Funções escalares de várias variáveis

Extremos absolutos em compactos. Multiplicadores de Lagrange

Objetivos:

- Teorema de Weierstrass; cálculo de máximos/mínimos absolutos em compactos
- Multiplicadores de Lagrange

Teorema (de Weierstrass): Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua num conjunto compacto $K \subset D$, então f tem um valor máximo absoluto e também um valor mínimo absoluto em K.

Método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto

1. Achar os pontos críticos no interior de K, $Int(K)$, e achar os valores de f nestes pontos críticos.
2. Achar os valores máximos e mínimos de f fronteira de K, $Fr(K)$.
3. Compare os valores obtidos no item 1) e 2). O maior deles será o valor máximo absoluto e o menor deles será o valor mínimo absoluto.

O conjunto fronteira de K pode ser um ponto, uma curva ou união de pontos e curvas. Portanto, um caminho natural para calcular os máximos e mínimos na fronteira é estudar a imagem da parametrização do conjunto.

Exemplo: Encontre os extremos absolutos da função $f(x,y) = 2x^2 + 3y^2$ na região $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

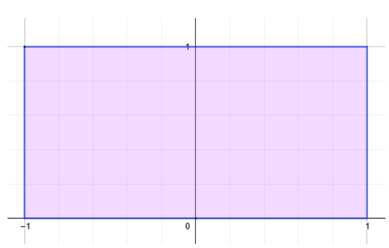

Figure 1: O conjunto $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

Observe que o conjunto fonteira de K é o retângulo de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(-1,1)$. Já o interior de K é a parte interna do retângulo, isto é, $Int(K) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < x < 1, 0 < y < 1\}$.

Como $K \subset Dom(f) = \mathbb{R}^2$ é um conjunto compacto e $f(x,y)$ é uma função contínua em K, então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em K.

1. Calculemos o pontos críticos no interior de K.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

   Donde, $x = y = 0$. Como $(0,0) \notin Int(K)$, não temos pontos críticos no interior do compacto.

2. Calculemos o máximos e mínimos na fronteira de K.

   Observe que a fronteira de K é a união dos segmentos $C_1 : \alpha_1(t) = (t,0), t \in [-1,1]$; $C_2 : \alpha_2(t) = (1,t), t \in [0,1]$, $C_3 : \alpha_3(t) = (t,1), t \in [-1,1]$ e $C_4 : \alpha_2(t) = (-1,t), t \in [0,1]$. Estudemos cada segmento por separado:

   (a) Seja $g_1(t) = f(\alpha_1(t)) = f(t,0) = 2t^2,\ t \in [-1,1]$. Donde $g_1'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1,1]$, os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_1 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_1(-1) = f(-1,0) = 2$, $g_1(1) = f(1,0) = 2$ e $g_1(0) = f(0,0) = 0$.

   (b) Seja $g_2(t) = f(\alpha_2(t)) = f(1,t) = 2 + 3t^2,\ t \in [0,1]$. Donde $g_2'(t) = 6t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um extremo do intervalo $[0,1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_2 serão atingidos no instante $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_2(0) = f(1,0) = 2$ e $g_2(1) = f(1,1) = 5$.

   (c) Seja $g_3(t) = f(\alpha_3(t)) = f(t,1) = 2t^2 + 3,\ t \in [-1,1]$. Donde $g_3'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$. Como 0 é um ponto interior do intervalo $[-1,1]$, temos que os valores máximos e mínimos absolutos de f no segmento C_3 serão atingidos no instante $t = -1$, $t = 0$ ou $t = 1$. Temos, $g_3(-1) = f(-1,1) = 5$, $g_3(0) = f(0,1) = 3$ e $g_3(1) = f(1,1) = 5$.

3. Resumindo:

pontos	$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(-1,1)$	$(0,1)$
valores	2	0	2	5	5	3

Comparando todos os valores da tabela, temos que o valor máximo absoluto em K é 5, atingido nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$. Já o valor mínimo absoluto em K é 0, atingido no ponto $(0, 0)$.

Observe que todos os valores são atingidos na fronteira de K, pois f não possui pontos críticos no interior de K.

