



Funções escalares de várias variáveis

Cálculo de limites. Continuidade

Objetivos:

- teorema do confronto; teorema do anulamento;
- coordenadas polares;
- continuidade

Teorema do Confronto: Se $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$ em $B_r(a, b)$ e se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$.

Teorema do Anulamento: Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ e $g(x, y)$ é limitada em $B_r(a, b)$, isto é, se $|g(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in B_r(a, b)$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = 0$.

Observação

$$(I) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = 0.$$

(II) Podemos calcular o limite passando a coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

Por exemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \cos(\rho) = 0,$$

pois $|\rho \sin \theta \cos(\rho)| \leq \rho$ para todo θ .

Continuidade: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in D$, ponto de acumulação de D . Dizemos que f é contínua em P se

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P)$$

Se f for contínua em todos os pontos de D , dizemos que f é contínua.

Propriedades: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $P \in D$. Então as seguintes funções também são contínuas em P :

- (a) $f \pm g$
- (b) $f \cdot g$
- (c) $\frac{f}{g}$, desde que $g(P) \neq 0$

Observações:

- (I) Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma cx^ny^m , com $c \in \mathbb{R}$, inteiros não negativos. Portanto, usando propriedades de funções contínuas, segue que toda função polinomial é contínua em \mathbb{R}^2 .
- (II) Analogamente, as funções polinomiais de n variáveis são contínuas em \mathbb{R}^n .
- (II) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Portanto, toda função racional é contínua nos pontos onde o denominador não se anula, isto é, em seu domínio.

Teorema: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $Imf \subset E$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h = g \circ f$ é contínua em p .

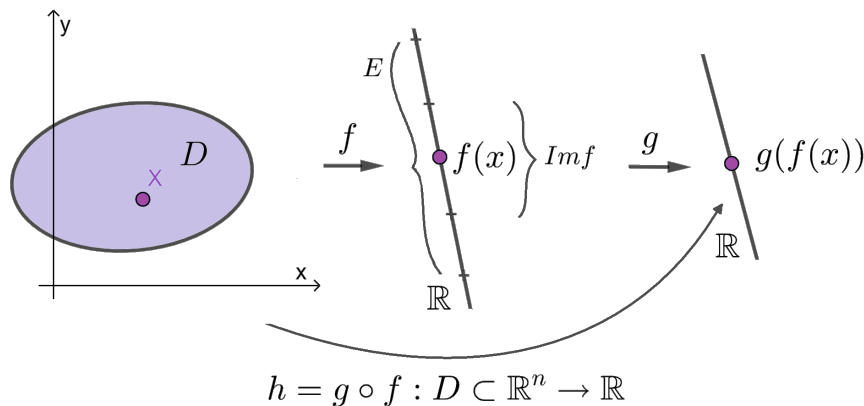


Figure 1: Continuidade da função composta

Exemplos

1. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$, se existir.

Solução: Temos

$$0 < \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$, então pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = 0, \text{ donde } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

2. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$, se existir.

Solução: Temos que $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$, pelo que $\left| \frac{y^2}{y^2 + x^2} \right| \leq 1$. Aliás, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$, então pelo Teorema do Anulamento,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

3. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$, se existir.

Solução: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2) = 0$, pois

$$|\rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2)| \leq \rho \ln(\rho^2)$$

e $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln(\rho^2) = 0$ aplicando L'Hopital.

4. Seja $f(x, y)$ contínua, então $\operatorname{sen}(f(x, y))$, $\ln(f(x, y))$, $\sqrt{f(x, y)}$ são funções contínuas.

5. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{3x^2+3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f .

Solução: Observemos que $D_f = \mathbb{R}^2$. Por propriedades de continuidade, segue que f é contínua em $(x, y) \neq (0, 0)$. Ora, Vimos na Aula 4, Exemplo 4, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$. Logo, f é contínua em \mathbb{R}^2 .

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$.

