



Funções vetoriais de uma variável

Domínio, imagem e continuidade

Objetivos:

- Compreender a noção de função vetorial de uma variável, domínio, imagem e gráfico;
- Identificar as equações paramétricas de uma curva como a imagem de uma função vetorial;
- Relacionar equações paramétricas e cartesianas de curvas básicas.

Definição: Uma função de uma variável real a valores em \mathbb{R}^n é uma função do tipo

$$\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{número } t \in I \longmapsto \text{vetor } \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$$

onde I pode ser um intervalo ou uma união de intervalos. No caso em que I for um intervalo, a função \vec{r} também é dita de caminho em \mathbb{R}^n .

O conjunto I é o domínio de \vec{r} , $Dom(\vec{r}) = I$.

O conjunto $Im(\vec{r}) = \vec{r}(I) = \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}$ é a imagem, traço ou trajetória do caminho \vec{r} .

Se \vec{r} é um caminho em \mathbb{R}^2 , podemos escrever

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são as funções coordenadas de \vec{r} .

Em geral, se I for um intervalo, a imagem $\vec{r}(I)$ é uma curva em \mathbb{R}^2 , onde

$$\vec{r}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \end{cases}$$

é uma parametrização da curva $C = \vec{r}(I)$.

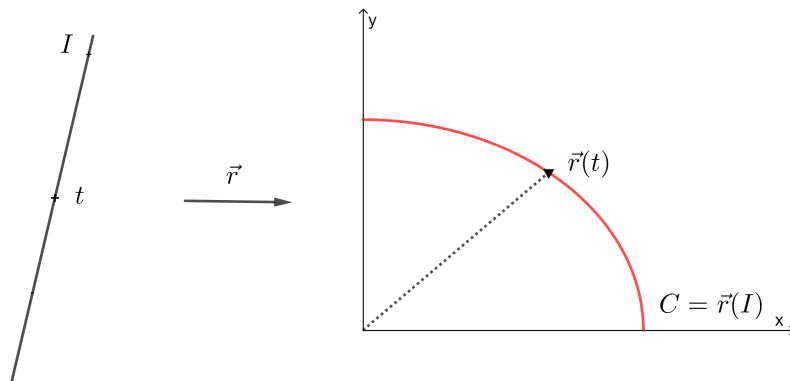


Figure 1: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^2$

Analogamente, se \vec{r} é um caminho em \mathbb{R}^3 , podemos escrever $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Em geral, $C = \vec{r}(I)$ é uma curva espacial, parametrizada por

$$\vec{r}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \end{cases}$$

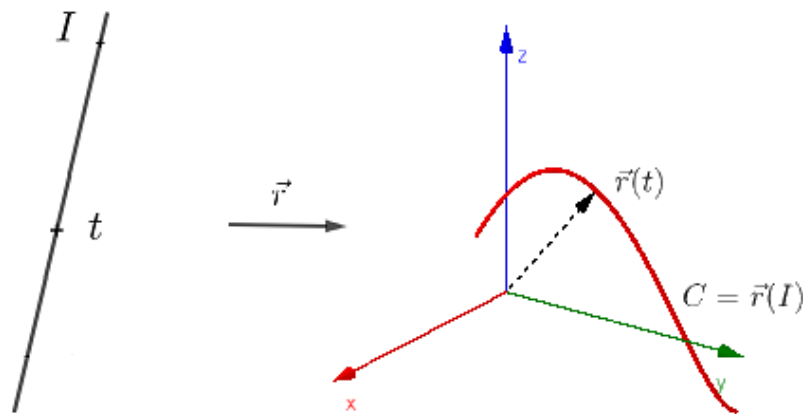


Figure 2: Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$

Observação: Não devemos confundir a imagem ou traço de uma função vetorial com seu gráfico.

