

Cálculo diferencial de funções de várias variáveis  
Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade Federal Fluminense

April 4, 2022

Begoña Alarcón e Rioco Kamei



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License](#)

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>Capítulo 1: Funções vetoriais de uma variável</b>	<b>7</b>
Domínio, imagem e parametrização . . . . .	8
Exemplos . . . . .	10
Exercícios . . . . .	12
Limites, derivada e vetor tangente . . . . .	15
Exemplos . . . . .	17
Exercícios . . . . .	18
<b>Capítulo 2: Funções escalares de várias variáveis</b>	<b>20</b>
Domínio, imagem e gráfico . . . . .	21
Exemplos . . . . .	23
Exercícios . . . . .	24
Curvas de nível . . . . .	28
Exemplos . . . . .	29
Exercícios . . . . .	36
Superfícies de nível . . . . .	39
Exemplos . . . . .	40
Exercícios . . . . .	41
Topologia em $\mathbb{R}^n$ . . . . .	43
Exemplos . . . . .	46
Exercícios . . . . .	51
Conceito e propriedades de limites . . . . .	54
Exemplos . . . . .	56
Exercícios . . . . .	57
Cálculo de limites. Continuidade . . . . .	59
Exemplos . . . . .	60
Exercícios . . . . .	63
Derivadas Parciais . . . . .	65
Exemplos . . . . .	68
Exercícios . . . . .	73
Diferenciabilidade. Plano tangente. . . . .	76
Exemplos . . . . .	79
Exercícios . . . . .	84
Aproximação linear de funções . . . . .	85
Exemplos . . . . .	88
Exercícios . . . . .	91
Derivadas Parciais de Ordem Superior	
Aproximação não linear . . . . .	94
Exemplos . . . . .	96
Exercícios . . . . .	100

<b>Regra da Cadeia e Derivação Implícita . . . . .</b>	<b>102</b>
<b>Exemplos . . . . .</b>	<b>107</b>
<b>Exercícios . . . . .</b>	<b>113</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>117</b>

# Lista de Figuras

1	Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^2$	9
2	Parametrização de uma curva $C \subset \mathbb{R}^3$	9
3	O traço e o gráfico de uma função vetorial de uma variável	10
4	O gráfico de uma função escalar como imagem de uma função vetorial	11
5	A circunferência como imagem de uma função vetorial	11
6	Parametrização da circunferência	12
7	Interpretação geométrica de $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$	17
8	Domínio e imagem de uma função real de uma variável real	21
9	Gráfico de uma função real de uma variável real	22
10	Domínio e imagem de uma função real de duas variáveis reais	22
11	Gráfico de uma função real de duas variáveis reais	22
12	Superfície em $\mathbb{R}^3$ que não é gráfico de uma função	23
13	Domínio e imagem de uma função real de três variáveis reais	23
14	Gráfico da função constante	24
15	Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$	24
16	Domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$	25
17	Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função	28
18	Relação da curva de nível com o gráfico da função	28
19	Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$	29
20	Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$	30
21	Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	30
22	Curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$	31
23	Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$	32
24	Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2$	32
25	Cilindros parabólicos	32
26	Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	33
27	Cones circulares	33
28	Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$	34
29	Curvas de nível da função $f(x, y) = y^2 - x^2$	35
30	Curvas de nível da função $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$ (em roxo)	36
31	Relação da superfície de nível com o domínio e a imagem da função	39
32	Superfície de nível $k = 1$ da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$	40
33	Superfície de nível $k < 0$ (azul), $k = 0$ (amarelo) e $k > 0$ (vermelho) da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$	41
34	Gráfico 3D com as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$	41
35	Bola de centro $P$ e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}$	43
36	Bola de centro $P$ e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^2$	43
37	Bola de centro $P$ e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^3$	44
38	Conjuntos abertos em $\mathbb{R}^2$	44
39	Bola fechada em $\mathbb{R}$	44
40	Bola fechada em $\mathbb{R}^2$	45
41	Interior (esquerda) e exterior (direita) de uma elipse	46

42	Interior (esquerda) e exterior (direita) de um polígono . . . . .	46
43	Conjunto dado por $x^2 - y^2 > 0$ (esquerda) e $x^2 - y^2 < 0$ (direita) . . . . .	46
44	Bola furada em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	47
45	Elipse . . . . .	47
46	Polígono . . . . .	47
47	Conjuntos dados por $x^2 - y^2 = 0$ , $x^2 - y^2 \leq 0$ , $x^2 - y^2 \geq 0$ , $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ (respectivamente de esquerda a direita) . . . . .	48
48	Conjuntos dados por $4 < x^2 + y^2 \leq 9$ . . . . .	48
49	intervalos limitados com mesma fronteira . . . . .	48
50	Fronteira de bola aberta e de bola fechada em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	49
51	Fronteira de bola aberta e de bola fechada em $\mathbb{R}^3$ . . . . .	49
52	Pontos de acumulação no interior e nos extremos do intervalo . . . . .	49
53	Pontos de acumulação em intervalos furados . . . . .	49
54	Ponto de acumulação da bola fechada furada em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	50
55	Pontos de acumulação em conjuntos fechados de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	50
56	Pontos de acumulação em conjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	51
57	Limite de uma função definida em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	54
58	Continuidade da função composta . . . . .	60
59	Domínio função $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$ . . . . .	62
60	Continuidade da função composta . . . . .	62
61	Segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$ . . . . .	65
62	Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in J$ e $C_1 : y = b, x \in I$ . . . . .	66
63	Interpretação geométrica das derivadas parciais . . . . .	67
64	Tabela lei dos gases ideais . . . . .	68
65	Plano tangente a $G_f$ em $(a, b, f(a, b))$ . . . . .	78
66	O plano tangente contém as duas retas tangentes. . . . .	79
67	Diferencial de uma função de uma variável . . . . .	87
68	Diferencial de uma função de duas variáveis . . . . .	88
69	Vetor gradiente . . . . .	102
70	Composição de funções . . . . .	103
71	Vetor gradiente de $f(x, y) = 2 \arctan \frac{x}{y}$ no ponto $(1, 1)$ . . . . .	107

# Introdução

Neste texto (em desenvolvimento) o leitor poderá encontrar o conteúdo básico para qualquer disciplina de cálculo diferencial de funções de várias variáveis. O objetivo deste projeto é apresentar a matéria com um visual mais atraente para o aluno, flexível e fácil de adaptar a qualquer modalidade de ensino: presencial, híbrido ou a distância.

Pretende-se incorporar conteúdos mais aplicados às ciências e engenharias. Por exemplo, uma visão das derivadas parciais como taxas de variação ou dar uma estimativa (linear ou quadrática) de uma lei a partir de dados experimentais, entre outros.

Este texto faz parte dos recursos educacionais digitais que estão sendo elaborados e coletados na plataforma

<https://redmatuff.github.io/calculovariasvariaveis/>

Agradecemos imensamente a Rioco Kamei (professora aposentada da UFF) por ter cedido para este projeto suas notas de aula manuscritas. Esses textos foram a base da apostila que agora apresentamos. Por esse motivo a Profa. Rioco foi convidada para fazer parte da coautoria do manual, embora ela não seja responsável pelo produto final.

Gostaríamos também de agradecer a forte colaboração da monitora Maria Américo na digitalização de textos e criação das figuras.

Se você é aluno e tem sugestões para aprimorar o texto: apresentação do conteúdo, figuras, mais exemplos, etc, não duvide em entrar em contato com a Profa. Begoña Alarcón!! Entendam que este texto é para vocês, alunos. Façamos dele um material aconchegante!

Email de contato: balarcon@id.uff.br

Dedicado a todos os alunos que me inspiraram ao longo de minha carreira como docente na UFF e a todos os alunos que encontram neste texto seu instrumento de aprendizagem para disciplinas de cálculo de funções de várias variáveis.



# Capítulo 1: Funções vetoriais de uma variável



## Domínio, imagem e parametrização

---

### Objetivos:

- Compreender a noção de função vetorial de uma variável, domínio, imagem e gráfico;
  - Identificar as equações paramétricas de uma curva como a imagem de uma função vetorial;
  - Relacionar equações paramétricas e cartesianas de curvas básicas.
- 

**Definição:** Uma função de uma variável real a valores em  $\mathbb{R}^n$  é uma função do tipo

$$\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\text{número } t \in I \longmapsto \text{vetor } \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$$

onde  $I$  pode ser um intervalo ou uma união de intervalos. No caso em que  $I$  for um intervalo, a função  $\vec{r}$  também é dita de caminho em  $\mathbb{R}^n$ .

O conjunto  $I$  é o domínio de  $\vec{r}$ ,  $Dom(\vec{r}) = I$ .

O conjunto  $Im(\vec{r}) = \vec{r}(I) = \{\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n; t \in I\}$  é a imagem, traço ou trajetória do caminho  $\vec{r}$ .

Se  $\vec{r}$  é um caminho em  $\mathbb{R}^2$ , podemos escrever

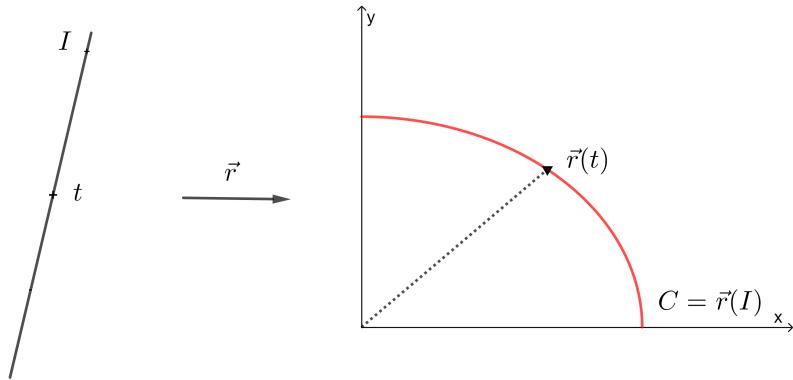
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

onde  $x(t)$  e  $y(t)$  são as funções coordenadas de  $\vec{r}$ .

Em geral, se  $I$  for um intervalo, a imagem  $\vec{r}(I)$  é uma curva em  $\mathbb{R}^2$ , onde

$$\vec{r}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in I \end{cases}$$

é uma parametrização da curva  $C = \vec{r}(I)$ .

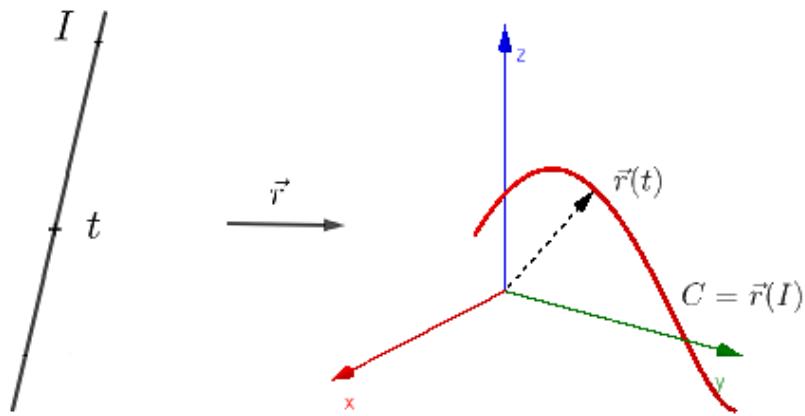


**Figure 1: Parametrização de uma curva  $C \subset \mathbb{R}^2$**

Analogamente, se  $\vec{r}$  é um caminho em  $\mathbb{R}^3$ , podemos escrever  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ .

Em geral,  $C = \vec{r}(I)$  é uma curva espacial, parametrizada por

$$\vec{r}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t), \quad t \in I \end{cases}$$



**Figure 2: Parametrização de uma curva  $C \subset \mathbb{R}^3$**

Observação: Não devemos confundir a imagem ou traço de uma função vetorial com seu gráfico.

O gráfico de  $\vec{r}: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é o conjunto  $Gr(\vec{r}) = \{(t, \vec{r}(t)) : t \in I\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ .

Assim, um caminho em  $\mathbb{R}^2$  possui seu domínio em  $\mathbb{R}$ , seu traço ou imagem em  $\mathbb{R}^2$  e seu gráfico em  $\mathbb{R}^3$ . Por exemplo, no caso da função vetorial  $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ :

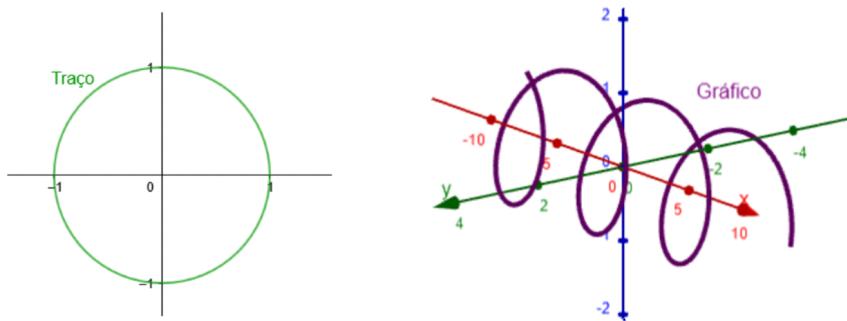
$\text{Dom}(\vec{r}) = \mathbb{R}$ ,  $\text{Im}(\vec{r})$  é a curva em  $\mathbb{R}^2$

$$\vec{r} : \begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente à circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $R = 1$ . Já o gráfico é o conjunto  $\text{Gr}(\vec{r}) = \{(t, \cos(t), \sin(t)) : t \in \mathbb{R}\}$  o qual é uma curva em  $\mathbb{R}^3$  parametrizada por

$$\vec{\gamma} : \begin{cases} x = t \\ y = \cos(t) \\ z = \sin(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

correspondente a uma hélice.



**Figure 3: O traço e o gráfico de uma função vetorial de uma variável**

Observação: Se  $t$  é interpretado como tempo, então  $\vec{r}(t)$  representa o vetor posição de uma partícula em movimento no instante  $t$ .

## Exemplos

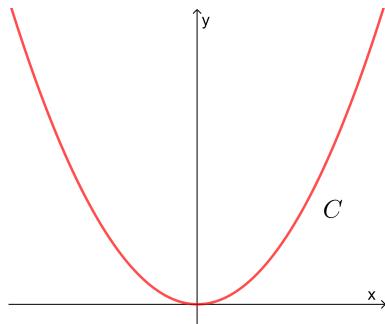
1. Seja  $\vec{r}(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , A imagem de  $\vec{r}$  é a curva dada pela parametrização

$$\vec{r} : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Eliminando o parâmetro  $t$ , temos as equações cartesianas da curva

$$C : y = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

correspondente ao gráfico da função  $f(x) = x^2$ .

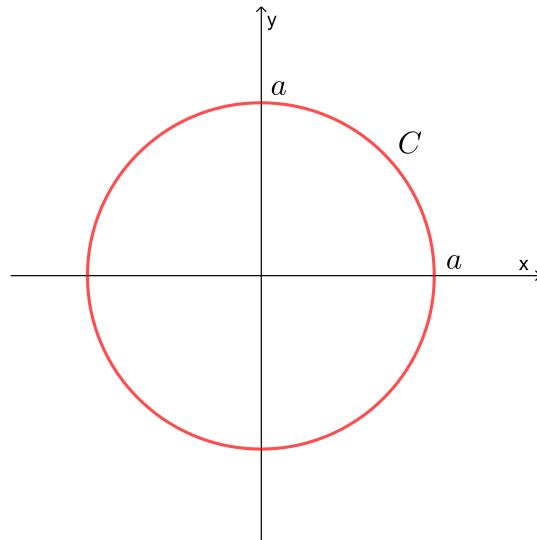


**Figure 4: O gráfico de uma função escalar como imagem de uma função vetorial**

2. Seja  $\vec{r}(t) = (a \sin t, a \cos t)$ ,  $a > 0$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Como  $\vec{r}(0) = \vec{r}(2\pi) = (0, a)$ , então a imagem de  $\vec{r}$  é uma curva fechada. Temos

$$\vec{r}: \begin{cases} x = a \sin(t) \\ y = a \cos(t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Eliminando o parâmetro  $t$ , temos que a imagem do caminho fechado é a curva  $C : x^2 + y^2 = a^2$ , isto é, a circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $R = a$ .

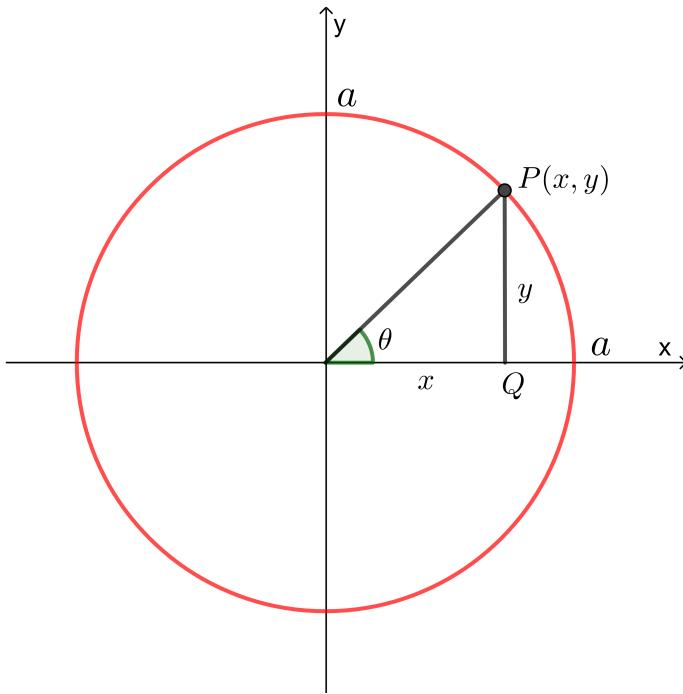


**Figure 5: A circunferência como imagem de uma função vetorial**

Observação: A parametrização de uma curva não é única. A diferença entre esta parametrização e a do exemplo anterior é a orientação. Observe que neste exemplo a parametrização traça a curva em sentido contrário ao crescimento do parâmetro. Isto é, o parâmetro vai crescendo em sentido anti-horário e a parametrização traça a curva em sentido horário. Se diz que a parametrização possui orientação negativa.

3. Parametrize a curva  $C : x^2 + y^2 = a^2$ ,  $a > 0$ ,  $y \geq 0$ .

Solução Seja  $P(x, y) \in C$



**Figure 6: Parametrização da circunferência**

no triângulo retângulo OPQ, temos

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \end{cases}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Observe que o ângulo somente poderá variar de 0 a  $\pi$  pois  $y \geq 0$ . Fazendo  $\theta = t$ , temos uma parametrização de  $C$

$$\vec{r}(t) = (a \cos t, a \sin t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Fazendo  $\theta = 2t$  temos uma outra parametrização de  $C$ :

$$\vec{r}(t) = (a \cos(2t), a \sin(2t)), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

## Exercícios

1. Determine as equações cartesianas das curvas dadas pelas seguintes parametrizações. Esboce as curvas.
  - (a)  $\vec{r}_1(t) = (t, t - 2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
  - (b)  $\vec{r}_2(t) = (4 + t, 4 - t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
  - (c)  $\vec{r}_3(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$ ,  $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ .
  - (d)  $\vec{r}_4(t) = (2 \cos t, 3 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

- (e)  $\vec{r}_5(t) = (\pm \cosh t, \sinh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(f)  $\vec{r}_6(t) = (\sec t, \tan t)$ ,  $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ .

2. Esboce a imagem das seguintes funções:

- (a)  $\vec{r}_1(t) = (t - 4, t^2 + 5)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(b)  $\vec{r}_2(t) = (t, \pm \sqrt{1 - t^2})$ ,  $\forall |t| < 1$ .  
(c)  $\vec{r}_3(t) = (t, \pm \sqrt{t^2 - 1})$ ,  $\forall |t| > 1$ .  
(d)  $\vec{r}_4(t) = (t^2, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(e)  $\vec{r}_5(t) = (\cos t, \cos^2 t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(f)  $\vec{r}_6(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(g)  $\vec{r}_7(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(h)  $\vec{r}_8(t) = (t, t - 1, t + 2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .  
(i)  $\vec{r}_9(t) = (\cos t, \sin t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

3. Determine uma parametrização das seguintes curvas:

- (a)  $C_1 : y = 1 + 2x$   
(b)  $C_2 : y = x^3$   
(c) Circunferência de centro  $(2, 3)$  e raio  $R = 4$  com orientação positiva.  
(d) Elipse de centro  $(1, 1)$  e semi-eixos  $a = 1$  e  $b = 2$  com orientação negativa.  
(e)  $C_3 : y^2 - x^2 = 4$

4. Determine uma parametrização da curva interseção das superfícies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $z = 1 + y$ . Faça um esboço das superfícies e a curva.

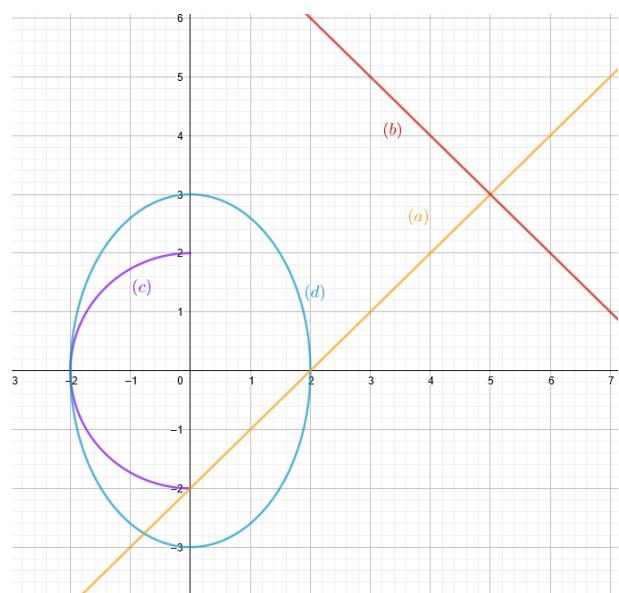
### Respostas

1. (a)  $y = x - 2$

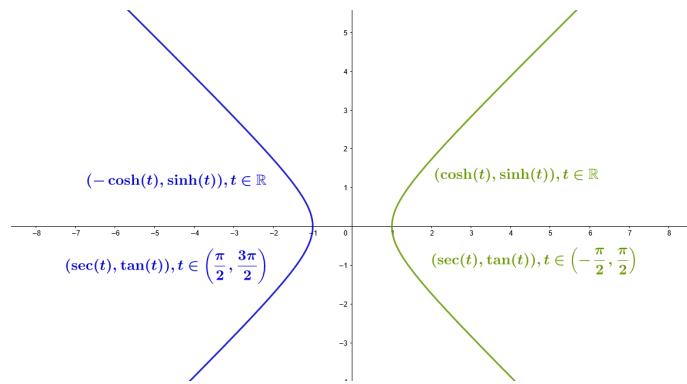
(b)  $x + y = 8$

(c)  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \leq 0$

(d)  $9x^2 + 4y^2 = 36$



(e)  $x^2 - y^2 = 1$



2.

3. (a)  $C_1 : (x, y) = (t, 1 + 2t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $C_2 : (x, y) = (t, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- (c)  $C_3 : (x, y) = (2 + 2 \cos t, 3 + 2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- (d)  $C_4 : (x, y) = (1 + \sin t, 1 + 4 \cos t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .
- (e)  $C_5 : (x, y) = (\pm 2 \sinh t, 2 \cosh t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

4.  $\vec{r}(t) = (t, \frac{1}{2}(t^2 - 1), \frac{1}{2}(t^2 + 1))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .





## Limites, derivada e vetor tangente

---

### Objetivos:

- Cálculo de limite de uma função vetorial em um ponto;
  - Continuidade e diferenciabilidade. Propriedades da derivada;
  - Cálculo e interpretação geométrica da derivada; equação paramétrica da reta tangente.
- 

Seja  $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ , uma função vetorial de uma variável.