Solução: O domínio de f é determinado pela desigualdade $\frac{x-y}{x^2+y^2} > 0$, $(x, y) \neq (0, 0)$, donde $x > y$. Então, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$

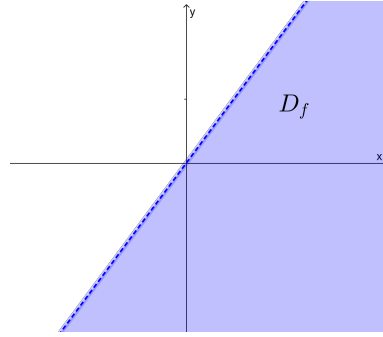


Figure 2: Domínio função $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

A função f é a composta das funções $h(u) = \ln u$ e $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$. Como $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ é contínua em D_f por ser racional e $h(u) = \ln u$ é contínua em \mathbb{R}^+ por ser logarítmica, então a composta $f = h \circ g$ é contínua em D_f .

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Solução: Temos $D_f = D_1 \cup D_2 \cup C$, onde $D_1 : x^2 + y^2 > 4$, $D_2 : x^2 + y^2 < 4$ e $C : x^2 + y^2 = 4$.

Temos:

- i f é contínua em D_1 , pois $f(x, y) = 0$ (função constante) em D_1 ;
- ii f é contínua em D_2 , pois $f(x, y)$ é uma função polinomial em D_2 ;
- iii Temos $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 4 + 1 = 5$ em C . Seja $(a, b) \in C$.

Então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 5$ ao longo de C . Seja C_1 uma curva passando por (a, b) e contida em D_1 . Logo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \neq 5$, ao longo de C_1 .

Assim, f não é contínua em C e portanto, o conjunto de continuidade de f é $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$.

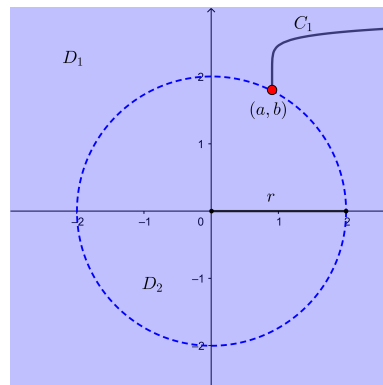


Figure 3: Continuidade da função composta

Exercícios

1. Calcule, se possível, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2 + y^4}}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \arccos \frac{x}{x + y}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sec \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} + 1} - 1$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 + y^4}$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ por coordenadas polares.}$$

2. Sabendo que: $1 - \frac{x^3 y^2}{3} \leq \frac{\arctan(xy)}{xy} < 1$. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy}$

3. A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$?

4. A função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ é contínua em $(0, 0)$?

5. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$(a) f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x^2 - y^2}$$

$$(b) f(x, y) = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$$

6. Discuta a continuidade das funções abaixo:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$$

$$(b) f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 2$$

$$(c) f(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2 y^2 + 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0); f(0, 0) = 0$$

$$(d) f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}}, \text{ se } x^2 + y^2 < 1; f(x, y) = 0, \text{ se } x^2 + y^2 \geq 1.$$

7. Calcule o valor de k para que a funcao dada seja continua em $(0, 0)$:

(a) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = k$

(b) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = k - 4$.

8. Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

Respostas

1. (a) 0

(b) 0

(c) 1

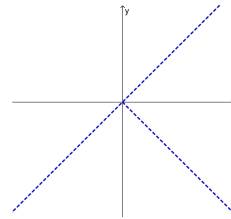
(d) $\pi/3$

(e) 1

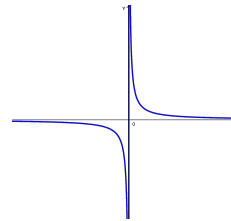
(f) 0

(g) 0

5. (a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $y < x$, $x \neq -y$



(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x}, x > 0 \text{ ou } y \leq \frac{1}{x}, x < 0\}$



2. 1.

6. (a) Não é em $(0, 0)$

(b) É em \mathbb{R}^2

(c) Não é em $(0, 0)$

(d) É em \mathbb{R}^2

3. Não

7. (a) $k = 0$

(b) $k = 4$

4. Não

8. 0; -1