Na figura a seguir o compacto $K \subset Dom(f)$ está desenhado de cor roxo no plano $z = 0$, Já a imagem do retângulo e seu interior, $f(K) \subset G_f$, está desenhado de cor amarelo. Observe como os pontos mais altos em $f(K)$ são $A = (1, 1, 5)$ e $B = (-1, 1, 5)$; e o ponto mais baixo de $f(K)$ é $C = (0, 0, 0)$.

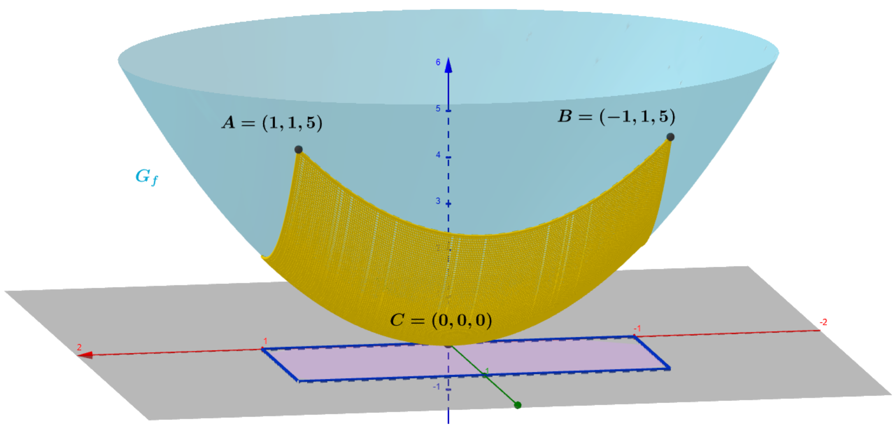

Figure 2: Extremantes absolutos em compactos

Quando a fronteira do compacto é uma curva suave, existe um outro método para calcular os extremantes do item 2 do método para encontrar extremantes absolutos em um conjunto compacto. Esse novo método é devido a Lagrange.

Máximos e mínimos condicionados com uma restrição: Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$.

Seja $C : g(x, y) = 0$ a curva de nível $k = 0$ de g verificando $C \subset D$.

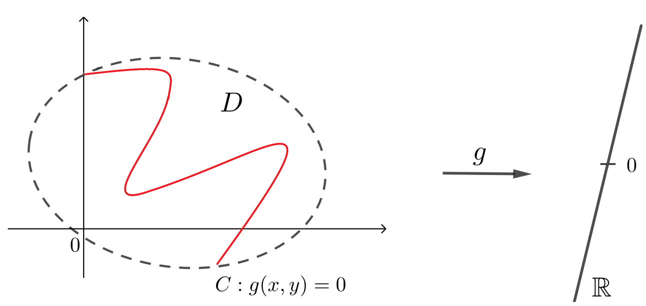

Figure 3: Curva de nível $g(x, y) = 0$

Sejam C_{k_1}, C_{k_2}, C_{k_3}, C_{k_4}, ... curvas de nível de f com $k_1 < k_2 < k_3 < k_4 < \dots$

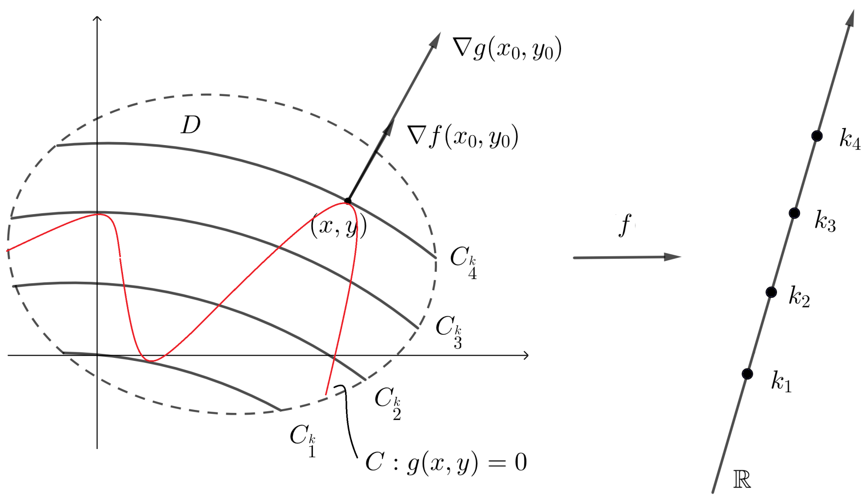

Figure 4: Interpretação geométrica do método dos Multiplicadores de Lagrange

Dizemos que (x_0, y_0) é máximo local (respectivamente, mínimo local) de f sujeito à condição $C : g(x, y) = 0$ se existir uma bola aberta B de centro (x_0, y_0), tal que $f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$ (respectivamente, $f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$), $\forall (x, y) \in B \cap C$.

