Funções escalares de várias variáveis

Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Objetivos:

- vetor gradiente;
- regra da cadeia: derivação de composição de funções;
- derivação implícita; teorema da função implícita.

Vetor Gradiente

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em $(a, b) \in D$. O vetor

$$\nabla(a,b) = gradf(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

é dito (vetor) gradiente de f em (a, b).

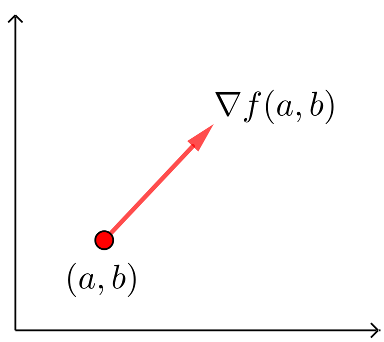


Figure 1: Vetor gradiente

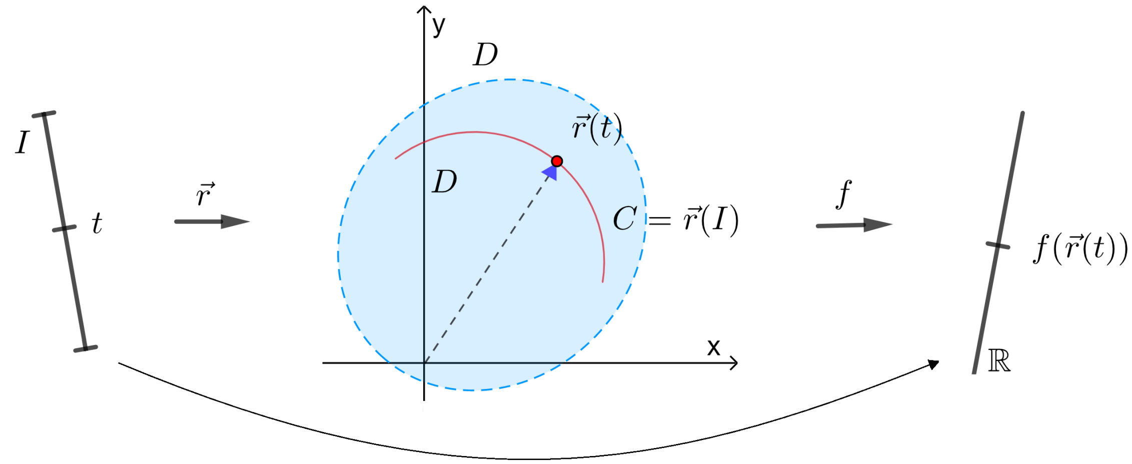
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que admite derivadas parciais em (a, b, c). Então

$$\nabla f(a,b,c) = gradf(a,b,c) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c), \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\right)$$

Teorema: Regra da Cadeia (derivada de função composta)

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tais que $\vec{r}(t) \in D$, para todo $t \in I$. Se $\vec{r}$ for diferenciável em t_0 e f diferenciável em $\vec{r}(t_0)$, então a composta $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em t_0 e

$$g'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0)$$



$$g = f \circ \vec{r} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto g(t) = f(\vec{r}(t))$$

Figure 2: Composição de funções

Observações

(I) Se f for diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{r}$ diferenciável em $I \subset \mathbb{R}$, então $g(t) = f(\vec{r}(t))$ é diferenciável em I e $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ para todo $t \in I$.

(II) Para $n = 2$, temos $z = f(x, y)$, $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ portanto,

$$\nabla f\,(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right), \quad \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right).$$

Então,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), g(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

ou

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $z'(t)$, $\dfrac{dz}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

(III) Para $n = 3$, temos $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$.

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Por abuso de notação, as vezes se escreve $g'(t)$ como $w'(t)$, $\dfrac{dw}{dt}$ ou $\dfrac{df}{dt}$.

