



Transformações. Mudança de variável.

Objetivos:

- transformações no plano e no espaço; mudança de variáveis;
- transformação inversa; jacobiano da inversa;
- teorema da função inversa.

Definição: Sejam $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, n funções reais de n variáveis reais. Uma transformação é uma função vetorial de n variáveis do tipo

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ponto $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \longmapsto$ vetor $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$

As funções reais f_1, f_2, \dots, f_n são ditas de funções coordenadas.

A transformação f é diferenciável (e portanto contínua) no ponto $X_0 \in D$ se e somente se cada função coordenada f_1, f_2, \dots, f_n é diferenciável em X_0 .

A transformação f é de classe C^k , $k \geq 1$, no aberto $A \subset D$ se e somente se cada função coordenada f_1, f_2, \dots, f_n é de classe C^k em A .

As transformações são chamadas também de mudanças de variável. Pois elas transformam as variáveis x_1, x_2, \dots, x_n nas novas variáveis

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ u_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

A transformação inversa de f , caso existir, é a função vetorial $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f \circ g = g \circ f = id$. Ela é denotada por f^{-1} , donde $f^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Observação: Nem toda transformação admite inversa. Por exemplo, $f(x, y) = (x^2, y)$. Observe que $f(2, 1) = f(-2, 1) = (4, 1)$ pelo que a inversa não estaria bem definida em $(4, 1)$.

Transformações lineares: São do tipo $f(X) = AX$. Por exemplo:

Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$. As funções coordenadas são $f_1(x, y) = x + y$ e $f_2(x, y) = x - y$.

Podemos representar essa função por

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = AX$$

Transformações afins: São do tipo $f(X) = AX + B$, composição de uma transformação linear e de uma translação de vetor \vec{B} . Por exemplo:

Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2)$. As funções coordenadas são $g_1(x, y, z) = x + y + z + 1$, $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z - 3$ e $g_3(x, y, z) = x + 2y + 2$.

Podemos representar essa função por

$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z + 1 \\ -x + y + 2z - 3 \\ x + 2y + 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_B = AX + B$$

Transformações não afins: São transformações que não podem ser expressas da forma $AX + B$, para alguma matriz quadrada A e vetor B . Por exemplo:

Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $h(x, y) = (x + y, xy)$. As funções coordenadas são $h_1(x, y) = x + y$ e $h_2(x, y) = xy$.

Os exemplos mais conhecidos de mudança de variável não afim são as mudanças a coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas:

- (I) Mudança de variáveis a coordenadas polares: Um ponto $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, descrito em coordenadas cartesianas, pode ser descrito em outro sistema de coordenadas. Por exemplo, o sistema de coordenadas polares (r, θ) , onde r é o comprimento do vetor \overrightarrow{OP} e θ é o ângulo em radianos, tomado no sentido anti-horário, entre \overrightarrow{OP} e o eixo x positivo.

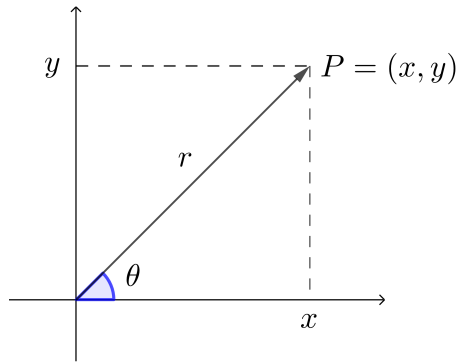


Figure 1: Coordenadas polares

Temos a função vetorial

$$\varphi_p : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D = [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_p : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \text{onde } r \geq 0 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de polares a cartesianas é φ_p^{-1} é apresentada como

$$\varphi_p^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- (II) Mudança de variáveis a coordenadas cilíndricas: A posição do ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ também pode ser determinado pelas suas coordenadas cilíndricas (r, θ, z) . A relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) é dada pela função

$$\varphi_c : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D = [0, +\infty[\times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