Teorema 1: Se f, g são de classe C^1 em D e

(a) $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ em C

(b) (x_0, y_0) é um extremante local de f sujeito à condição $g(x, y) = 0$

Então,

$$\nabla f(x_0, y_0) \parallel \nabla g(x_0, y_0).$$

Equivalentemente, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (dito multiplicador de Lagrange), tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Observação:

(I) Para encontrar os candidatos (x_0, y_0) a extremantes locais de $f(x, y)$ sujeito à condição $g(x, y) = 0$, devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) \\ \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ na curva de nível. Depois devemos fazer uma análise dos dados para achar os extremantes globais.

(II) Se a curva $C : g(x, y) = 0$ não for compacta (por exemplo $5x + 4y - 3 = 0$), o Teorema de Weierstrass não se aplica. Portanto não está garantida a existência de extremantes globais na curva C.

(III) Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, funções de classe C^1 de três variáveis. Então o conjunto $C : \ g(x, y, z) = 0$ é uma superfície de nível. Para encontrar os candidatos (x_0, y_0, z_0) a extremantes de $f(x, y, z)$ sujeito à condição $g(x, y, z) = 0$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, sempre que $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{0}$ na superfície de nível.

Exemplo: Determine o máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 - y^2$, sujeito à condição $3x^2 + 2y^2 = 1$.

Note que f e $g(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 1$ são de classe C^1 e $\nabla g(x, y) = (6x, 4y) \neq (0, 0)$ para todo $3x^2 + 2y^2 = 1$. O método dos multiplicadores de Lagrange nos diz que o candidato a máximo absoluto condicionado deve verificar as equações

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} (2x, -2y) = \lambda\,(6x, 4y) \\ \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 6\lambda x \quad (1) \\ -2y = 4\lambda y \quad (2) \\ 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

De (1) temos que $x = 0$ ou $\lambda = \dfrac{1}{3}$. Substituindo $x = 0$ em (3) obtemos $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Portanto os pontos $(0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$ são candidatos a máximo.

Substituindo $\lambda = \dfrac{1}{3}$ em (2) obtemos $-2y = \dfrac{4}{3}y$, donde $y = 0$. Substituindo $y = 0$ em (3), temos que $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Portanto os pontos $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ e $(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, 0)$ também são candidatos a máximo.

Vamos calcular os valores de f nesses pontos:

pontos	$(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$	$(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$
valores	$-1/2$	$-1/2$	$1/3$	$1/3$

Comparando os valores da tabela, temos que o valor máximo de f na curva $C : 3x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ é $1/3$, atingido nos pontos $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$.

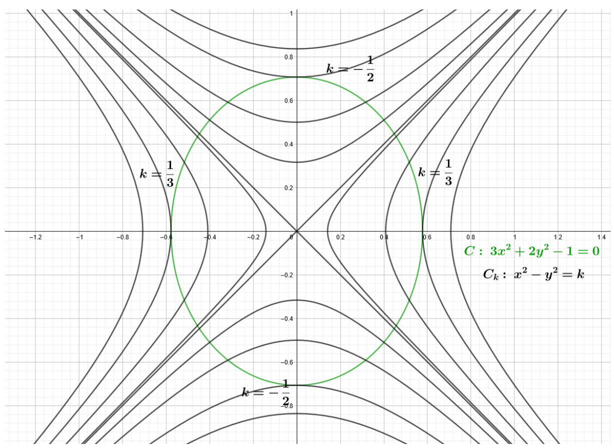

Figure 5: Extremantes de $f(x, y) = x^2 - y^2$ condicionado a $3x^2 + 2y^2 = 1$

Máximos e mínimos condicionados com duas restrições: Sejam $f, g, h : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto. Queremos extremar $f(x, y, z)$ sujeito às condições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$.

