



Funções escalares de várias variáveis

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Objetivos:

- vetor gradiente;
- regra da cadeia: derivação de composição de funções;
- derivação implícita; teorema da função implícita.

Vetor Gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em $(a, b) \in D$. O vetor

$$\nabla(a, b) = \text{grad}f(a, b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

é dito (vetor) gradiente de f em (a, b) .

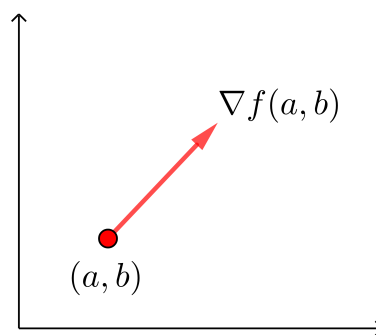


Figure 1: Vetor gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em (a, b, c) . Então

$$\nabla f(a, b, c) = \text{grad}f(a, b, c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right)$$

Teorema: Regra da Cadeia (derivada de função composta)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tais que $\vec{r}(t) \in D$, para todo $t \in I$. Se \vec{r} for diferenciável em t_0 e f diferenciável em $\vec{r}(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0)$$

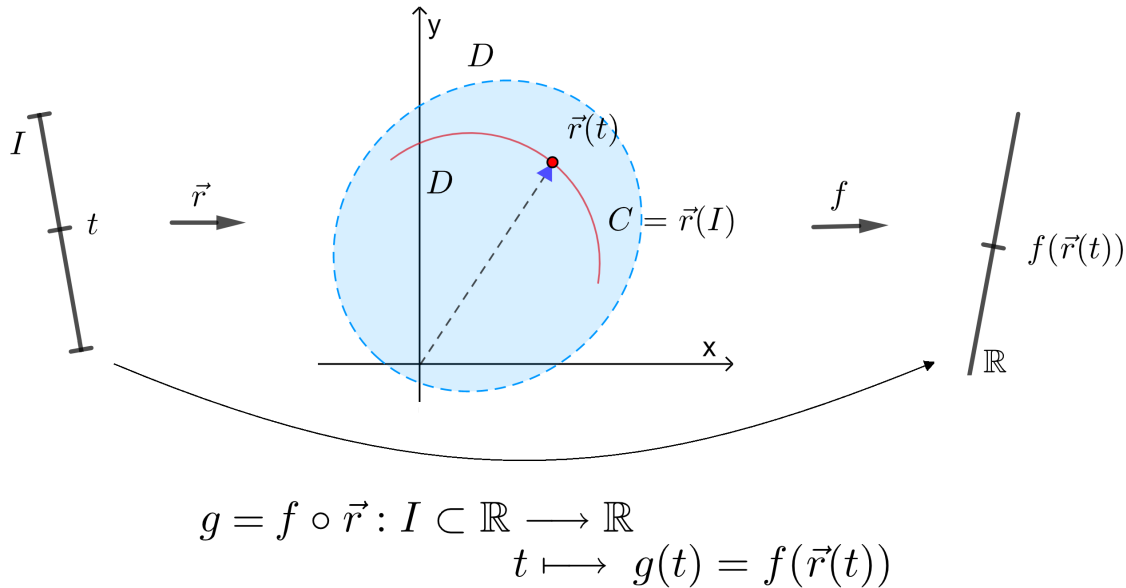


Figure 2: Composição de funções

Observações

(I) Se f for diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^n$ e \vec{r} diferenciável em $I \subset \mathbb{R}$, então $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em I e $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ para todo $t \in I$.

(II) Para $n = 2$, temos $z = f(x, y)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ portanto,

$$\nabla f(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right), \quad \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right).$$

Então,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

ou

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $z'(t)$, $\frac{dz}{dt}$ ou $\frac{df}{dt}$.

(III) Para $n = 3$, temos $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $w'(t)$, $\frac{dw}{dt}$ ou $\frac{df}{dt}$.