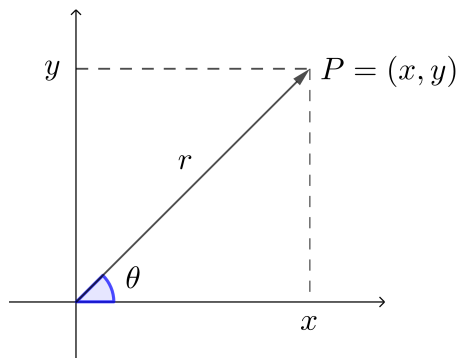


Figure 2: TROCAR: Coordenadas cilíndricas

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_c : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \quad \text{onde } r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{e } z \in \mathbb{R}.$$

A mudança de coordenadas de cilíndricas a cartesianas é φ_c^{-1} é apresentada como

$$\varphi_c^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0, \quad y, z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

- (III) Mudança de variáveis a coordenadas esféricas: A posição de um ponto $P = (x, y, z)$ também fica determinada pelos números ρ, ϕ, θ , onde ρ é o comprimento do vetor \overrightarrow{OP} , ϕ é o ângulo (em radianos) entre o eixo z positivo e o vetor \overrightarrow{OP} e θ é o ângulo, tomado no sentido anti-horário, entre o eixo x positivo e o vetor projeção de \overrightarrow{OP} no plano xy .

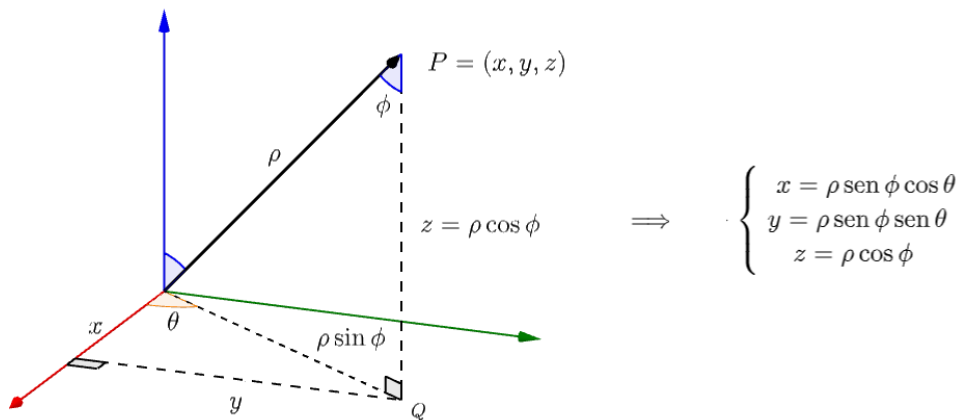


Figure 3: Coordenadas esféricas

A relação entre as coordenadas (x, y, z) e (ρ, ϕ, θ) é dada pela função

$$\varphi_e : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, D = [0, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$$

$$(\rho, \phi, \theta) \longmapsto (x, y, z) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_e : \begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}, \quad \text{onde } r \geq 0, \quad \phi \in [0, \pi] \quad \text{e } \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de esféricas a cartesianas é φ_c^{-1} é apresentada como

$$\varphi_e^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Definição: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação diferenciável de coordenadas f_1, f_2, \dots, f_n . Se existirem todas as derivadas parciais das funções coordenadas, a derivada de f no ponto $X_0 \in D$ é definida como a matriz quadrada:

$$f'(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

Dita derivada é chamada de matriz jacobiana de f no ponto X_0 . As vezes também é denotada por $Df(X_0)$ ou por $\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$.

