

Funções escalares de várias variáveis

Diferenciabilidade. Plano tangente.

Objetivos:

- diferenciabilidade de uma função de duas ou três variáveis;
- funções de classe C^1 ; condição suficiente para uma função ser diferenciável;
- equações cartesianas do plano tangente ao gráfico da função em um ponto;
- equações paramétricas da reta normal ao gráfico da função em um ponto;

Diferenciabilidade: Lembrando o conceito de diferenciabilidade em funções de uma variável.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto no domínio. Dizemos que f é diferenciável em a se o seguinte limite existir

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Temos, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Onde,

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

Essa definição sugere a seguinte definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Definição 1: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$. Dizemos que f é diferenciável em (a, b) se existirem $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

onde

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Definição 2: Dizemos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $A \subset D$ se for

diferenciável em todos os pontos $(a, b) \in A$. Em particular, dizemos que f é diferenciável se for diferenciável no domínio aberto D .

Exemplo: Mostre que $f(x, y) = xy$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

Com efeito, seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, temos $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = b$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = a$. Portanto,

$$\begin{aligned}\varepsilon(h, k) &= f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \\ &= (a + h)(b + k) - ab - bh - ak = ab + ak + bh + hk - ab - bh - ak = hk\end{aligned}$$

Donde

$$\frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = h \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Temos

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} h = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\sqrt{|k|^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2 + k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{h^2 + k^2}}$$

Então, pelo teorema do anulamento, temos $\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$. Portanto, $f(x, y) = xy$ é diferenciável em $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Como (a, b) é arbitrário, segue que f é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

Teorema 1: Se f é diferenciável em $(a, b) \Rightarrow f$, então f é contínua em (a, b) .

Teorema 2: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a, b) \in D$. Se existirem $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em um aberto contendo (a, b) e forem contínuas em (a, b) , então f é diferenciável (a, b) .

Definição 2: Dizemos que f é de classe C^1 no aberto $A \subset D$ se as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em todos os pontos $(a, b) \in A$.

Observações:

1. O limite da Definição 1 é equivalente a

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

e a

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (a, b) , então f não é diferenciável em (a, b) .

3. Se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ e $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$ ou se $\nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}$, então f não é diferenciável em (a, b) .
4. Em particular, se para algum caminho C_1 , $\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}$ for diferente de zero ou não existir, então f não é diferenciável em (a, b) .
5. f não é contínua em $(a, b) \Rightarrow f$ não é diferenciável em (a, b) .
6. Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, for de classe C^1 em D , então f é diferenciável (em todo o domínio D).

Plano tangente e Reta normal: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e diferenciável em $(a, b) \in D$.

O plano de equação

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é denominado plano tangente ao G_f , gráfico de f , no ponto $(a, b, f(a, b))$.