Uma consequência da regra da cadeia

(I) Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$, D aberto. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v)) \in D$. Então, a composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

ou, abreviadamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}$$

(II) Sejam $w = f(x, y, z)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$, D aberto, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in D$. Então, a composta

$$\omega = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e, abreviadamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

Derivação implícita

Definição 1: Uma função $y = g(x)$, $x \in I$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ se $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Supondo F e g são diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

Supondo que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$, temos

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

ou, equivalentemente,

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in I.$$

Problema 1: Encontrar condições para que a equação $F(x, y) = 0$ defina implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$.

A solução do Problema 1 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no conjunto aberto D . Seja $(x_0, y_0) \in D$, tal que

- (i) $F(x_0, y_0) = 0$
- (ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança I de x_0 e uma função de classe C^1 , $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = y_0$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Definição 2: Uma função $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ se $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in D$.

Supondo F e g diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \end{cases}$$

Supondo $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0, \forall (x, y) \in D$, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, & \forall (x, y) \in D \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, & \forall (x, y) \in D \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla g(x, y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))\right)^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D$$

Problema 2: Em que condições a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $z = g(x, y)$?

A solução do Problema 2 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no conjunto aberto D . Seja $(x_0, y_0, z_0) \in D$, tal que

- (i) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;
- (ii) $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança V de (x_0, y_0) e uma função de classe C^1 , $g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0, y_0) = z_0$ e $F(x, y, g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in U$.

Observação

- (I) O gráfico da função $y = g(x)$ dada pelo Teorema 1 da função implícita está incluído na curva de nível $F(x, y) = 0$.
- (II) O gráfico da função $z = g(x, y)$ dada pelo Teorema 2 da função implícita está incluído na superfície de nível $F(x, y, z) = 0$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = 2 \arctan \frac{x}{y}$. Calcule $\nabla f(1, 1)$.

Solução

$$\text{Temos } \nabla f(x, y) = \left(\frac{2 \cdot \frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}, \frac{-2 \frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}, \frac{-2x}{x^2 + y^2} \right).$$

$$\text{Assim, } \nabla f(1, 1) = (1, -1).$$

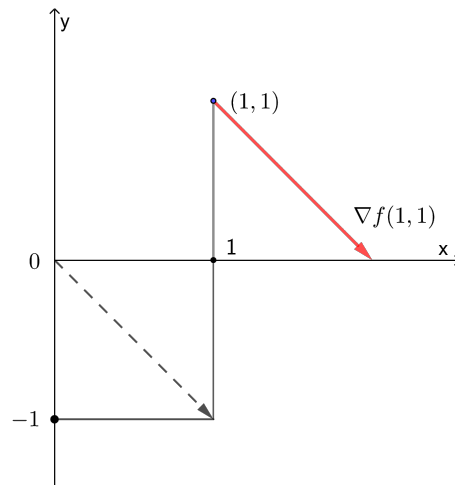


Figure 3: Vetor gradiente de $f(x, y) = 2 \arctan \frac{x}{y}$ no ponto $(1, 1)$

2. Seja $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$. Calcule $\nabla f(-1, 1, 1)$.

Solução

$$\text{Temos } \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}}, \frac{6y}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}}, \frac{8z}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}} \right).$$

$$\text{Assim, } \nabla f(-1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right).$$

3. Seja $g(t) = f(3 \sin t, e^{t^2})$.

(a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f .

(b) Calcule $g'(0)$, admitindo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \frac{1}{3}$.

Solução

(a) Temos $g(t) = f(x, y)$ com $x = 3 \sin t$, $y = e^{t^2}$. Pela regra da cadeia, temos:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) (3 \cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) (2te^{t^2})$$

(b) Temos

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0))(3 \cos 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \cdot 0 = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

4. Suponha que, para todo t , $f(3t, t^3) = \arctan t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 .

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$, admitindo que $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}$.

(b) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

Solução

(a) Seja $g(t) = f(x, y)$, com $x = 3t, y = t^3$. Pela regra da cadeia, temos para todo t :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3t^2} = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(3t, t^3).$$

Como $f(3t, t^3) = \arctan t$, então $g(t) = \arctan t$. Derivando em relação a t , temos para todo t , $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, ou seja,

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(3t, t^3) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Para $t = 1$, temos:

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}$, então, $3 \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = -\frac{1}{3}$.