Observação: A matriz jacobiana de uma transformação $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma matriz quadrada $n \times n$, e, assim tem determinante. Dito determinante é chamado de jacobiano de f :

$$Jf(X_0) = \det f'(X_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{vmatrix}$$

Regra da Cadeia: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, D aberto, e $g : E \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, E aberto, duas transformações tais que $f(D) \subset E$. Se f é diferenciável em X_0 e g é diferenciável em $f(X_0)$, então a composta $g \circ f$ é diferenciável em X_0 e

$$(g \circ f)'(X_0) = g'(f(X_0)) \cdot f'(X_0),$$

onde $g'(f(x_0))$ é a matriz jacobiana de g em $f(X_0)$ e $f'(x_0)$ é a matriz jacobiana de f em X_0 .

Teorema da Função Inversa: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, D aberto, uma transformação de classe C^1 . Se $f'(X_0)$ é uma matriz inversível (i.e. $Jf(X_0) \neq 0$), então existe um aberto U contendo X_0 , tal que $f : U \longrightarrow V = f(U)$ é inversível com inversa $f^{-1} : V \longrightarrow U$ de classe C^1 e

$$(f^{-1})'(Y_0) = (f'(X_0))^{-1},$$

onde $Y_0 = f(X_0)$.

Observação:

- (I) Nas condições do teorema da regra da cadeia, o jacobiano da composta é o produto dos jacobianos:

$$J(g \circ f)(X_0) = Jg(f(X_0)) \cdot Jf(X_0)$$

- (II) Nas condições do teorema da função inversa, o jacobiano da transformação inversa é o recíproco do jacobiano da transformação:

$$Jf^{-1}(Y_0) = \det(f'(X_0))^{-1} = \frac{1}{Jf(X_0)},$$

onde $Y_0 = f(X_0)$.

Exemplos

1. Calcule a imagem do quadrado de vértices $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(5, 5)$ e $(1, 5)$ pela transformação $f(x, y) = (4x, \frac{1}{2}y)$.

Solução

A fronteira do quadrado Q é: $r_1(t) = (1, t)$, $r_5(t) = (5, t)$, $s_1(t) = (t, 1)$, $s_5(t) = (t, 5)$, para todo $t \in [0, 5]$.

A imagem da fronteira pela transformação são os segmentos: $f(1, t) = (4, \frac{1}{2}t)$, $f(5, t) = (20, \frac{1}{2}t)$, $f(t, 1) = (4t, \frac{1}{2})$ e $f(t, 5) = (4t, \frac{5}{2})$, respectivamente.

Consideremos, para cada $1 < c < 5$, os segmentos verticais $r_c(t) = (c, t)$, com $1 \leq t \leq 5$, no interior do quadrado Q . A imagem desses segmentos são: $f(c, t) = (4c, \frac{1}{2}t)$. Ainda segmentos verticais no interior de $f(Q)$.

Consideremos, para cada $1 < c < 5$, os segmentos horizontais $s_c(t) = (t, c)$, com $1 \leq t \leq 5$, no interior do quadrado Q . A imagem desses segmentos são: $f(t, c) = (4t, \frac{c}{2})$. Ainda segmentos horizontais no interior de $f(Q)$.

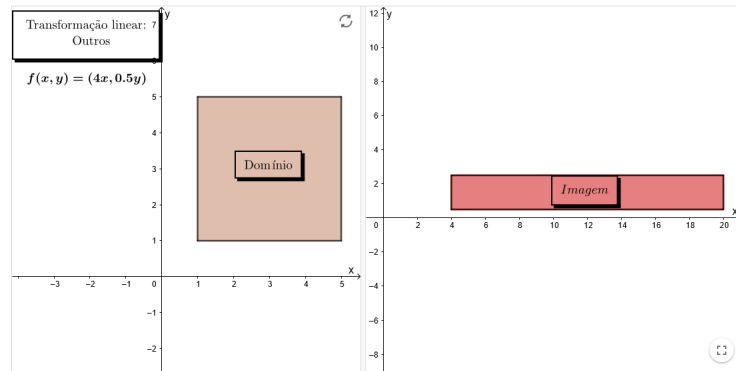


Figure 4: Imagem de um retângulo por uma transformação linear

Portanto a imagem do quadrado Q é o retângulo de vértices $(4, 1/2)$, $(20, 1/2)$, $(20, 5/2)$ e $(5/2, 4)$.