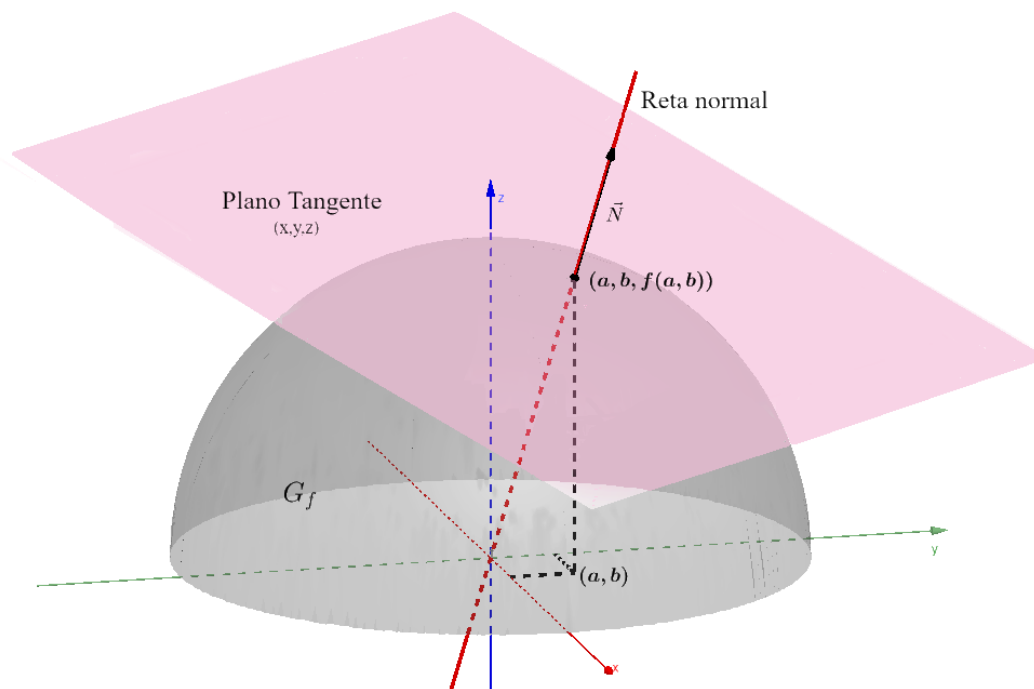


Figure 1: Plano tangente a G_f em $(a, b, f(a, b))$

Da equação do plano temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - a) - (z - f(a, b)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)}_{\vec{N}} \cdot \underbrace{(x - a, y - b, z - f(a, b))}_{\text{vetor do plano tangente}} = 0$$

Logo, $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A reta que passa por $(a, b, f(a, b))$ e é paralela ao vetor \vec{N} é dita reta normal ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. A equação paramétrica da reta normal é:

$$(x, y, z) - (a, b, f(a, b)) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. f é diferenciável em $(0, 0)$?

Solução

$$\text{Temos } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} \text{ não existe.}$$

Logo, pelo item 1 das Observações, concluímos que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

2. Mostre que a recíproca do teorema 1 é falsa.

Solução

Considere a função $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$; $f(x, y) = 0$, $(x, y) = (0, 0)$.

Temos $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2} = y \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2}$, onde $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} y = 0$ e $\left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$, donde $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$ é limitada.

Logo, pelo corolário do teorema do confronto, segue que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Portanto, f é contínua em $(0, 0)$.

Ora, na aula de Derivadas Parciais, exercício 5, vimos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 1$.

Logo,

$$\frac{\varepsilon(h_1 k)}{\|(h_1 k)\|} = \frac{f(h_1 k) - f(0, 0) - 0 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{k^3}{h^2 + k^2} - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{-h^2 k}{(h^2 + k^2) \sqrt{h^2 + k^2}} = g(h, k).$$

Consideremos o conjunto $C_1 : h = 0, k \neq 0$. Então, $g(h, k) = g(0, k) = 0$ em C_1 , donde $\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} g(h, k) = 0$.

Consideremos o conjunto $C_2 : k = h, h \neq 0$.

Então, $g(h, k) = g(h, h) = \frac{-h^3}{2h^2\sqrt{2}h^2} = \frac{-h}{2\sqrt{2}|h|}$, donde $\nexists \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_2}} g(h, k)$.

Portanto, $\nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|}$ e, assim f não é diferenciável em $(0, 0)$.

3. $f(x, y) = 3x^2y - 2xy^2 - 5xy + 4x - 2y + 1$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 , pois $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 2y^2 - 5y + 4$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4xy - 5x - 2$ são funções contínuas em \mathbb{R}^2 .
4. A função $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 , pois $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \sin(x^2 + y^2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(x^2 + y^2)$ são contínuas em \mathbb{R}^2 .
5. A função $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = 0$, $(x, y) = (0, 0)$ é diferenciável em $(0, 0)$?

Solução

Seja $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $C_1 : y = 0, x \neq 0$. Temos $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ em C_1 . Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ao longo de C_1 .

Seja $C_2 : x = 0, y \neq 0$. Temos $f(x, y) = f(0, y) = 0$ em C_2 . Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ ao longo de C_2 . Seja $C_3 : y = x, x \neq 0$. Temos $f(x, y) = f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ em C_3 . Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$ ao longo de C_3 . Como os limites não coincidem, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

Portanto f não é contínua em $(0, 0)$. Logo, pelo teorema 1, segue que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

6. Mostre que a função $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

Solução

No exercício 7, da aula de Derivadas Parciais, temos onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

As funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(x, y) \neq (0, 0)$, pois são funções racionais. Em $(x, y) = (0, 0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2x \cdot \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} + 2x \cdot \frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

onde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x = 0$, e as funções $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$ e $\frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ são limitadas por 1.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} = -2y \cdot \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

onde $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (-2y) = 0$ e a função $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$ é limitada por 1.

Assim, pelo teorema do anulamento, temos $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em \mathbb{R}^2 e pelo teorema 2, concluímos que f é diferenciável (em \mathbb{R}^2).

7. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = 2x^2y$ no ponto $(1, 1, f(1, 1))$.

Solução:

Equação do plano tangente:

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

onde

$$\begin{cases} f(1, 1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \end{cases}$$

Logo, a equação do plano tangente é:

$$z - 2 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \text{ ou } 4x + 2y - z = 4$$

Equação da reta normal:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(4, 2, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

8. Determine o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = xy$.

Solução

Seja $(a, b) \in D_f = \mathbb{R}^2$. A equação do plano tangente ao G_f no ponto $(a, b, f(a, b)) = (a, b, ab)$ é :

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

donde $z = ab + b(x - a) + a(y - b)$ ou $z = bx + ay - ab$.

Como $(1, 1, 2)$ e $(-1, 1, 1)$ estão neste plano, então

$$\begin{cases} 2 = b + a - ab \\ 1 = -b + a - ab \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Substituindo $b = \frac{1}{2}$ em (1), temos $2 = \frac{1}{2} + a - \frac{a}{2}$, donde $a = 3$. Assim, a equação do plano tangente é:

$$z = \frac{1}{2}x + 3y - \frac{3}{2} \text{ ou } x + 6y - 2z = 3$$

9. Seja $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0, (x, y) = (0, 0)$.

- (a) Calcule $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$.
- (b) f é diferenciável em $(0, 0)$?
- (c) f é contínua em $(0, 0)$.

Solução

$$\begin{aligned} \text{(a) Temos } f_x(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, f_y(0, 0) = \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

$$\text{(b) Temos } \varepsilon(h, k) = f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k = \frac{h^4 k}{h^2 + k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{h^4 k}{h^2 + k^2}.$$

Donde,

$$\frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{\frac{h^4 k}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h^4 k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} = h^2 \cdot \frac{h^2}{h^2 + k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

onde,

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} = 0, \left| \frac{h^2}{h^2 + k^2} \right| = \frac{h^2}{h^2 + k^2} \leq \frac{h^2 + k^2}{h^2 + k^2} = 1, \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{|k|^2}{h^2 + k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2 + k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{h^2 + k^2}} = 1.$$

Logo, pelo teorema do anulamento, segue que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

portanto, f é diferenciável em $(0,0)$.

(c) Se f é diferenciável em $(0,0)$, então f é contínua em $(0,0)$.

10. Considere a superfície S de equação $z = 2x^2 + 2y^2$.

(a) Determine o ponto $P_0 \in S$, tal que o plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = (0, 1, -\frac{1}{6})$.

(b) Escreva a equação do plano tangente referido no item (a).

Solução

(a) a equação do plano tangente a S em $P_0 = (a, b, z(a, b)) = (a, b, 2a^2 + 2b^2)$ é:

$$z = z(a, b) + z_x(a, b)(x - a) + z_y(a, b)(y - b)$$

onde,

$$z_x(a, b) = 4x|_{(a,b)} = 4a \quad \text{e} \quad z_y(a, b) = 4y|_{(a,b)} = 4b$$

Temos então,

$$z = 2a^2 + 2b^2 + 4ax - 4a^2 + 4by - 4b^2$$

ou seja,

$$4ax + 4by - z = 2a^2 + 2b^2$$

Daí, concluímos que $(4a, 4b, -1)$ é um vetor ortogonal ao plano tangente a S em P_0 . Como queremos que o plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = (0, 1, -\frac{1}{6})$, então

$$(4a, 4b, -1) // \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

ou seja, $(4a, 4b, -1) = \lambda \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Logo, $4a = 0, 4b = \lambda, -1 = -\frac{\lambda}{6}$. Donde, $a = 0, \lambda = 6$ e $b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Então, o ponto P_0 é dado por $P_0 = (0, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}) = (0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})$.

(b) A equação do plano tangente é:

$$6y - z = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad 12y - 2z - 9 = 0$$

Exercícios

1. Seja $f(x, y) = \frac{3x^5}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$.
 - (a) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
 - (b) f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?
2. Verifique se a função $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cos y$ é diferenciável em $(0, 0)$.
3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$ no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.
4. Encontre o ponto onde o plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2y^2 + 2(x - y)$ é horizontal.

Respostas

1. (a) 0; 0
(b) É diferenciável em $(0, 0)$
2. f não é diferenciável em $(0, 0)$, pois não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$
3. $z = 9x - 8y$; $(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $(-1, 1, -3)$