



Funções escalares de várias variáveis

Domínio, imagem e gráfico

Objetivos:

- Compreender a noção de função escalar de várias variáveis, domínio, imagem e gráfico;
- Calcular e esboçar os conjuntos domínio, imagem e gráfico;

Uma função real de n variáveis é uma função do tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada n -upla $(x_1, \dots, x_n) \in D$ um único número $w = f(x_1, \dots, x_n)$. O conjunto D é o domínio da função; a imagem da função é dada pelo conjunto

$$Im(f) = \{w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_n) \in D\} = f(D) \subset \mathbb{R}$$

e o conjunto

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1}; w = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é o gráfico da função.

Observações:

(I) Se $n = 1 \implies f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável.

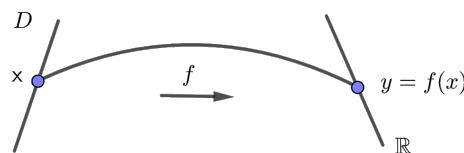


Figure 1: Domínio e imagem de uma função real de uma variável real

Temos:

- (i) D é o domínio da função
- (ii) $Im f = \{y = f(x) \in \mathbb{R}; x \in D\} \subset \mathbb{R}$

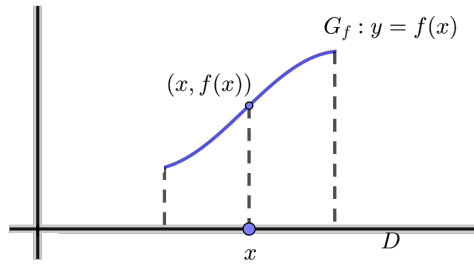


Figure 2: Gráfico de uma função real de uma variável real

$$(iii) \ G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

(II) Se $n = 2 \implies f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$, é uma função real de duas variáveis.

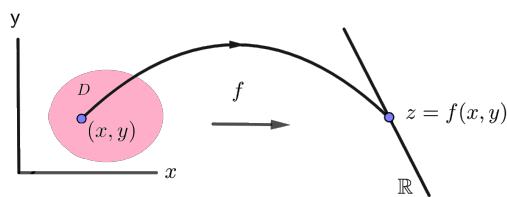


Figure 3: Domínio e imagem de uma função real de duas variáveis reais

Temos que:

(i) D =domínio da função

$$(ii) \ Im f = f(D) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$$

$$(iii) \ G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$$

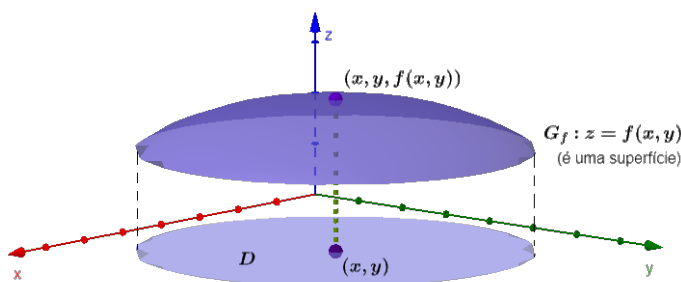


Figure 4: Gráfico de uma função real de duas variáveis reais

Atenção: Nem toda superfície do \mathbb{R}^3 é gráfico de alguma função $f(x, y)$. Com efeito, seja $S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ (esfera de raio 1 e centro $(0,0,1)$).

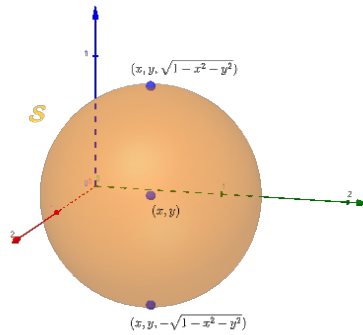


Figure 5: Superfície em \mathbb{R}^3 que não é gráfico de uma função

Dado (x, y) no interior do disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$, temos que a reta paralela ao eixo z , passando por (x, y) , intercepta S em dois pontos distintos. Logo, S não pode ser gráfico de uma função de x e y .

