Curvas de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de curvas de nível e sua relação com o domínio, imagem e gráfico da função;
- Calcular e identificar a curva de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar curvas de nível; Mapa de contorno.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$

Seja $k \in Imf$, o conjunto $C_k = \{(x, y) \in D; \quad f(x, y) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$ é dito curva de nível de f no nível k.

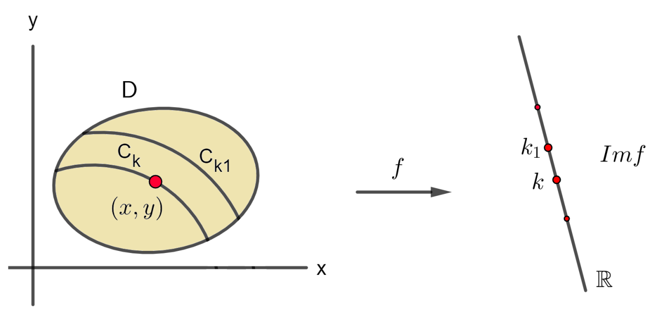


Figure 1: Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função

Observe que a curva $f(C_k)$ (imagem da curva de nível C_k pela função $f(x, y)$) é a curva interseção do gráfico da função f com o plano $z = k$.

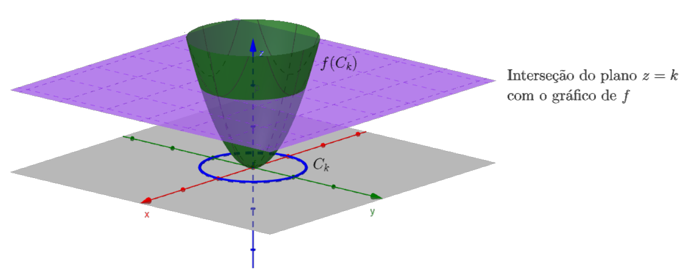


Figure 2: Relação da curva de nível com o gráfico da função

Observações:

(I) $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2, \quad f(C_k) \subset G_f \subset \mathbb{R}^3$

(II) Se $f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y), então C_k é uma isoterma (pontos de mesma temperatura)

(III) Se f é energia potencial, então C_k é uma curva equipotencial.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^2$

   (b) $Imf =]-\infty, 1]$

   (c) $G_f : z = 1 - x^2 - y^2$. Vamos utilizar traços para esboçar G_f. Impondo $x = 0$, obtemos $z = 1 - y^2$, de modo que a interseção do G_f com plano yz $(x = 0)$ é uma parábola. Impondo $z = 0$, obtemos o traço $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a uma circunferência no plano xy. Assim, temos a forma da superfície que é chamada de paraboloide.

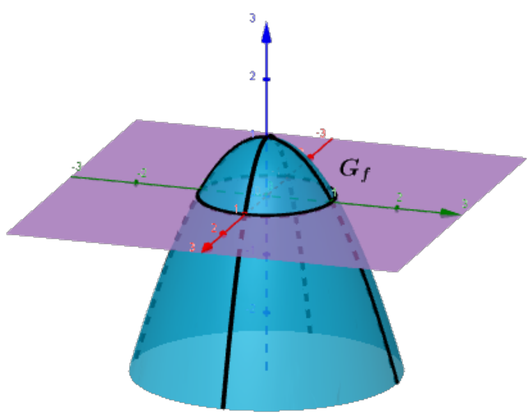


Figure 3: Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

   (d) Seja $k \in Imf =]-\infty, 1]$. Então, a curva de nível C_k é dada por

$$C_k : 1 - x^2 - y^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 + y^2 = 1 - k$$

   Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0, y = 0$. Logo, $C_1 = \{(0, 0)\}$. Para $k < 1$, donde $1 - k > 0$, temos $C_k : x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - k})^2$. Assim, as curvas de nível (k<1) são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1 - k}$.

