或行业指数）相对同期相关证券市场代表性指数的涨跌幅。其中：A股市场以上证综指或深圳成指为基准，香港市场以恒生指数为基准；美国市场以标普500或纳斯达克综合指数为基准。	股票评级	买入	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅大于15%
		审慎增持	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅在5%～15%之间
		中性	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅在-5%～5%之间
		减持	相对同期相关证券市场代表性指数涨幅小于-5%
		无评级	由于我们无法获取必要的资料，或者公司面临无法预见结果的重大不确定性事件，或者其他原因，致使我们无法给出明确的投资评级
	行业评级	推荐	相对表现优于同期相关证券市场代表性指数
		中性	相对表现与同期相关证券市场代表性指数持平
		回避	相对表现弱于同期相关证券市场代表性指数

信息披露

本公司在知晓的范围内履行信息披露义务。客户可登录 www.xyzq.com.cn 内幕交易防控栏内查询静默期安排和关联公司持股情况。

使用本研究报告的风险提示及法律声明

兴业证券股份有限公司经中国证券监督管理委员会批准，已具备证券投资咨询业务资格。

本报告仅供兴业证券股份有限公司（以下简称“本公司”）的客户使用，本公司不会因接收人收到本报告而视其为客户。本报告中的信息、意见等均仅供客户参考，不构成所述证券买卖的出价或征价邀请或要约。该等信息、意见并未考虑到获取本报告人员的具体投资目的、财务状况以及特定需求，在任何时候均不构成对任何人的个人推荐。客户应当对本报告中的信息和意见进行独立评估，并应同时考量各自的投资目的、财务状况和特定需求，必要时就法律、商业、财务、税收等方面咨询专家的意见。对依据或者使用本报告所造成的一切后果，本公司及/或其关联人员均不承担任何法律责任。

本报告所载资料的来源被认为是可靠的，但本公司不保证其准确性或完整性，也不保证所包含的信息和建议不会发生任何变更。本公司并不对使用本报告所包含的材料产生的任何直接或间接损失或与此相关的其他任何损失承担任何责任。

本报告所载的资料、意见及推测仅反映本公司于发布本报告当日的判断，本报告所指的证券或投资标的的价格、价值及投资收入可升可跌，过往表现不应作为日后的表现依据；在不同时期，本公司可发出与本报告所载资料、意见及推测不一致的报告；本公司不保证本报告所含信息保持在最新状态。同时，本公司对本报告所含信息可在不发出通知的情形下做出修改，投资者应当自行关注相应的更新或修改。

除非另行说明，本报告中所引用的关于业绩的数据代表过往表现。过往的业绩表现亦不应作为日后回报的预示。我们不承诺也不保证，任何所预示的回报会得以实现。分析中所做的回报预测可能是基于相应的假设。任何假设的变化可能会显著地影响所预测的回报。

本公司的销售人员、交易人员以及其他专业人士可能会依据不同假设和标准、采用不同的分析方法而口头或书面发表与本报告意见及建议不一致的市场评论和/或交易观点。本公司没有将此意见及建议向报告所有接收者进行更新的义务。本公司的资产管理部门、自营部门以及其他投资业务部门可能独立做出与本报告中的意见或建议不一致的投资决策。

本报告并非针对或意图发送予或为任何就发送、发布、可得到或使用此报告而使兴业证券股份有限公司及其关联子公司等违反当地的法律或法规或可致使兴业证券股份有限公司受制于相关法律或法规的任何地区、国家或其他管辖区域的公民或居民，包括但不限于美国及美国公民（1934 年美国《证券交易所》第 15a-6 条例定义为本「主要美国机构投资者」除外）。

特别声明

在法律许可的情况下，兴业证券股份有限公司可能会利差本报告中提及公司所发行的证券头寸并进行交易，也可能为这些公司提供或争取提供投资银行业务服务。因此，投资者应当考虑到兴业证券股份有限公司及/或其相关人员可能存在影响本报告观点客观性的潜在利益冲突。投资者请勿将本报告视为投资或其他决定的唯一信赖依据。

兴业证券研究

上海	北京	深圳
地址：上海浦东新区长柳路36号兴业证券大厦15层	地址：北京西城区锦什坊街35号北楼601-605	地址：深圳市福田区皇岗路5001号深业上城T2座52楼
邮编：200135	邮编：100033	邮编：518035
邮箱：research@xyzq.com.cn	邮箱：research@xyzq.com.cn	邮箱：research@xyzq.com.cn