O gráfico de $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \vec{r}(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Assim, um caminho em \mathbb{R}^2 possui seu domínio em \mathbb{R} , seu traço ou imagem em \mathbb{R}^2 e seu gráfico em \mathbb{R}^3 . Por exemplo, no caso da função vetorial $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$:

$Dom(\vec{r}) = \mathbb{R}$, $Im(\vec{r})$ é a curva em \mathbb{R}^2

$$\vec{r}: \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente à circunferência de centro $(0,0)$ e raio $R = 1$. Já o gráfico é o conjunto $Gr(\vec{r}) = \{(t, \cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$ o qual é uma curva em \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$\vec{\gamma}: \begin{cases} x = t \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente a uma hélice.

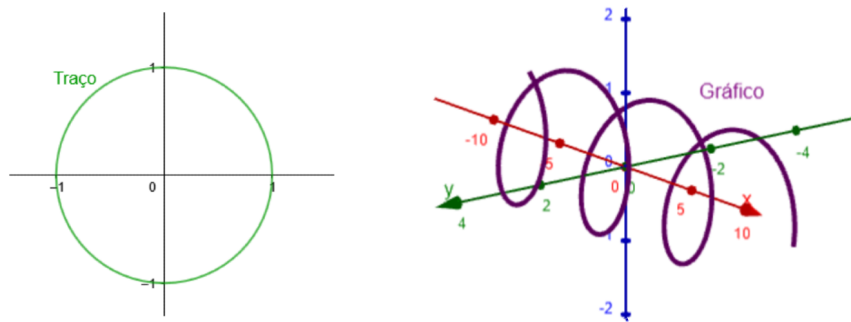


Figure 3: O traço e o gráfico de uma função vetorial de uma variável

Observação: Se t é interpretado como tempo, então $\vec{r}(t)$ representa o vetor posição de uma partícula em movimento no instante t .

Exemplos

1. Seja $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, $t \in \mathbb{R}$, A imagem de \vec{r} é a curva dada pela parametrização

$$\vec{r}: \begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro t , temos as equações cartesianas da curva

$$C: y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

correspondente ao gráfico da função $f(x) = x^2$.

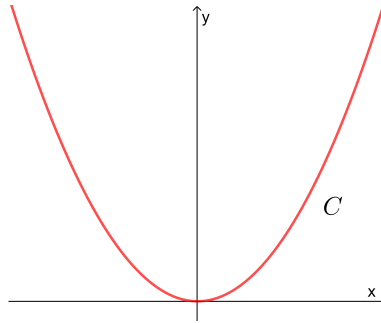


Figure 4: O gráfico de uma função escalar como imagem de uma função vetorial

2. Seja $\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t)$, $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Como $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (0, a)$, então a imagem de \vec{r} é uma curva fechada. Temos

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a \sin(t) \\ y = a \cos(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Eliminando o parâmetro t , temos que a imagem do caminho fechado é a curva $C: x^2 + y^2 = a^2$, isto é, a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio $R = a$.

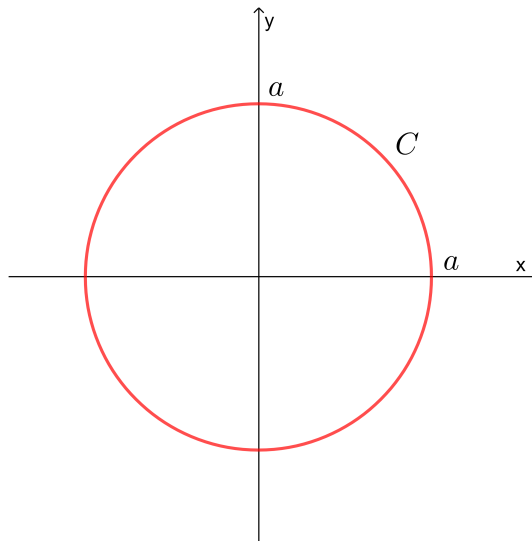


Figure 5: A circunferência como imagem de uma função vetorial

Observação: A parametrização de uma curva não é única. A diferença entre esta parametrização e a do exemplo anterior é a orientação. Observe que neste exemplo a parametrização traça a curva em sentido contrário ao crescimento do parâmetro. Isto é, o parâmetro vai crescendo em sentido anti-horário e a parametrização traça a curva em sentido horário. Se diz que a parametrização possui orientação negativa.