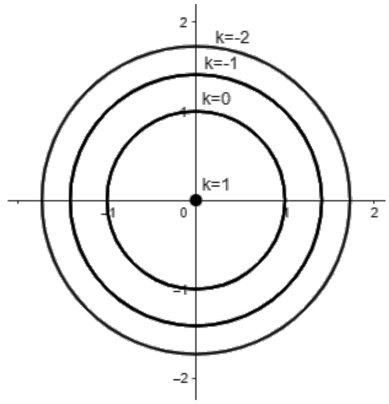


Figure 4: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

2. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

   Solução

   (a) $D_f : 1 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \Longrightarrow D_f : x^2 + y^2 \leqslant 1$ (disco de centro em $(0, 0)$ e raio 1)

   (b) $Imf = [0, 1]$

   (c) $G_f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z^2 = 1 - x^2 - y^2, z \geqslant 0 \Longrightarrow G_f : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geqslant 0$ (hemisfério superior de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1)

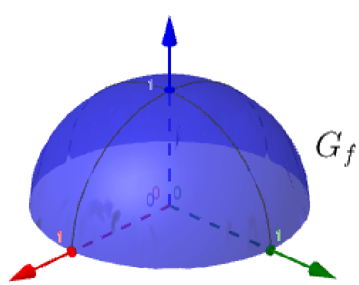


Figure 5: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

   (d) Seja $k \in Imf = [0, 1]$. A curva de nível correspondente a $z = k$ é

$$C_k : f(x, y) = k \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

   Para $k = 0$, temos $C_0 : x^2 + y^2 = 1$.
   Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0$, então $C_1 = \{(0, 0)\}$.

Para k, tal que $0 < k < 1$, temos circunferência concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1-k^2}$.

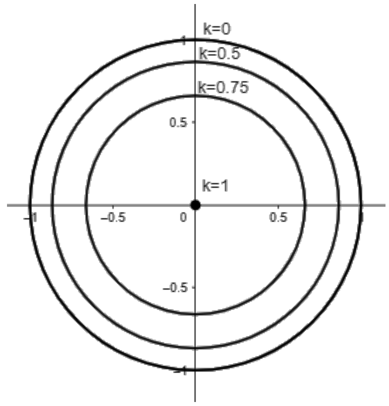


Figure 6: Curvas de nível da função $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

Observação: $f(x,y)=-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \Rightarrow G_f : z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. Portanto, $G_f : x^2+y^2+z^2=a^2, z \leqslant 0$ (hemisfério inferior de centro na origem e raio 1).

3. Seja $z=f(x,y)=1-x^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) G_f

   (d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f=\mathbb{R}^2$

(b) $Imf =]-\infty, 1]$

(c) $G_f : z=1-x^2$. Observe que a equação do gráfico, $z=1-x^2$, não envolve a variável y. Portanto, qualquer plano vertical $y=k$ (paralelo ao plano xz) intercepta o G_f segundo uma parábola de equação $z=1-x^2$. Assim, G_f é obtido tomando a parábola $z=1-x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y. A superfície é dita cilindro parabólico.

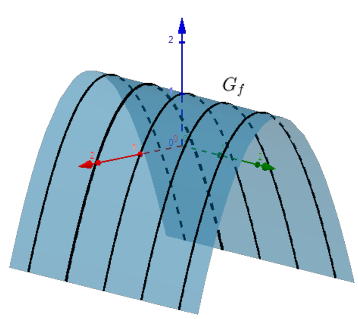


Figure 7: Gráfico da função $f(x,y)=1-x^2$

(d) Seja $k \in Imf =]-\infty, 1]$. A curva de nível correspondente é

$$C_k : 1 - x^2 = k \Longrightarrow C_k : x^2 = 1 - k > 0 \Longrightarrow C_k : x = \pm\sqrt{1-k}$$

Se $k = 1$, temos $C_1 : x = 0$ (eixo y);
Se $k < 1$, temos $C_k =$ reta $x = \sqrt{1-k}$ ou reta $x = -\sqrt{1-k}$