Uma consequência da regra da cadeia

(I) Seja $z = f(x, y)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^2$, D aberto. Sejam $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v)) \in D$. Então, a composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v))\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial uv} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial xv}$$

(II) Sejam $w = f(x, y, z)$ diferenciável em $D \subset \mathbb{R}^3$, D aberto, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ diferenciáveis no aberto $E \subset \mathbb{R}^2$, tais que $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \subset D$. Então, a composta

$$\omega = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável em $E \subset \mathbb{R}^2$ e, abreviadamente,

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Derivação implícita

Definição 1: Uma função $y = g(x), x \in I$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y) = 0$ se $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Supondo F e g diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

Supondo que $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$, temos

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

ou, equivalentemente,

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in I.$$

Problema 1: Encontrar condições para que a equação $F(x,y) = 0$ defina implicitamente uma função diferenciável $y = g(x)$.

A solução do Problema 1 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0, y_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0, y_0) = 0$

(ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança I de x_0 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0) = y_0$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

Definição 2: Uma função $z = g(x,y)$, $(x,y) \in D$ é definida implicitamente pela equação $F(x,y,z) = 0$ se $F(x, y, g(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in D$.

Supondo F e g diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y)) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y)) \end{cases}$$

Supondo $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$, $\forall (x,y) \in D$, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,g(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla g(x,y) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,g(x,y))\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,g(x,y))}, \quad \forall (x,y) \in D$$

Problema 2: Em que condições a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função diferenciável $z = g(x,y)$?

A solução do Problema 2 é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (da função implícita): Seja $F : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 no conjunto aberto D. Seja $(x_0,y_0,z_0) \in D$, tal que

(i) $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Então, existe uma vizinhança V de (x_0,y_0) e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(x_0,y_0) = z_0$ e $F(x,y,g(x,y)) = 0$, $\forall (x,y) \in U$.

Observação

(I) O gráfico das função $y = g(x)$ dada pelo Teorema 1 da função implícita está incluído na curva de nível $F(x,y) = 0$.

(I) O gráfico das função $z = g(x,y)$ dada pelo Teorema 2 da função implícita está incluído na superfície de nível $F(x,y,z) = 0$.

Exemplos

1. Seja $f(x,y) = 2\,\text{arctan}\,\dfrac{x}{y}$. Calcule $\nabla f(1,1)$.

   Solução

   Temos $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{2\cdot\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}, \dfrac{-2\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} \right) = \left(\dfrac{2y}{x^2+y^2}, \dfrac{-2x}{x^2+y^2} \right)$.

   Assim, $\nabla f(1,1) = (1,-1)$.

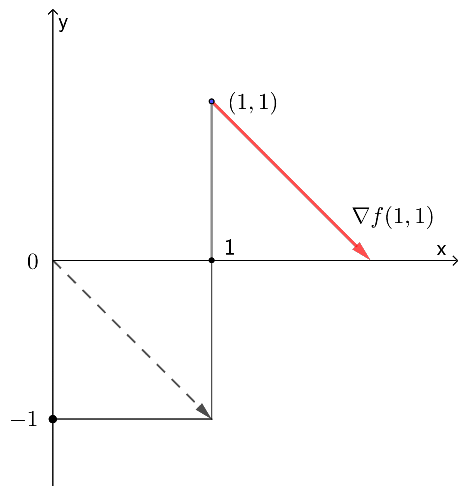


Figure 3: Vetor gradiente de $f(x,y) = 2\,\text{arctan}\,\dfrac{x}{y}$ no ponto $(1,1)$

2. Seja $f(x,y,z) = \sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}$. Calcule $\nabla f(-1,1,1)$.

   Solução

   Temos $\nabla f(x,y,z) = \left(\dfrac{4x}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}}, \dfrac{6y}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}}, \dfrac{8z}{2\sqrt{2x^2+3y^2+4z^2}} \right)$.

   Assim, $\nabla f(-1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$.

3. Seja $g(t) = f(3\,\text{sen}\,t, e^{t^2})$.

   (a) Expresse $g'(t)$ em termos das derivadas parciais de f.

   (b) Calcule $g'(0)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{3}$.