**Limite:** Seja  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$  ou um extremo de algum dos intervalos em  $I$ . Dizemos que  $L = (L_1, \dots, L_n) \in \mathbb{R}^n$  é limite de  $\vec{r}$ , quando  $t \rightarrow t_0$ , i.e.,  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = L$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|\vec{r}(t) - L\| < \varepsilon$ , sempre que  $t \in I$  e  $|t - t_0| < \delta$ .

### Teorema:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = L \iff \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = L_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Observe que cada coordenada  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é uma função escalar de uma variável, portanto seu limite será calculado com em Cálculo IA. Por exemplo:

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t^2, t) = (4, 2).$$

Caso um dos limites  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , não existir, diremos que o limite  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t)$  não existe. Por exemplo,  $\lim_{t \rightarrow 0} (t, \sin \frac{1}{t})$ .

Caso algum dos limites  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , for infinito e os restantes existirem, diremos que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \|\vec{r}(t)\| = \infty$ . Por exemplo,  $\lim_{t \rightarrow 1} (t, \frac{1}{t-1})$ .

**Continuidade.** Seja  $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$ . Dizemos que  $\vec{r}$  é contínua em  $t_0$  se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$ . Dizemos que  $\vec{r}$  é contínua se  $\vec{r}$  for contínua em cada  $t \in I$ .

Teorema:

$\vec{r}$  é contínua em  $t_0 \iff x_i(t)$  é contínua em  $t_0$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ .

De novo, como cada coordenada  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , é uma função escalar de uma variável, devemos estudar a continuidade das  $n$  funções, isto é, verificar que  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = L_i$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Caso alguma das funções coordenadas não for contínua em  $t_0$ , diremos que  $\vec{r}(t)$  não é contínua em  $t_0$ . Por exemplo,  $\vec{r}(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{t})$  não é contínua em 0 (o ponto não pertence ao domínio) e sim é contínua em  $\pi$  (as duas funções coordenada são contínuas no ponto).

**Derivada** Seja  $t_0 \in I$ , não sendo extremo de nenhum dos intervalos de  $I$ . Definimos a derivada de  $\vec{r}$  no ponto  $t_0$  como sendo

$$\vec{r}'(t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h},$$

desde que o limite exista.

Dizemos que  $\vec{r}$  é diferenciável em  $t_0$  se existir a derivada em  $t_0$ . Dizemos que  $\vec{r}$  é diferenciável se  $\vec{r}$  for diferenciável em cada  $t$  de seu domínio  $I$ .

Teorema:

$\vec{r}$  é diferenciável em  $t_0 \iff x_i(t)$  for diferenciável em  $t_0$ ,  $i = 1, \dots, n$  e

$$\vec{r}'(t_0) = (x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0)).$$

Caso uma das derivadas  $x'_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , não existir, diremos que a derivada  $\vec{r}'(t_0)$  não existe e portanto a função vetorial não é diferenciável em  $t_0$ . Por exemplo,  $\lim_{t \rightarrow 0} (\sqrt{t}, 1 - t)$ .

Observação: Como a continuidade e a diferenciabilidade se dão coordenada a coordenada, é fácil provar que:

Se  $\vec{r}$  é diferenciável em  $t_0 \implies \vec{r}$  é contínua em  $t_0$ .

Assim, se uma das funções coordenadas  $x_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$  não for contínua em  $t_0$ , então a função vetorial  $\vec{r}$  não seria contínua em  $t_0$  e também não diferenciável em  $t_0$ .

Propriedades da derivada: Sejam  $\vec{r}, \vec{s} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  funções vetoriais e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  função escalar, todas elas diferenciáveis em  $I$  aberto. Então

1.  $f\vec{r}$  é diferenciável e  $(f\vec{r})'(t) = f'(t)\vec{r}(t) + f(t)\vec{r}'(t)$

2.  $\vec{r} \cdot \vec{s}$  é diferenciável e  $(\vec{r} \cdot \vec{s})'(t) = \vec{r}'(t) \cdot \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{s}'(t)$
3. Se  $n = 3$ ,  $\vec{r} \times \vec{s}$  é diferenciável e  $(\vec{r} \times \vec{s})'(t) = \vec{r}'(t) \times \vec{s}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{s}'(t)$ .

Observação: Seja  $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho ( $I$  intervalo) derivável até a 2ª ordem. Se  $\vec{r}(t)$  denota o vetor posição no instante  $t$  de uma partícula  $\rho$  que se move em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , definimos o vetor velocidade  $\vec{v}(t)$  e o vetor aceleração  $\vec{a}(t)$  por

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \quad \text{e} \quad \vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)$$

Definimos a velocidade escalar e a aceleração escalar por:

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\| \quad \text{e} \quad a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \|\vec{r}''(t)\| = \|\vec{v}''(t)\|.$$

Interpretação geométrica de  $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ . Observe que o vetor  $\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$  é paralelo ao vetor  $\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)$ . Fazendo  $h$  cada vez menor, tem-se que o vetor  $\frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$  é cada vez mais próximo do vetor tangente à curva imagem no ponto  $\vec{r}(t_0)$ .

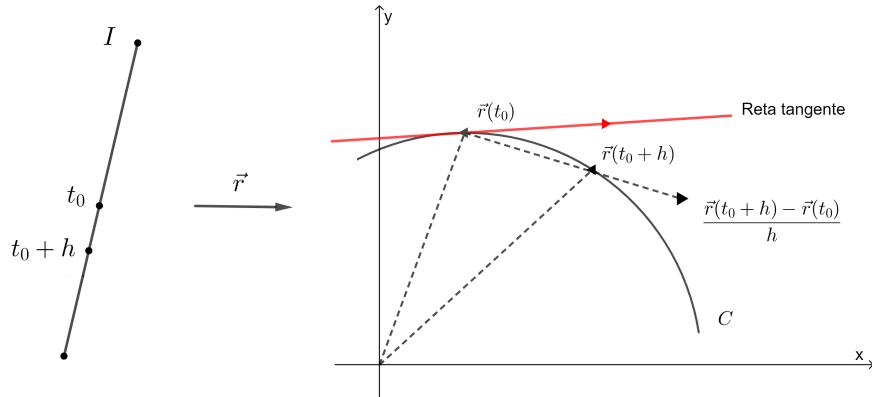


Figure 7: Interpretação geométrica de  $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$

Portanto, podemos dizer que  $\vec{r}'(t_0)$ , ou vetor velocidade do caminho  $\vec{r}$  no instante  $t_0$ , é o vetor tangente à curva  $C$ :  $\vec{r}(I)$  no ponto  $\vec{r}(t_0)$ . Portanto, uma equação paramétrica da reta tangente à curva  $C$  no ponto  $\vec{r}(t_0)$  seria

$$(x_1, \dots, x_n) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$$

## Exemplos

1. Determine a equação da reta tangente à trajetória de  $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1)$  no ponto  $\vec{r}(\frac{\pi}{3})$ .

**Solução** Temos  $\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$ ,  $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ , portanto  $\vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ . A equação da reta tangente é:

$$(x, y, z) = \vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \lambda \vec{r}'\left(\frac{\pi}{3}\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) + \lambda\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. Seja  $\vec{r}(t) = a \cos(wt)\vec{i} + b \sin(wt)\vec{j}$ , onde  $a, b, w$  são constantes. Mostre que  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r}$ .

**Solução** Temos  $\frac{d\vec{r}}{dt} = -aw \sin(wt)\vec{i} + bw \cos(wt)\vec{j}$  e  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -aw^2 \cos(wt)\vec{i} - bw^2 \sin(wt)\vec{j}$ . Logo,  $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2[a \cos(wt)\vec{i} + b \sin(wt)\vec{j}]$ , ou seja,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -w^2\vec{r},$$

Como queríamos mostrar.

3. Um ponto se move no espaço de modo que  $\|\vec{v}(t)\| = k$ , para todo  $t$ , onde  $k > 0$  é uma constante. Prove que  $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ , para todo  $t$ .

**Solução** Temos  $\|\vec{v}(t)\|^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$ , para todo  $t$ , donde  $\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = k^2$ , para todo  $t$ . Derivando os dois lados em relação a  $t$ , temos  $\vec{v}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$ , para todo  $t$ .

Como o produto escalar é comutativo, temos  $2\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = 0$ , para todo  $t$ ,

Ou seja,  $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ , para todo  $t$ , como queríamos provar.

## Exercícios

1. Considere a curva definida por  $\vec{r}(t) = (1 + 2 \ln(1+t), 1 + (1+t)^2)$ ,  $t > -1$ .
  - (a) Determine uma equação cartesiana da reta tangente à curva no ponto  $(1, 2)$ .
  - (b) Dê uma equação cartesiana da curva.
2. Um objeto inicia seu movimento no ponto  $(0, -4)$  e se move ao longo da parábola  $y = x^2 - 4$ , com velocidade horizontal  $\frac{dx}{dt} = 2t - 1$ . Encontre o vetor posição do objeto, os vetores velocidade e aceleração no instante  $t = 2$ .
3. Seja  $\vec{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $I$  intervalo, derivável até a 2ª ordem em  $I$ . Suponha que existe um real  $\lambda$ , tal que, para todo  $t \in I$ ,  $\vec{r}''(t) = \lambda \vec{r}'(t)$ . Prove que  $\vec{r}(t) \times \vec{r}'(t)$  é constante em  $I$ .

## Respostas

1. (a)  $y - x = 1$
- (b)  $y = 1 + e^{x-1}, x \in \mathbb{R}$
2.  $\vec{r}(2) = (2, 0)$ ,  $\vec{v}(2) = (3, 12)$ ,  $\vec{a}(2) = (2, 26)$ .



## Capítulo 2: Funções escalares de várias variáveis



## Domínio, imagem e gráfico

### Objetivos:

- Compreender a noção de função escalar de várias variáveis, domínio, imagem e gráfico;
- Calcular e esboçar os conjuntos domínio, imagem e gráfico;

Uma função real de  $n$  variáveis é uma função do tipo  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa a cada  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n) \in D$  um único número  $w = f(x_1, \dots, x_n)$ . O conjunto  $D$  é o domínio da função; a imagem da função é dada pelo conjunto

$$Im(f) = \{w = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}; (x_1, \dots, x_n) \in D\} = f(D) \subset \mathbb{R}$$

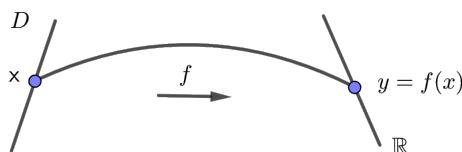
e o conjunto

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1}; w = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é o gráfico da função.

### Observações:

- (I) Se  $n = 1 \implies f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função real de uma variável.



**Figure 8: Domínio e imagem de uma função real de uma variável real**

Temos:

- (i)  $D$  é o domínio da função
- (ii)  $Im(f) = \{y = f(x) \in \mathbb{R}; x \in D\} \subset \mathbb{R}$
- (iii)  $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$

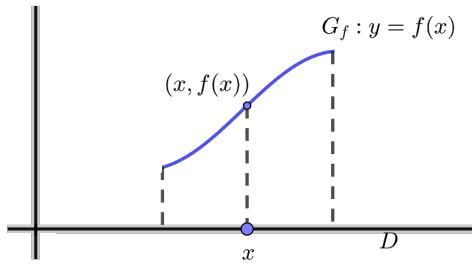


Figure 9: Gráfico de uma função real de uma variável real

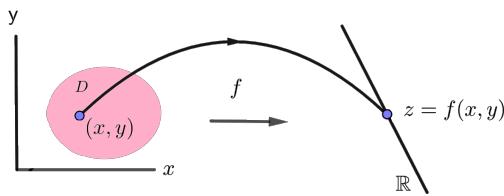


Figure 10: Domínio e imagem de uma função real de duas variáveis reais

(II) Se  $n = 2 \implies f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$ , é uma função real de duas variáveis.

Temos que:

- (i)  $D = \text{domínio da função}$
- (ii)  $Im(f) = f(D) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$
- (iii)  $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$

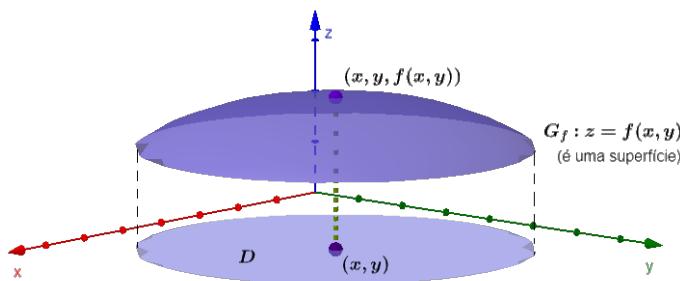
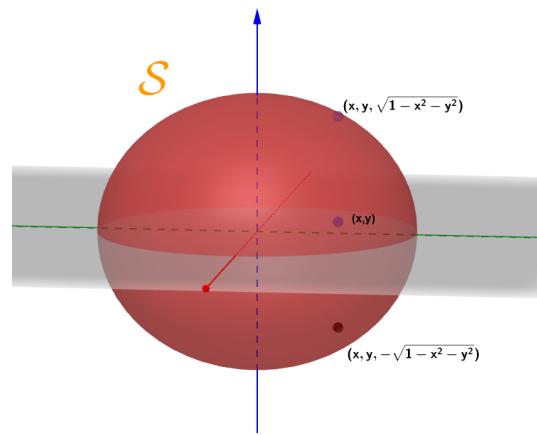


Figure 11: Gráfico de uma função real de duas variáveis reais

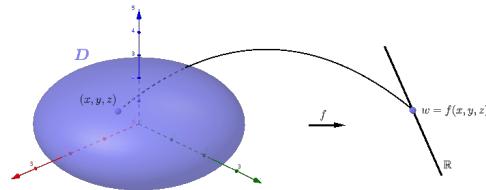
**Atenção:** Nem toda superfície do  $\mathbb{R}^3$  é gráfico de alguma função  $f(x, y)$ . Com efeito, seja  $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (esfera de raio 1 e centro  $(0,0,0)$ ).

Dado  $(x, y)$  no interior do disco  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ , temos que a reta paralela ao eixo  $z$ , passando por  $(x, y)$ , intercepta  $S$  em dois pontos distintos. Logo,  $S$  não pode ser gráfico de uma função de  $x$  e  $y$ .



**Figure 12: Superfície em  $\mathbb{R}^3$  que não é gráfico de uma função**

- (III) Se  $n = 3 \implies f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, z) \in D \mapsto w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$  é uma função real de três variáveis.



**Figure 13: Domínio e imagem de uma função real de três variáveis reais**

Temos que:

- (i)  $D = \text{domínio da função}$
- (ii)  $Im(f) = f(D) = \{w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$
- (iii)  $G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

**Atenção:** Como  $G_f \subset \mathbb{R}^4$ , é impossível desenhá-lo.

## Exemplos

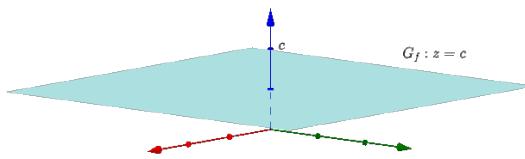
- Função Constante: Seja  $f(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Temos  $D_f = \mathbb{R}^2$ ,  $Im(f) = \{c\}$ ,  $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = c, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

- Função polinomial: Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcule,

- (a)  $f(-1, 2)$     (b)  $f(a, +b, a - b)$     (c)  $D_f$     (d)  $Im(f)$     (e)  $G_f$

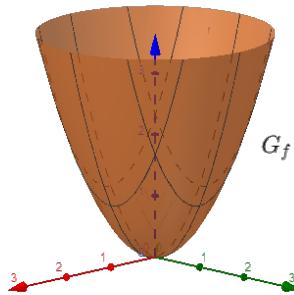
### Solução

**Figure 14: Gráfico da função constante**

- (a)  $f(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$   
 (b)  $f(a+b, a-b) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$   
 (c)  $D_f = \mathbb{R}^2$   
 (d)  $Im_f = [0, +\infty[$   
 (e)  $G_f : z = f(x, y) \implies G_f : z = x^2 + y^2$  (paraboloide circular)

Impondo  $x = 0$ , obtemos  $z = x^2$ , de forma que no plano  $yz$  a interseção do  $G_f$  é uma parábola. Se tomarmos  $z = k$  ( $k > 0$ ) obteremos  $x^2 + y^2 = k$ . Isto significa que os traços ou cortes horizontais são circunferências.

Assim, o esboço do  $G_f$  é:

**Figure 15: Gráfico da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$** 

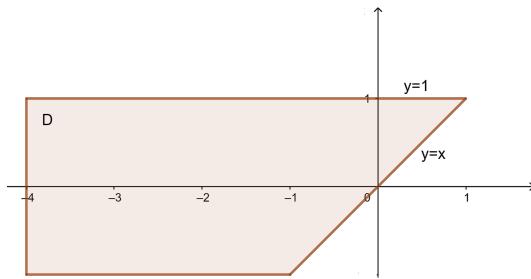
3. Seja  $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$ . Esboce o domínio da função.

### Solução

A função  $f$  está bem definida se os radicandos  $y-x$  e  $1-y$  não forem negativos, isto é:  $y-x \geq 0$  e  $1-y \geq 0 \iff y \geq x$  e  $y \leq 1$ . Portanto, o domínio de  $f$  é dado por onde:  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq x\}$  e  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 1\}$ .

## Exercícios

- Seja  $f(x, y) = \ln(x+y-1)$ . Determine:
  - $f(1, 1)$
  - $f(e, 1)$
  - o domínio de  $f$
  - a imagem de  $f$
- Seja  $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ . Determine:



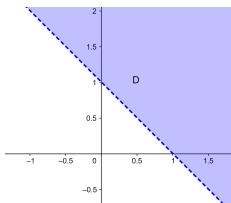
**Figure 16: Domínio da função  $f(x, y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$**

- (a) o domínio de  $f$
  - (b) a imagem de  $f$
  - (c) o gráfico de  $f$ .
3. Seja  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$ . Determine:
- (a)  $f(1, 3, -4)$
  - (b) o domínio de  $f$
  - (c) a imagem de  $f$ .
4. Determine e faça o esboço do domínio das função
- (a)  $f(x, y) = \frac{5 \ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$
  - (b)  $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$
5. Esboce o gráfico da função
- (a)  $f(x, y) = 2$
  - (b)  $f(x, y) = 1 - x - y$
  - (c)  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
  - (d)  $f(x, y) = 1 - x^2$
  - (e)  $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$
  - (f)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
  - (g)  $f(x, y) = y^2 - x^2$
  - (h)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

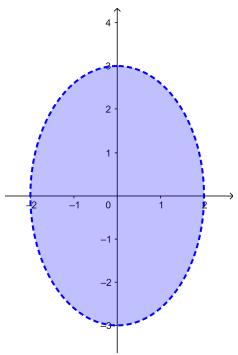
### Respostas

1. (a) 0    (b) 1

(c)  $\{(x, y); x + y > 1\}$



2. (a)  $\left\{(x, y); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1\right\}$



(b)  $[0, 6]$

3. (a)  $\frac{1}{5}$

(b)  $\{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 > 1\}$

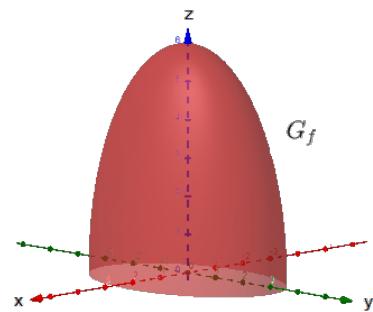
(c)  $]0, +\infty[$

4. (a)  $(x, y); x^2 + y^2 < 4ey > -x$

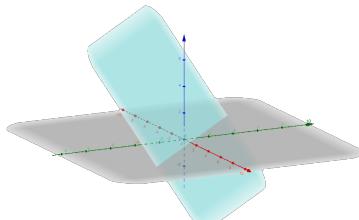
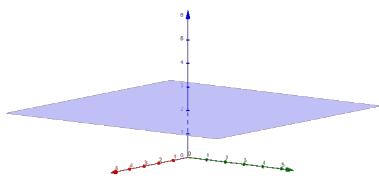
(b)  $(x, y, z); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} < 1$

5. (a)  $G_f : z = 2$  (plano horizontal)

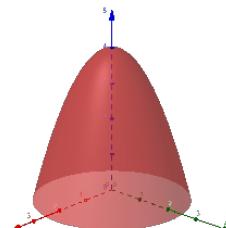
(d)  $\mathbb{R}$



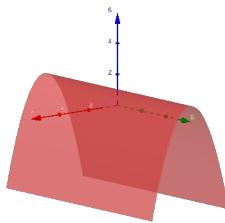
(b)  $x + y + z = 1$  (plano)



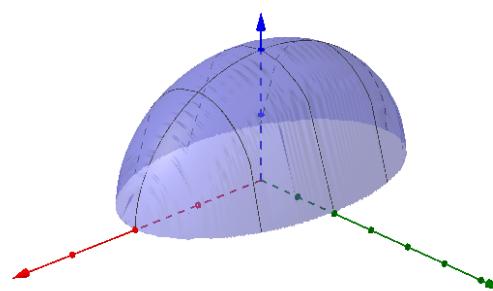
(c)  $z = 4 - x^2 - y^2$  (parabolóide)



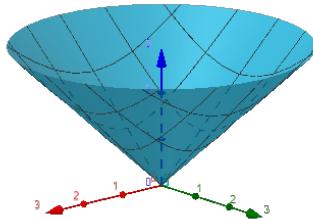
(d)  $G_f : z = 1 - x^2$  (cilindro parabólico)



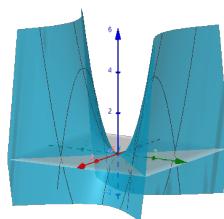
(e)  $G_f : \frac{x^2}{16} + y^2 + \frac{z^2}{16} = 1, z \geq 0$



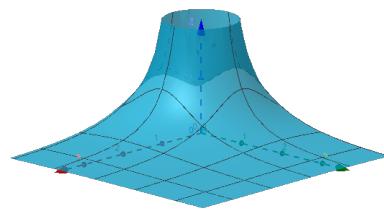
(f)  $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (parte superior do cone)



(g)  $G_f : z = y^2 - x^2$  (paraboloide hiperbólico)



(h)  $G_f : z = \frac{1}{x^2 + y^2}$





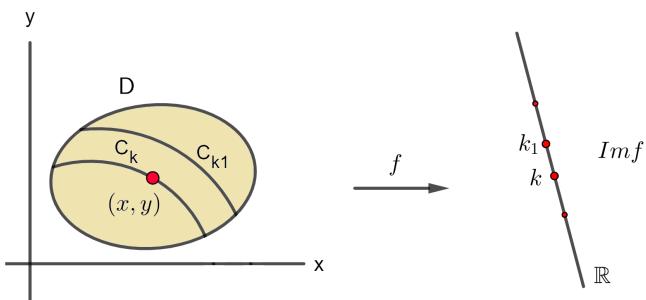
## Curvas de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de curvas de nível e sua relação com o domínio, imagem e gráfico da função;
- Calcular e identificar a curva de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar curvas de nível; Mapa de contorno.

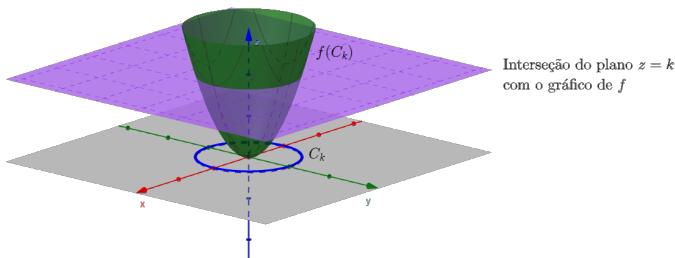
Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$

Seja  $k \in \text{Im } f$ , o conjunto  $C_k = \{(x, y) \in D; f(x, y) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$  é dito curva de nível de  $f$  no nível  $k$ .