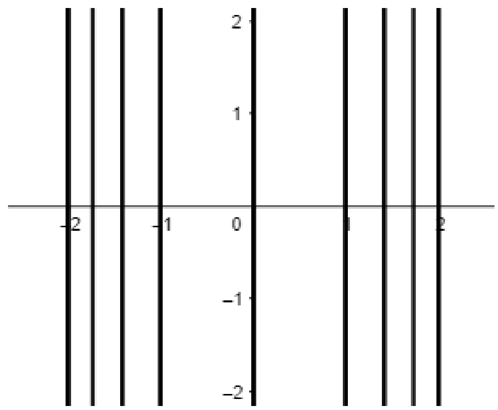


Figure 8: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2$

Observação: $f(x, y) = x^2, g(x, y) = a^2 - y^2 \Longrightarrow$ G$_f$ e G_g são cilindros parabólicos.

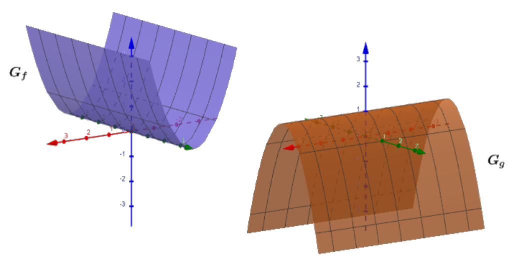


Figure 9: Cilindros parabólicos

4. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine:

   (a) D_f
   (b) Imf
   (c) G_f
   (d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$
(b) $Imf = [0, +\infty[$

(c) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fazendo $x = 0$, temos $z =\mid y \mid$, que é a curva interseção do G_f com plano yz. Fazendo $z = c$, $c > 0)$, temos $x^2 + y^2 = c^2$, de modo que a interseção do G_f com o plano horizontal $z = c$ é uma circunferência. Assim, temos que G_f é a parte superior do cone.

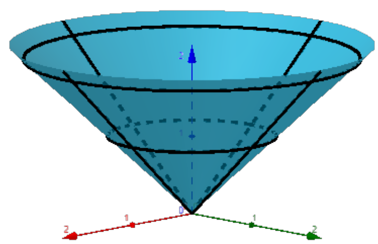


Figure 10: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(d) Seja $k \in Imf = [0, +\infty[$. Então, a curva de nível correspondente é dada por $C_k : \sqrt{x^2 + y^2} = k$ ou $x^2 + y^2 = k^2$.
Se $k = 0$, temos $C_0 = \{(0, 0)\}$.
Se $k > 0$ temos circunferências concêntricas na origem e raio k.

Observações:

(i) Os gráficos de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$,$f(x, y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ são partes de cones circulares.

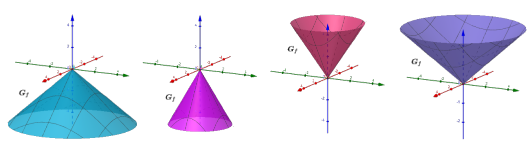


Figure 11: Cones circulares

(ii) O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}, a > 0, b > 0, a \neq b \Longrightarrow G_f$ é a parte superior do cone elíptico.

5. Seja, $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine:

(a) D_f

(b) Imf

(c) G_f

(d) curvas de nível C_k.

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2$

(b) $Imf = \mathbb{R}^2$

(c) $G_f : z = y^2 - x^2$. Fazendo $x = 0$, o traço no plano yz é a parábola $z = y^2$ com concavidade para cima. Os traços verticais $y = k$ são parábolas $z = k^2 - x^2$ com concavidade para baixo. Os traços horizontais $z = k, \quad k > 0$, são hipérboles $y^2 - x^2 = k$ e os tracos horizontais $z = -k, k > 0$, são hipérboles $x^2 - y^2 = k_0$. Assim, temos o esboço do G_f, dito paraboloide hiperbólico (que tem a forma de uma sela).