Sejam $S_1 : g(x, y, z) = 0$, uma superfície de nível de g, e $S_2 : h(x, y, z) = 0$, uma superfície de nível de h. E seja $C = S_1 \cap S_2$ a curva interseção das duas superfícies.

Se f, g, h são de classe C^1 em D aberto de $\mathbb{R}^3$ com $\nabla g(x, y, z) \neq \vec{O}$ em S_1 e $\nabla h(x, y, z) \neq \vec{O}$ em S_2. Temos que

$\nabla g\,(x_0, y_0, z_0) \perp S_1$ em (x_0, y_0, z_0) e

$\nabla h\,(x_0, y_0, z_0) \perp S_2$ em (x_0, y_0, z_0).

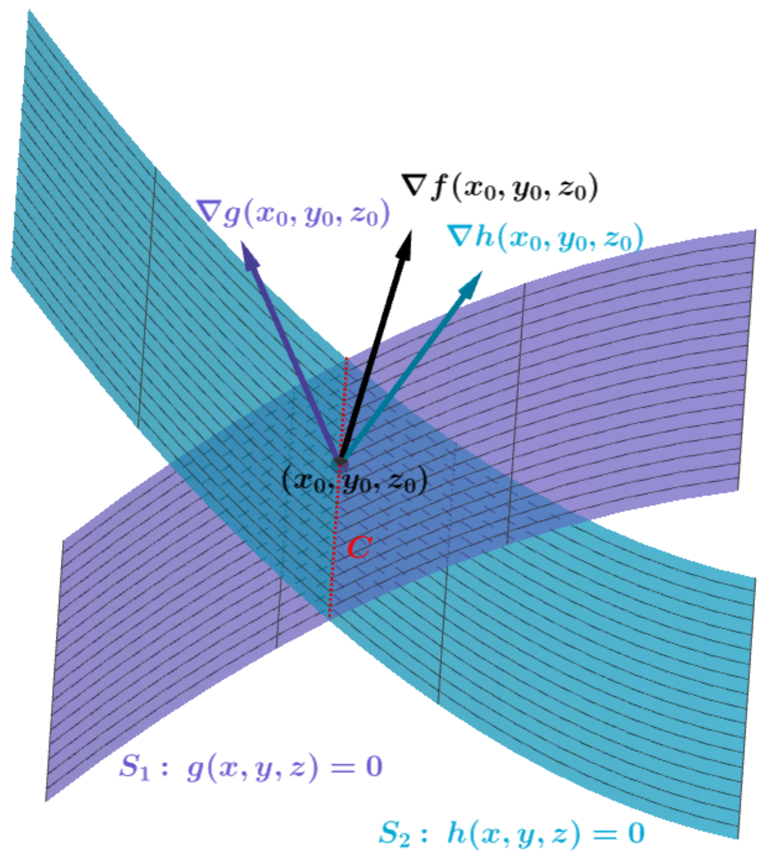

Figure 6: Multiplicadores de Lagrange com duas restrições

Se (x_0, y_0, z_0) é um extremante local de $f(x, y, z)$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, então

(a) $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ está no plano determinado por $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ e $\nabla h(x_0, y_0, z_0)$. Isto é, $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$, para alguns $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(b) $g\,(x_0, y_0, z_0) = 0$

(c) $h\,(x_0, y_0, z_0) = 0$

Portanto, para encontrar os candidatos a extremantes locais de $f(x, y, z)$ sujeito às condições $g(x, y, z) = 0$ e $h(x, y, z) = 0$, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

<u>Exemplo:</u> Encontre os pontos de máximo e mínimo de $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeito às restrições $x^2 + y^2 = 2$ e $x + z = 1$.

Devemos resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$ e $h(x, y, z) = x + z - 1$.

Temos

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x + \mu & (1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = \mu & (3) \\ x^2 + y^2 = 2 & (4) \\ x + z = 1 & (5) \end{cases}$$

De (1) e (3), temos $2\lambda x = 0$, donde $\lambda = 0$ ou $x = 0$. Se $\lambda = 0$ então de (2) temos $1 = 0$, o que é absurdo. Logo, $x = 0$. De (4) e (5) termos $y = \pm\sqrt{2}, z = 1$. Assim, $(0, \sqrt{2}, 1)$ e $(0, -\sqrt{2}, 1)$ são candidatos a extremantes. Como f é contínua e a curva $C : \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weierstrass temos máximo e mínimo absolutos. Como $f(0, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1 > f(0, -\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1$, então f tem máximo $1 + \sqrt{2}$ em $(0, \sqrt{2}, 1)$ e mínimo de $1 - \sqrt{2}$ em $(0, -\sqrt{2}, 1)$.

