



# Funções escalares de várias variáveis

## Cálculo de limites. Continuidade

### Objetivos:

- teorema do confronto; teorema do anulamento;
- coordenadas polares; coordenadas esféricas;
- continuidade

**Teorema do Confronto:** Se  $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$  em  $B_r(a, b)$  e se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$ .

**Teorema do Anulamento:** Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$  e  $g(x, y)$  é limitada em  $B_r(a, b)$ , isto é, se  $|g(x, y)| \leq M, \forall (x, y) \in B_r(a, b)$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = 0$ .

### Observação

$$(I) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = 0.$$

- (II) No caso de funções de duas variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta,$$

onde  $\rho \geq 0$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Por exemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \cos(\rho^2) = 0,$$

pois  $|\rho \sin \theta \cos(\rho^2)| \leq \rho$  para todo  $\theta$ .

- (III) No caso de funções de três variáveis, podemos calcular o limite passando a coordenadas esféricas

$$x = \rho \cos \phi \cos \theta \quad y = \rho \cos \phi \sin \theta \quad z = \rho \sin \phi,$$

onde  $\rho \geq 0$ ,  $\phi \in [0, \pi]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Por exemplo:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \phi \sin \phi \cos \theta \sin \theta = 0,$$

pois  $|\rho \cos^2 \phi \sin \phi \cos \theta \sin \theta| \leq \rho$  para todo  $\theta, \phi$ .

**Continuidade:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in D$ , ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $P$  se

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P)$$

Se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $D$ , dizemos que  $f$  é contínua.

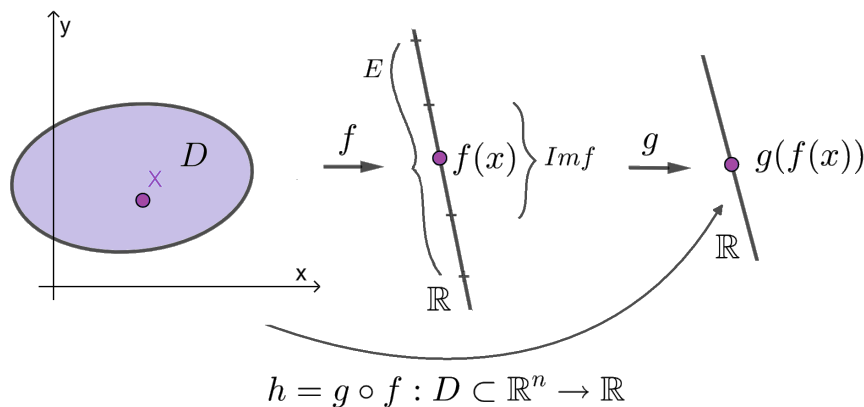
**Propriedades:** Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $P \in D$ . Então as seguintes funções também são contínuas em  $P$ :

- (a)  $f \pm g$
- (b)  $f \cdot g$
- (c)  $\frac{f}{g}$ , desde que  $g(P) \neq 0$

Observações:

- (I) Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma  $cx^n y^m$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , inteiros não negativos. Portanto, usando propriedades de funções contínuas, segue que toda função polinomial é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .
- (II) Analogamente, as funções polinomiais de  $n$  variáveis são contínuas em  $\mathbb{R}^n$ .
- (II) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Portanto, toda função racional é contínua nos pontos onde o denominador não se anula, isto é, em seu domínio.

**Teorema:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $Im(f) \subset E$ . Se  $f$  for contínua em  $p$  e  $g$  contínua em  $f(p)$ , então a composta  $h = g \circ f$  é contínua em  $p$ .



**Figure 1: Continuidade da função composta**

## Exemplos

1. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ , se existir.

**Solução:** Temos

$$0 < \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ , então pelo Teorema do Confronto, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = 0, \text{ donde } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

2. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ , se existir.

**Solução:** Temos que  $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ , pelo que  $\left| \frac{y^2}{y^2 + x^2} \right| \leq 1$ . Aliás,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ , então pelo Teorema do Anulamento,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

3. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$ , se existir.

**Solução:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2) = 0$ , pois

$$|\rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2)| \leq \rho \ln(\rho^2)$$

e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln(\rho^2) = 0$  aplicando L'Hopital.

4. Seja  $f(x, y)$  contínua, então  $\operatorname{sen}(f(x, y))$ ,  $\ln(f(x, y))$ ,  $\sqrt{f(x, y)}$  são funções contínuas.

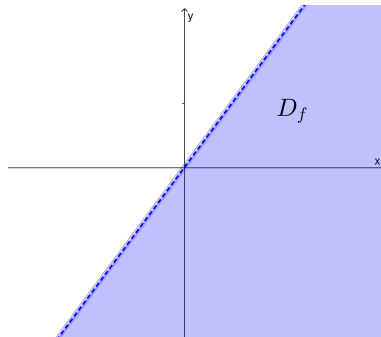
5. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{3x^2+3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de  $f$ .