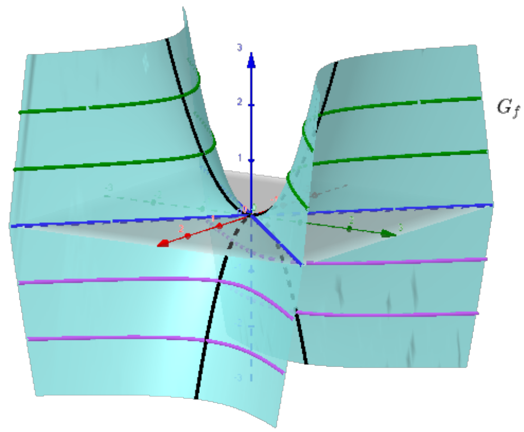


Figure 12: Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

(d) Seja $k \in Imf = \mathbb{R}$. A curva de nível correspondente é dada por

$$C_k : y^2 - x^2 = k$$

Se $k > 0$, temos hipérboles com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$.
Se $k = 0$, temos duas retas pela origem, $y = x$ e $y = -x$.
Se $k < 0$, temos hipérboles com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$.

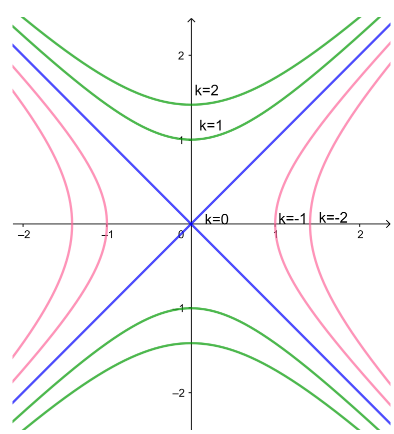


Figure 13: Curvas de nível da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

6. Seja, $z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Determine:

(a) A curva de nível que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$.

(b) A reta tangente à curva de nível do item (a) no ponto $(1, \sqrt{2})$. Identifique o vetor velocidade.

(c) Esboce em um único gráfico a curva, a reta tangente e a direção do vetor velocidade.

Solução

(a) Como $f(0, \sqrt{3}) = -1$, então a curva de nível é $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} = -1$, isto é, $C_{-1} : x^2 + y^2 = 3$.

(b) Observe que $f(1, \sqrt{2}) = -1$. portanto $(1, \sqrt{2}) \in C_{-1}$ e faz sentido calcular a reta tangente a C_{-1} nesse ponto. Caso contrário não existiria.

Uma parametrização de C_{-1} é $\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = \sqrt{3}\,\text{sen}\, t \end{cases}$, $\forall t \in [0, 2\pi]$.

Portanto, a equação paramétrica da reta seria $\gamma(s_0) + \gamma'(s_0)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, onde s_0 é tal que $\gamma(s_0) = (1, \sqrt{2})$.

Calculando s_0 $\begin{cases} \sqrt{3}\cos s_0 = 1 \\ \sqrt{3}\,\text{sen}\, s_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ e substituindo na derivada da parametrização, $\gamma' : \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{3}\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = \sqrt{3}\cos t \end{cases}$, temos que $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Daí, a equação paramétrica da reta tangente é: $(1, \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}, 1)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

O vetor velocidade é $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{2}, 1)$. A direção dele é $\vec{v} = \frac{\gamma'(s_0)}{||\gamma'(s_0)||} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(c)

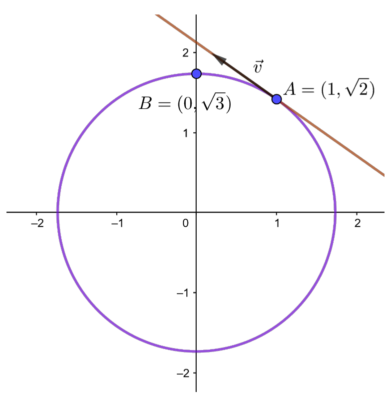


Figure 14: Curvas de nível da função $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$ (em roxo)

Exercícios

1. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$. Determine:

(a) D_f
(b) Imf
(c) G_f
(d) curvas de nível C_k.