Exemplos

1. Uma placa metálica tem a forma de um disco $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Ela é aquecida de modo que a temperatura num ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 3x^2 + 2y^2 + \dfrac{y^3}{9}$. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

   Solução

   Como D é um conjunto compacto e $T(x, y)$ é uma função contínua em D, então o Teorema de Weierstrass nos garante a existência de máximo e mínimo em D.

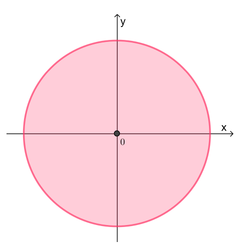

Figure 7: $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$

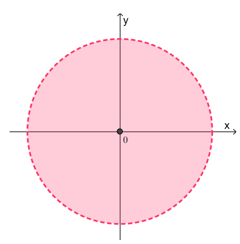

Figure 8: $Int(D) : x^2 + y^2 < 1$

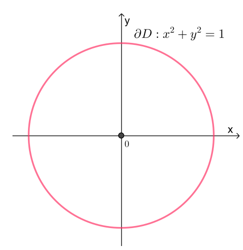

Figure 9: $Fr(D) : x^2 + y^2 = 1$

Em $Int(D)$, no interior de D, temos $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 6x$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 4y + \frac{y^2}{3}$.

Os pontos críticos em $Int(D)$ são encontrados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 0 \\ 4y + \frac{y^2}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y\left(4 + \frac{y}{3}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad y = -12$$

Portanto, $(0,0),(0,-12)$ são as soluções. Como $(0,-12)\notin D$, então $(0,0)$ é o único ponto crítico de T em $Int(D)$. Temos $T(0,0)=0$.

Na fronteira de D $(Fr(D))$ é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1. Uma parametrização da curva seria $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Logo, a temperatura em $Fr(D)$ é dada por

$$T(t)=T(\cos t,\sin t)=3\cos^3 t+2\,\mathrm{sen}^2\,t+\frac{\mathrm{sen}^3\,t}{3},\quad 0\leq t\leq 2\pi.$$

Em $]0,2\pi[$: $T'(t)=0\Leftrightarrow 6\cos t(-\,\mathrm{sen}\,t)+4\,\mathrm{sen}\,t\cos t+\frac{3\,\mathrm{sen}^2\,t}{3}\cos t=0\Leftrightarrow$

$-2\,\mathrm{sen}\cos t+\mathrm{sen}^2\,t\cos t=0\Leftrightarrow \mathrm{sen}\,t\cos t(-2+\mathrm{sen}\,t)=0\Longrightarrow \mathrm{sen}\,t\cos t=0$ ou $\underbrace{\mathrm{sen}\,t=2}_{\text{absurdo!}}\Rightarrow \mathrm{sen}\,t\cos t=0 \overset{0<t<2\pi}{\Longrightarrow} t=\frac{\pi}{2},\quad t=\frac{3\pi}{2},\quad t=\pi.$

Temos

$$T\left(\frac{\pi}{2}\right)=T(0,1)=2+\frac{1}{\frac{1}{9}}=\frac{19}{9},T(\pi)=T(-1,0)=3,T\left(\frac{3\pi}{2}\right)=T(0,-1)=\frac{17}{9}$$

Na fronteira de $[0,2\pi]$: 0 e 2π

Temos $T(0)=T(1,0)=3$, $T(2\pi)=T(1,0)=3$.

Comparando todos os valores encontrados, temos

$$0=T(0,0)<3=T(1,0)=T(-1,0).$$

Assim, a temperatura mínima é 0 e ocorre em $(0,0)$ e a temperatura máxima é 3, ocorrendo em $(1,0)$ e $(-1,0)$.

2. Encontre o máximo e o mínimo da função $f(x,y)=x^2+3xy-3x$ definida em $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\}$.

Solução

Como a função f é contínua no compacto D, então pelo teorema de Weierstrass existem máximo e mínimo em D.