**Figure 17: Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função**

Observe que a curva  $f(C_k)$  (imagem da curva de nível  $C_k$  pela função  $f(x, y)$ ) é a curva interseção do gráfico da função  $f$  com o plano  $z = k$ .



**Figure 18: Relação da curva de nível com o gráfico da função**

Observações:

- (I)  $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2, \quad f(C_k) \subset G_f \subset \mathbb{R}^3$
- (II) Se  $f(x, y)$  é a temperatura no ponto  $(x, y)$ , então  $C_k$  é uma isoterna (pontos de mesma temperatura)
- (III) Se  $f$  é energia potencial, então  $C_k$  é uma curva equipotencial.

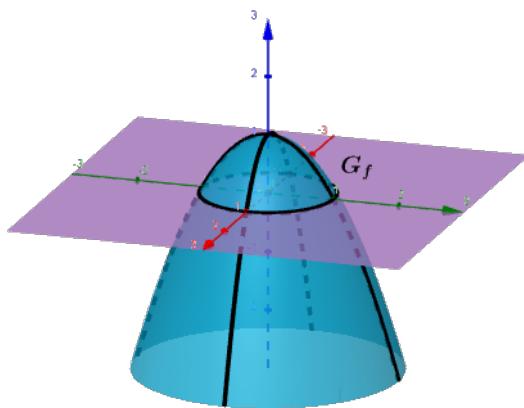
## Exemplos

1. Seja  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Imf$
- (c)  $G_f$
- (d) curvas de nível  $C_k$ .

### Solução

- (a)  $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b)  $Imf = ]-\infty, 1]$
- (c)  $G_f : z = 1 - x^2 - y^2$ . Vamos utilizar traços para esboçar  $G_f$ . Impondo  $x = 0$ , obtemos  $z = 1 - y^2$ , de modo que a interseção do  $G_f$  com plano  $yz$  ( $x = 0$ ) é uma parábola. Impondo  $z = 0$ , obtemos o traço  $x^2 + y^2 = 1$ , que corresponde a uma circunferência no plano  $xy$ . Assim, temos a forma da superfície que é chamada de paraboloide.



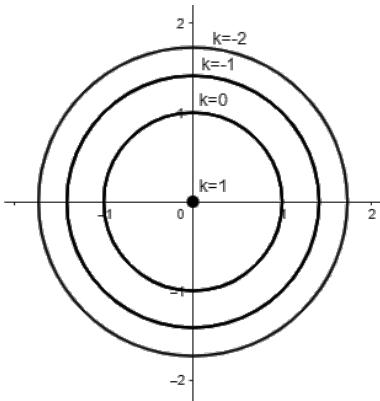
**Figure 19: Gráfico da função  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$**

- (d) Seja  $k \in Imf = ]-\infty, 1]$ . Então, a curva de nível  $C_k$  é dada por

$$C_k : 1 - x^2 - y^2 = k \implies C_k : x^2 + y^2 = 1 - k$$

Para  $k = 1$ , temos  $C_1 : x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0, y = 0$ . Logo,  $C_1 = \{(0, 0)\}$ .

Para  $k < 1$ , donde  $1 - k > 0$ , temos  $C_k : x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - k})^2$ . Assim, as curvas de nível ( $k < 1$ ) são circunferências concêntricas de centro na origem e raio  $\sqrt{1 - k}$ .



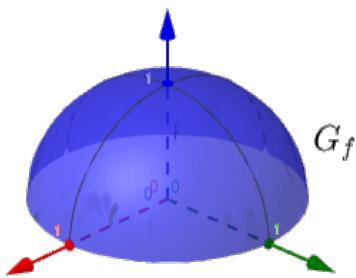
**Figure 20: Curvas de nível da função  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$**

2. Seja  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Imf$
- (c)  $G_f$
- (d) curvas de nível  $C_k$ .

### Solução

- (a)  $D_f : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \implies D_f : x^2 + y^2 \leq 1$  (disco de centro em  $(0, 0)$  e raio 1)
- (b)  $Imf = [0, 1]$
- (c)  $G_f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z^2 = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0 \implies G_f : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  (hemisfério superior de centro em  $(0, 0, 0)$  e raio 1)



**Figure 21: Gráfico da função  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$**

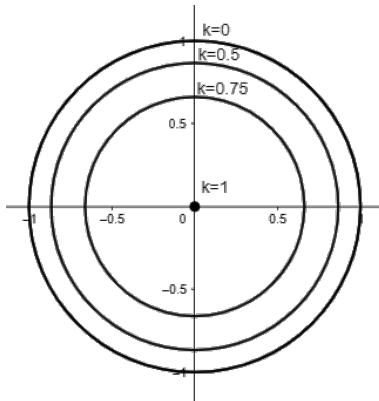
- (d) Seja  $k \in Imf = [0, 1]$ . A curva de nível correspondente a  $z = k$  é

$$C_k : f(x, y) = k \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

Para  $k = 0$ , temos  $C_0 : x^2 + y^2 = 1$ .

Para  $k = 1$ , temos  $C_1 : x^2 + y^2 = 0$ , então  $C_1 = \{(0, 0)\}$ .

Para  $k$ , tal que  $0 < k < 1$ , temos circunferências concêntricas de centro na origem e raio  $\sqrt{1 - k^2}$ .



**Figure 22: Curvas de nível da função  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$**

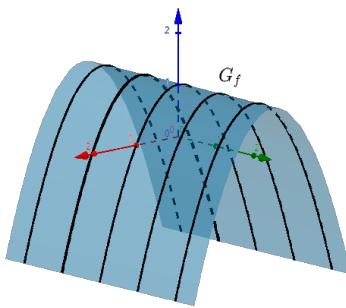
Observação:  $f(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ . Portanto,  $G_f : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leq 0$  (hemisfério inferior de centro na origem e raio 1).

3. Seja  $z = f(x, y) = 1 - x^2$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Imf$
- (c)  $G_f$
- (d) curvas de nível  $C_k$ .

### Solução

- (a)  $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b)  $Imf = ] -\infty, 1]$
- (c)  $G_f : z = 1 - x^2$ . Observe que a equação do gráfico,  $z = 1 - x^2$ , não envolve a variável  $y$ . Portanto, qualquer plano vertical  $y = k$  (paralelo ao plano  $xz$ ) intercepta o  $G_f$  segundo uma parábola de equação  $z = 1 - x^2$ . Assim,  $G_f$  é obtido tomando a parábola  $z = 1 - x^2$  no plano  $xz$  e movendo-a na direção do eixo  $y$ . A superfície é dita cilindro parabólico.



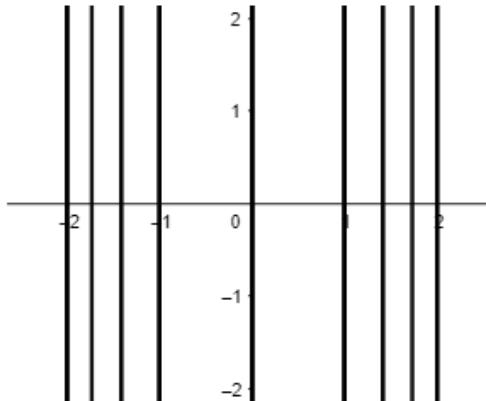
**Figure 23: Gráfico da função  $f(x, y) = 1 - x^2$**

(d) Seja  $k \in Imf = ]-\infty, 1]$ . A curva de nível correspondente é

$$C_k : 1 - x^2 = k \implies C_k : x^2 = 1 - k > 0 \implies C_k : x = \pm\sqrt{1 - k}$$

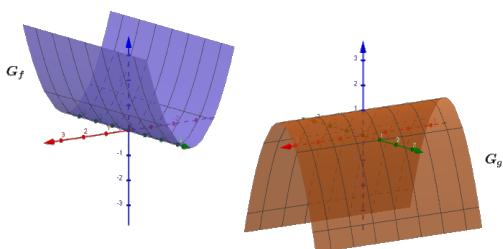
Se  $k = 1$ , temos  $C_1 : x = 0$  (eixo  $y$ );

Se  $k < 1$ , temos  $C_k = \text{reta } x = \sqrt{1 - k} \quad \text{ou reta } x = -\sqrt{1 - k}$



**Figure 24: Curvas de nível da função  $f(x, y) = 1 - x^2$**

Observação:  $f(x, y) = x^2, g(x, y) = a^2 - y^2 \implies G_f \text{ e } G_g \text{ são cilindros parabólicos.}$



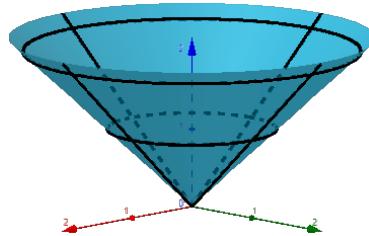
**Figure 25: Cilindros parabólicos**

4. Seja  $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Im f$
- (c)  $G_f$
- (d) curvas de nível  $C_k$ .

### Solução

- (a)  $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b)  $Im f = [0, +\infty[$
- (c)  $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Fazendo  $x = 0$ , temos  $z = |y|$ , que é a curva interseção do  $G_f$  com plano  $yz$ . Fazendo  $z = c$ ,  $c > 0$ , temos  $x^2 + y^2 = c^2$ , de modo que a interseção do  $G_f$  com o plano horizontal  $z = c$  é uma circunferência. Assim, temos que  $G_f$  é a parte superior do cone.

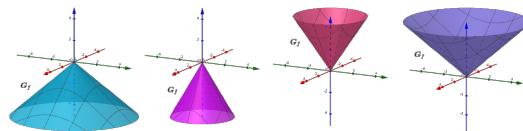


**Figure 26: Gráfico da função  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$**

- (d) Seja  $k \in Im f = [0, +\infty[$ . Então, a curva de nível correspondente é dada por  $C_k : \sqrt{x^2 + y^2} = k$  ou  $x^2 + y^2 = k^2$ .  
Se  $k = 0$ , temos  $C_0 = \{(0, 0)\}$ .  
Se  $k > 0$  temos circunferências concêntricas na origem e raio  $k$ .

Observações:

- (i) Os gráficos de  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f(x, y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ ,  $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$  são partes de cones circulares.



**Figure 27: Cones circulares**

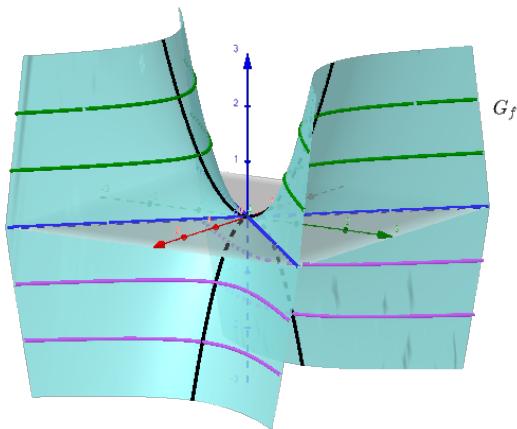
- (ii) O gráfico de  $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$ ,  $a > 0, b > 0, a \neq b \Rightarrow G_f$  é a parte superior do cone elíptico.

5. Seja,  $z = f(x, y) = y^2 - x^2$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Imf$
- (c)  $G_f$
- (d) curvas de nível  $C_k$ .

### Solução

- (a)  $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b)  $Imf = \mathbb{R}^2$
- (c)  $G_f : z = y^2 - x^2$ . Fazendo  $x = 0$ , o traço no plano  $yz$  é a parábola  $z = y^2$  com concavidade para cima. Os traços verticais  $y = k$  são parábolas  $z = k^2 - x^2$  com concavidade para baixo. Os traços horizontais  $z = k$ ,  $k > 0$ , são hipérboles  $y^2 - x^2 = k$  e os traços horizontais  $z = -k$ ,  $k > 0$ , são hipérboles  $y^2 - x^2 = -k$ . Assim, temos o esboço do  $G_f$ , dito paraboloide hiperbólico (que tem a forma de uma sela).



**Figure 28: Gráfico da função  $f(x, y) = y^2 - x^2$**

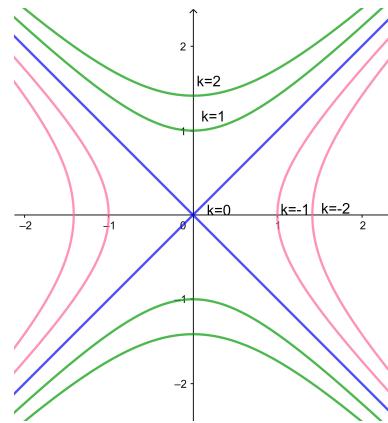
- (d) Seja  $k \in Imf = \mathbb{R}$ . A curva de nível correspondente é dada por

$$C_k : y^2 - x^2 = k$$

Se  $k > 0$ , temos hipérboles com vértices  $(0, \pm\sqrt{k})$ .

Se  $k = 0$ , temos duas retas pela origem,  $y = x$  e  $y = -x$ .

Se  $k < 0$ , temos hipérboles com vértices  $(\pm\sqrt{-k}, 0)$ .



**Figure 29: Curvas de nível da função  $f(x, y) = y^2 - x^2$**

6. Seja,  $z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Determine:

- A curva de nível que passa pelo ponto  $(0, \sqrt{3})$ .
- A reta tangente à curva de nível do item (a) no ponto  $(1, \sqrt{2})$ . Identifique o vetor velocidade.
- Esboce em um único gráfico a curva, a reta tangente e a direção do vetor velocidade.

### Solução

- Como  $f(0, \sqrt{3}) = -1$ , então a curva de nível é  $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} = -1$ , isto é,  $C_{-1} : x^2 + y^2 = 3$ .
- Observe que  $f(1, \sqrt{2}) = -1$ . portanto  $(1, \sqrt{2}) \in C_{-1}$  e faz sentido calcular a reta tangente a  $C_{-1}$  nesse ponto. Caso contrário não existiria.

Uma parametrização de  $C_{-1}$  é  $\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3} \cos t \\ y(t) = \sqrt{3} \sin t \end{cases}, \forall t \in [0, 2\pi]$ .

Portanto, a equação paramétrica da reta seria  $\gamma(s_0) + \gamma'(s_0)t, \forall t \in \mathbb{R}$ , onde  $s_0$  é tal que  $\gamma(s_0) = (1, \sqrt{2})$ .

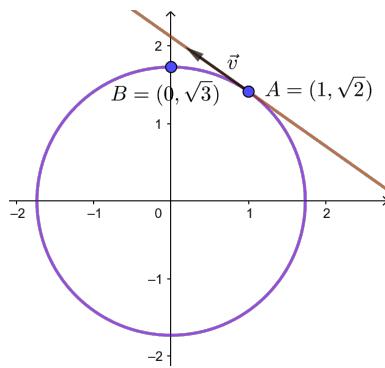
Calculando  $s_0$   $\begin{cases} \sqrt{3} \cos s_0 = 1 \\ \sqrt{3} \sin s_0 = \sqrt{2} \end{cases}$  e substituindo na derivada da parametriza-

ção,  $\gamma' : \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{3} \sin t \\ y'(t) = \sqrt{3} \cos t \end{cases}, \text{ temos que } \gamma'(s_0) = (-\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

Daí, a equação paramétrica da reta tangente é:  $(1, \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}, 1)t, \forall t \in \mathbb{R}$ .

O vetor velocidade é  $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{2}, 1)$ . A direção dele é  $\vec{v} = \frac{\gamma'(s_0)}{\|\gamma'(s_0)\|} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ .

(c)



**Figure 30: Curvas de nível da função  $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$  que passa pelo ponto  $(0, \sqrt{3})$  (em roxo)**

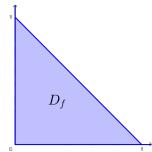
## Exercícios

1. Seja  $z = f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$ . Determine:
  - $D_f$
  - $Imf$
  - $G_f$
  - curvas de nível  $C_k$ .
2. Seja  $z = f(x, y) = 1 - x^2$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  e  $x + y \leq 1$ . Determine:
  - $D_f$
  - $Imf$
  - $G_f$
  - curvas de nível  $C_k$ .
3. Seja a função  $z = f(x, y) = \frac{y}{x-2}$ . Determine:
  - $D_f$
  - $Imf$
  - curvas de nível  $C_k$ .
4. Seja a função  $z = f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ . Determine:
  - $D_f$
  - $Imf$
  - curvas de nível  $C_k$ .
5. Suponha que  $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  (em  $C^\circ$ ) represente uma distribuição de temperatura no plano  $xy$ . Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de  $36^\circ C$ .

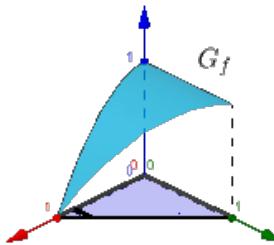
6. Uma chapa plana de metal está situada em um plano  $xy$ , de modo que a temperatura (em  $^{\circ}$ ) no ponto  $(x, y)$  é inversamente proporcional a distância da origem.
- Descreva as isotermas.
  - Se a temperatura no ponto  $P(4, 3)$  é  $40^{\circ}\text{C}$ , ache a equação da isoterma para uma temperatura de  $20^{\circ}\text{C}$ .
  - curvas de nível  $C_k$ .
7. Seja,  $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$ .
- Esboce o mapa de contorno de  $f$ .
  - Determine uma equação da reta tangente à curva de nível que passa pelo ponto  $(0, 6)$  no ponto  $(-3, 3)$ . Identifique o vetor velocidade.
  - Identifique a curva de nível do item (b) no mapa de contorno do item (a). Esboce a reta tangente e a direção do vetor velocidade no mapa de contorno.

### Respostas

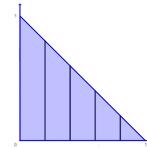
1. (a)  $D_f = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$  (d)  $C_0 : x^2 + (y - 1)^2 = 1$ ,  $C_1 = \{(0, 1)\}$ . Se  $0 < k < 1$ , temos círcunferências concêntricas de centro  $(0, 1)$  e raio  $\sqrt{1 - k^2}$ .
- (b)  $Imf = [0, 1]$
- (c)  $G_f : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ , semi-esfera.
2. (a)  $D_f :$  (b)  $Imf = [0, 1]$



(c)  $G_f :$



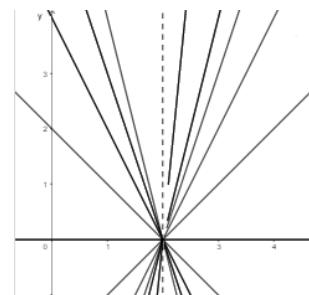
(d)  $C_k :$



3. (a)  $D_f = \{(x, y); x \neq 2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{reta } x = 2\}$

(b)  $Imf = \mathbb{R}$

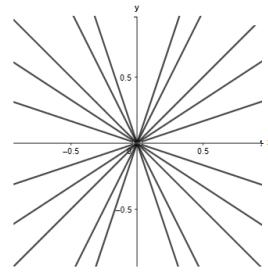
(c)  $C_k : y = k(x - 2), x \neq 2$ .



4. (a)  $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

(b)  $Im f = [0, 1]$

(c)  $C_0 : x = 0, y \neq 0; \quad C_1 : y = 0, x \neq 0; \quad C_k : y = \pm\sqrt{\frac{1-k}{k}}x, \quad x \neq 0, \quad 0 < k < 1.$



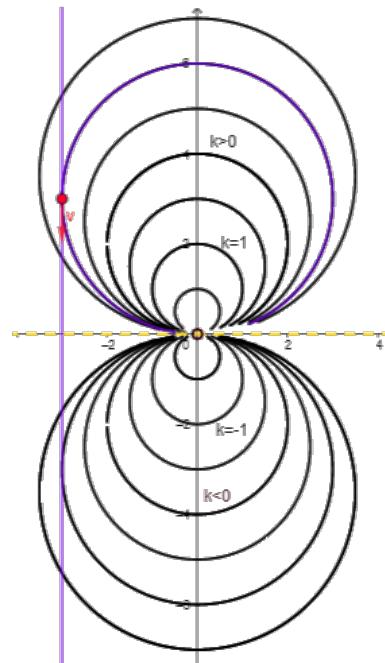
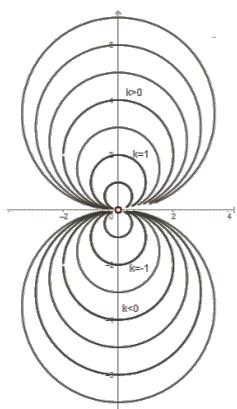
5.  $c_{36} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. (a) Circunferências com centro em  $(0, 0)$

(b)  $x^2 + y^2 = 100$

7. (a)

(c)



(b) Reta tangente a  $C_3$  em  $(-3, 3)$  é  $(-3, 3) + (0, -3)t, \forall t \in \mathbb{R}$ . A direção do vetor velocidade é  $\vec{v} = (0, -1)$



## Superfícies de nível

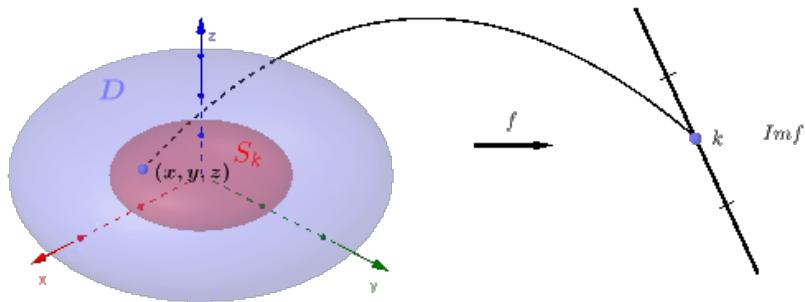
Objetivos:

- Compreender a noção de superfícies de nível e sua relação com o domínio e imagem da função.
- Calcular e identificar a superfície de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar as superfícies de nível.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \mapsto w = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$ .

Seja  $k \in \text{Im}(f)$ . O conjunto  $\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$  é dito conjunto de nível de  $f$  no nível  $k$ . As curvas de nível são o caso particular  $n = 2$ .

Quando  $n = 3$ , os conjuntos de nível se denotam por  $S_k$  e se chamam superfície de nível de  $f$  no nível  $k$ .



**Figure 31: Relação da superfície de nível com o domínio e a imagem da função**

### Observação

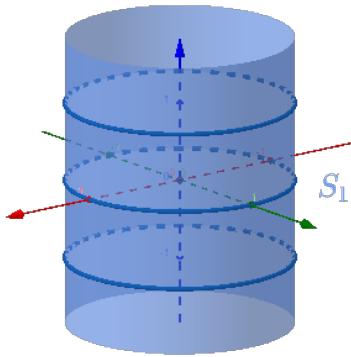
- (I) Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $G_f \subset \mathbb{R}^3$ ,  $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}$ .
- (II) Se  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $G_f \subset \mathbb{R}^4$ ,  $S_k \subset D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}$ .
- (III) Se  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\mathcal{C}_k \subset D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Im } f \subset \mathbb{R}$ .

## Exemplos

1. Seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ . Determine:
  - (a)  $D_f$
  - (b)  $\text{Im } f$
  - (c) a superfície de nível que passa pelo ponto  $(1, 0, 0)$

### Solução

- (a)  $D_f = \mathbb{R}^3$
- (b)  $\text{Im } f = [0, +\infty[$
- (c)  $f(1, 0, 0) = 1$ , então o nível da curva é  $k = 1$ . Daí,  $S_1 : x^2 + y^2 = 1$  é a curva desejada. Como essa equação não envolve a variável  $z$ , isso significa que qualquer plano horizontal  $z = k$  (paralelo ao plano  $xy$ ) intercepta o  $G_f$  segundo a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ . Assim, o  $G_f$  é obtido tomando-se a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , no plano  $xy$  e deslocando-a paralelamente ao eixo  $z$ . A superfície é dita cilindro circular reto.