2. Seja $z = f(x, y) = 1 - x^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$. Determine:
   (a) D_f
   (b) Imf
   (c) G_f
   (d) curvas de nível C_k.
3. Seja a função $z = f(x, y) = \frac{y}{x-2}$. Determine:
   (a) D_f
   (b) Imf
   (c) curvas de nível C_k.
4. Seja a funcão $z = f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$. Determine:
   (a) D_f
   (b) Imf
   (c) curvas de nível C_k.
5. Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ (em C°) represente uma distribuição de temperatura no plano xy. Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de $36°$C.
6. Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy, de modo que a temperatura (em °) no ponto (x, y) é inversamente proporcional a distância da origem.
   (a) Descreva as isotermas.
   (b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é $40°$C, ache a equação da isoterma para uma temperatura de $20°$C.
   (c) curvas de nível C_k.
7. Seja, $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$.
   (a) Esboce o mapa de contorno de f.
   (b) Determine uma equação da reta tangente à curva de nível que passa pelo ponto $(0, 6)$ no ponto $(-3, 3)$. Identifique o vetor velocidade.
   (c) Identifique a curva de nível do item (b) no mapa de contorno do item (a). Esboce a reta tangente e a direção do vetor velocidade no mapa de contorno.

Respostas

1.

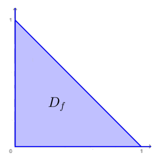
(a) $D_f = \{(x, y); x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

(b) $Imf = [0, 1]$

(c) $G_f : x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$, semi-esfera.

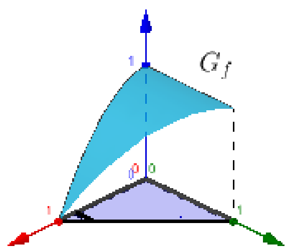
(d) $C_0 : x^2 + (y-1)^2 = 1$, $C_1 = \{(0, 1)\}$. Se $0 < k < 1$, temos circunferências concêntricas de centro $(0, 1)$ e raio $\sqrt{1-k^2}$.

2. (a) D_f :

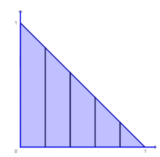


(b) $Imf = [0, 1]$

(c) G_f :



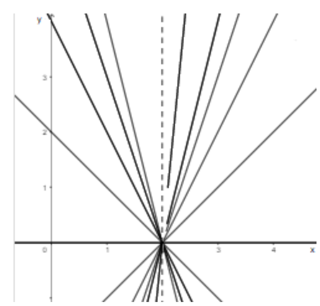
(d) C_k :



3. (a) $D_f = \{(x, y); x \neq 2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{ reta } x = 2\}$

(b) $Imf = \mathbb{R}$

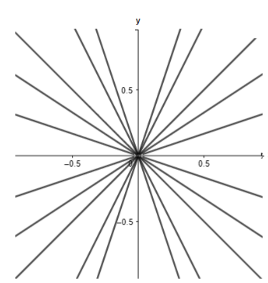
(c) $C_k : y = k(x-2), x \neq 2$.



4. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

(b) $Imf = [0, 1]$

(c) $C_0 : x = 0, y \neq 0$; $C_1 : y = 0, x \neq 0$; $C_k : y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}x$, $x \neq 0$, $0 < k < 1$.



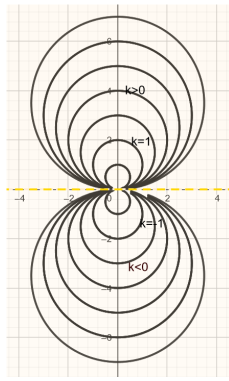
5. $c_{36} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. (a) Circunferências com centro em $(0, 0)$

(b) $x^2 + y^2 = 100$

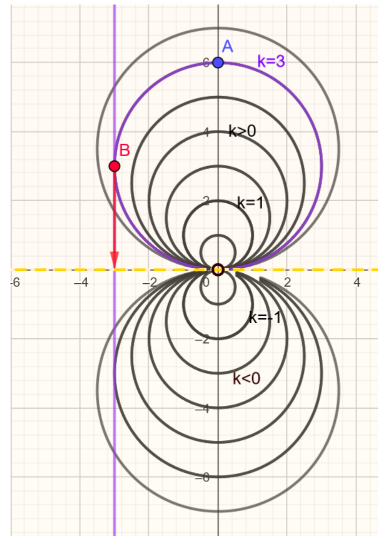
7.