- Calcule a imagem do retângulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(-1, 2)$ pela transformação $f(x, y) = (y \cos x, y \sin x)$.

Solução

A fronteira do retângulo R é: $r_1(t) = (t, 0)$, $r_5(t) = (5, t)$, $s_1(t) = (t, 1)$, $s_5(t) = (t, 5)$, para todo $t \in [-1, 2]$.

A imagem da fronteira pela transformação são os segmentos: $f(1, t) = (4, \frac{1}{2}t)$, $f(5, t) = (20, \frac{1}{2}t)$, $f(t, 1) = (4t, \frac{1}{2})$ e $f(t, 5) = (4t, \frac{5}{2})$, respectivamente.

Consideremos, para cada $0 \leq c \leq 1$, os segmentos horizontais $r_c(t) = (t, c)$, com $-1 \leq t \leq 2$. Observe que os segmentos r_0 e r_1 pertencem à fronteira do retângulo. A imagem desses segmentos são: $m(t, c) = (c \cos t, c \sin t)$, arco de circunferência de centro $(0, 0)$ e raio c .

Consideremos, para cada $-1 \leq c \leq 2$, os segmentos verticais $s_c(t) = (c, t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Observe que os segmentos s_{-1} e s_2 pertencem à fronteira do retângulo. A imagem desses segmentos são: $m(c, t) = (t \cos c, t \sin c)$, segmentos de reta que passa pela origem e tem vetor diretor $(\cos c, \sin c)$.

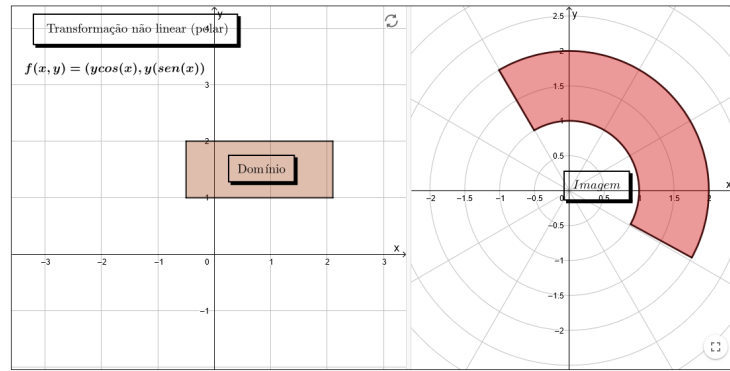


Figure 5: A imagem de um retângulo por uma transformação não linear

Portanto a imagem do retângulo R é a seção do anel de raios o retângulo circular de vértices $(4, 1/2)$, $(20, 1/2)$, $(20, 5/2)$ e $(5/2, 4)$.

3. Calcule o jacobiano das seguintes transformações:

- (i) $f(x, y) = (x + y, x - y)$;
- (ii) $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2)$;
- (iii) $h(x, y) = (x - y, xy)$.

Solução

- (i) Temos $f(x, y) = (x + y, x - y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -1$. Então,

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- (ii) Temos $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$, donde $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial z} = 2$, $\frac{\partial g_3}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial g_3}{\partial y} = 2$, $\frac{\partial g_3}{\partial z} = 0$. Então,

$$Jg(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0 - 2 + 2 - 1 - 0 - 4 = -5, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

- (iii) Temos $h(x, y) = (x - y, xy) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$, donde $\frac{\partial h_1}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial h_1}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial h_2}{\partial x} = y$, $\frac{\partial h_2}{\partial y} = x$. Então,

$$Jh(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4. Considere a translação $f(x, y) = (ax + by + h, cx + dy + k)$, para algum vetor $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ e coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Calcule o determinante jacobiano de f .