**Solução:** Observemos que  $D_f = \mathbb{R}^2$ . Por propriedades de continuidade, segue que  $f$  é contínua em  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Ora, Vimos na Aula 4, Exemplo 4, que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Logo,  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de  $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$ .

**Solução:** O domínio de  $f$  é determinado pela desigualdade  $\frac{x-y}{x^2+y^2} > 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , donde  $x > y$ . Então,  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$



**Figure 2: Domínio função  $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$**

A função  $f$  é a composta das funções  $h(u) = \ln u$  e  $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ . Como  $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$  é contínua em  $D_f$  por ser racional e  $h(u) = \ln u$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$  por ser logarítmica, então a composta  $f = h \circ g$  é contínua em  $D_f$ .

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

**Solução:** Temos  $D_f = D_1 \cup D_2 \cup C$ , onde  $D_1 : x^2 + y^2 > 4$ ,  $D_2 : x^2 + y^2 < 4$  e  $C : x^2 + y^2 = 4$ .

Temos:

- i  $f$  é contínua em  $D_1$ , pois  $f(x, y) = 0$  (função constante) em  $D_1$ ;
- ii  $f$  é contínua em  $D_2$ , pois  $f(x, y)$  é uma função polinomial em  $D_2$ ;
- iii Temos  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 4 + 1 = 5$  em  $C$ . Seja  $(a, b) \in C$ .

Então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 5$  ao longo de  $C$ . Seja  $C_1$  uma curva passando por  $(a, b)$  e contida em  $D_1$ . Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \neq 5$ , ao longo de  $C_1$ .

Assim,  $f$  não é contínua em  $C$  e portanto, o conjunto de continuidade de  $f$  é  $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$ .

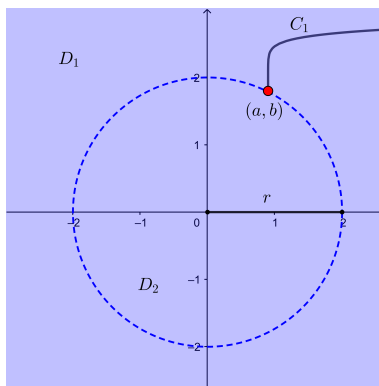


Figure 3: Continuidade da função composta

## Exercícios

1. Calcule, se possível, os seguintes limites:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2 + y^4}}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \arccos \frac{x}{x + y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sec \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 + y^4}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , por coordenadas polares.
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x \sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$ , por coordenadas esféricas.

2. Sabendo que:  $1 - \frac{x^3 y^2}{3} \leq \frac{\arctan(xy)}{xy} < 1$ . Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\arctan(xy)}{xy}$

3. A função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é contínua em  $(0, 0)$ ?

4. A função  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  é contínua em  $(0, 0)$ ?

5. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

(a)  $f(x, y) = \ln \frac{x+y}{x^2-y^2}$

(b)  $f(x, y) = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$

6. Discuta a continuidade das funções abaixo:

(a)  $f(x, y) = \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4}$ , se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $f(0, 0) = 0$

(b)  $f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}$ , se  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $f(0, 0) = 2$

(c)  $f(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2 y^2 + 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $f(0, 0) = 0$

(d)  $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$ , se  $x^2 + y^2 < 1$ ;  $f(x, y) = 0$ , se  $x^2 + y^2 \geq 1$ .

7. Calcule o valor de  $k$  para que a função dada seja continua em  $(0, 0)$  :

(a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \text{sen} \frac{1}{xy}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = k$

(b)  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{\sqrt{y^2 + 1} - 1}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = k - 4$ .

8. Seja  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = 0$ . Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

### Respostas

1. (a) 0

(b) 0

(c) 1

(d)  $\pi/3$

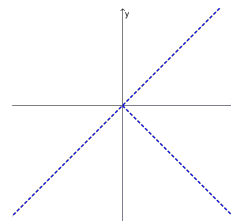
(e) 1

(f) 0

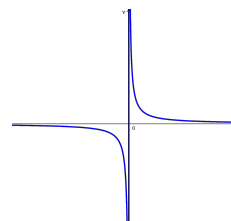
(g) 0

(h) 0

5. (a)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y < x$ ,  $x \neq -y$



(b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x}, x > 0 \text{ ou } y \leq \frac{1}{x}, x < 0\}$



2. 1.

3. Não

4. Não

6. (a) Não é em  $(0, 0)$

(b) É em  $\mathbb{R}^2$

(c) Não é em  $(0, 0)$

(d) É em  $\mathbb{R}^2$

7. (a)  $k = 0$

(b)  $k = 4$

8.  $0; -1$