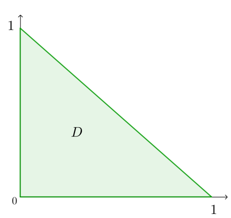

Figure 10: $D: x\geqslant 0, y\geqslant 0,$ $x+y\leqslant 1$

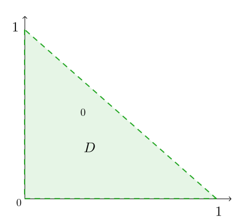

Figure 11: $D: x,y>0,$ $x+y<1$

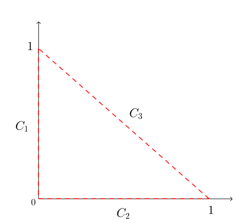

Figure 12: $D: 0\leqslant x\leqslant 1\wedge y=0,$ $0\leqslant y\leqslant 1\wedge x=0,$ $0\leqslant x\leqslant 1\wedge y=1-x$

No interior de D, os pontos críticos são encontrados resolvendo o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lr} 2x+3y-3=0 & (1) \\ 3x=0 & (2) \end{array}\right.$$

$(2) \Rightarrow x=0 \Rightarrow 3y-3=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow (0,1)$.

Como $(0,1) \notin Int(D)$, então não existem pontos críticos de f no interior de D. Portanto, os extremantes absolutos estão na fronteira de D.

Temos $Fr(D) = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde

$C_1 : x=0, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1; \quad C_2 : y=0, 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad C_3 : y = 1-x, 0 \leqslant x \leqslant 1.$

Em $C_1 : g_1(x) = f(x,y) = f(0,y) = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Função constante.

Em $C_2 : g_2(x) = f(x,y) = f(x,0) = x^2 - 3x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0,0)=0$ e mínimo $f(1,0)=-2$.

Em $C_3 : g_3(x) = f(x,y) = f(x,1-x) = x^2+3x(1-x)-3x = x^2+3x-3x^2-3x = -2x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. O gráfico da função é uma parábola com valor máximo $f(0,1)=0$ e mínimo $f(1,0)=-2$.

Portanto, o valor máximo de f em $Fr(D)$ é 0 e ocorre em todos os pontos da curva C_1. Já o valor mínimo é -2 e é atingido no ponto $(1,0)$.

3. Determine o máximo de $f(x,y) = x+y$, sujeito à condição $x^2+y^2=1$.

Solução

Seja $g(x,y) = x^2+y^2-1$. Queremos maximizar $f(x,y) = x+y$ sujeito a $g(x,y)=0$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=0 \end{array}\right.$$

ou

$$\left\{\begin{array}{c} (1,1) = \lambda(2x,2y) \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{cr} 1 = 2\lambda x & 1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ x^2+y^2=1 & (3) \end{array}\right.$$

$(1),(2) \underset{4\neq 0}{\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}} \lambda = \dfrac{1}{2x}, \lambda = \dfrac{1}{2y} \Rightarrow 2x = 2y \Rightarrow x = y \Rightarrow 2x^2 = 1.$

Portanto, $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, x = y$. Daí, $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ são os candidatos a extremantes locais.

Como $f(x,y) = x + y$ é contínua e $C : x^2 + y^2 = 1$ é um conjunto compacto, então pelo teorema de Weiererstrass f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C. Aliás,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} > f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2},$$

então o ponto de máximo é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e o valor máximo é $\sqrt{2}$.

4. Encontre os pontos da elipse $x^2 + xy + y^2 = 3$ mais próximos e mais afastados da origem.

Solução

A distância de (x,y) à origem é dada por $d(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Então, devemos minimizar $f(x,y) = d^2(x,y) = x^2 + y^2$ sujeito a $g(x,y) = 0$, onde $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2x = \lambda(2x+y) & 1) \\ 2y = \lambda(x+2y) & (2) \\ x^2+xy+y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} (2-2\lambda)x - \lambda y = 0 \\ -\lambda x + (2-2\lambda)y = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Como $(0,0)$ não satisfaz (3), então o sistema (4) admite solução não trivial. Logo, o determinante dos coeficientes deve ser nulo. Isto é :

$$\begin{vmatrix} 2-2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-2\lambda)^2 - \lambda^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2-2\lambda-\lambda)(2-2\lambda+\lambda) = 0 \Rightarrow (2-3\lambda)(2-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3} \text{ ou } \lambda = 2$$

Se $\lambda = \frac{2}{3}$, então $\left(2 - \frac{4}{3}\right)x - \frac{2}{3}y = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 0$. Portanto, $y = x$ e substituindo em (3), temos que $3x^2 = 3$. Logo $x = \pm 1$ e $y = x$. Donde, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são candidatos a extremantes.

