Derivadas Parciais de Ordem Superior Aproximação não linear

Objetivos:

- cálculo de derivadas parciais de ordem superior;
- teorema de Schwarz;
- polinômio de Taylor de ordem 2.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável. Então existem as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sejam diferenciáveis em D. Então, temos as funções derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Supondo as funções $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ diferenciáveis em D, temos as funções derivadas parciais de 3 ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

E assim por diante.

Observação: Caso as parciais $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$ existam, essa seria sua definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{k}$$

Definição: Dizemos que f é de classe C^k em D se f tem derivadas parciais de ordem k contínuas em D.

Teorema de Schwarz Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Se f for de classe C^2 em D, então as derivadas parciais mistas são iguais em D:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$. O polinômio:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 1 de f perto de (a, b).

Sabemos que $\Delta f \simeq df$ quando $(x, y) \simeq (a, b)$. Logo,

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Se $(x, y) \simeq (a, b)$
Donde,

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Portanto, $f(x, y) \simeq P_1(x, y)$, se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Polinômio de Taylor de Ordem 2

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a, b) \in D$. O polinômio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2\right]$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 2 de f perto de (a, b).

Mostra-se que $f(x, y) \simeq P_2(x, y)$ se $(x, y) \simeq (a, b)$.

Observação

(I) $P_1(x,y) = L(x,y)$, a função linearizada de f perto de (a,b).

(II) $P_2(x,y)$ também serve para aproximar os valores da função f em pontos próximos a (a,b). O erro de aproximação de $P_2(x,y)$ é menor do que o erro de aproximação pela linearizada.

(III) É aconselhável aproximar por $P_2(x,y)$ quando $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$. Exemplo: $f(x,y) = \cos(x+y)$ em $(0,0)$.

Exemplos

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2 ordem de $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.

   Solução

   Temos
   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

   Logo,
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y \cdot 2y}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y \cdot 2x}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

2. Seja $u = f(x-at) + g(x+at)$, onde f e g são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2º ordem. Verifique que
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   Esta equação é conhecida como a equação de onda.

   Solução

   Derivando u em relação a x, temos:
   $$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-at)}_{1} + g'(x+at)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x+at)}_{1}$$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial x} = f'(x-at) + g'(x+at)$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}(x-at)}_{1} + g''(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial x}(x+at)}_{1}$

donde, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-at) + g''(x+at) \qquad (1)$

Derivando u em relação a t, temos:

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = f'(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a} + g'(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)}_{a}$

donde $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -af'(x-at) + ag'(x+at)$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(x-at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x-at)}_{-a} + ag''(x+at)\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)}_{a}$, donde

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x-at) + a^2 g''(x+at)\dfrac{\partial}{\partial t}(x+at)$, ou

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(f''(x-at) + g''(x+at)\right) \qquad (2)$

De (1) e (2), vemos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, como queríamos verificar.

3. Seja $w(x,t) = (a\,\textbf{cos}\,(cx) + b\,\textbf{sen}\,(cx))e^{-kc^2t}$, onde a, b e c são constantes. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação do calor.

Solução

Derivando w em relação a t, temos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2t}(a\,\textbf{cos}(cx) + b\,\textbf{sen}(cx))$$

Derivando w em relação a x, temos:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = e^{kc^2t}(-ac\,\textbf{sen}(cx) + bc\,\textbf{cos}(cx))$$

Derivando de novo em relação a x, temos:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = e^{-k^2t}(-ac^2\,\textbf{cos}(cx) - bc^2\,\textbf{sen}\,(cx)) = -c^2 e^{-kc^2t}(a\,\textbf{cos}(cx) + b\,\textbf{sen}\,(cx))$$

Portanto,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k\left[-c^2 e^{-kc^2 t}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx))\right] = k\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

.

4. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, duas funções de classe C^2 e tais que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Prove que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ e $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$

Esta equação é conhecida como equação de Laplace.

Solução

Derivando $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ em relação a x; e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

donde, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Como g é de classe c^2 então, pelo teorema de Schwarz, temos $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$.