**Figure 32: Superfície de nível  $k = 1$  da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$**

2. Seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $\text{Im } f$
- (c)  $S_k$ , superfícies de nível

### Solução

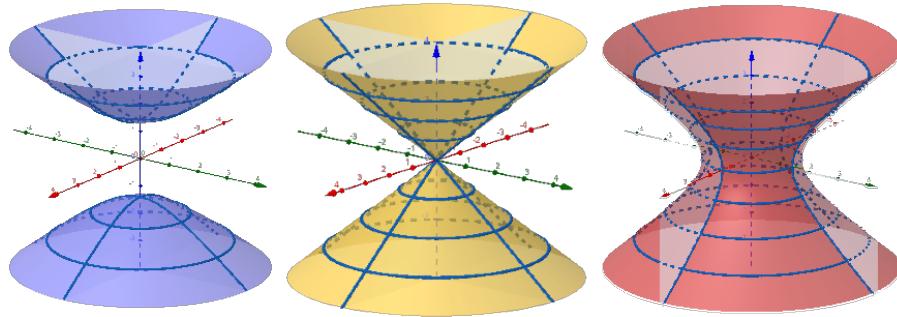
- (a)  $D_f = \mathbb{R}^3$
- (b)  $\text{Im } f = \mathbb{R}$
- (c) Seja  $k \in \text{Im } f = \mathbb{R}$ . Então, a superfície de nível correspondente é

$$S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$$

Se  $k = 0$ , temos  $S_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$  ou  $z^2 = x^2 + y^2$ . Fazendo  $x = 0$ , temos  $z = \pm|y|$  e fazendo  $z = c$ , temos  $x^2 + y^2 = c^2$ . Logo, temos a forma de  $S_0$  que é um cone.

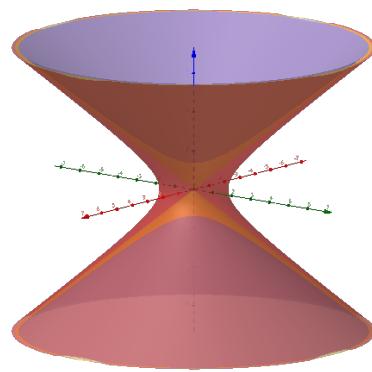
Se  $k > 0$ , temos  $S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$ . Fazendo  $x = 0$ , temos a hipérbole  $y^2 - z^2 = k$  no plano  $yz$  de vértices  $(0, \sqrt{k}, 0)$  e  $(0, -\sqrt{k}, 0)$ . Fazendo  $z = c$ , temos a circunferência  $x^2 + y^2 = k + c^2$ . Assim, temos a superfície  $S_k$ ,  $k > 0$ , dita hiperbolóide de uma folha.

Se  $k < 0$  ou  $-k > 0$ , temos  $S_k : z^2 \rightarrow x^2 - y^2 = -k$ . Fazendo  $x = 0$ , temos a hipérbole  $z^2 - y^2 = -k$  no plano  $yz$  de vértices  $(0, 0, \sqrt{-k})$ ,  $(0, 0, -\sqrt{-k})$ . Fazendo  $z = c$ , com  $c > \sqrt{-k}$  ou  $c < \sqrt{-k}$ , temos circunferências  $x^2 + y^2 = k + c^2$ . Assim, temos a superfície  $S_k$ ,  $k < 0$ , dita hiperbolóide de duas folhas.



**Figure 33: Superfície de nível  $k < 0$  (azul),  $k = 0$  (amarelo) e  $k > 0$  (vermelho) da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$**

A versão do mapa de contorno para as superfícies de nível seria um gráfico 3D com as superfícies de nível uma dentro da outra:



**Figure 34: Gráfico 3D com as superfícies de nível da função  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$**

## Exercícios

1. Seja  $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ . Determine:

- (a)  $D_f$   
 (b)  $Imf$   
 (c) superfícies de nível
2. A temperatura em uma região  $D$  do  $\mathbb{R}^3$  é dada por  $T(x, y, z) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}$   
 Determine:  
 (a) a região  $D$   
 (b)  $ImT$   
 (c) o conjunto de pontos que possuem a mesma temperatura do que o ponto  $(0, 1, \sqrt{2})$   
 (d) as isotermas
3. Se a voltagem  $V$  no ponto  $P(x, y, z)$  é dada por

$$V = \frac{6}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Determine:

- (a) domínio de  $V$   
 (b)  $ImV$   
 (c) as equipotenciais

### Respostas

1. (a)  $D_f : x^2 + y^2 + z^2 > 1$   
 (b)  $Imf = \mathbb{R}$   
 (c)  $S_k : x^2 + y^2 + z^2 = 1 + e^k, \quad k \in \mathbb{R}$ , esferas concêntricas de raio  $\sqrt{1 + e^k}$  e centro na origem.
2. (a)  $D = \left\{ (x, y, z); \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} \leqslant 1 \right\}$   
 (b)  $ImT = [0, 6]$   
 (c)  $S_5 : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 11$   
 (d)  $S_0 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1, \quad S_6 = \{(0, 0, 0)\}, \quad S_k : 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36 - k^2, \quad 0 < k < 6$ , elipsoides concêntricos de centro na origem.
3. (a)  $D_V = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$   
 (b)  $ImV = ]0, +\infty[$   
 (c)  $S_k : x^2 + 4y^2 + 9z^2 = \frac{36}{k^2}, \quad k > 0$ , elipsoides concêntricos de centro na origem.





## Topologia em $\mathbb{R}^n$

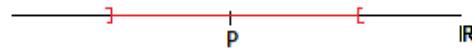
### Objetivos:

- Compreender a noção de bola aberta; identificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Identificar se um conjunto é aberto ou fechado a partir do conjunto fronteira.
- Compreender a definição de pontos fronteira e pontos de acumulação.

**Definição 1.** A bola aberta de centro  $P \in \mathbb{R}^n$  e raio  $r > 0$  é o conjunto dos pontos  $X \in \mathbb{R}^n$  cuja distância ao ponto  $P$  é menor do que  $r$ . Indicaremos por  $B_r(P)$ . Assim,

$$B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - P\| < r\}$$

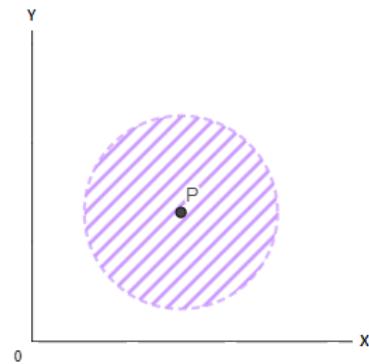
Quando  $n = 1$ , a bola aberta  $B_r(P)$  de centro  $P$  e raio  $r$  na reta é o intervalo aberto  $[P - r, P + r]$ .



**Figure 35: Bola de centro  $P$  e raio  $r > 0$  em  $\mathbb{R}$**

Quando  $n = 2$ , a bola aberta  $B_r(P)$  de centro  $P$  e raio  $r$  no plano  $\mathbb{R}^2$  é o disco aberto. Se  $P = (a, b)$ , então

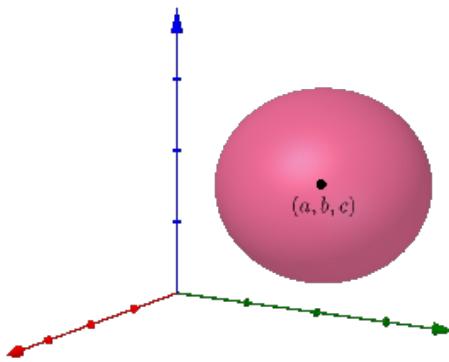
$$B_r(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \right\}$$



**Figure 36: Bola de centro  $P$  e raio  $r > 0$  em  $\mathbb{R}^2$**

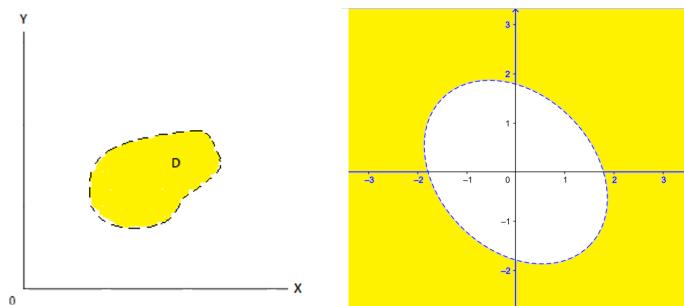
Quando  $n = 3$ , a bola aberta  $B_r(P)$  de centro  $P = (a, b, c)$  e raio  $r$  no espaço  $\mathbb{R}^3$  é a esfera aberta

$$B_r(a, b, c) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \right\}$$



**Figure 37: Bola de centro  $P$  e raio  $r > 0$  em  $\mathbb{R}^3$**

**Definição 2.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $D$  é um conjunto aberto, se dado  $P \in D$  existir uma bola aberta  $B_r(P) \subset D$ .



**Figure 38: Conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^2$**

Os conjuntos  $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  e todas as bolas abertas são conjuntos abertos.

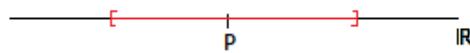
**Definição 3.** Seja  $F \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $F$  é um conjunto fechado, se o complementar dele  $D = \mathbb{R}^n \setminus F$  for aberto.

**Observação:**

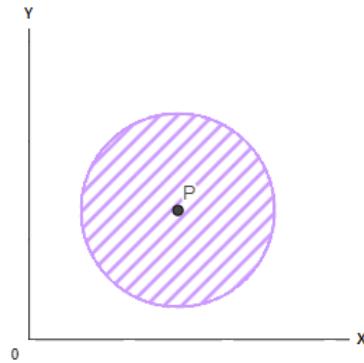
(I) Os conjuntos

$$\overline{B_r(P)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| \leq r\}$$

são fechados. Eles são chamados de bolas fechadas.



**Figure 39: Bola fechada em  $\mathbb{R}$**

**Figure 40: Bola fechada em  $\mathbb{R}^2$** 

(II) Os únicos conjuntos em  $\mathbb{R}^n$  abertos e fechados ao mesmo tempo são  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 4.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Um ponto  $P \in \mathbb{R}^n$  (pertencente ou não a  $D$ ) se diz ponto de fronteira de  $D$  se toda bola  $B_r(P)$  interseca a  $D$  e também a seu complemento  $\mathbb{R}^n \setminus D$ . O conjunto formado por todos os pontos fronteira de  $D$  é chamado conjunto fronteira de  $D$  e denotado por  $Fr(D)$ .

**Observação:**

- (I) Um conjunto é fechado se contém todos os pontos de sua fronteira. Por exemplo, as bolas fechadas.
- (II) Se um conjunto contém pelo menos um ponto fronteira, então não é aberto. Por exemplo, o intervalo  $]0, 1]$ .

**Definição 5.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $D$  é um conjunto limitado, se existir um raio  $r > 0$  tal que  $D \subset B_r(0)$ .

Dizemos que  $D$  é não limitado se para qualquer  $r > R_0$ , existe algum ponto em  $D$  que não pertence a  $B_r(0)$ .

**Observação:**

- (I)  $D$  também seria limitado se existir um raio  $r > 0$  tal que  $D \subset \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < r, \forall i = 1, \dots, n\}$ . Se  $n = 2$ , esse conjunto seria um quadrado de lado  $r$ .
- (II) As bolas abertas e as bolas fechadas são conjuntos limitados.
- (III) O conjunto da Figura 4 (esquerda) é limitado. Já o conjunto da Figura 4 (direita) é não limitado, pois para qualquer  $r > 3$  sempre existirá um ponto  $(0, r + 1)$  fora da bola  $B_r(0)$ .

**Definição 6.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $D$  é um conjunto compacto se for fechado e limitado.

As bolas fechadas são compactas, as bolas abertas não o são.

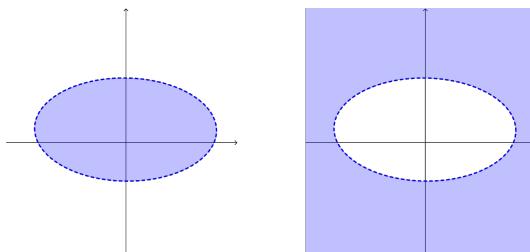
**Definição 7.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $P \in \mathbb{R}^n$  (pertencente ou não a  $D$ ) é um ponto de acumulação de  $D$  (p.a.) se qualquer bola aberta centrada em  $P$  contém pelo menos um ponto  $x \in D$ ,  $x \neq P$ .

Os extremos de um intervalo aberto em  $\mathbb{R}$  são pontos de acumulação.

## Exemplos

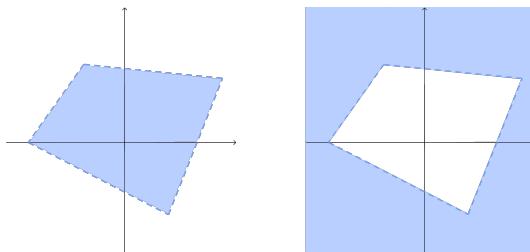
1. Os seguintes conjuntos são abertos:

- (a) interior e exterior de uma elipse



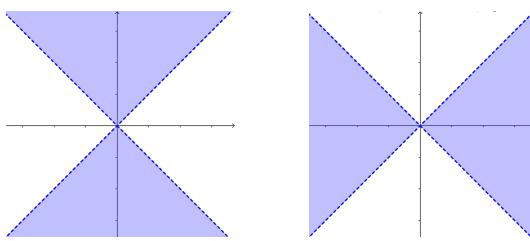
**Figure 41: Interior (esquerda) e exterior (direita) de uma elipse**

- (b) interior e exterior de um polígono



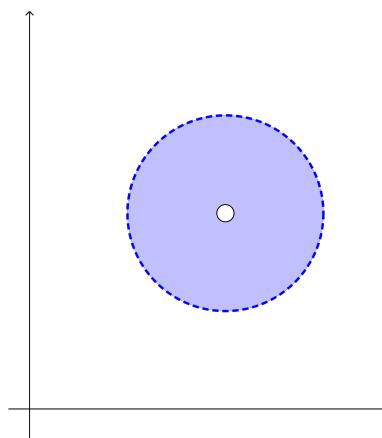
**Figure 42: Interior (esquerda) e exterior (direita) de um polígono**

- (c) conjuntos definidos algebricamente por uma desigualdade. Por exemplo,  $x^2 - y^2 > 0$  ou  $x^2 - y^2 < 0$ .



**Figure 43: Conjunto dado por  $x^2 - y^2 > 0$  (esquerda) e  $x^2 - y^2 < 0$  (direita)**

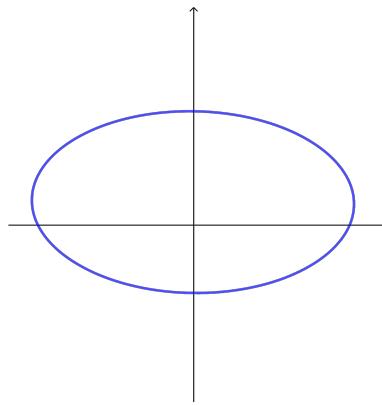
- (d) O conjunto  $B_r(a, b, c) \setminus \{(a, b, c)\}$



**Figure 44: Bola furada em  $\mathbb{R}^2$**

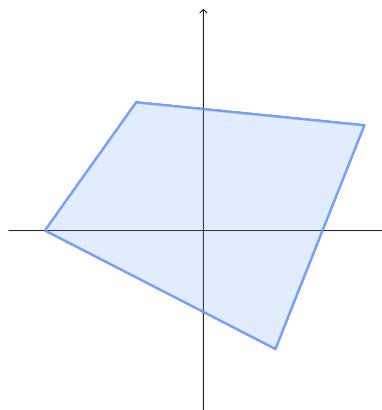
2. Os seguintes conjuntos são fechados:

- (a) uma elipse



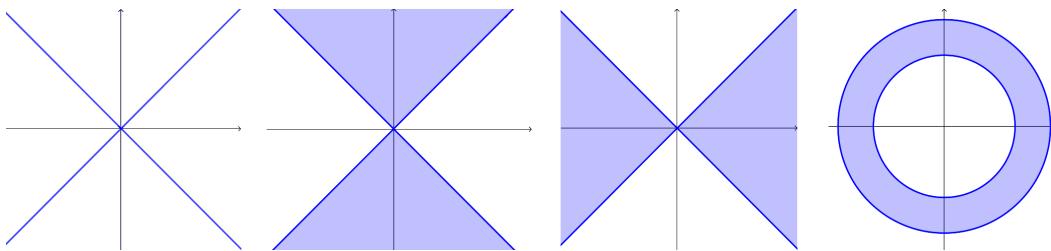
**Figure 45: Elipse**

- (b) um polígono



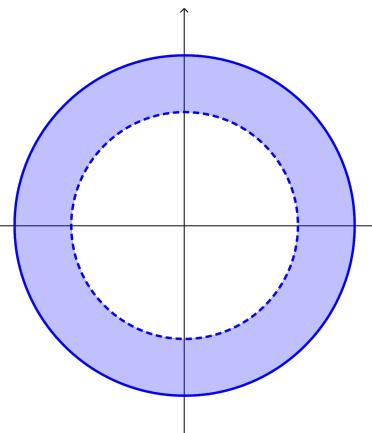
**Figure 46: Polígono**

- (c) conjuntos definidos algebraicamente por uma igualdade. Por exemplo,  $x^2 - y^2 = 0$ ,  $x^2 - y^2 \leq 0$ ,  $x^2 - y^2 \geq 0$ ,  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ .



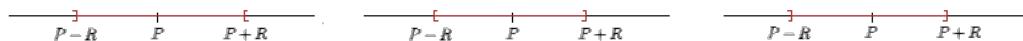
**Figure 47:** Conjuntos dados por  $x^2 - y^2 = 0$ ,  $x^2 - y^2 \leq 0$ ,  $x^2 - y^2 \geq 0$ ,  $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$  (respectivamente de esquerda a direita)

3. Os conjuntos definidos por uma igualdade e uma desigualdade. Por exemplo,  $4 < x^2 + y^2 \leq 9$  não são nem abertos nem fechados.



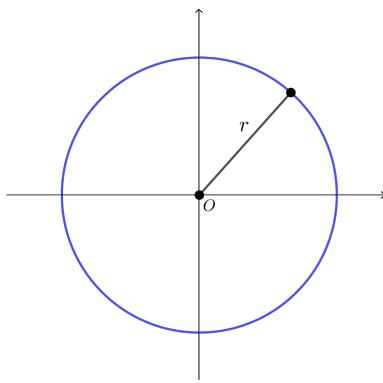
**Figure 48:** Conjuntos dados por  $4 < x^2 + y^2 \leq 9$

4. (a) A fronteira de um intervalo (fechado, aberto, aberto por um lado e fechado por o outro) está formada pelos extremos:  $Fr([P - r, P + r]) = Fr([P - r, P + r]) = Fr([P - r, P + r]) = Fr([P - r, P + r]) = \{P - r, P + r\}$ .



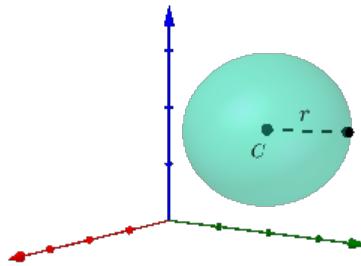
**Figure 49:** intervalos limitados com mesma fronteira

- (b) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em  $\mathbb{R}^2$  são circunferências:  $Fr(B_r(a, b)) = Fr(\overline{B_r(a, b)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$



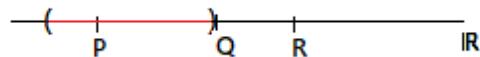
**Figure 50: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em  $\mathbb{R}^2$**

- (c) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em  $\mathbb{R}^3$  são esferas:  $Fr(B_r(a, b, c)) = Fr(\overline{B_r(a, b, c)}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}$



**Figure 51: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em  $\mathbb{R}^3$**

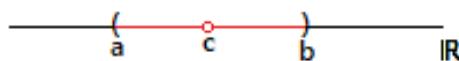
5. Seja  $D$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ . Sejam  $P \in D$  e  $Q, R \notin D$ .



**Figure 52: Pontos de acumulação no interior e nos extremos do intervalo**

Vemos que  $P \in D$  é um p.a. de  $D$ ,  $Q \notin D$  é também um p.a. de  $D$ , mas  $R \notin D$  não é um p.a. de  $D$ .

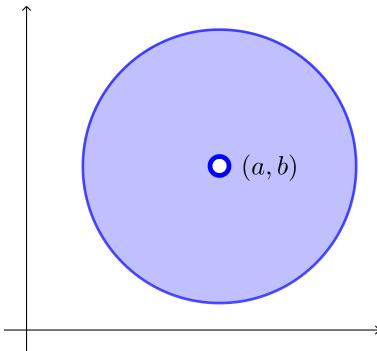
6. Seja  $D = ]a_1, c] \cup ]c, b[$ .



**Figure 53: Pontos de acumulação em intervalos furados**

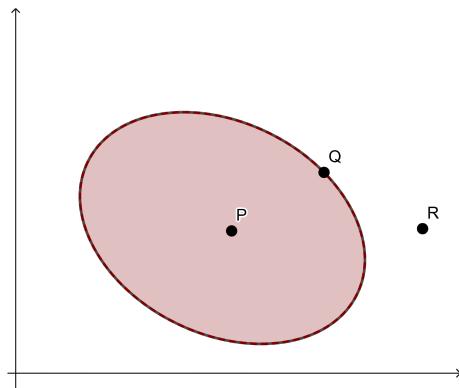
Vemos que  $c \notin D$  é um p.a. de  $D$ .

7. O ponto  $(a, b)$  é de acumulação do conjunto  $\overline{B_r(a, b)} \setminus \{(a, b)\}$ .



**Figure 54: Ponto de acumulação da bola fechada furada em  $\mathbb{R}^2$**

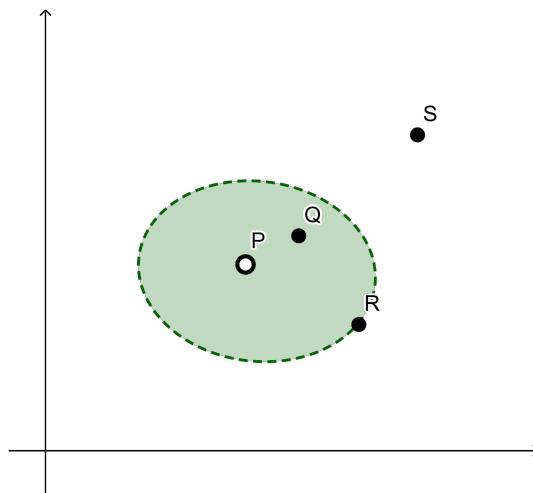
8. Considere o conjunto  $D$  abaixo:



**Figure 55: Pontos de acumulação em conjuntos fechados de  $\mathbb{R}^2$**

Temos que  $P, Q \in D$  são p.a. de  $D$  e  $R \notin D$  não é p.a. de  $D$ .

9. Considere o conjunto  $D$  abaixo:



**Figure 56: Pontos de acumulação em conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^2$**

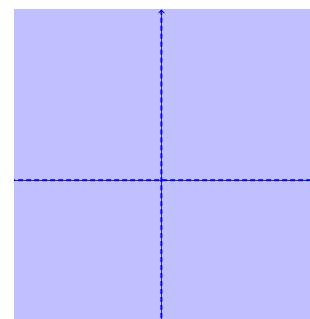
Temos que  $P \notin D$  é um p.a. de  $D$ ,  $Q \in D$  é p.a.,  $R \notin D$  é p.a. e  $S \notin D$  não é p.a.