(b) A equação do plano tangente é:

$$z = f(3, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)(y - 1),$$

onde $f(3, 1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$. Então, temos

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(x - 3) + \frac{1}{2}(y - 1).$$

5. A curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $\vec{r}(1)$.

Solução

A equação da reta tangente a C em $\vec{r}(1)$ é dada por:

$$(x, y, z) = \vec{r}(1) + \lambda \vec{r}'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x, y)$, então $z(t) = f(2t, t^2)$, e portanto, $z(1) = f(2, 1) = 3$. Logo, $\vec{r}(1) = (2, 1, 3)$. Temos $\vec{r}'(t) = (2, 2t, z'(t))$, donde $\vec{r}'(1) = (2, 2, z'(1))$.

Como $z = f(x, y)$, com $x = 2t$, $y = t^2$, então, pela regra da cadeia, temos

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2t} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

donde,

$$z'(1) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Portanto, $\vec{r}'(1) = (2, 2, 0)$. Assim, a equação da reta tangente é:

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

6. A pressão P (em kilopascals), volume V (em litros) e temperatura T (em kelvins) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8,31T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando com a taxa de $0,1\text{ K/s}$ e o volume é 100 L e está aumentando com a taxa de $0,2\text{ L/s}$.

Solução

Das hipóteses sabemos que quando $T = 300$, $\frac{dT}{dt} = 0,1$. E que quando $V = 100$, $\frac{dV}{dt} = 0,2$.

Considere $P(V, T) = \frac{8,31T}{V}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial V} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial P}{\partial T} \frac{dT}{dt} \Big|_{T=300, V=100} = \frac{-8,31}{V^2} \Big|_{V=100} \cdot 0,2 + \frac{8,31}{V} \Big|_{V=100} \cdot 0,1 = \\ &= \frac{3 \cdot (-8,31)}{100} \cdot 0,2 + \frac{8,31}{100} \cdot 0,1 = 0,05 + 0,01 = 0,06\text{ KPas/s} \end{aligned}$$

7. Seja $z = f(u^2 - v^2, 2uv)$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Expresse $\frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f .

Solução

Temos $z = f(x, y)$, onde $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v} = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, 2uv) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, 2uv) \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u} = -2v \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, 2uv) \\ &\quad + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, 2uv).\end{aligned}$$

8. Determine as equações das retas tangente e normal á curva $C : e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

Solução

Seja $f(x, y) = e^{2x-y} + 2x + 2y$. Logo, $f(\frac{1}{2}, 1) = e^{1-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$.

Então C é a curva de nível de f no nível 4. Temos $\nabla f(x, y) = (2e^{2x-y} + 2, -e^{2x-y} + 2)$, donde $\nabla f(\frac{1}{2}, 1) = (2e^{1-1} + 2, -e^{1-1} + 2) = (4, 1)$. Sabemos que $\nabla f(\frac{1}{2}, 1)$ é normal a C em $(\frac{1}{2}, 1)$.

Reta tangente: $[(x, y) - (\frac{1}{2}, 1)] \cdot \nabla f(\frac{1}{2}, 1) = 0$, donde $(x - \frac{1}{2}, y - 1) \cdot (4, 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -4x + 3$

Reta normal: $(x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda \nabla f(\frac{1}{2}, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda(4, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

9. Determine as equações do plano tangente e da reta normal a superfície $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$.

Logo, $f(1, -1, 2) = -2 + 1 - 1 + 8 - 6 = 0$. Então, S é a superfície de f no nível 0. Temos $\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$, donde $\nabla f(1, -1, 2) = (-2 + 3, 2 + 3, -1 + 12 - 3) = (1, 5, 8)$.

Sabemos que $\nabla f(1, -1, 2)$ é perpendicular a S em $(1, -1, 2)$.

Plano tangente: $[(x, y, z) - (1, -1, 2)] \cdot \nabla f(1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y + 1, z - 2) \cdot (1, 5, 8) = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$.

Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda \nabla f(1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}.$

10. Mostre que a equação $x^2y + 3y^3x^4 = 4$ define implicitamente uma função $y = g(x)$ no ponto $(1, 1)$. Calcule $g'(1)$.