Logo, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$

Derivando, $\dfrac{\partial g}{\partial x} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em relação, a x e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ em relação a y, temos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial za} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Logo, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Como f é de classe c^2, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\cdot$. Assim, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$

5. Mostre que a seguinte função é solução da equação do calor, para a,b e c constantes.

$$w(x,t) = (\alpha\,\mathsf{cos}(cx) + \beta\,\mathsf{sen}(cx))e^{-ke^2 t}$$

Solução

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2 t}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx))$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = e^{-ec^2 t}(-ac\,\mathsf{sen}(cx) + bc\,\mathsf{cos}(cx))$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = e^{-k^2 t}\left(-ac^2\,\mathsf{cos}(cx) - bc^2\,\mathsf{sen}(cx)\right) =$$

$$= -c^2 e^{-kct}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx))$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k\left[-c^2 e^{-kct}(a\,\mathsf{cos}(cx) + b\,\mathsf{sen}(cx)]\right] = k\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

Solução

6. Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Determine $P_1(x, y)$, o polinômio de Taylor de ordem 1, de f em volta de $(1, 1)$.

   (b) Utilizando $P_1(x, y)$, calcule um valor aproximado para $f(x, y)$, sendo $x = 1,001$ e $y = 0,99$.

   Solução

   (a) Temos $P_1(x, y) = f(1, 1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$

   Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 4$, resulta $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7$.

   Então, $P_1(x, y) = 5 + 1(x - 1) + 7(y - 1)$, ou seja, $P_1(x, y) = x + 7y - 3$.

   (b) Como $x = 1.001 \simeq 1$ e $y = 0.99 \simeq 1$, então
   $f(1.001, 0.99) \simeq P_1(1.001, 0.99) = 1.001 + 7\cdot(0.99) - 3 = 1,001 + 6.93 - 3 = 4.931$.

7. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x, y) = x\,\mathsf{sen}\,y$, ao redor do ponto $(0, 0)$.

   Solução

   Temos

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2\right].$$

   Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \mathsf{sen}\,y,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x\,\mathsf{cos}\,y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \mathsf{cos}\,y,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x\,\mathsf{sen}\,y$$

então, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$.

Assim, $P_2(x,y) = 0 + 0.x + 0.y + \frac{1}{2}\left[0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0.y^2\right]$

ou seja, $P_2(x,y) = xy$

8. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x,y) = \operatorname{sen} x$ na origem para obter uma aproximado de $f(0.1, 0.1)$.

   Solução

   Como $(0.1, 0.1) \simeq (0,0)$, então

$$f(0.1, 0.1) \simeq P_1(0.1, 0.1) = (0,1)(0,1)$$

   ou seja,

$$f(0.1, 0.1) \simeq 0.01$$

Exercícios

1. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y) = x^3y^2 + xy^4$.

2. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y) = xye^{xy^2}$.

3. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função $f(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(yz)$.

4. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da seguinte função no ponto $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se é de classe C^2 e satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   Mostre que a seguinte função é harmônica

$$k(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x$$

6. Use o polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ no ponto $(1,1)$ para obter uma aproximação de $f(1.1, 0.9)$.

7. Determine $P_2(x,y)$ de $f(x,y) = \ln(1 + x + 2y)$ ao redor de $(0,0)$.

8. Usando o polinômio de Taylor de 2 ordem para alguma função conveniente, dê o valor aproximado de $(0.95)^{2.01}$ (considere $f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$)

Respostas

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 4y^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 12xy^2$.

2. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{y^2(1+2y^2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{y^2}(3 + 2y^2)$.

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\,\mathsf{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xz\,\mathsf{cos}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2xy\,\mathsf{cos}\,(yz)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2z^2\,\mathsf{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -x^2yz\,\mathsf{sen}\,(yz)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2y^2\,\mathsf{sen}\,(yz)$.

4. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

5. sem resposta

6. 0.95

7. $x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$

8. 0.90225