(a)



(b) Reta tangente a C_3 em $(-3,3)$ é $(-3,3)+(0,-3)t,\ \forall t \in \mathbb{R}$.A direção do vetor velocidade é $\vec{v} = (0,-1)$

(c)



Superfícies de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de superfícies de nível e sua relação com o domínio e imagem da função.
- Calcular e identificar a superfície de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar as superfícies de nível.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \quad \longmapsto w = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$.

Seja $k \in$ **Imf**. O conjunto $\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D; f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conjunto de nível de f no nível k. As curvas de nível são o caso particular $n = 2$.

Quando $n = 3$, os conjuntos de nível se denotam por S_k e se chamam superfície de nível de f no nível k.

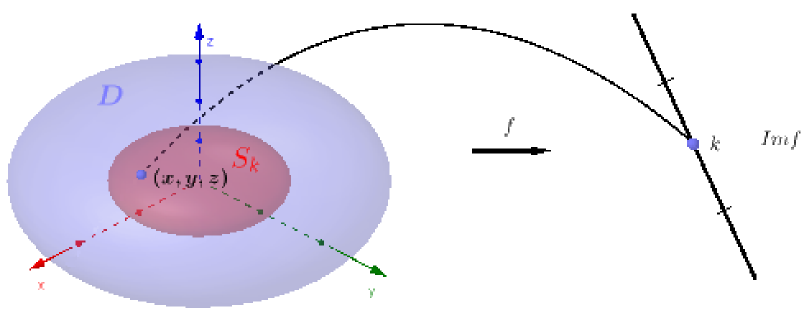


Figure 15: Relação da superfície de nível com o domínio e a imagem da função

Observação

(I) Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^3$, $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^4$, $S_k \subset D \subset \mathbb{R}^3$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{C}_k \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Determine:

   (a) D_f

(b) Imf

(c) S_1, superfície de nível $k = 1$

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^3$

(b) $Imf = [0, +\infty[$

(c) $S_1 : x^2 + y^2 = 1$. Como essa equação não envolve a variável z, isso significa que qualquer plano horizontal $z = k$ (paralelo ao plano xy) intercepta o G_f segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Assim, o G_f é obtido tomando-se a circunferência $x^2+y^2 = 1$, no plano xy e deslocando-a paralelamente ao eixo z. A superfície é dita cilindro circular reto.

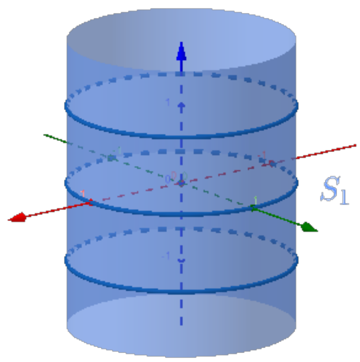


Figure 16: Superfície de nível $k = 1$ da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

2. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Determine:

(a) D_f

(b) Imf

(c) S_k, superfícies de nível

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^3$

(b) $Imf = \mathbb{R}$

(c) Seja $k \in I_mf = \mathbb{R}$. Então, a superfície de nível correspondente é

$$S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$$

Se $k = 0$, temos $S_0 : x^2+y^2-z^2 = 0$ ou $z^2 = x^2+y^2$. Fazendo $x = 0$, temos $z = \pm|y|$ e fazendo $z = c$, temos $x^2 + y^2 = c^2$. Logo, temos a forma de S_0 que é um cone.