   Solução

   (a) Temos $g(t) = f(x,y)$ com $x = 3\,\text{sen}\,t$, $y = e^{t^2}$. Pela regra da cadeia, temos:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(3\cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\left(2te^{t^2}\right)$$

(b) Temos

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0))(3\cos 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0))\cdot 0 = 3\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 3\cdot\frac{1}{3} = 1.$$

4. Suponha que, para todo t, $f\left(3t, t^3\right) = \arctan t$, onde $f(x,y)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,1)$, admitindo que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}$.

   (b) Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(1,3))$.

Solução

(a) Seja $g(t) = f(x,y)$, com $x = 3t, y = t^3$. Pela regia da cadeia, temos para todo t :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{3} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3t^2} = 3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t, t^3\right) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}\left(3t, t^3\right).$$

Como $f\left(3t, t^3\right) = \arctan t$, entas $g(t) = \arctan t$. Derivando em relação a t, temos para todo t : $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$, ou seja,

$$3\frac{\partial f}{\partial x}\left(3t, t^3\right) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}\left(3t, t^3\right) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Para $t = 1$, temos:

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = \frac{1}{2}$, então, $3\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$, donde $\frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -\frac{1}{3}$.

(b) A equação do plano tangente é :

$$z = f(3,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3,1)(x-3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3,1)(y-1),$$

onde $f(3,1) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Então, temos

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(x-3) + \frac{1}{2}(y-1).$$

5. Suponha que $f(x,y)$ seja de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Seja $g(t) = f(3t, 2t+1)$. Expresse $g''(t)$ em ternos das derivadas parciais de f.

Solução

Temos $g(t) = f(x,y)$, onde $x = 3t, y = 2t+1$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

ou seja,

$g'(t) = 3\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, onde $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são funções compostas.

Então, novamente, pela regra da cadeia, temos:

$$g''(t) = 3\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2}\right]$$

$$+2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2}\right]$$

$$= 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 6\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} + 6\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

Como f é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$, então pelo Teorema de Schwarz, temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$.

Logo,

$$g''(t) = 9\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 12\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

ATENÇÃO: "Uma vez regra da cadeia, regra da cadeia até morrer"

6. A curva C parametrizada por $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x,y)$. Sabe-se que $f(2,1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a C no ponto $\vec{r}(1)$.

Solução

A equação da reta tangente a C em $\vec{r}(1)$ é dada por:

$$(x,y,z) = \vec{r}(1) + \lambda\vec{r}'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $z = f(x,y)$, então $z(t) = f(2t, t^2)$, e portanto, $z(1) = f(2,1) = 3$. Logo, $\vec{r}(1) = (2,1,3)$. Temos $\vec{r}'(t) = (2, 2t, z'(t))$, donde $\vec{r}'(1) = (2, 2, z'(1))$.

Como $z = f(x,y)$, com $x = 2t$, $y = t^2$, então, pela regra da cadeia, temos

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2t\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

donde,

$$z'(1) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Portanto, $\vec{r}'(1) = (2,2,0)$. Assim, a equação da reta tangente é:

$$(x,y,z) = (2,1,3) + \lambda(2,2,0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Seja $z = f\left(u^2 - v^2, 2uv\right)$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

Temos $z = f(x,y)$, onde $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v} = 2u\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2v\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\
&= 2u\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right) + 2v\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right) \\
\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u} = -2v\frac{\partial f}{\partial x}\left(u^2 - v^2, 2uv\right) \\
&\qquad + 2u\frac{\partial f}{\partial y}\left(u^2 - v^2, 2uv\right).
\end{aligned}$$

8. Seja, $z = f(u - 2v, v + 2u)$, onde $f(x,y)$ é de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Expresse $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução

Seja $z = f(x,y)$, onde $x = u - 2v, y = v + 2u$. Donde, $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial v} = -2$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 2$, $\frac{\partial y}{\partial v} = 1$.

Pela regra da cadeia, temos

$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ com $x = u - 2v, y = v + 2u$ são funções compostas, então, para derivá-las, usamos a regra da cadeia. Temos, então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] \\
&\quad + 2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right] \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).
\end{aligned}$$

Como f é de classe C^2, então pelo teorema de Schwarz, segue que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

Logo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$

9. Determine as equações das retas tangente e normal á curva $C : e^{2x-y}+2x+2y = 4$ ene $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Solução

Seja $f(x,y) = e^{2x-y} + 2x + 2y$. Logo, $f\left(\frac{1}{2},1\right) = = e^{i-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$.