(III) Se $n = 3 \implies f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \mapsto w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ é uma função real de três variáveis.

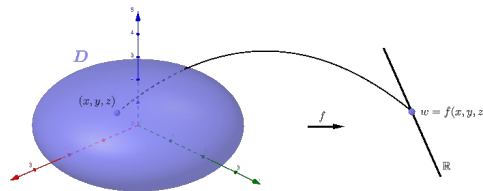


Figure 6: Domínio e imagem de uma função real de três variáveis reais

Temos que:

- (i) $D = \text{domínio da função}$
- (ii) $\text{Im}f = f(D) = \{w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}$
- (iii) $G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

Atenção: Como $G_f \subset \mathbb{R}^4$, é impossível desenhá-lo.

Exemplos

1. Função Constante: Seja $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Temos $D_f = \mathbb{R}^2$, $\text{Im}f = \{c\}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = c, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

2. Função polinomial: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule,

(a) $f(-1, 2)$ (b) $f(a, +b, a - b)$ (c) D_f (d) $\text{Im}f$ (e) G_f

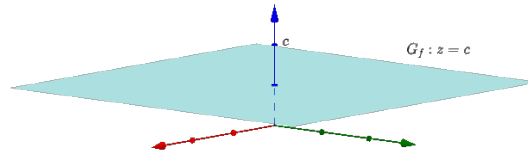


Figure 7: Gráfico da função constante

Solução

- (a) $f(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$
- (b) $f(a+b, a-b) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$
- (c) $D_f = \mathbb{R}^2$
- (d) $Im_f = [0, +\infty[$
- (e) $G_f : z = f(x, y) \implies G_f : z = x^2 + y^2$ (paraboloide circular)

Impondo $x = 0$, obtemos $z = x^2$, de forma que no plano yz a interseção do G_f é uma parábola. Se tomarmos $z = k$ ($k > 0$) obteremos $x^2 + y^2 = k$. Isto significa que os traços ou cortes horizontais são circunferências.

Assim, o esboço do G_f é:

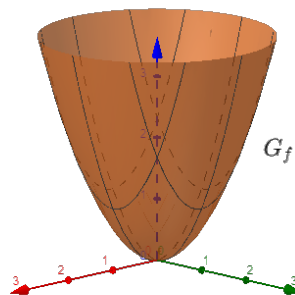


Figure 8: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. Seja $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$. Esboce o domínio da função.

Solução

A função f está bem definida se os radicandos $y-x$ e $1-y$ não forem negativos, isto é: $y-x \geq 0$ e $1-y \geq 0 \iff y \geq x$ e $y \leq 1$. Portanto, o domínio de f é dado por onde: $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1\}$.

Exercícios

- Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$. Determine:
 - (a) $f(1, 1)$
 - (b) $f(e, 1)$
 - (c) o domínio de f
 - (d) a imagem de f