## Exercícios

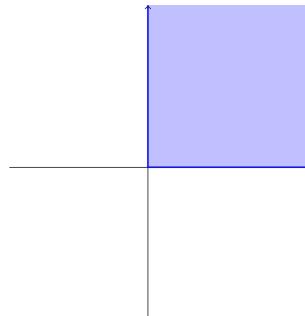
1. Esboçar e determinar se os seguintes conjuntos são abertos, fechados, limitados e/ou compactos. Calcule os conjuntos fronteira.
  - (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$ .
  - (b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ .
  - (c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 - x^2\}$ .
  - (d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$ .
  - (e)  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x^2\}$ .
  - (f)  $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x^2 + y^2 < 9\}$ .
  - (g)  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x^2 + y^2 \leq 7\}$ .
  - (h)  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x^2 + y^2 < 7\}$ .

### Respostas

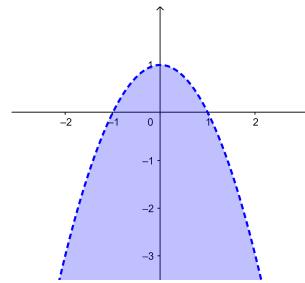
1. (a) aberto, não fechado, não limitado e não compacto.  $Fr(A) = \{\text{reta } x = 0\} \cup \{\text{reta } y = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$ .



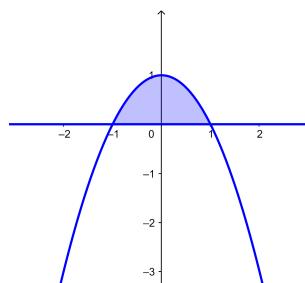
- (b) não aberto, fechado, não limitado, não compacto.  $Fr(B) = \{0\} \times [0, +\infty) \cup [0, +\infty) \times \{0\}$ .



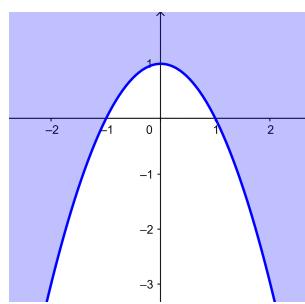
- (c) aberto, não fechado, não limitado, não compacto.  $Fr(C) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$ .



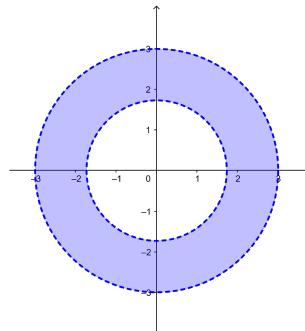
- (d) não aberto, fechado, limitado, compacto.  $Fr(D) = \{(t, 1 - t^2) : t \in [-1, 1]\} \cup [-1, 1] \times \{0\}$ .



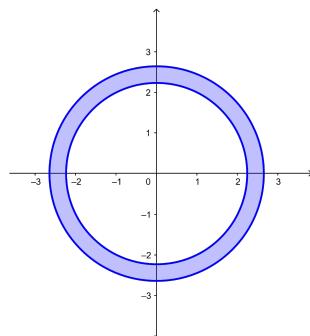
- (e) não aberto, fechado, não limitado, não compacto.  $Fr(E) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$ .



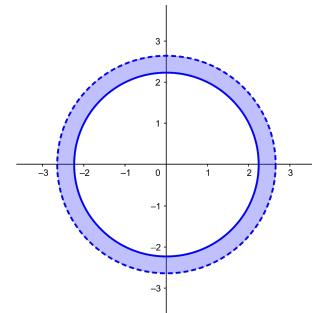
- (f) aberto, não fechado, limitado, não compacto.  $Fr(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ .



- (g) não aberto, fechado, limitado, compacto.  $Fr(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 7\}$ .



- (h) não aberto, não fechado, limitado, não compacto.  $Fr(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 7\}$





## Conceito e propriedades de limites

Objetivos:

- Compreender a noção de limites; propriedades dos limites
- existência e unicidade do limite; limites por caminhos;

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in \mathbb{R}^n$  um ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que o limite de  $f(X)$  quando  $X$  tende a  $P$  é o número  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L \quad \text{ou} \quad f(X) \rightarrow L, \quad \text{se } x \rightarrow p$$

quando

$$\lim_{\|x-p\| \rightarrow 0} |f(x) - L| = 0$$

Se o limite existir, ele deve ser único.

Observação: Para  $n = 2$ , temos  $P = (a, b)$ ,  $X = (x, y)$ . Então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad f(x, y) \rightarrow L, \quad \text{se } (x, y) \rightarrow (a, b)$$

quando

$$\lim_{\|(x,y)-(a,b)\| \rightarrow 0} |f(x, y) - L| = 0$$

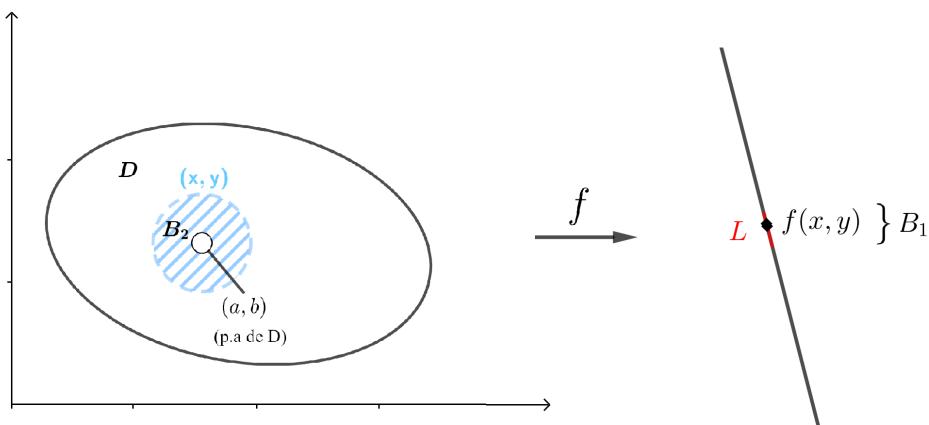


Figure 57: Limite de uma função definida em  $\mathbb{R}^2$

Isso significa que para cada bola aberta  $B_1$  de centro  $L$ , existe uma bola aberta  $B_2$  de centro  $(a, b)$ , tal que para todo  $(x, y) \in B_2 \subset D$  (exceto provavelmente  $(a, b)$ ) tem-se  $f(x, y) \in B_1 \subset \text{Im } f$ .

### Propriedades

Sejam  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L_1$ ,  $\lim_{X \rightarrow P} g(X) = L_2$  e  $k \in \mathbb{R}$ .

1.  $\lim_{X \rightarrow P} (f(X) \pm g(X)) = L_1 \pm L_2$
2.  $\lim_{X \rightarrow P} (kf(X)) = kL_1$
3.  $\lim_{X \rightarrow P} (f(X) \cdot g(X)) = L_1 \cdot L_2$
4.  $\lim_{X \rightarrow P} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{L_1}{L_2}$ , se  $L_2 \neq 0$ .
5. Se  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\lim_{u \rightarrow L_1} h(u) = L$ , então

$$\lim_{X \rightarrow P} h(f(X)) = \lim_{u \rightarrow L_1} h(u) = L$$

### Limites por caminhos

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Se existe o limite  $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L$ , então o valor do limite ao longo de qualquer caminho também é  $L$ , isto é,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = L,$$

ao longo de  $C$

para qualquer curva  $C$  parametrizada por  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e tal que  $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = P$ .

Observação:

(I) Temos o seguinte fato em cálculo de uma variável:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Portanto, se  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ⇒  $\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

(II) Temos o seguinte fato em cálculo de várias variáveis:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x, y) = L,$$

para toda curva  $C$  passando por  $(a, b)$ .

Portanto, se  $C_1$  e  $C_2$  são duas curvas passando por  $(a, b)$  tais que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_2}} f(x, y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

(III) Se acharmos dois (ou três ou mil) caminhos quaisquer  $C_1$  e  $C_2$  tais que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) = L,$$

jamais poderemos dizer que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ , pois poderia se dar o caso de encontrar um outro caminho  $C_3$  com  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_3}} f(x,y) \neq L$ . Ver Exemplo 7.

## Exemplos

1. Se  $f(x,y) = c$  (função constante), então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$
2. Se  $f(x,y) = x$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$
3. Se  $f(x,y) = y$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$
4. Seja  $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + x - y - 3$ . Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y)$

### Solução

Por propriedades de limite, temos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2xy^2 - x^2y + x - y - 3 = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2xy^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x^2y + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} y - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 3 = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1^2(-1) + 1 - (-1) - 3 = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2 \end{aligned}$$

5. Seja  $f(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 - y^2 - 1}$ . Calcule  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} f(x,y,z)$ .

### Solução

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} f(x,y,z) = \frac{0+0+1}{0-0+1} = -1$ , já que o limite do denominador não se anula.

6. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$ .

### Solução

Não podemos aplicar nenhuma propriedade, pois  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ . Então, façamos  $u = xy$ . Como  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ , então  $u \rightarrow 0$ . Logo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

7. Seja  $f$  a função definida por  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ .

- (a) Calcule o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$  ao longo de cada um dos seguintes caminhos:  
(i) eixo dos  $x$ ; (ii) eixo dos  $y$ ; (iii) da reta  $y = x$ .
- (b) Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

**Solução**

(a)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo do eixo } x}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo do eixo } y}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{0^2 + t^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo da reta } y=x}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

- (b) Observe que o limite ao longo dos eixos é 0, pelo que alguém poderia pensar que o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$  e estaria errado. Pois o limite ao longo da reta  $y = x$  da  $\frac{1}{2}$ . Não adianta calcular o limite ao longo de um milhão de caminhos, sempre pode (o não) existir um outro caminho com limite diferente. Se ligue!!

## Exercícios

1. Seja  $f$  a função definida por  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

- (a) Calcule o limite de  $f(x, y)$  quando  $(x, y)$  tende a  $(0, 0)$  ao longo de cada um dos seguintes caminhos:  
(i) eixo dos  $x$ ; (ii) eixo dos  $y$ ; (iii) da reta  $y = x$ .
- (b) Existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

2. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\tan(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$

(b)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(c)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(d)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

$$(e) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln (3x^2 + 3y^2)$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+xy) \operatorname{sen} xy}{xy}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(2x) \tan(xy)}{x^2 y}$$

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(j) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + y^4}$$

$$(k) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}$$

### Respostas

1. (a) (i) 1 ; (ii) -1; (iii) 0

(b) não existe

2. (a) 1                      (d) 2                      (g) 0                      (j) 0

(b) não existe              (e) não existe              (h) 2                      (k) não existe

(c) não existe              (f) 0                      (i) 0





## Cálculo de limites. Continuidade

---

### Objetivos:

- teorema do confronto; teorema do anulamento;
  - coordenadas polares;
  - continuidade
- 

**Teorema do Confronto:** Se  $f(x, y) \leq g(x, y) \leq h(x, y)$  em  $B_r(a, b)$  e se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} h(x, y) = L$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x, y) = L$ .

**Teorema do Anulamento:** Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$  e  $g(x, y)$  é limitada em  $B_r(a, b)$ , isto é, se  $|g(x, y)| \leq M$ ,  $\forall (x, y) \in B_r(a, b)$ , então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)g(x, y) = 0$ .

### Observação

$$(I) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \iff \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = 0.$$

(II) Podemos calcular o limite passando a coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

Por exemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \cos(\rho) = 0,$$

pois  $|\rho \sin \theta \cos(\rho)| \leq \rho$  para todo  $\theta$ .

**Continuidade:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $P \in D$ , ponto de acumulação de  $D$ . Dizemos que  $f$  é contínua em  $P$  se

$$\lim_{x \rightarrow P} f(x) = f(P)$$

Se  $f$  for contínua em todos os pontos de  $D$ , dizemos que  $f$  é contínua.

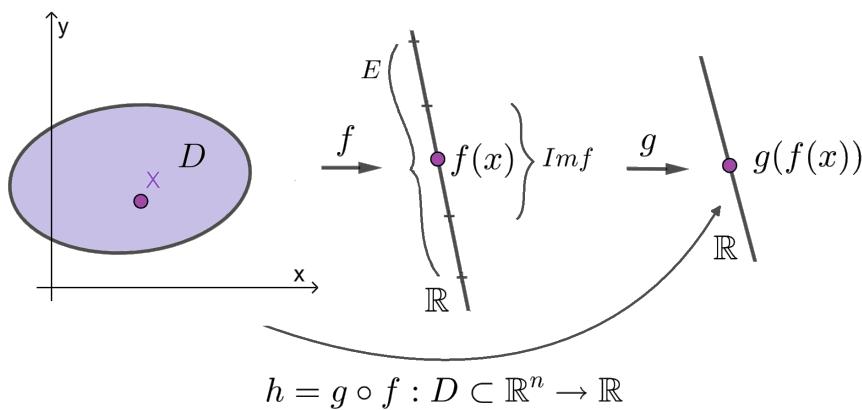
**Propriedades:** Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em  $P \in D$ . Então as seguintes funções também são contínuas em  $P$ :

- (a)  $f \pm g$   
 (b)  $f \cdot g$   
 (c)  $\frac{f}{g}$ , desde que  $g(P) \neq 0$

Observações:

- (I) Uma função polinomial de duas variáveis é uma soma de termos da forma  $cx^ny^m$ , com  $c \in \mathbb{R}$ , inteiros não negativos. Portanto, usando propriedades de funções contínuas, segue que toda função polinomial é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .
- (II) Analogamente, as funções polinomiais de  $n$  variáveis são contínuas em  $\mathbb{R}^n$ .
- (III) Uma função racional é o quociente de duas funções polinomiais. Portanto, toda função racional é contínua nos pontos onde o denominador não se anula, isto é, em seu domínio.

**Teorema:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $Im f \subset E$ . Se  $f$  for contínua em  $p$  e  $g$  contínua em  $f(p)$ , então a composta  $h = g \circ f$  é contínua em  $p$ .



**Figure 58: Continuidade da função composta**

## Exemplos

1. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ , se existir.

**Solução:** Temos

$$0 < \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right| = |x| \underbrace{\left| \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} \right|}_{\leq 1} \leq |x|$$

Como  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ , então pelo Teorema do Confronto, temos  
 $\lim \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} \right| = 0$ , donde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2} = 0$

2. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ , se existir.

**Solução:** Temos que  $0 \leq y^2 \leq y^2 + x^2$ , pelo que  $\left| \frac{y^2}{y^2 + x^2} \right| \leq 1$ . Aliás,  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ , então pelo Teorema do Anulamento,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0$$

3. Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2)$ , se existir.

**Solução:**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2) = 0$ , pois

$$|\rho \operatorname{sen} \theta \ln(\rho^2)| \leq \rho \ln(\rho^2)$$

e  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln(\rho^2) = 0$  aplicando L'Hopital.

4. Seja  $f(x, y)$  contínua, então  $\operatorname{sen}(f(x, y))$ ,  $\ln(f(x, y))$ ,  $\sqrt{f(x, y)}$  são funções contínuas.

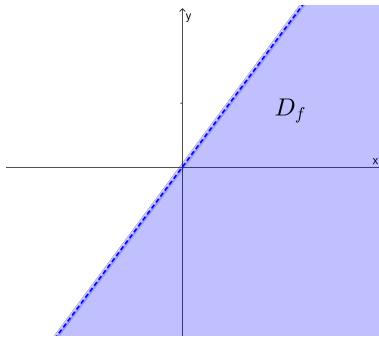
5. Seja  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{3x^2+3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

Determine o conjunto dos pontos de continuidade de f.

**Solução:** Observemos que  $D_f = \mathbb{R}^2$ . Por propriedades de continuidade, segue que f é contínua em  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Ora, Vimos na Aula 4, Exemplo 4, que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ . Logo, f é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

6. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de  $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$ .

**Solução:** O domínio de f é determinado pela desigualdade  $\frac{x-y}{x^2+y^2} > 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ , donde  $x > y$ . Então,  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$



**Figure 59:** Domínio função  $f(x, y) = \ln \frac{x-y}{x^2+y^2}$

A função  $f$  é a composta das funções  $h(u) = \ln u$  e  $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ . Como  $g(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$  é contínua em  $D_f$  por ser racional e  $h(u) = \ln u$  é contínua em  $\mathbb{R}^+$  por ser logarítmica, então a composta  $f = h \circ g$  é contínua em  $D_f$ .

7. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 + 1, & \text{se } x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

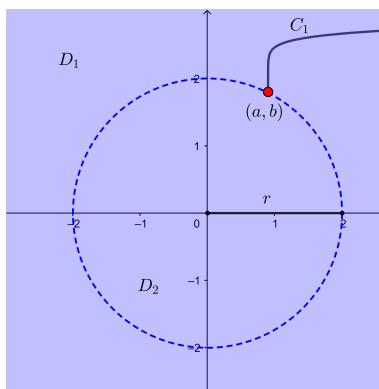
**Solução:** Temos  $D_f = D_1 \cup D_2 \cup C$ , onde  $D_1 : x^2 + y^2 > 4$ ,  $D_2 : x^2 + y^2 < 4$  e  $C : x^2 + y^2 = 4$ .

Temos:

- i  $f$  é contínua em  $D_1$ , pois  $f(x, y) = 0$  (função constante) em  $D_1$ ;
- ii  $f$  é contínua em  $D_2$ , pois  $f(x, y)$  é uma função polinomial em  $D_2$ ;
- iii Temos  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 4 + 1 = 5$  em  $C$ . Seja  $(a, b) \in C$ .

Então  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 5$  ao longo de  $C$ . Seja  $C_1$  uma curva passando por  $(a, b)$  e contida em  $D_1$ . Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0 \neq 5$ , ao longo de  $C_1$ .

Assim,  $f$  não é contínua em  $C$  e portanto, o conjunto de continuidade de  $f$  é  $D_1 \cup D_2 = \mathbb{R}^2 - \{(x, y); x^2 + y^2 = 4\}$ .



**Figure 60:** Continuidade da função composta

## Exercícios

1. Calcule, se possível, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - 2x^2y + 3y^2x - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^4}}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \arccos \frac{x}{x+y}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sec \frac{\pi(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 x}{x^2 + y^4}$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ por coordenadas polares.}$$

2. Sabendo que:  $1 - \frac{x^3y^2}{3} \leq \frac{\operatorname{arctan}(xy)}{xy} < 1$ . Calcule  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{arctan}(xy)}{xy}$

3. A função  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  é contínua em  $(0,0)$ ?

4. A função  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$  é contínua em  $(0,0)$ ?

5. Determine o conjunto dos pontos de continuidade de

$$(a) f(x,y) = \ln \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$(b) f(x,y) = \sqrt{y - \frac{1}{x}}$$

6. Discuta a continuidade das funções abaixo:

$$(a) f(x,y) = \frac{x^4y^2}{x^8 + y^4}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); f(0,0) = 0$$

$$(b) f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0); f(0,0) = 2$$

$$(c) f(x,y) = \frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2yx^3}{(x^2 + y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0); f(0,0) = 0$$

(d)  $f(x, y) = e^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$ , se  $x^2 + y^2 < 1$ ;  $f(x, y) = 0$ , se  $x^2 + y^2 \geq 1$ .

7. Calcule o valor de k para que a função dada seja continua em  $(0, 0)$ :

(a)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{xy}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = k$

(b)  $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{\sqrt{y^2+1}-1}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = k - 4$ .

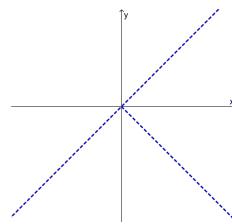
8. Seja  $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = 0$ . Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

### Respostas

1. (a) 0

5. (a)  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $y < x$ ,  $x \neq -y$

(b) 0



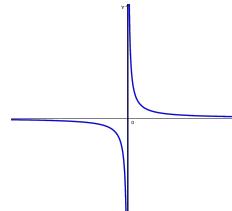
(c) 1

(d)  $\pi/3$

(e) 1

(b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \frac{1}{x}, x > 0 \text{ ou } y \leq \frac{1}{x}, x < 0\}$

(f) 0



(g) 0

2. 1.

6. (a) Não é em  $(0, 0)$

(b) É em  $\mathbb{R}^2$

(c) Não é em  $(0, 0)$

(d) É em  $\mathbb{R}^2$

3. Não

7. (a)  $k = 0$

(b)  $k = 4$

4. Não

8. 0; -1



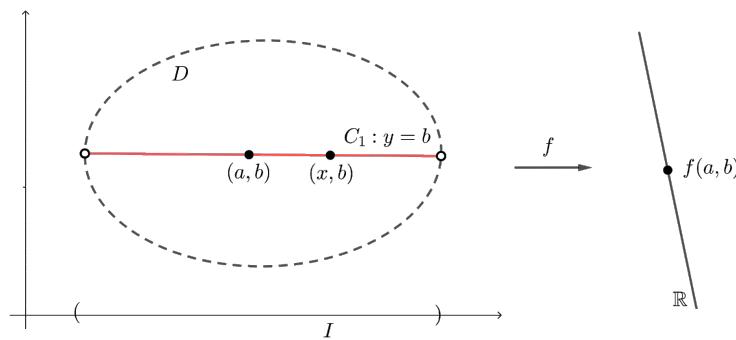


## Derivadas Parciais

Objetivos:

- definição e interpretação geométrica das derivadas parciais;
- cálculo das derivadas parciais;
- derivada parcial como taxa de variação;

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$ .



**Figure 61: Segmento interseção  $C_1 : y = b, x \in I$**

Fixando  $y = b$ , obtemos o segmento interseção  $C_1 : y = b, x \in I$ . A função  $g(x) = f(x, b), x \in I$ , é bem definida em  $C_1$ . A derivada de  $g$  em  $x = a$  seria dada por

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a + h) - g(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \end{aligned}$$

se existir o limite. Essa derivada é dita derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$  é indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f_x(a, b) \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \text{ ou } z_x(a, b).$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{n \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

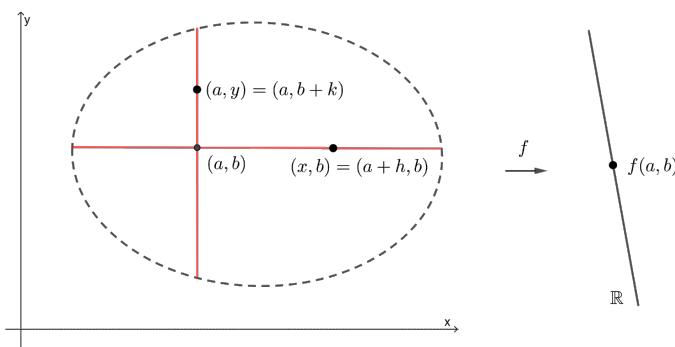
Analogamente, definimos a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ , no ponto  $(a, b)$ , por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = z_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

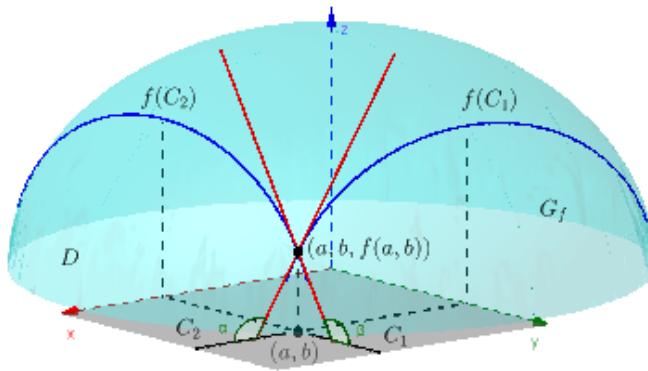
se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

**Interpretação geométrica de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ :** Geometricamente, estamos fazendo a restrição de  $f$  sobre a reta  $y = b$  e olhando para a curva correspondente  $f(C_1)$ , sobre o gráfico de  $f$ . Dessa maneira, o número  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva  $f(C_1)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Isto é  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \tan \alpha$ .