Solução

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então, $f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$.

Temos $f(x, y) = (ax + by + h, cx + dy + k) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, donde $\frac{\partial f_1}{\partial x} = a$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = b$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = c$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = d$. Então,

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas polares a cartesianas no ponto (r, θ) .

Solução

Temos $\varphi_p(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$, onde $x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$. Logo,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

Então

$$J\varphi_p(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} = r$$

Observe que o jacobiano da transformação depende unicamente do raio.

6. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas a polares em (x, y) .

Solução

Temos $T(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$, onde $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Logo,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Então

$$\begin{aligned} JT(x, y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Observação: Observe que $T = \varphi_p^{-1}$ e $J\varphi_p(r, \theta) = r$. Portanto, se $r > 0$ podemos aplicar o teorema da função inversa para calcular $JT(x, y)$. Com efeito,

$$JT(x, y) = \frac{1}{J\varphi_p(r(x, y), \theta(x, y))} = \frac{1}{r(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x \cos y, x \sin y, z^2)$

- (a) Prove que f é diferenciável.
- (b) Calcule $f'(1, \frac{\pi}{4}, 1)$
- (c) Calcule o jacobiano de f

Solução

- (a) Temos $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ com $f_1(x, y, z) = x \cos y$, $f_2(x, y, z) = x \sin y$, $f_3(x, y, z) = z^2$.

Como $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \cos y$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -x \sin y$, $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \sin y$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cos y$, $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$ são funções contínuas em \mathbb{R}^3 , então f é diferenciável em \mathbb{R}^3 .

- (b) Temos

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ \sin y & x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(c) \text{ Temos } J = \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ \sin y & x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} = 2z(x \cos^2 y + x \sin^2 y) = 2xz$$

8. Sejam $f \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 + 2uv + 3v \\ u - v \end{pmatrix}$, $g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Calcule o jacobiano da função composta $g \circ f$ em (9).

9. Seja $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que f tem uma inversa em um aberto contendo $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e calcule $[f^{-1}]'(y_0)$, $Y_0 = f(x_0)$,

Solução

Temos que $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$ é de classe em \mathbb{R}^2 pois as derivadas para as de f_1 e f_2 são funções contínuas em \mathbb{R}^2 . Tem também que

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$f'(x_0) = f' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $Jf(x_0) = \det f'(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$, então pelo teorema da função inversa, existe um conjunto aberto v contendo X_0 , tal que $f|_v$ (f restrita a v) tem uma função inversa f^{-1} , de classe C^1 , e além disso,

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = [f'(x_0)]^{-1},$$

onde $f(x_0) = f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0$ e $(f'(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. Logo,

$$(f^{-1})' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

1. Calcule a imagem do retângulo de vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(-1, 2)$ pelas seguintes transformações:

(i) Homotetia: $f(x, y) = (4x, 4y)$;

(ii) Rotação: $g(x, y) = (-x, y)$;

(iii) Reflexão: $h(x, y) = (x, -y)$;

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(i) Mostre que a função f transforma o círculo de centro na origem e raio r no círculo de centro na origem e raio r^2 .

- (ii) Determine e esboce a imagem por f do retângulo de vértices $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ e $(-2, 2)$.
3. Determine o jacobiano de φ_c e de sua inversa.
4. Determine o jacobiano de φ_e e de sua inversa.
5. Determine o determinante jacobiano de $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$ em $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
6. Prove que o jacobiano de uma transformação afim $T(X) = AX + B$ é $JT(X) = \det(A)$, para todo $X \in \mathbb{R}^n$.

Respostas

1. (i)
(ii)
(iii)
2. (i)
(ii)
3. $J\varphi_c = r$, $J\varphi_c^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $J\varphi_e = \rho^2 \sin \phi$, $J\varphi_e^{-1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}}$
5. -7
6. sem resposta