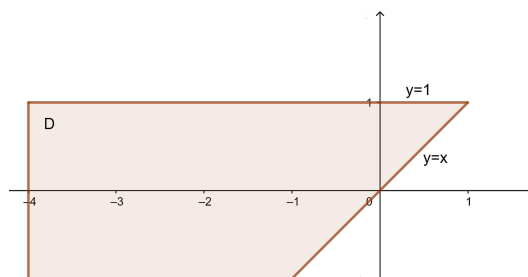


Figure 9: Domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$

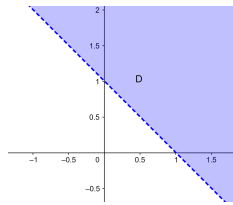
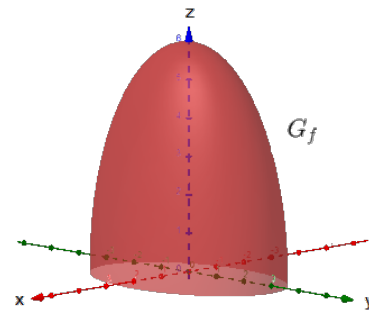
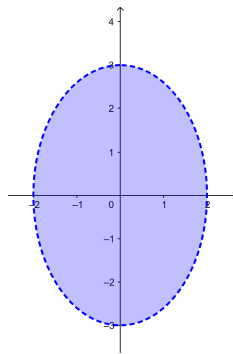
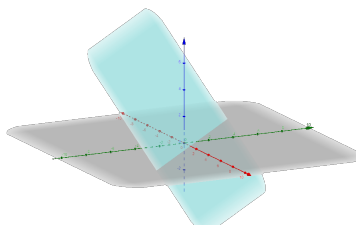
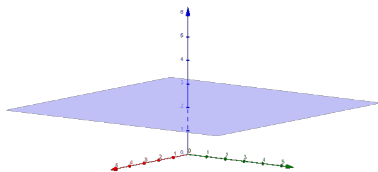
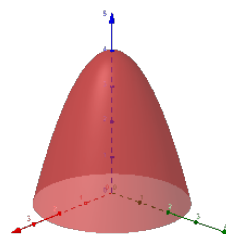
2. Seja $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$. Determine:
 - (a) o domínio de f
 - (b) a imagem de f
 - (c) o gráfico de f .
3. Seja $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}}$. Determine:
 - (a) $f(1, 3, -4)$
 - (b) o domínio de f
 - (c) a imagem de f .
4. Determine e faça o esboço do domínio das função
 - (a) $f(x, y) = \frac{5 \ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$
 - (b) $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$
5. Esboce o gráfico da função
 - (a) $f(x, y) = 2$
 - (b) $f(x, y) = 1 - x - y$
 - (c) $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
 - (d) $f(x, y) = 1 - x^2$
 - (e) $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$
 - (f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
 - (g) $f(x, y) = y^2 - x^2$
 - (h) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Respostas

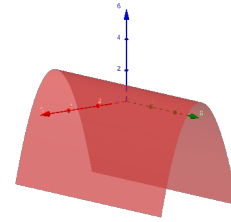
1.

(a) 0

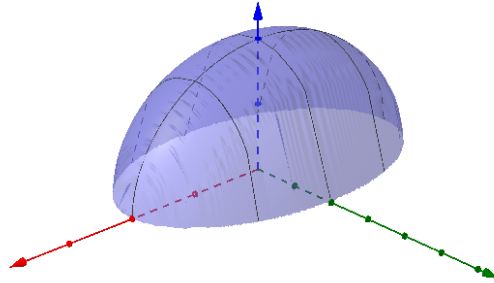
(b) 1

(c) $\{(x, y); x + y > 1\}$ (d) \mathbb{R} 2. (a) $\{(x, y); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ (c) $G_f : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z \geq 0$ (b) $[0, 6]$ 3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$ (c) $]0, +\infty[$ 4. (a) $(x, y); x^2 + y^2 < 4ey > -x$ (b) $(x, y, z); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} < 1$ 5. (a) $G_f : z = 2$ (plano horizontal)(b) $x + y + z = 1$ (plano)(c) $z = 4 - x^2 - y^2$ (paraboloide)

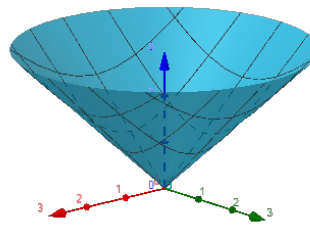
(d) $G_f : z = 1 - x^2$ (cilindro parabólico)



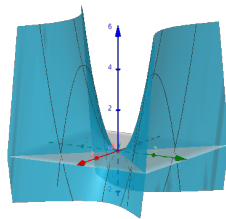
(e) $G_f : \frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1, z \geq 0$



(f) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (parte superior do cone)



(g) $G_f : z = y^2 - x^2$ (paraboloide hiperbólico)



(h) $G_f : z = \frac{1}{x^2 + y^2}$