**Interpretação geométrica de  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ :** Geometricamente, temos que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva  $f(C_2)$  obtida como a interseção do  $G_f$  com o plano  $x = a$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Isto é,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \tan \beta$ .



**Figure 62: Segmento interseção  $C_2 : x = a, y \in J$  e  $C_1 : y = b, x \in I$**



**Figure 63: Interpretação geométrica das derivadas parciais**

**Derivadas parciais como taxas de variação:** Como  $f_x(a, b)$  é a inclinação da reta tangente à curva  $f(C_1)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , também pode ser interpretada como a taxa de variação da função  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$  (ao longo da curva  $C_1$ ).

Com efeito,  $f_x(a, b)$  é a taxa de variação instantânea da função  $g(x) = f(x, b)$ ,  $x \in I$ , no ponto  $x = a$ . Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_x(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1} + \frac{f(a + h_2, b) - f(a, b)}{h_2} \right],$$

com  $a + h_1 < a < a + h_2$ .

Analogamente,  $f_y(a, b)$  é a taxa de variação da função  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(a, b)$  (ao longo da curva  $C_2$ ). Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_y(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{f(a, b + k_1) - f(a, b)}{k_1} + \frac{f(a, b + k_2) - f(a, b)}{k_2} \right],$$

com  $b + k_1 < b < b + k_2$ .

**Regra prática para calcular as parciais:** Para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , faz-se  $y$  constante e deriva-se  $f$  em relação a  $x$  e para calcular  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , faz-se  $x$  constante e deriva-se  $f$  em relação a  $y$ .

Por exemplo, se  $f(x, y) = x^3y^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx^3$ .

**Derivadas parciais de funções de três variáveis:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, e  $(a, b, c) \in D$ . Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y, c) - f(a, b, c)}{\Delta y}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + \Delta z) - f(a, b, c)}{\Delta z}, \text{ se o limite existir.}$$

Na hora de calcular  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , faz-se  $x$  e  $y$  constantes e deriva-se  $f$  em relação a  $z$ . Analogamente para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Exemplos

- Seja  $f(x, y) = x$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  pela definição.

### Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x - x}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$$

- Seja  $f(x, y) = y$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  pela definição.

### Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{y + k - y}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1$$

- De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão está relacionada com a temperatura e o volume de um gás. Suponha que o volume  $V$  seja medido em litros (l) e a temperatura  $T$  seja medida em kelvins (K). Use a tabela a seguir para:

		Temperatura K°			
		10,00	30,00	50,00	70,00
Volume L	20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
	40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
	60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
	80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

Figure 64: Tabela lei dos gases ideais

- obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 50 K e o volume permanecer constante em 60 l;
- obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação ao volume se a temperatura permanecer constante a 30 K e o volume for 40 l;

- (c) A pressão aumenta ou diminui em relação à temperatura? E em relação ao volume?

**Solução**

(a) Dado que  $\frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0 + h, V_0)}{h}$ , a taxa de variação pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo,  $h_1 = 20$  e  $h_2 = -20$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{P(50 + 20, 60) - P(50, 60)}{20} + \frac{P(50 - 20, 60) - P(50, 60)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{420 - 16.67}{20} + \frac{10 - 16.67}{-20} \right) = \frac{1}{2}(20.17 + 0.33) = 10.25\end{aligned}$$

(b) Dado que  $\frac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0, V_0 + h)}{h}$ , a taxa de variação considerada pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo,  $h_1 = 20$  e  $h_2 = -20$ . Com efeito,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{P(30, 40 + 20) - P(30, 40)}{20} + \frac{P(30, 40 - 20) - P(30, 40)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{10 - 15}{20} + \frac{20 - 15}{-20} \right) = \frac{1}{2}(-0.25 + (-0.25)) = -0.50\end{aligned}$$

(c) Como  $\frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) > 0$ , a pressão aumenta em relação à temperatura quando o volume é constante  $V = 60$  e a temperatura pega o valor de 50K. Já em relação ao volume quando a temperatura é constante a  $T = 30$  e o volume pega o valor de 40L a pressão diminui, pois  $\frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) < 0$ .

Observamos que, segundo os dados da tabela, quando afixamos o volume e percorremos os valores da temperatura a pressão sempre aumenta. Porem, se fixamos a temperatura e percorremos os valores do volume, a pressão diminui.

4. Seja  $f(x, y) = 2xy - 3y$ . Calcule

(a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

(b)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

(c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

(d)  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$ .

**Solução**

(a) Mantendo  $y$  constante e derivando em relação a  $x$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 2y - 0 = 2y$$

(b) Mantendo  $x$  constante e derivando em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3y) = 2x - 3$$

(c) Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$ .

(d) Como  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 3$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -5$ .

5. Calcule as derivadas parciais de  $z = x^2 \ln(x^2 + y^2)$ .

### Solução

Mantendo  $y$  constante e usando regras de derivação para as funções de uma variável, como  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2) \ln(x^2 + y^2) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2) = 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \\ &= 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Analogamente, mantendo  $x$  constante, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) = x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

6. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção do paraboloide  $z = 2x^2 + 3y^2$  e o plano  $x = 1$  no ponto  $(1, 2, 14)$ .

**Solução** Observe que a função  $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$  é diferenciável no ponto  $(1, 2)$  por ser polinomial e que o ponto  $(1, 2, 14)$  pertence à interseção de  $G_f$  e o plano  $x = 1$ . Portanto, o coeficiente angular da reta tangente será  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 6y|_{(1,2)} = 6 \cdot 2 = 12$ . Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = 14 + 12(y - 2) \\ x = 1 \end{cases}$$

7. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície  $x^2+y^2+z^2=5$  e o plano  $y=0$  no ponto  $(2, 0, -1)$ .

**Solução** Como a terceira coordenada do ponto  $(2, 0, -1)$  é negativa, consideraremos a função  $f(x, y) = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$ , que é diferenciável em  $(2, 0)$  por ser polinomial. O ponto  $(1, 0, -1)$  pertence à interseção de  $G_f$  e o plano  $y=0$ , portanto, o coeficiente angular da reta tangente será  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -2x|_{(2,0)} = -2 \cdot 2 = -4$ . Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = -1 - 4(x - 2) \\ y = 0 \end{cases}$$

8. Seja  $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ , se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$ , se  $(x, y) = (0, 0)$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

**Solução**

Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$ , aplicamos regras de derivação. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - y^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + 3y^4 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em  $(x, y) = (0, 0)$ , usamos a definição. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Seja  $f(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^4} g(t) dt$ , onde  $g(3) = 4$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ .

**Solução**

Aqui, usaremos a seguinte aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo: "Se  $F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t) dt$ , então  $F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)''$ .

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 1 = g(x + y^2 + z^4)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = g(1 + 1 + 1) = g(3) = 4$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 2y,$$

$$\text{onde } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 2 = 8.$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial z}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 4z^3,$$

$$\text{onde } \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 4 = 16$$

10. Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e seja  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ .

$$\text{Mostre que } x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f.$$

**Solução**

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y},$$

$$\text{onde } x \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}(x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}(x^2 + y^2)\phi'\left(\frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

onde,  $y \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right)$

Somando as duas expressões das parciais, temos

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2f$$

como queríamos mostrar.

11. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e seja  $g$  dada por  $g(x, y, z) = f(r)$ , onde  $r = \|(x, y, z)\|$ . Verifique

$$\frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = rf'(r).$$

### Solução

Temos

$$g(x, y, z) = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{z}{r}$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \frac{x^2}{r} + f'(r) \frac{y^2}{r} + f'(r) \frac{z^2}{r}$$

$$= f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = f'(r) \frac{r^2}{r} = rf'(r)$$

Como queríamos verificar.

## Exercícios

1. Determine as derivadas parciais da função:

(a)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

(b)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(c)  $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt$

(d)  $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

(e)  $\omega = xe^{x-y-z}$

2. A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$  são apresentados na seguinte tabela.

		Duração (horas)						
		5	10	15	20	30	40	50
Velocidade do vento (km/h)	20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
	30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
	40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
	60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
	80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
	100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
	120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

- (a) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação à velocidade do vento quando dita velocidade é de  $30 \text{ km/h}$  e sabendo que o vento se mantém na mesma intensidade por um tempo de 20 horas? Justifique a resposta.
- (b) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação ao tempo no qual o vento se mantém na mesma intensidade se dito tempo é de 20 horas e sabendo que a velocidade do vento permanece constante a  $30 \text{ km/h}$ ? Justifique a resposta.
- (c) nas condições do item (a) e (b), a altura das ondas aumenta ou diminui em relação ao tempo? E em relação à velocidade do vento? Justifique a resposta.
3. Use as derivadas parciais para encontrar, se possível, a equação da reta tangente à curva interseção do plano  $x = \pi$  com a superfície  $z = \frac{2y}{y + \cos x}$  nos pontos  $P(\pi, 2, 4)$ ,  $Q(2\pi, 1, 1)$  e  $R(\pi, 0, 1)$ .
4. Seja  $z = f(x^2 - y^2)$ , onde  $f(u)$  é uma função diferenciável de uma variável. Verifique que
- $$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
5. Seja  $f(x, y) = x^3y^2 - 6xy + \phi(y)$ . Determine uma função  $\phi$ , de modo que  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - 6x + \frac{y}{y^2+1}$ .
6. Seja  $f(x, y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$  se  $(x, y) = (0, 0)$ . Calcule  $f(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ .

7. Seja  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ . Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

### Respostas

1. (a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$   
(b)  $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$ ,  $f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$   
(c)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$   
(d)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$   
(e)  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = (1+x)e^{x-y-z}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial y} = -xe^{x-y-z}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$
2. (a)  $0,095 \text{ km/h}$   
(b)  $0 \text{ km/h}^2$   
(c) Aumenta em relação ao tempo e permanece constante em relação a velocidade do vento.
3. A reta tangente no ponto P é  $\begin{cases} z = 8 - 2y \\ x = \pi \end{cases}$  e não existe nos pontos Q e R.
4.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$  e  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ .
5.  $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln(1+y^2)$
6.  $\frac{12}{5}$
7.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .





## Diferenciabilidade. Plano tangente.

---

### Objetivos:

- diferenciabilidade de uma função de duas ou três variáveis;
  - funções de classe  $C^1$ ; condição suficiente para uma função ser diferenciável;
  - equações cartesianas do plano tangente ao gráfico da função em um ponto;
  - equações paramétricas da reta normal ao gráfico da função em um ponto;
- 

**Diferenciabilidade:** Lembrando o conceito de diferenciabilidade em funções de uma variável.

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}$  e  $a \in D$  um ponto no domínio. Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $a$  se o seguinte limite existir

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Temos, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right] = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0 \end{aligned}$$

Onde,

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

Essa definição sugere a seguinte definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

**Definição 1:** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$ . Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$  se existirem  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , tais que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0,$$

onde

$$\varepsilon(h, k) = f(a+h, b+k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k.$$

**Definição 2:** Dizemos que  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável no aberto  $A \subset D$  se for

diferenciável em todos os pontos  $(a, b) \in A$ . Em particular, dizemos que  $f$  é diferenciável se for diferenciável no domínio aberto  $D$ .

Exemplo: Mostre que  $f(x, y) = xy$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

Com efeito, seja  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , temos  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = b$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = a$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\varepsilon(h, k) &= f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \\ &= (a + h)(b + k) - ab - bh - ak = ab + ak + bh + hk - ab - bh - ak = hk\end{aligned}$$

Donde

$$\frac{\varepsilon(h, k)}{|(h, k)|} = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}} = h \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Temos

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} h = 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\sqrt{|k|^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2 + k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2 + k^2}{h^2 + k^2}} = 1$$

Então, pelo teorema do anulamento, temos  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{|(h, k)|} = 0$  Portanto,  $f(x, y) = xy$  é diferenciável em  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Como  $(a, b)$  é arbitrário, segue que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1:** Se  $f$  é diferenciável em  $(a, b) \Rightarrow f$ , então  $f$  é contínua em  $(a, b)$ .

**Teorema 2:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $(a, b) \in D$ . Se existirem  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  em um aberto contendo  $(a, b)$  e forem contínuas em  $(a, b)$ , então  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ .

**Definição 2:** Dizemos que  $f$  é de classe  $C^1$  no aberto  $A \subset D$  se as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  forem contínuas em todos os pontos  $(a, b) \in A$ .

**Observações:**

- O limite da Definição 1 é equivalente a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

e a

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

- Se uma das derivadas parciais não existir em  $(a, b)$ , então  $f$  não é diferenciável em  $(a, b)$ .

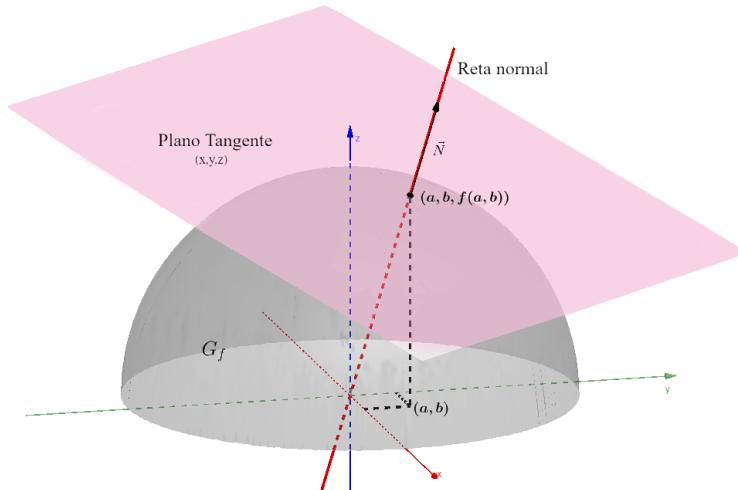
3. Se  $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  e  $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} \neq 0$  ou se  $\nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|}$ , então  $f$  não é diferenciável em  $(a, b)$ .
4. Em particular, se para algum caminho  $C_1$ ,  $\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|}$  for diferente de zero ou não existir, então  $f$  não é diferenciável em  $(a, b)$ .
5.  $f$  não é contínua em  $(a, b) \Rightarrow f$  não é diferenciável em  $(a, b)$ .
6. Se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, for de classe  $C^1$  em  $D$ , então  $f$  é diferenciável (em todo o domínio  $D$ ).

**Plano tangente e Reta normal:** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e diferenciável em  $(a, b) \in D$ .

O plano de equação

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é denominado plano tangente ao  $G_f$ , gráfico de  $f$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .



**Figure 65: Plano tangente a  $G_f$  em  $(a, b, f(a, b))$**

Da equação do plano temos que

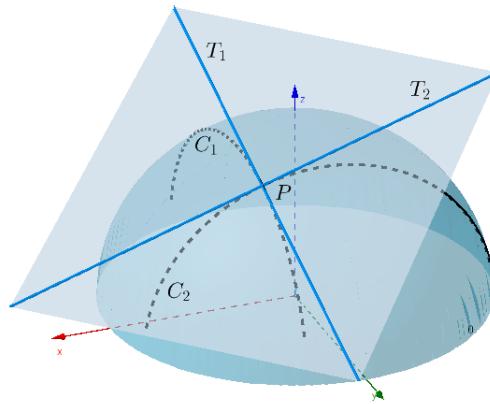
$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - a) - (z - f(a, b)) = 0 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)}_{\vec{N}} \cdot \underbrace{(x - a, y - b, z - f(a, b))}_{\text{vetor do plano tangente}} = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\vec{N} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right)$  é um vetor normal ao plano tangente no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .

A reta que passa por  $(a, b, f(a, b))$  e é paralela ao vetor  $\vec{N}$  é dita reta normal ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . A equação paramétrica da reta normal é:

$$(x, y, z) - (a, b, f(a, b)) = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

**Observação:** O plano tangente à superfície  $z = f(x, y)$  no ponto  $P = (a, b, f(a, b))$  contém as duas retas tangentes  $T_1$  e  $T_2$  à curva interseção da superfície com os planos  $x = a$  e  $y = b$ , respectivamente.



**Figure 66: O plano tangente contém as duas retas tangentes.**

## Exemplos

- Seja  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$  ?

### Solução

Temos  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}$  não existe.

Logo, pelo item 1 das Observações , concluímos que  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

- Mostre que a recíproca do teorema 1 é falsa.

### Solução

Considere a função  $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2+y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  $f(x, y) = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ .

Temos  $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2+y^2} = y \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}$ , onde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$  e  $\left| \frac{y^2}{x^2+y^2} \right| = \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1$ , donde  $\frac{y^2}{x^2+y^2}$  é limitada.

Logo, pelo corolário do teorema do confronto, segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

Portanto,  $f$  é continua em  $(0,0)$ .

Ora, na aula de Derivadas Parciais, exercício 5, vimos que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ .

Logo,

$$\frac{\varepsilon(h_1k)}{\|(h_1k)\|} = \frac{f(h_1k) - f(0,0) - 0 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{\frac{k^3}{h^2+k^2} - k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{-h^2k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} = g(h,k).$$

Consideremos o conjunto  $C_1 : h = 0, k \neq 0$ . Então,  $g(h,k) = g(0,k) = 0$  em  $C_1$ , donde  $\lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_1}} g(h,k) = 0$ .

Consideremos o conjunto  $C_2 : k = h, h \neq 0$ .

Então,  $g(h,k) = g(h,h) = \frac{-h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}} = \frac{-h}{2\sqrt{2}|h|}$ , donde  $\nexists \lim_{\substack{(h,k) \rightarrow (0,0) \\ \text{ao longo de } C_2}} g(h,k)$ .

Portanto,  $\nexists \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}$  e, assim  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

3.  $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2 - 5xy + 4x - 2y + 1$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , pois  $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 2y^2 - 5y + 4$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - 4xy - 5x - 2$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .
4. A função  $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , pois  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \sin(x^2 + y^2)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y \sin(x^2 + y^2)$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$
5. A função  $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ ,  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $f(x,y) = 0$ ,  $(x,y) = (0,0)$  é diferenciável em  $(0,0)$  ?

### Solução

Seja  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ ,  $(x,y) \neq (0,0)$  e  $C_1 : y = 0, x \neq 0$ . Temos  $f(x,y) = f(x,0) = 0$  em  $C_1$ . Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  ao longo de  $C_1$ .

Seja  $C_2 : x = 0, y \neq 0$ . Temos  $f(x,y) = f(0,y) = 0$  em  $C_2$ . Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$  ao longo de  $C_2$ . Seja  $C_3 : y = x, x \neq 0$ . Temos  $f(x,y) = f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$  em  $C_3$ . Logo,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$  ao longo de  $C_3$ . Como os limites não coincidem,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$  não existe.

Portanto  $f$  não é contínua em  $(0,0)$ . Logo, pelo teorema 1 , segue que  $f$  não é diferenciável em  $(0,0)$ .

6. Mostre que a função  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$  se  $(x, y) = (0, 0)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

### Solução

No exercício 7, da aula de Derivadas Parciais, temos onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

As funções  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $(x, y) \neq (0, 0)$ , pois são funções racionais.

Em  $(x, y) = (0, 0)$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2x^5}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 2x \cdot \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} + 2x \cdot \frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

onde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x = 0$ , e as funções  $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$  e  $\frac{2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  são limitadas por 1.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2} = -2y \cdot \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

onde  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (-2y) = 0$  e a função  $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$  é limitada por 1.

Assim, pelo teorema do anulamento, temos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$

e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

Logo,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$  e pelo teorema 2, concluímos que  $f$  é diferenciável (em  $\mathbb{R}^2$ ).

7. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de  $f(x, y) = 2x^2y$  no ponto  $(1, 1, f(1, 1))$ .

### Solução:

Equação do plano tangente:

$$z - f(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$$

onde

$$\begin{cases} f(1, 1) = 2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \end{cases}$$

Logo, a equação do plano tangente é:

$$z - 2 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \text{ ou } 4x + 2y - z = 4$$

Equação da reta normal:

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \lambda(4, 2, -1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

8. Determine o plano que passa pelos pontos  $(1, 1, 2)$  e  $(-1, 1, 1)$  e que seja tangente ao gráfico de  $f(x, y) = xy$ .

### Solução

Seja  $(a, b) \in D_f = \mathbb{R}^2$ . A equação do plano tangente ao  $G_f$  no ponto  $(a, b, f(a, b)) = (a, b, ab)$  é :

$$z - f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

onde  $z = ab + b(x - a) + a(y - b)$  ou  $z = bx + ay - ab$ .

Como  $(1, 1, 2)$  e  $(-1, 1, 1)$  estão neste plano, então

$$\begin{cases} 2 = b + a - ab \\ 1 = -b + a - ab \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ . Substituindo  $b = \frac{1}{2}$  em  $(1)$ , temos  $2 = \frac{1}{2} + a - \frac{a}{2}$ , donde  $a = 3$ . Assim, a equação do plano tangente é:

$$z = \frac{1}{2}x + 3y - \frac{3}{2} \text{ on } x + 6y - 2z = 3$$

9. Seja  $f(x, y) = \frac{x^4y}{x^2+y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0, (x, y) = (0, 0)$ .

- (a) Calcule  $f_x(0, 0)$ ,  $f_y(0, 0)$ .
- (b)  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ?
- (c)  $f$  é contínua em  $(0, 0)$ .

### Solução

- (a) Temos  $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$ ,  $f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$ .

(b) Temos  $\varepsilon(h_1k) = f(h, k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k = \frac{h^4k}{h^2+k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{h^4k}{h^2+k^2}$ .

Donde,

$$\frac{\varepsilon(h_1k)}{\|(h, k)\|} = \frac{\frac{h^4k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^4k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = h^2 \cdot \frac{h^2}{h^2+k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

onde,

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{h^2}{h^2+k^2} \right| &= \frac{h^2}{h^2+k^2} \leq \frac{h^2+k^2}{h^2+k^2} = 1, \quad \left| \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \sqrt{\frac{|k|^2}{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2+k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}} = 1. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema do anulamento, segue que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h_1k)\|} = 0$$

portanto,  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .

(c) Se  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ , então  $f$  contínua em  $(0, 0)$ .

10. Considere a superfície  $S$  de equação  $z = 2x^2 + 2y^2$ .

- (a) Determine o ponto  $P_0 \in S$ , tal que o plano tangente  $aS$  em  $P_0$  seja ortogonal ao vetor  $V = (0, 1, -\frac{1}{6})$ .
- (b) Escreva a equação do plano tangente referido no item (a).

### Solução

- (a) a equação do plano tangente  $aS$  em  $P_0 = (a, b, z(a, b)) = (a, b, 2a^2 + 2b^2)$  é:

$$z = z(a, b) + z_x(a, b)(x - a) + z_y(a, b)(y - b)$$

onde,

$$z_x(a, b) = 4x|_{(a,b)} = 4a \quad \text{e} \quad z_y(a, b) = 4y|_{(a,b)} = 4b$$

Temos então,

$$z = 2a^2 + 2b^2 + 4ax - 4a^2 + 4by - 4b^2$$

ou seja,

$$4ax + 4by - z = 2a^2 + 2b^2$$

Daí, concluímos que  $(4a, 4b, -1)$  é um vetor ortogonal ao plano tangente a  $S$  em  $P_0$ . Como queremos que plano tangente a  $S$  em  $P_0$  seja ortogonal ao vetor  $V = (0, 1, -\frac{1}{6})$ , então

$$(4a, 4b, -1) // \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

ou seja,  $(4a, 4b, -1) = \lambda (0, 1, -\frac{1}{6})$ , para algum  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Logo,  $4a = 0$ ,  $4b = \lambda$ ,  $-1 = -\frac{\lambda}{6}$ . Donde,  $a = 0$ ,  $\lambda = 6$  e  $b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ .

Então, o ponto  $P_0$  é dado por  $P_0 = (0, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}) = (0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})$ .