3. Parametriza a curva $C: x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, $y \geq 0$.

Solução Seja $P(x, y) \in C$

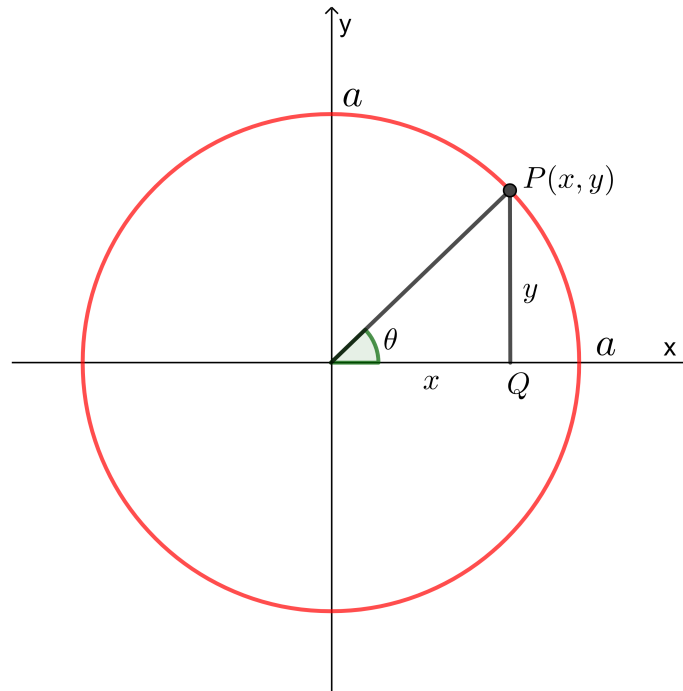


Figure 6: Parametrização da circunferência

no triângulo retângulo OPQ, temos

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observe que o ângulo somente poder variar de 0 a π pois $y \geq 0$. Fazendo $\theta = t$, temos uma parametrização de C

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Fazendo $\theta = 2t$ temos uma outra parametrização de C :

$$\vec{r}(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Exercícios

- Determine as equações cartesianas das curvas dadas pelas seguintes parametrizações. Esboce as curvas.

- $\vec{r}_1(t) = (t, t - 2), t \in \mathbb{R}.$
- $\vec{r}_2(t) = (4 + t, 4 - t), t \in [0, 1].$
- $\vec{r}_3(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}].$
- $\vec{r}_4(t) = (2 \cos t, 3 \sin t), t \in [0, 2\pi].$

(e) $\vec{r}_5(t) = (\pm \cosh t, \sinh t), t \in \mathbb{R}.$

(f) $\vec{r}_6(t) = (\sec t, \tan t), t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}).$

2. Esboce a imagem das seguintes funções:

(a) $\vec{r}_1(t) = (t - 4, t^2 + 5), t \in \mathbb{R}.$

(b) $\vec{r}_2(t) = (t, \pm\sqrt{1-t^2}), \forall |t| < 1.$

(c) $\vec{r}_3(t) = (t, \pm\sqrt{t^2-1}), \forall |t| > 1.$

(d) $\vec{r}_4(t) = (t^2, t), t \in \mathbb{R}.$

(e) $\vec{r}_5(t) = (\cos t, \cos^2 t), t \in \mathbb{R}.$

(f) $\vec{r}_6(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t), t \in \mathbb{R}.$

(g) $\vec{r}_7(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), t \in \mathbb{R}.$

(h) $\vec{r}_8(t) = (t, t-1, t+2), t \in \mathbb{R}.$

(i) $\vec{r}_9(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in \mathbb{R}.$

3. Determine uma parametrização das seguintes curvas:

(a) $C_1 : y = 1 + 2x$

(b) $C_2 : y = x^3$

(c) Circunferência de centro $(2, 3)$ e raio $R = 4$ com orientação positiva.

(d) Elipse de centro $(1, 1)$ e semi-eixos $a = 1$ e $b = 2$ com orientação negativa.

(e) $C_3 : y^2 - x^2 = 4$

Respostas

1. (a)

(b)