Então C é a curva de nível de f no nível 4. Temos $\nabla f(x,y) = (2e^{2x-y} + 2, -e^{2x-y} + 2)$, donde $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right) = (2e^{1-1} + 2, -e^{1-1} + 2) = (4,1)$. Sabemos que $\nabla f\left(\frac{1}{2},1\right)$ é normal a C em $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Reta tangente: $\left[(x,y) - \left(\frac{1}{2},1\right)\right], \nabla f\left(\frac{1}{2},1\right) = 0$, donde $\left(x - \frac{1}{2}, y - 1\right) \cdot (4,1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -4x + 3$

Reta normal: $(x,y) = \left(\frac{1}{2},1\right) + \lambda \nabla f\left(\frac{1}{2},1\right), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,y) = \left(\frac{1}{2},1\right) + \lambda(4,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

10. Determine as equações do plano tangente e da reta normal a superfície $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1,-1,2)$.

Solução

Seja $f(x,y,z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$.

Logo, $f(1,-1,2) = -2+1-1+8-6 = 0$. Então, S é a superfície de f no nível 0. Temos $\nabla f(x,y,z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$, donde $\nabla f(1,-1,2) = (-2+3, 2+3, -1+12-3) = (1,5,8)$.

Sabemos que $\nabla f(1,-1,2)$ é perpendicular a S em $(1,-1,2)$.

Plano tangente: $[(x,y,z)-(1,-1,2)] \cdot \nabla f(1,-1,2) = 0 \Leftrightarrow (x-1, y+1, z-2) \cdot (1$ $\Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$. Reta normal: $(x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda \nabla f(1,-1,2), \lambda \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x,y,z) = (1,-1,2) + \lambda(1,5,8), \lambda \in \mathbb{R}$.

11. Mostre que a equação $x^2 y + 3y^3 x^4 = 4$ define uma funcas implícita no ponto $(1,1) : y = g(x)$. Calcule $g'(1)$.

Solução

Seja $F(x,y) = x^2 y + 3y^3 x^4 - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Temos:

(i) $F(1,1) = 1 + 3 - 4 = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1) = [x^2 + 9y^2 x^4]_{(1,1)} = 1 + 9 = 10 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança I de 1 e uma função de classe C^1, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1) = 1$ e $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in I$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$g'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

Logo,

$$g'(1) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1)} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5},$$

pois $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + 12y^3x^3$, daí $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 2 + 12 = 14$.

12. Mostre que a equação $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$ define uma função implícita diferenciável $z = g(x, y)$ no ponto $(1, 1, 2)$. Calcule $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1)$.

Solução Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Temos

(i) $F(1, 1, 2) = 1 + 1 + 8 - 6 - 4 = 0$;

(ii) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2) = 3z^2 - 3xy|_{(1,1,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0$.

Logo, pelo teorema da funca implícita, existe uma vizinhança V de $(1, 1)$ e uma função de classe C^1, $g : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $g(1, 1) = 2$ e $F(x, y, g(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in V$.

E aplicando a regra da cadeia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\dfrac{3x^2 - 3yz|_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \\[2em] \dfrac{\partial g}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\dfrac{3y^2 - 3xz|_{(1,1,2)}}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Exercícios

1. Suponha que para todo t, $f\left(t^2, 2t\right) = t^3 - 3t$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

2. Admita que para todo $(x,y), x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, onde $f(x,y)$ é diferenciável. Mostre que $g(t) = f\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$ é constante.

3. Seja $F(x,y,z) = f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. Mostre que $x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y} + z\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$.

4. Seja $g(x,y) = xf\left(x^2 + y, 2y, 2x - y\right)$, onde fé diferenciável. Expresse $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ em termos das derivadas parciais de f.

5. Suponha que $z = f(x,y)$ é uma função de classe C^1, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x,y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2\,\mathsf{sen}\, t, -3 + 7\cos t, z(t))$, onde t representa o tempo. Qual é a componente vertical da velocidade do ponto no instante em que suas coordenadas são $(2,-3,6)$.

6. Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta, y = r\,\mathsf{sen}\,\theta$, sendo $f(x,y)$ diferenciável. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) + \mathsf{sen}\,\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

7. Se $u = x^m f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$, onde f é diferenciável. Mostre que $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = mu$.

8. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x,y)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$. Sabe-se que $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 2$. Calcule $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)$, sendo $U(\rho,\theta) = T(\rho\cos\theta, \rho\,\mathsf{sen}\,\theta)$.

9. Seja $\omega = f(x,y)$, onde f é diferenciável, se $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\,\text{sen}\,\theta$, mostre que
$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\theta}\right)^2.$$

10. Seja $v(r,\theta) = u(x,y)$, onde $x = r\cos\theta, y = r\,\text{sen}\,\theta$. Verifique que
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}$$

11. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 = (0,0,0)$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$, $f(P_0) = 1$. Defina $g(u,v) = f(u-v, u^2-v, 3v-3)$ e calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,1)$.

12. Expresse $g''(t)$ em termos das derivadas parciais de f, sendo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e sendo
$$g(t) = f(1-t, t^2)$$

13. Considere $h(u,v) = f(u^2v^2, 2uv)$ onde $f(x,y)$ é uma função de classe C^2. Expresse $\dfrac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u,v)$ em termos das derivadas parciais da função f.

14. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,1)$ onde $z = f(x,y)$ é uma função de classe C^1 definida implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ sabendo que $f(1,1) = 1$.

15. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$ no ponto $(4,-1,1)$.

16. Determine uma reta que seja tangente a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 17$.

17. Determine um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

18. Considere a função $z = \frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$. Determine as equações do plano tangente y e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2,2,1)$.

19. Considere a curva C intersecção das superfícies de equações $S_1 : x^2 - 2xz + y^2 z = 3$ e $S_2 : 3xy - 2yz = -2$. Determine:

    (a) um vetor tangente a C em $(1,-2,1)$.

(b) Os pontos do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

20. A equação $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$ define uma função $z = f(x, y)$ implicitamente em torno do ponto $Q = (\sqrt{2}, 0, 1)$? E do ponto $P = (\sqrt{2}, 0, 0)$? Calcule, quando possível, $\nabla f(\sqrt{2}, 0)$.

Solução

1. sem resposta
2. sem resposta
3. sem resposta
4. $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(u, v, \omega) + x\left[2x\frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega)\right]$
   $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x\left[\frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(u, v, \omega) - \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega)\right]$,
   onde $u = x^2 + y, v = 2y, \omega = 2x - y$.
5. 7
6. sem resposta
7. sem resposta
8. $\rho \cos\theta \frac{\partial T}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}^2\theta \frac{\partial T}{\partial x^2}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$
9. sem resposta
10. sem resposta
11. $2x - 2y - z + 1 = 0$
12. $g''(t) = f_{xx}(1 - t, t^2) - 4tf_{xy}(1 - t, t^2) + 4t^2 f_{yy}(1 - t, t^2) + 2f_y(1 - t, t^2)$.
13. $\dfrac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v) = 2v^2 f_x(u^2v^2, 2uv) + 4u^2v^4 f_{xx}(u^2v^2, 2u) + 8uv^3 f_{xy}(u^2v^2, 2uv) + 4v^2 f_{yy}(u^2v^2, 2uv)$.
14. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -3$.
15. $2x + y - 2z = 5; (x, y, z) = (4, -1, 1) + \lambda(8, 4, -8), \lambda \in \mathbb{R}$
16. $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$ ou $y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1)$
17. $x + y + z = \frac{11}{6}$ on $x + y + z = -\frac{11}{6}$
18. $x - 7y - 16z = -28$
19. (a) $(3, 2, 4)$
    (b) $(6, 4, -8)$ e $(-6, -4, 8)$
20. O ponto Q não verifica a equação implícita; aplicando o teorema da função implícita para P obtemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, 0) = -2$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, 0) = 0$