Se $\lambda = 2$, então $(2-4)\,x - 2y = 0 \Rightarrow -2x - 2y = 0$. Portanto, $y = -x$ e substituindo em (3), temos que $x^2 = 3$. Logo $x = \pm\sqrt{3}$ e $y = -x$. Donde, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ também são candidatos a extremantes.

Como $C : x^2 + xy + y^2 = 3$ é um conjunto compacto e f é contínua, então f assume máximo absoluto e também mínimo absoluto em C.

Temos

$$f(1,1) = f(-1,-1) = 2 < f(\sqrt{3}, -\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 6,$$

então os pontos mais próximos da origem são $(1,1)$ e $(-1,-1)$; e os pontos mais afastados da origem são $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ e $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

5. Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$, cuja soma das coordenadas seja máxima.

Solução

Queremos maximizar $f(x, y, x) = x + y + z$ sujeito a $g(x, y, z) = 0$, onde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$.

Tanto f quanto g são funções de classe C^1, então para aplicar Multiplicadores de Lagrange devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = 2\lambda x & 1) \\ 1 = 2\lambda y & (2) \\ 1 = 2\lambda z & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12 & (4) \end{cases}$$

Como $x, y, z \neq 0$, de $(1), (2), (3)$ temos que $\lambda = \dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2y} = \dfrac{1}{2z}$. Donde $x = y = z$. Substituindo em (4), $3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4$. Daí $x = \pm 2$, $x = y = z$. Portanto, os pontos $(2, 2, 2)$ e $(-2, -2, -2)$ são candidatos a extremantes.

Como a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ é um conjunto compacto e f é contínua, pelo teorema de Weierstrass tem-se que f admite máximo absoluto em mínimo absoluto na esfera. Como $f(2, 2, 2) = 6 > f(-2, -2, -2) = -6$, então $(2, 2, 2)$ é o ponto da esfera cuja soma das coordenadas é a máxima possível.

Exercícios

1. Encontre os valores extremos absolutos de $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 6x$ na região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 3x\}$.

2. Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 + 2y^2)$ em D: $x^2 + y^2 \leq 9$.

3. Encontre os extremantes absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ no disco $D : \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4. A temperatura em qualquer ponto (x, y) do plano é dada por $T(x, y) = x^2 - x + 2y^2$. Qual a temperature máxima e minima num disco fechado de raio 1 centrado na origem?

5. Estude os máximos e mínimos absolutos da função

   (a) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, restrita a $x^2 + y^2 = 1$

(b) $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, restrita a $x^2 + y^2 - 2x = 0$

6. Determine o ponto do elipsoide $x^2+4y^2+z^2 = 1$ que maximiza a soma $x+2y+z$.

7. Em que pontos da elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a reta tangente forma com os eixos coordenados um triângulo de área mínima?

8. Seja $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$.

   (a) Determine os extremantes locais de f em $\mathbb{R}^2$.

   (b) A temperatura em uma chapa $D = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 9\}$ é dada por $f(x,y) = 3x^2 + 2\sqrt{2}xy + 4y^2$. Determine o máximo e mínimo valor da temperatura (se existirem) em D.

Respostas

1. Máximo absoluto é 0, em $(0,0)$ e o mínimo absoluto é -16 em $(2,0)$

2. Máximo absoluto é $18e^{-9}$ em $(0,3)$ e $(0,-3)$; mínimo absoluto 0 em $(0,0)$.

3. Máximo absoluto é $13 + 6\sqrt{2}$ em $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; mínimo absoluto é 2 em $(1,1)$.

4. Temperatura máxima é $\frac{9}{4}$ em $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e temperatura mínima é $-\frac{1}{4}$ em $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

5. (a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ponto de minimo; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ pontos de máximo

   (b) $(2,0)$ ponto de máximo; $\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ pontos de mínimo.

6. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

7. $\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, b\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}, -\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$

8. (a) $(0,0)$ é ponto de mínimo local

   (b)