Se $k > 0$, temos $S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$. Fazendo $x = 0$, temos a hipérbole $y^2 - z^2 = k$ no plano yz de vértices $(0, \sqrt{k}, 0)$ e $(0, -\sqrt{k}, 0)$. Fazendo $z = c$, temos a circunferência $x^2+y^2=k+c^2$. Assim, temos a superfície S_k, $k>0$, dita hiperboloide de uma folhas.

Se $k<0$ ou $-k>0$, temos $S_k : z^2 \to x^2-y^2=-k$. Fazendo $x=0$, temos a hipérbole $z^2-y^2=-k$ no plano yz de vértices $(0,0,\sqrt{-k})$, $(0,0,-\sqrt{-k})$. Fazendo $z=c$, com $c>\sqrt{-k}$ ou $c<\sqrt{-k}$, temos circunferências $x^2+y^2=k+c^2$. Assim, temos a superfície $S_k, k<0$, dita hiperboloide de duas folhas.

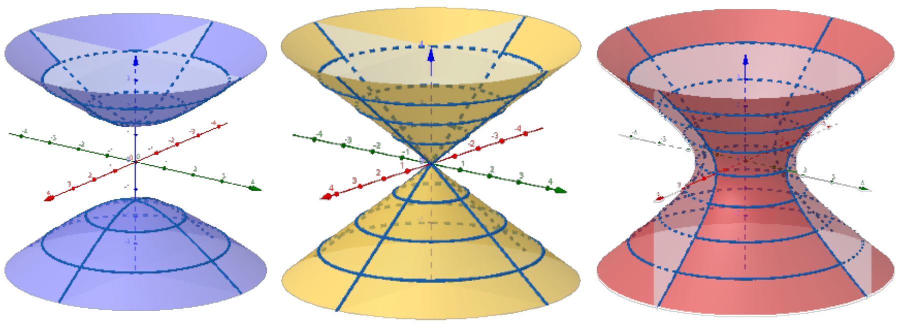


Figure 17: Superfície de nível $k<0$ (azul), $k=0$ (amarelo) e $k>0$ (vermelho) da função $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

A versão do mapa de contorno para as superfícies de nível seria um gráfico 3D com as superfícies de nível uma dentro da outra:

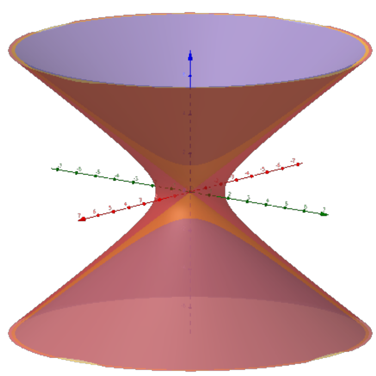


Figure 18: Gráfico 3D com as superfícies de nível da função $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

Exercícios

1. Seja $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2-1)$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) superfícies de nível

2. A temperatura em uma região D do $\mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y,z)=\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}$ Determine:

(a) a região D
(b) ImT
(c) as isotermas

3. Se a voltagem V no ponto $P(x, y, z)$ é dada por

$$V = \frac{6}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Determine:

(a) domínio de V
(b) ImV
(c) as equipotenciais

Respostas

1. (a) $D_f : x^2 + y^2 + z^2 > 1$
(b) $Imf = \mathbb{R}$
(c) $S_k : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + e^k, \quad k \in \mathbb{R}$, esferas concêntricas de raio $\sqrt{1 + e^k}$ e centro na origem.

2. (a) $D = \left\{(x, y, z); \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} \leqslant 1\right\}$
(b) $ImT = [0, 6]$
(c) $S_0 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad S_6 = \{(0, 0, 0)\}, \quad S_k : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36 - k^2$, $0 < k < 6$, elipsoides concêntricos de centro na origem.

3. (a) $D_V = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$
(b) $ImV =]0, +\infty[$
(c) $S_k : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \frac{36}{k^2}$, $k > 0$, elipsoides concêntricos de centro na origem.