(b) A equação do plano tangente é:

$$6y - z = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad 12y - 2z - 9 = 0$$

## Exercícios

1. Seja  $f(x, y) = \frac{3x^5}{x^2 + y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$  se  $(x, y) = (0, 0)$ .
  - (a) Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .
  - (b)  $f$  é diferenciável em  $(0, 0)$ ? Por quê?
2. Verifique se a função  $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cos y$  é diferenciável em  $(0, 0)$ .
3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função  $f(x, y) = xe^{x^2-y^2}$  no ponto  $(2, 2, f(2, 2))$ .
4. Encontre o ponto onde o plano tangente ao gráfico da função  $f(x, y) = x^2y^2 + 2(x - y)$  é horizontal.

### Respostas

1. (a)  $0; 0$   
 (b) É diferenciável em  $(0, 0)$
2.  $f$  não é diferenciável em  $(0, 0)$ , pois não existe  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$
3.  $z = 9x - 8y$ ;  $(x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$
4.  $(-1, 1, -3)$





## Aproximação linear de funções

Objetivos:

- diferencial total; estimativa da variação de uma função; cálculo de erro absoluto e relativo;
- aproximação linear de uma função; estimativa de valores da função em um ponto;

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , diferenciável em  $(a, b) \in D$ . Então

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$$

Onde  $\varepsilon(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$ .

Diferencial: Se define diferencial de  $f$  no ponto  $(a, b)$  relativa aos acréscimos  $h$  e  $k$  como a função

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \text{diferencial de } f \text{ em } (a, b)$$

que depende de  $h$  e  $k$ .

Se  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h, k) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|} \cdot \|(h, k)\| \\ &= \underbrace{\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{\|(h, k)\|}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|(h, k)\|}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k, \quad \text{se } (h, k) \simeq (0, 0).$$

Pondo  $\Delta f = f(a + h, b + k) - f(a, b) = \text{variação de } f \text{ quando se passa de } (a, b) \text{ para } (a + h, b + k)$ , obtemos:

$$\Delta f \simeq df, \text{ se } (h, k) \simeq (0, 0)$$

O valor  $df$  também pode ser interpretado como o erro total nos valores de  $f(x, y)$  se os incrementos  $h$  e  $k$  medem o erro na medição dos valores  $x$  e  $y$  respectivamente. O erro relativo é o quociente  $|\frac{df}{f(a, b)}|$  e a percentagem de variação é  $|\frac{df}{f(a, b)}| * 100\%$ .

Observe-se que na notação de  $h = \Delta x$ ,  $k = \Delta y$ , a diferencial é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y$$

Analogamente, seja  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto em  $\mathbb{R}^3$ , é uma função de três variáveis com derivadas parciais contínuas em  $D$  (logo diferenciável). Para cada  $(a, b, c) \in D$ , definimos a diferencial de  $f$  en  $(a, b, c)$  relativa aos acréscimos  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\Delta z$$

Mostra-se que  $\Delta f \simeq df$  se  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \simeq (0, 0, 0)$ .

#### Observação:

##### 1. Notação clássica de diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

2. Em funções de uma variável  $y = f(x)$ , a diferencial é definida como  $dy = f'(x)dx$ , sendo  $dx$  a variável independente.
3. Como  $\Delta f \simeq df$ , temos que se  $df > 0$  (respectivamente  $df < 0$ ), a função aumenta (diminui) quando se passa de  $(a, b)$  para  $(a + h, b + k)$ .
4. Se  $df = 0$ , então a função não varia quando se passa de  $(a, b)$  para  $(a + h, b + k)$ .

**Função linearizada:** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , e  $(a, b) \in D$ . Se existem as parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , a função

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é bem definida e é chamada de função linearizada de  $f$  perto de  $(a, b)$ .

Se  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , temos

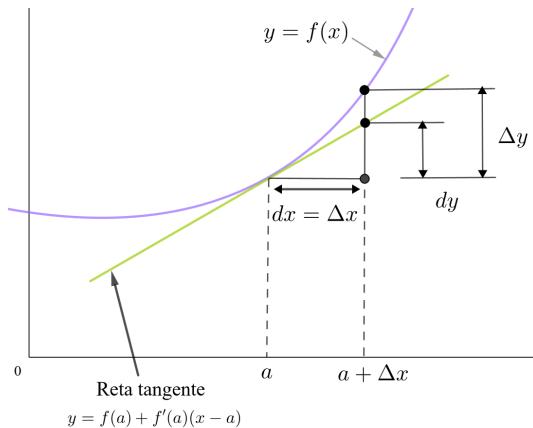
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

e podemos garantir que  $f(x, y) \simeq L(x, y)$  para todo  $(x, y)$  suficientemente próximo de  $(a, b)$ .

#### Observação:

1. A função  $L(x, y)$  é usada para estimar valores de  $f(x, y)$  quando os mesmos forem complicados de calcular e também quando não se tem uma expressão explícita de  $f$ . Por exemplo quando temos apenas dados experimentais numa tabela e desconhecemos a lei ou modelo.
  
  
  
2. A superfície  $z = L(x, y)$  é o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ .
  
  
  
3.  $df = L(x, y) - f(a, b)$

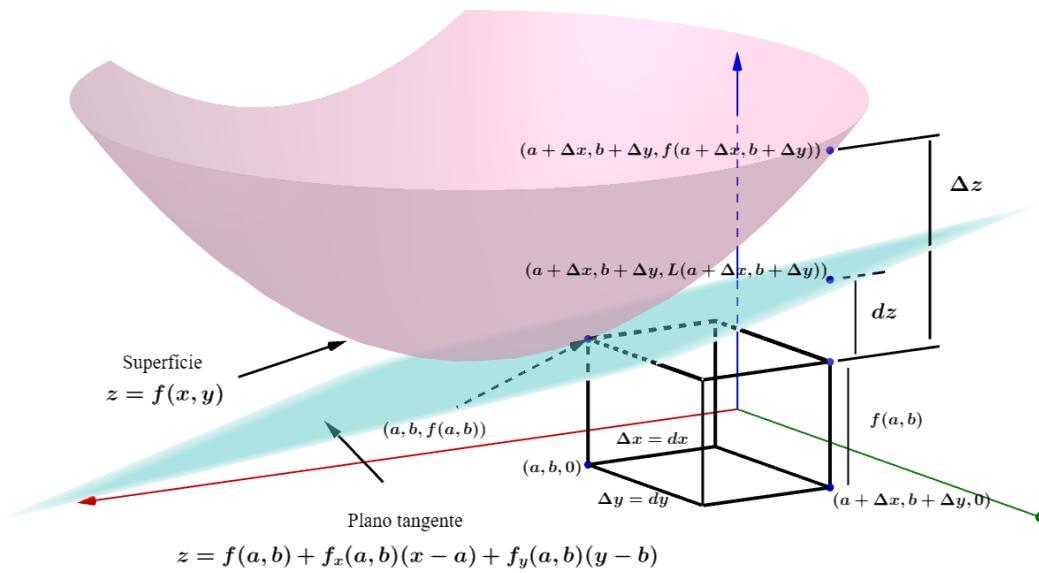
**Interpretação geométrica da diferencial:** Se  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então  $dy = f'(a)dx$ , e geometricamente se corresponde com a distância entre os pontos  $R$  e  $Q$  da figura abaixo. Em quanto  $\Delta y$  se corresponde com a distância entre os pontos  $R$  e  $P$ .



**Figure 67: Diferencial de uma função de uma variável**

Observe que  $\Delta y$  representa a variação da função  $f(x)$  e  $dy$  representa a variação da função linearizada de  $f$ ,  $L(x)$  perto do ponto  $(a, f(a))$ , cujo gráfico é a reta tangente a  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ .

Ora, se  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $z = f(x, y)$ , então  $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy$ , e geometricamente corresponde à distância do ponto  $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b))$  ao ponto do plano tangente  $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$ . Ora, o valor  $\Delta z$  se corresponde com a distância entre os pontos  $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b))$  e o ponto  $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a + \Delta x, b + \Delta y))$  do gráfico  $z = f(x, y)$ .



**Figure 68: Diferencial de uma função de duas variáveis**

Observe que  $\Delta z$  representa a variação da função  $f(x, y)$  e  $dz$  representa a variação da função linearizada de  $f$ ,  $L(x, y)$  perto do ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Daí  $c = L(a + \Delta x, b + \Delta y)$  no ponto de variação no plano tangente  $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$ .

## Exemplos

- Calcule a diferencial de  $z = \ln(x^2 + y^2)$ .

### Solução

Temos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

- Seja  $z = xe^{x^2-y^2}$ . Calcule um valor aproximado para  $z$ , correspondente a  $x = 1,01$  e  $y = 1,002$ .

### Solução

A função  $z = xe^{x^2-y^2}$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , por  $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$  serem contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

Sejam  $(a, b) = (1, 1)$ ,  $h = 0,01$  e  $k = 0,002$ . Como  $(h, k) \simeq (0, 0)$ , Então

$$\Delta z \simeq dz$$

Onde  $\Delta z = z(1.01, 1.002) - z(1, 1) = z(1.01; 1.002) - 1$ ,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)h + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)k =$$

$$\begin{aligned}
&= [e^{x^2-y^2} + x \cdot 2xe^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0.01) + [x \cdot (-2y)e^{x^2-y^2}]_{(1,0)} \cdot (0.002) = \\
&= (1+2) \cdot (0,01) + (-2) \cdot (0,002) = 0,03 - 0,004 = 0,026
\end{aligned}$$

Então,  $z(1.01, 1.002) - 1 \simeq 0,026$ , ou seja  $z(1.01, 1.002) \simeq 1,026$

3. A altura de um cone é  $h = 20 \text{ cm}$  e o raio da base é  $r = 12 \text{ mm}$ . Calcule um valor aproximado para a variação,  $\Delta V$  no volume quando  $h$  aumenta de  $2 \text{ mm}$  e  $r$  decresce  $1 \text{ mm}$ . Estime o erro relativo e a percentagem de variação do volume.

### Solução

O volume do cone de altura  $h$  e raio da base  $r$  é dado por  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , que é uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ . Sejam  $r_0 = 12, h_0 = 20$ .

Como  $h$  aumenta de  $2 \text{ mm}$ , então  $\Delta h = 92$  e como  $r$  decresce de  $1 \text{ mm}$ , então  $\Delta r = -0,1$ . Como  $|\Delta r| \simeq 0$  e  $|\Delta h| \simeq 0$ , então  $\Delta V \simeq dV$ , onde

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = \frac{2}{3}\pi r h \Big|_{(12,20)} \cdot \Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2 \Big|_{(12,20)} \cdot \Delta h \\
&= \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \cdot 20 \cdot (-0,1) + \frac{1}{3}\pi(12)^2 \cdot (0,2) \\
&= -16\pi + 9,6\pi = -6,4\pi
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta V \simeq -6,4\pi$$

ou seja, a variação  $\Delta V$  no volume decresce aproximadamente de  $6,4\pi \text{cm}^3$ .

O erro relativo é, portanto,

$$\frac{dV}{V(12,20)} = \frac{6,4\pi}{1/3\pi \cdot 144 \cdot 20} = 0,007$$

e a percentagem de variação do volume é de  $0,7\%$ .

4. A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$  são apresentados na seguinte tabela.

		Duração (horas)						
		5	10	15	20	30	40	50
Velocidade do vento (km/h)	40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
	60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
	80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
	100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
	120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para

- (a) determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando  $v$  está próximo de 80 km/h e  $t$  está próximo de 20 horas;

### Solução

Supondo que a função  $f$  é diferenciável, uma aproximação linear da função altura para pontos suficientemente próximos de  $(80, 20)$  seria a função

$$L(v, t) = f(80, 20) + \frac{\partial f}{\partial v}(80, 20)(v - 80) + \frac{\partial f}{\partial t}(80, 20)(t - 20)$$

Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80, 20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(80 + h, 20) - f(80, 20)}{h}$$

E podemos estimar esse valor considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo,  $h_1 = 20$  e  $h_2 = -20$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(80, 20) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{f(80 + 20, 20) - f(80, 20)}{20} + \frac{f(80 - 20, 20) - f(80, 20)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{12.2 - 8.6}{20} + \frac{5.2 - 8.6}{-20} \right) = \frac{1}{2}(0.17 + 0.18) = 0.175. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(80, 20) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{f(80, 20 + 10) - f(80, 20)}{10} + \frac{f(80, 20 - 5) - f(80, 20)}{-5} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{9.5 - 8.6}{10} + \frac{7.7 - 8.6}{-5} \right) = \frac{1}{2}(0.09 + 0.18) = 0.135. \end{aligned}$$

Assim, a aproximação linear esperada seria

$$L(v, t) = 8.6 + 0.175(v - 80) + 0.135(t - 20)$$

Observação: A estimativa das duas parciais vale 1,5 ponto, se o aluno coloca = em vez de  $\approx$  vale até 1. A expressão de  $L(v, t)$  vale 2 pontos (incluindo a justificação e a correta formulação da linearizada), se o aluno coloca = em vez de  $\approx$  vale 1 pontos.

- (b) estimar a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Resposta: Considerando a linearização do item (a),

$$f(84, 24) \approx L(84, 24) = 8.6 + 0.175(84 - 80) + 0.135(24 - 20) = 9.84$$

Portanto, as ondas teriam uma altura de aproximadamente 9.84 metros.

## Exercícios

1. Seja  $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$ . Determine:

- (a)  $D_f$
- (b)  $Im_f$
- (c) Curvas de nível
- (d)  $G_f$
- (e) o plano tangente e a reta normal ao  $G_f$  no ponto  $(1, 0, 1)$
- (f) Um valor aproximado para  $f(0.99, 0.01)$
- (g) O conjunto dos pontos de continuidade da função

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2[f(x, y) - 1], & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

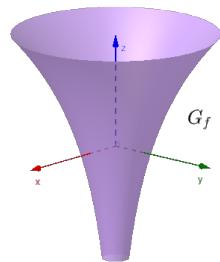
2. Dê um valor aproximado de  $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2}$ .
3. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período  $T$  de um pêndulo simples, através da fórmula  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , sendo o erro relativo em  $l$  igual a 1% e em  $g$  igual a 3%.
4. O ângulo central de um setor circular é  $80^\circ$  e o raio é 20 cm e deseja-se reduzir o ângulo de  $1^\circ$ . Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?
5. A sensação térmica  $W(T, v)$  depende da velocidade do vento  $v$  e da temperatura  $T$ . Use os dados da seguinte tabela para

		Temperatura T (F°)			
		10,00	30,00	50,00	70,00
Velocidade do vento v (milhas/h)	20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
	40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
	60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
	80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

- (a) dar uma equação aproximada da lei  $W(T, v)$  que determina a sensação térmica a velocidade do vento próxima a 10 milhas/h e temperatura próxima a  $30^{\circ}F$ .
- (b) estimar a sensação térmica se a velocidade do vento for de 11milhas/h e a temperatura for  $29^{\circ}F$ .
6. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por
- $$S = 72,09w^{0,425}h^{0,725},$$
- onde  $w$  é o peso (em quilogramas),  $h$  é a altura (em centímetros) e  $S$  é a medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de uma pessoa,  $w=80\text{kg}$  e  $h=175\text{cm}$ , forem no máximo de 2%, utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da superfície do corpo.
7. A temperatura do ponto  $(x, y)$  de uma chapa é dada por  $T(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 12}$ .
- (a) Determine o domínio de  $T(x, y)$  e represente-o no plano  $xy$ .
- (b) Determine a equação, da isoterma que contém o ponto  $(2, 3)$  e faça o seu esboço.
- (c) Determine o plano  $z = ax + by + c$  que melhor se aproxima do gráfico de  $T(x, y)$  no ponto  $(2, 3)$ .
- (d) Calcule um valor aproximado da temperatura em  $(1.01, 2.99)$ .

### Respostas

1. (a)  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$  (c) Circunferência de Centro  $(0, 0)$  e raio  $\sqrt{e^{k-1}}$
- (b)  $\mathbb{R}$



(d)

2. 4.978

3. 2%

4.  $\Delta r \simeq 0.25 \text{ cm}$ 5. (a)  $W(T, v) \simeq 21 + 1, 2(T - 30) + 0, 6(v - 10).$ (b)  $W(29, 11) \simeq 19, 2$ 

6. 2, 3%

(e)  $z = 1 + 2(x - 1); (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$ 7. (a)  $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 12\}$ 

(f) 0.98

(b)  $k = 0 \Rightarrow c_0 : x^2 + y^2 = 13$ (g)  $\mathbb{R}^2$ (c)  $z = 2x + 3y - 13$ (d)  $-2.01 - 0.01$ 



# Derivadas Parciais de Ordem Superior

## Aproximação não linear

### Objetivos:

- cálculo de derivadas parciais de ordem superior;
- teorema de Schwarz;
- polinômio de Taylor de ordem 2.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, diferenciável. Então existem as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  sejam diferenciáveis em  $D$ . Então, temos as funções derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Supondo as funções  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  diferenciáveis em  $D$ , temos as funções derivadas parciais de 3 ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

E assim por diante.

**Observação:** Caso as parciais  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$  existam, essa seria sua definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{k}$$

**Definição:** Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f$  tem derivadas parciais de ordem  $k$  contínuas em  $D$ .

**Teorema de Schwarz** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $D$ , então as derivadas parciais mistas são iguais em  $D$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

### Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$ . O polinômio:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  perto de  $(a, b)$ .

Sabemos que  $\Delta f \simeq df$  quando  $(x, y) \simeq (a, b)$ . Logo,

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Se  $(x, y) \simeq (a, b)$

Donde,

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

Portanto,  $f(x, y) \simeq P_1(x, y)$ , se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

### Polinômio de Taylor de Ordem 2

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $(a, b) \in D$ . O polinômio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right]$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  perto de  $(a, b)$ .

Mostra-se que  $f(x, y) \simeq P_2(x, y)$  se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

### Observação

- (I)  $P_1(x, y) = L(x, y)$ , a função linearizada de  $f$  perto de  $(a, b)$ .
- (II)  $P_2(x, y)$  também serve para aproximar os valores da função  $f$  em pontos próximos a  $(a, b)$ . O erro de aproximação de  $P_2(x, y)$  é menor do que o erro de aproximação pela linearizada.
- (III) É aconselhável aproximar por  $P_2(x, y)$  quando  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ . Exemplo:  
 $f(x, y) = \cos(x + y)$  em  $(0, 0)$ .

## Exemplos

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2 ordem de  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ .

### Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4x^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

2. Seja  $u = f(x - at) + g(x + at)$ , onde  $f$  e  $g$  são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2º ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda.

### Solução

Derivando  $u$  em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$$

onde  $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + g'(x + at)$ .

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$$

$$\text{onde, } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) + g''(x + at) \quad (1)$$

Derivando  $u$  em relação a  $t$ , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a$$

$$\text{onde } \frac{\partial u}{\partial t} = -af'(x - at) + ag'(x + at).$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + ag''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a, \text{ donde}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at) \frac{\partial}{\partial t}(x + at), \text{ ou}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (f''(x - at) + g''(x + at)) \quad (2)$$

De (1) e (2), vemos que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , como queríamos verificar.

3. Seja  $w(x, t) = (a \cos(cx) + b \sin(cx))e^{-kc^2t}$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes.  
Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação do calor.

### Solução

Derivando  $w$  em relação a  $t$ , temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx))$$

Derivando  $w$  em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{kc^2 t} (-ac \sin(cx) + bc \cos(cx))$$

Derivando de novo em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = e^{-kc^2 t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sin(cx)) = -c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx))$$

Portanto,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k \left[ -c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \right] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

4. Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, duas funções de classe  $C^2$  e tais que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\text{Prove que } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Esta equação é conhecida como equação de Laplace.

### Solução

Derivando  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$  em relação a  $x$ ; e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$  em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

$$\text{onde, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

Como  $g$  é de classe  $c^2$  então, pelo teorema de Schwarz, temos  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ .

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Derivando,  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$  em relação a  $x$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$  em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z a} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Como  $f$  é de classe  $c^2$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Assim,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ .

5. Mostre que a seguinte função é solução da equação do calor, para  $a, b$  e  $c$  constantes.

$$w(x, t) = (\alpha \cos(cx) + \beta \sin(cx)) e^{-ke^2 t}$$

### Solução

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= -kc^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \\
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= e^{-ec^2 t} (-ac \sin(cx) + bc \cos(cx)) \\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= e^{-k^2 t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sin(cx)) = \\
&= -c^2 e^{-kct} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= k [-c^2 e^{-kct} (a \cos(cx) + b \sin(cx))] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

**Solução**

6. Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Determine  $P_1(x, y)$ , o polinômio de Taylor de ordem 1, de  $f$  em volta de  $(1, 1)$ .
- (b) Utilizando  $P_1(x, y)$ , calcule um valor aproximado para  $f(x, y)$ , sendo  $x = 1,001$  e  $y = 0,99$ .

**Solução**

- (a) Temos  $P_1(x, y) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$   
 Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 4$ , resulta  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$  e  
 $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7$ .

Então,  $P_1(x, y) = 5 + 1(x - 1) + 7(y - 1)$ , ou seja,  $P_1(x, y) = x + 7y - 3$ .

- (b) Como  $x = 1.001 \simeq 1$  e  $y = 0.99 \simeq 1$ , então

$$f(1.001, 0.99) \simeq P_1(1.001, 0.99) = 1.001 + 7 \cdot (0.99) - 3 = 1,001 + 6.93 - 3 = 4.931.$$

7. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x, y) = x \sin y$ , ao redor do ponto  $(0, 0)$ .

**Solução**

Temos

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right].$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \cos y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x \sin y
\end{aligned}$$

então,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ ,  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$ .

Assim,  $P_2(x,y) = 0 + 0.x + 0.y + \frac{1}{2}[0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0.y^2]$

ou seja,  $P_2(x,y) = xy$

8. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x,y) = \sin x$  na origem para obter uma aproximação de  $f(0.1, 0.1)$ .

### Solução

Como  $(0.1, 0.1) \simeq (0,0)$ , então

$$f(0.1, 0.1) \simeq P_1(0.1, 0.1) = (0,1)(0,1)$$

ou seja,

$$f(0.1, 0.1) \simeq 0.01$$

## Exercícios

1. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x,y) = x^3y^2 + xy^4$ .
2. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x,y) = xye^{xy^2}$ .
3. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x,y,z) = x^2 \sin(yz)$ .
4. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da seguinte função no ponto  $(0,0)$ .

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0; & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se é de classe  $C^2$  e satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Mostre que a seguinte função é harmônica

$$k(x,y) = e^x \sin y + e^y \cos x$$

6. Use o polinômio de Taylor de ordem 1 da função  $f(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$  no ponto  $(1,1)$  para obter uma aproximação de  $f(1.1, 0.9)$ .
7. Determine  $P_2(x,y)$  de  $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$  ao redor de  $(0,0)$ .
8. Usando o polinômio de Taylor de 2 ordem para alguma função conveniente, dê o valor aproximado de  $(0.95)^{2.01}$  (considere  $f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$ )

**Respostas**

1.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 4y^3, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 12xy^2.$
2.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{y^2(1+2y^2)}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{y^2}(3 + 2y^2).$
3.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xz \cos(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2xy \cos(yz),$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2z^2 \sin(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -x^2yz \sin(yz), \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2y^2 \sin(yz).$
4.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$
5. sem resposta
6. 0.95
7.  $x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$
8. 0.90225





## Regra da Cadeia e Derivação Implícita

Objetivos:

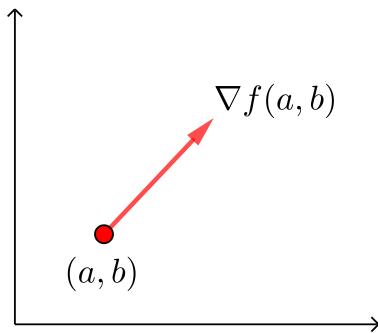
- vetor gradiente;
- regra da cadeia: derivação de composição de funções;
- derivação implícita; teorema da função implícita.