Solução

Seja $F(x, y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 . Temos:

- (i) $F(1, 1) = 1 + 3 - 4 = 0$;
 (ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = [x^2 + 9y^2x^4]_{(1,1)} = 1 + 9 = 10 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança I de 1 e uma função de classe C^1 , $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1) = 1$ e $F(x, g(x)) = 0, \forall x \in I$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

Logo,

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5},$$

pois $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + 12y^3x^3$, daí $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = 2 + 12 = 14$.

11. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ define uma função implícita diferenciável $z = g(x, y)$ no ponto $(1, 1, 2)$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$.

Solução Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Temos

- (i) $F(1, 1, 2) = 1 + 1 + 8 - 6 - 4 = 0$;
 (ii) $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2) = [3z^2 - 3xy]_{(1,1,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança V de $(1, 1)$ e uma função de classe C^1 , $g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1, 1) = 2$ e $F(x, y, g(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2)} = -\frac{[3x^2 - 3yz]_{(1,1,2)}}{9} = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1, 2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2)} = -\frac{[3y^2 - 3xz]_{(1,1,2)}}{9} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Exercícios

1. Suponha que para todo t , $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.
2. Admita que para todo (x, y) , $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$, onde $f(x, y)$ é diferenciável. Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$ é constante.
3. A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação $PV = 8,31T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.
4. Seja $F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.
5. Seja $g(x, y) = xf(x^2 + y, 2y, 2x - y)$, onde f é diferenciável. Expresse $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f .
6. Suponha que $z = f(x, y)$ é uma função de classe C^1 , tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x, y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2\sin t, -3 + 7\cos t, z(t))$, onde t representa o tempo. Qual é a componente vertical da velocidade do ponto no instante em que suas coordenadas são $(2, -3, 6)$.

7. Seja $F(r, \theta) = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, sendo $f(x, y)$ diferenciável. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$

8. Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$, onde f é diferenciável. Mostre que $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = mu$.

9. Seja $\omega = f(x, y)$, onde f é diferenciável, se $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, mostre que

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right)^2.$$

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 = (0, 0, 0)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$, $f(P_0) = 1$. Defina $g(u, v) = f(u - v, u^2 - v, 3v - 3)$ e calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 1)$.

11. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$ no ponto $(4, -1, 1)$.

12. Determine uma reta que seja tangente a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 17$.

13. Determine um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

14. Considere a função $z = \frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$. Determine as equações do plano tangente y e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2, 2, 1)$.

15. Considere a curva C intersecção das superfícies de equações $S_1 : x^2 - 2xz + y^2z = 3$ e $S_2 : 3xy - 2yz = -2$. Determine:

(a) um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.

(b) Os pontos do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

16. A equação $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$ define uma função $z = f(x, y)$ implicitamente em torno do ponto $Q = (\sqrt{2}, 0, 1)$? E do ponto $P = (\sqrt{2}, 0, 0)$? Calcule, quando possível, $\nabla f(\sqrt{2}, 0)$.

Respostas

1. sem resposta
2. sem resposta
- 3.
4. sem resposta
5. $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(u, v, \omega) + x \left[2x \frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2 \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega) \right]$
 $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \left[\frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(u, v, \omega) - \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega) \right],$
 onde $u = x^2 + y, v = 2y, \omega = 2x - y$.
6. 7
7. sem resposta
8. sem resposta
9. sem resposta
10. sem resposta
11. $2x - 2y - z + 1 = 0$
12. $2x + y - 2z = 5; (x, y, z) = (4, -1, 1) + \lambda(8, 4, -8), \lambda \in \mathbb{R}$
13. $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$ ou $y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1)$
14. $x + y + z = \frac{11}{6}$ on $x + y + z = -\frac{11}{6}$
15. $x - 7y - 16z = -28$
16. (a) $(3, 2, 4)$
 (b) $(6, 4, -8)$ e $(-6, -4, 8)$
17. O ponto Q não verifica a equação implícita; aplicando o teorema da função implícita para P obtemos $\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, 0) = -2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, 0) = 0$