### Vetor Gradiente

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que admite derivadas parciais em  $(a, b) \in D$ . O vetor

$$\nabla f(a, b) = \text{grad}f(a, b) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right)$$

é dito (vetor) gradiente de  $f$  em  $(a, b)$ .



**Figure 69: Vetor gradiente**

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que admite derivadas parciais em  $(a, b, c)$ . Então

$$\nabla f(a, b, c) = \text{grad}f(a, b, c) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c), \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \right)$$

**Teorema: Regra da Cadeia** (derivada de função composta)

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto,  $\vec{r} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tais que  $\vec{r}(t) \in D$ , para todo  $t \in I$ . Se  $\vec{r}$  for diferenciável em  $t_0$  e  $f$  diferenciável em  $\vec{r}(t_0)$ , então a composta  $g(t) = f(\vec{r}(t))$  é diferenciável em  $t_0$  e

$$g'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0)$$

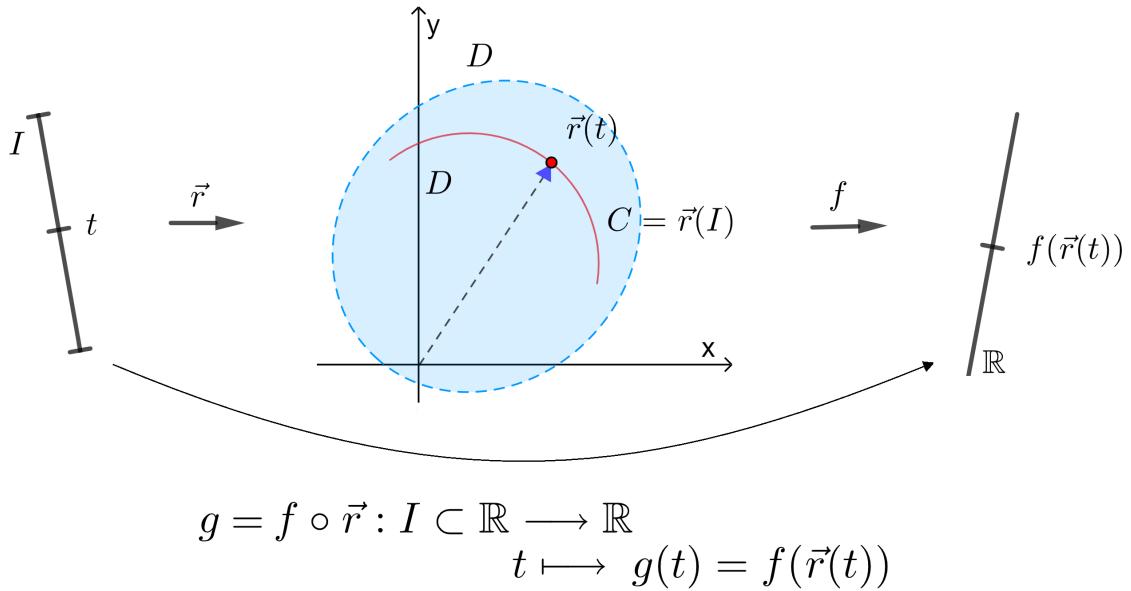


Figure 70: Composição de funções

## Observações

(I) Se  $f$  for diferenciável em  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $\vec{r}$  diferenciável em  $I \subset \mathbb{R}$ , então  $g(t) = f(\vec{r}(t))$  é diferenciável em  $I$  e  $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$  para todo  $t \in I$ .

(II) Para  $n = 2$ , temos  $z = f(x, y)$ ,  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  portanto,

$$\nabla f(\vec{r}(t)) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right), \quad \vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \left( \frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t) \right).$$

Então,

$$g'(t) = \frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

ou

$$\frac{dg}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Por abuso de notação, às vezes se escreve  $g'(t)$  como  $z'(t)$ ,  $\frac{dz}{dt}$  ou  $\frac{df}{dt}$ .

(III) Para  $n = 3$ , temos  $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ .

Logo,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t), z(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t), z(t))y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), z(t))z'(t)$$

ou, abreviadamente,

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Por abuso de notação, às vezes se escreve  $g'(t)$  como  $w'(t)$ ,  $\frac{dw}{dt}$  ou  $\frac{df}{dt}$ .

### [Uma consequência da regra da cadeia](#)

- (I) Seja  $z = f(x, y)$  diferenciável em  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $D$  aberto. Sejam  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$  diferenciáveis no aberto  $E \subset \mathbb{R}^2$ , tais que  $(x(u, v), y(u, v)) \in D$ . Então, a composta

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$$

é diferenciável em  $E \subset \mathbb{R}^2$  e

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\end{aligned}$$

ou, abreviadamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}\end{aligned}$$

- (II) Sejam  $w = f(x, y, z)$  diferenciável em  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $D$  aberto,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ ,  $z = z(u, v)$  diferenciáveis no aberto  $E \subset \mathbb{R}^2$ , tais que  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in D$ . Então, a composta

$$\omega = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável em  $E \subset \mathbb{R}^2$  e, abreviadamente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

### Derivação implícita

Definição 1: Uma função  $y = g(x)$ ,  $x \in I$  é definida implicitamente pela equação  $F(x, y) = 0$  se  $F(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Supondo  $F$  e  $g$  diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0$$

Supondo que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$ , temos

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

ou, equivalentemente,

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)), \quad \forall x \in I.$$

Problema 1: Encontrar condições para que a equação  $F(x, y) = 0$  defina implicitamente uma função diferenciável  $y = g(x)$ .

A solução do Problema 1 é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 1** (da função implícita): Seja  $F : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$  no conjunto aberto  $D$ . Seja  $(x_0, y_0) \in D$ , tal que

$$(i) \quad F(x_0, y_0) = 0$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Então, existe uma vizinhança  $I$  de  $x_0$  e uma função de classe  $C^1$ ,  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g(x_0) = y_0$  e  $F(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in I$ .

Definição 2: Uma função  $z = g(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  é definida implicitamente pela equação  $F(x, y, z) = 0$  se  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in D$ .

Supondo  $F$  e  $g$  diferenciáveis, temos pela regra da cadeia:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \\ \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y)) \end{cases}$$

Supondo  $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \neq 0$ ,  $\forall (x, y) \in D$ , temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, & \forall (x, y) \in D \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, & \forall (x, y) \in D \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\nabla g(x, y) = - \left( \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \right)^{-1} \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D$$

Problema 2: Em que condições a equação  $F(x, y, z) = 0$  define implicitamente uma função diferenciável  $z = g(x, y)$ ?

A solução do Problema 2 é dada pelo seguinte teorema:

**Teorema 2** (da função implícita): Seja  $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  no conjunto aberto  $D$ . Seja  $(x_0, y_0, z_0) \in D$ , tal que

(i)  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ;

(ii)  $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Então, existe uma vizinhança  $V$  de  $(x_0, y_0)$  e uma função de classe  $C^1$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g(x_0, y_0) = z_0$  e  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in U$ .

### Observação

- (I) O gráfico das função  $y = g(x)$  dada pelo Teorema 1 da função implícita está incluído na curva de nível  $F(x, y) = 0$ .
- (II) O gráfico das função  $z = g(x, y)$  dada pelo Teorema 2 da função implícita está incluído na superfície de nível  $F(x, y, z) = 0$ .

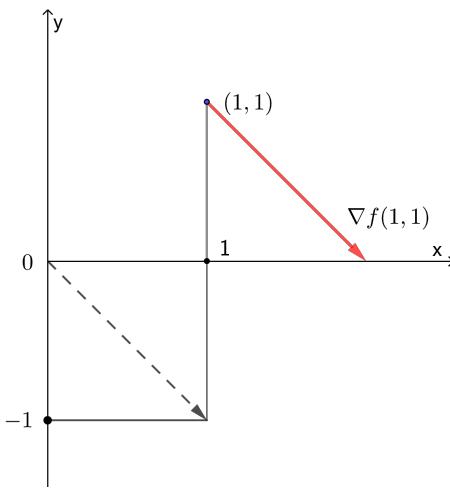
## Exemplos

1. Seja  $f(x, y) = 2 \arctan \frac{x}{y}$ . Calcule  $\nabla f(1, 1)$ .

**Solução**

$$\text{Temos } \nabla f(x, y) = \left( \frac{2 \cdot \frac{1}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}}, \frac{-2 \frac{x}{y^2}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \right) = \left( \frac{2y}{x^2 + y^2}, \frac{-2x}{x^2 + y^2} \right).$$

Assim,  $\nabla f(1, 1) = (1, -1)$ .



**Figure 71: Vettor gradiente de  $f(x, y) = 2 \arctan \frac{x}{y}$  no punto  $(1, 1)$**

2. Seja  $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}$ . Calcule  $\nabla f(-1, 1, 1)$ .

**Solução**

$$\text{Temos } \nabla f(x, y, z) = \left( \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}}, \frac{6y}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}}, \frac{8z}{2\sqrt{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}} \right).$$

Assim,  $\nabla f(-1, 1, 1) = \left( -\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3} \right)$ .

3. Seja  $g(t) = f(3 \sen t, e^{t^2})$ .

(a) Expresse  $g'(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

(b) Calcule  $g'(0)$ , admitindo que  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \frac{1}{3}$ .

**Solução**

(a) Temos  $g(t) = f(x, y)$  com  $x = 3 \sen t$ ,  $y = e^{t^2}$ . Pela regra da cadeia, temos:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)(3 \cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)(2te^{t^2})$$

(b) Temos

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(0), y(0))(3 \cos 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(0), y(0)) \cdot 0 = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

4. Suponha que, para todo  $t$ ,  $f(3t, t^3) = \arctan t$ , onde  $f(x, y)$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ , admitindo que  $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}$ .

(b) Determine o plano tangente ao gráfico de  $f$  no ponto  $(3, 1, f(1, 3))$ .

### Solução

(a) Seja  $g(t) = f(x, y)$ , com  $x = 3t, y = t^3$ . Pela regra da cadeia, temos para todo  $t$  :

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_3 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{3t^2} = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(3t, t^3).$$

Como  $f(3t, t^3) = \arctan t$ , então  $g(t) = \arctan t$ . Derivando em relação a  $t$ , temos para todo  $t$  :  $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ , ou seja,

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(3t, t^3) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}(3t, t^3) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Para  $t = 1$ , temos:

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) + 3 \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}.$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = \frac{1}{2}$ , então,  $3 \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ , donde  $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = -\frac{1}{3}$ .

(b) A equação do plano tangente é :

$$z = f(3, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)(x - 3) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, 1)(y - 1),$$

onde  $f(3, 1) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$ . Então, temos

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}(x - 3) + \frac{1}{2}(y - 1).$$

5. Suponha que  $f(x, y)$  seja de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $g(t) = f(3t, 2t + 1)$ . Expresse  $g''(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

### Solução

Temos  $g(t) = f(x, y)$ , onde  $x = 3t, y = 2t + 1$ . Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2} = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

ou seja,

$g'(t) = 3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , onde  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  são funções compostas.

Então, novamente, pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} g''(t) &= 3 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2} \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=3} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2} \right] \\ &= 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) + 6 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{aligned}$$

Como  $f$  é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , então pelo Teorema de Schwarz, temos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ .

Logo,

$$g''(t) = 9 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 12 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

**ATENÇÃO:** "Uma vez regra da cadeia, regra da cadeia até morrer"

6. A curva  $C$  parametrizada por  $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$  está contida no gráfico de  $z = f(x, y)$ . Sabe-se que  $f(2, 1) = 3$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$ . Determine a equação da reta tangente a  $C$  no ponto  $\vec{r}(1)$ .

### Solução

A equação da reta tangente a  $C$  em  $\vec{r}(1)$  é dada por:

$$(x, y, z) = \vec{r}(1) + \lambda \vec{r}'(1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como  $\vec{r}(t) = (2t, t^2, z(t))$  está contida no gráfico de  $z = f(x, y)$ , então  $z(t) = f(2t, t^2)$ , e portanto,  $z(1) = f(2, 1) = 3$ . Logo,  $\vec{r}(1) = (2, 1, 3)$ . Temos  $\vec{r}'(t) = (2, 2t, z'(t))$ , donde  $\vec{r}'(1) = (2, 2, z'(1))$ .

Como  $z = f(x, y)$ , com  $x = 2t, y = t^2$ , então, pela regra da cadeia, temos

$$z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{=2t} = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

onde,

$$z'(1) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) = 0.$$

Portanto,  $\vec{r}'(1) = (2, 2, 0)$ . Assim, a equação da reta tangente é:

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) + \lambda(2, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}.$$

7. Seja  $z = f(u^2 - v^2, 2uv)$ , onde  $f(x, y)$  é diferenciável. Expresse  $\frac{\partial z}{\partial u}$  e  $\frac{\partial z}{\partial v}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

### Solução

Temos  $z = f(x, y)$ , onde  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ . Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2v} = 2u \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ &= 2u \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, 2uv) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, 2uv) \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-2v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{2u} = -2v \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^2, 2uv) \\ &\quad + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^2, 2uv). \end{aligned}$$

8. Seja,  $z = f(u - 2v, v + 2u)$ , onde  $f(x, y)$  é de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Expresse  $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .

### Solução

Seja  $z = f(x, y)$ , onde  $x = u - 2v$ ,  $y = v + 2u$ . Donde,  $\frac{\partial x}{\partial u} = 1$ ,  $\frac{\partial x}{\partial v} = -2$ ,  $\frac{\partial y}{\partial u} = 2$ ,  $\frac{\partial y}{\partial v} = 1$ .

Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  com  $x = u - 2v$ ,  $y = v + 2u$  são funções compostas, então, para derivá-las, usamos a regra da cadeia. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \frac{\partial y}{\partial u} \right] \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \frac{\partial y}{\partial u} \right] \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y). \end{aligned}$$

Como  $f$  é de classe  $C^2$ , então pelo teorema de Schwarz, segue que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ .

Logo,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

9. Determine as equações das retas tangente e normal á curva  $C : e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$  em  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

### Solução

Seja  $f(x, y) = e^{2x-y} + 2x + 2y$ . Logo,  $f(\frac{1}{2}, 1) = e^{1-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$ .

Então  $C$  é a curva de nível de  $f$  no nível 4. Temos  $\nabla f(x, y) = (2e^{2x-y} + 2, -e^{2x-y} + 2)$ , donde  $\nabla f(\frac{1}{2}, 1) = (2e^{1-1} + 2, -e^{1-1} + 2) = (4, 1)$ . Sabemos que  $\nabla f(\frac{1}{2}, 1)$  é normal a  $C$  em  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

Reta tangente:  $[(x, y) - (\frac{1}{2}, 1)], \nabla f(\frac{1}{2}, 1) = 0$ , donde  $(x - \frac{1}{2}, y - 1) \cdot (4, 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -4x + 3$

Reta normal:  $(x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda \nabla f(\frac{1}{2}, 1), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda(4, 1), \lambda \in \mathbb{R}$ .

10. Determine as equações do plano tangente e da reta normal a superfície  $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$  no ponto  $(1, -1, 2)$ .

### Solução

Seja  $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$ .

Logo,  $f(1, -1, 2) = -2 + 1 - 1 + 8 - 6 = 0$ . Então,  $S$  é a superfície de  $f$  no nível 0. Temos  $\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$ , donde  $\nabla f(1, -1, 2) = (-2 + 3, 2 + 3, -1 + 12 - 3) = (1, 5, 8)$ .

Sabemos que  $\nabla f(1, -1, 2)$  é perpendicular a  $S$  em  $(1, -1, 2)$ .

Plano tangente:  $[(x, y, z) - (1, -1, 2)] \cdot \nabla f(1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y + 1, z - 2) \cdot (1, 5, 8) = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$ . Reta normal:  $(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda \nabla f(1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}$ .

11. Mostre que a equação  $x^2y + 3y^3x^4 = 4$  define uma função implícita no ponto  $(1, 1) : y = g(x)$ . Calcule  $g'(1)$ .

### Solução

Seja  $F(x, y) = x^2y + 3y^3x^4 - 4$  que é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^2$ . Temos:

$$(i) \quad F(1, 1) = 1 + 3 - 4 = 0;$$

$$(ii) \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, 1) = [x^2 + 9y^2x^4]_{(1,1)} = 1 + 9 = 10 \neq 0.$$

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança  $I$  de 1 e uma função de classe  $C^1$ ,  $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g(1) = 1$  e  $F(x, g(x)) = 0$ ,  $\forall x \in I$ .

E aplicando a regra da cadeia:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))}, \quad \forall x \in I$$

Logo,

$$g'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, 1)} = -\frac{14}{10} = -\frac{7}{5},$$

pois  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy + 12y^3x^3$ , daí  $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 1) = 2 + 12 = 14$ .

12. Mostre que a equação  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4$  define uma função implícita diferenciável  $z = g(x, y)$  no ponto  $(1, 1, 2)$ . Calcule  $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1)$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1)$ .

**Solução** Seja  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4$  que é de classe  $C^1$  em  $\mathbb{R}^3$ . Temos

- (i)  $F(1, 1, 2) = 1 + 1 + 8 - 6 - 4 = 0$ ;
- (ii)  $\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 2) = 3z^2 - 3xy|_{(1,1,2)} = 12 - 3 = 9 \neq 0$ .

Logo, pelo teorema da função implícita, existe uma vizinhança  $V$  de  $(1, 1)$  e uma função de classe  $C^1$ ,  $g : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $g(1, 1) = 2$  e  $F(x, y, g(x, y)) = 0$ ,  $\forall (x, y) \in V$ .

E aplicando a regra da cadeia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}, \quad \forall (x, y) \in D \end{array} \right.$$

Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\frac{3x^2 - 3yz|_{(1,1,2)}}{9} = \frac{1}{3} \\ \\ \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1,2)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,2)} = -\frac{3y^2 - 3xz|_{(1,1,2)}}{9} = \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

## Exercícios

1. Suponha que para todo  $t$ ,  $f(t^2, 2t) = t^3 - 3t$ , onde  $f(x, y)$  é diferenciável. Mostre que  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = -\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ .
2. Admita que para todo  $(x, y)$ ,  $x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ , onde  $f(x, y)$  é diferenciável. Mostre que  $g(t) = f(t, \frac{2}{t})$ ,  $t > 0$  é constante.
3. Seja  $F(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{x}\right)$ . Mostre que  $x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ .
4. Seja  $g(x, y) = xf(x^2 + y, 2y, 2x - y)$ , onde  $f$  é diferenciável. Expresse  $\frac{\partial g}{\partial x}$  e  $\frac{\partial g}{\partial y}$  em termos das derivadas parciais de  $f$ .
5. Suponha que  $z = f(x, y)$  é uma função de classe  $C^1$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) = -1$ . Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de  $z = f(x, y)$ , ao longo de uma curva  $\vec{r}(t) = (2 \sin t, -3 + 7 \cos t, z(t))$ , onde  $t$  representa o tempo. Qual é a componente vertical da velocidade do ponto no instante em que suas coordenadas são  $(2, -3, 6)$ .
6. Seja  $F(r, \theta) = f(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , sendo  $f(x, y)$  diferenciável. Verifique que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$
7. Se  $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$ , onde  $f$  é diferenciável. Mostre que  $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu$ .
8. A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por  $T(x, y)$  de classe  $C^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Sabe-se que  $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x} = 0$  e  $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$ . Calcule  $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$ , sendo  $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ .

9. Seja  $\omega = f(x, y)$ , onde  $f$  é diferenciável, se  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , mostre que

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right)^2.$$

10. Seja  $v(r, \theta) = u(x, y)$ , onde  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ . Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

11. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $P_0 = (0, 0, 0)$ , tal que  $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$ ,  $f(P_0) = 1$ . Defina  $g(u, v) = f(u - v, u^2 - v, 3v - 3)$  e calcule a equação do plano tangente ao gráfico de  $g$  no ponto  $(1, 1, 1)$ .

12. Expressse  $g''(t)$  em termos das derivadas parciais de  $f$ , sendo  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função duas vezes diferenciável e sendo

$$g(t) = f(1 - t, t^2)$$

13. Considere  $h(u, v) = f(u^2v^2, 2uv)$  onde  $f(x, y)$  é uma função de classe  $C^2$ . Expressse  $\frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v)$  em termos das derivadas parciais da função  $f$ .

14. Calcule  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1)$  onde  $z = f(x, y)$  é uma função de classe  $C^1$  definida implicitamente pela equação  $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$  sabendo que  $f(1, 1) = 1$ .

15. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação  $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$  no ponto  $(4, -1, 1)$ .

16. Determine uma reta que seja tangente a curva  $x^2 + xy + y^2 = 7$  e paralela a reta  $4x + 5y = 17$ .

17. Determine um plano que seja tangente a superfície  $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$  e paralelo ao plano  $x + y + z = 10$ .

18. Considere a função  $z = \frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$ . Determine as equações do plano tangente  $y$  e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto  $(2, 2, 1)$ .

19. Considere a curva  $C$  intersecção das superfícies de equações  $S_1 : x^2 - 2xz + y^2z = 3$  e  $S_2 : 3xy - 2yz = -2$ . Determine:

- (a) um vetor tangente a  $C$  em  $(1, -2, 1)$ .

- (b) Os pontos do hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$ , onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).
20. A equação  $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$  define uma função  $z = f(x, y)$  implicitamente em torno do ponto  $Q = (\sqrt{2}, 0, 1)$ ? E do ponto  $P = (\sqrt{2}, 0, 0)$ ? Calcule, quando possível,  $\nabla f(\sqrt{2}, 0)$ .

**Solução**

1. sem resposta

2. sem resposta

3. sem resposta

$$4. \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f(u, v, \omega) + x \left[ 2x \frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2 \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega) \right]$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(u, v, \omega) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(u, v, \omega) - \frac{\partial f}{\partial z}(u, v, \omega) \right],$$

onde  $u = x^2 + y, v = 2y, \omega = 2x - y$ .

5. 7

6. sem resposta

7. sem resposta

$$8. \rho \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) + \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial T}{\partial x^2}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

9. sem resposta

10. sem resposta

$$11. 2x - 2y - z + 1 = 0$$

$$12. g''(t) = f_{xx}(1-t, t^2) - 4tf_{xy}(1-t, t^2) + 4t^2f_{yy}(1-t, t^2) + 2f_y(1-t, t^2).$$

$$13. \frac{\partial^2 h}{\partial u^2}(u, v) = 2v^2 f_x(u^2 v^2, 2uv) + 4u^2 v^4 f_{xx}(u^2 v^2, 2u) + 8uv^3 f_{xy}(u^2 v^2, 2uv) + 4v^2 f_{yy}(u^2 v^2, 2uv).$$

$$14. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = -3.$$

$$15. 2x + y - 2z = 5; (x, y, z) = (4, -1, 1) + \lambda(8, 4, -8), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$16. y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1) \text{ ou } y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1)$$

$$17. x + y + z = \frac{11}{6} \text{ on } x + y + z = -\frac{11}{6}$$

$$18. x - 7y - 16z = -28$$

$$19. (a) (3, 2, 4)$$

$$(b) (6, 4, -8) \text{ e } (-6, -4, 8)$$

20. O ponto  $Q$  não verifica a equação implícita; aplicando o teorema da função implícita para  $P$  obtemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, 0) = -2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, 0) = 0$



## Bibliografia

1. Guidorizzi. Um curso de cálculo, v2, LTC 6a edição, 2019.
2. Anton, Bivens, Davis. Cálculo, v2, Bookman 10a edição, 2014.
3. Stewart. Cálculo, v2, Cengage Learning 7a edição, 2013.
4. Gonçalves, Flemming. Cálculo B, Pearson 2a edição, 2007.
5. Cálculo de várias variáveis com Geogebra 3D. Vol I: <https://www.geogebra.org/m/hzvsftdf>