

Funções escalares de várias variáveis

Conceito e propriedades de limites

Objetivos:

- Compreender a noção de limites; propriedades dos limites
- existência e unicidade do limite; limites por caminhos;

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de D . Dizemos que o limite de $f(X)$ quando X tende a P é o número L , e escrevemos

$$\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L \quad \text{ou} \quad f(X) \rightarrow L, \quad \text{se} \quad x \rightarrow p$$

quando

$$\lim_{\|x-p\| \rightarrow 0} |f(x) - L| = 0$$

Se o limite existir, ele deve ser único.

Observação: Para $n = 2$, temos $P = (a, b)$, $X = (x, y)$. Então,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad f(x, y) \rightarrow L, \quad \text{se} \quad (x, y) \rightarrow (a, b)$$

quando

$$\lim_{\|(x,y)-(a,b)\| \rightarrow 0} |f(x, y) - L| = 0$$

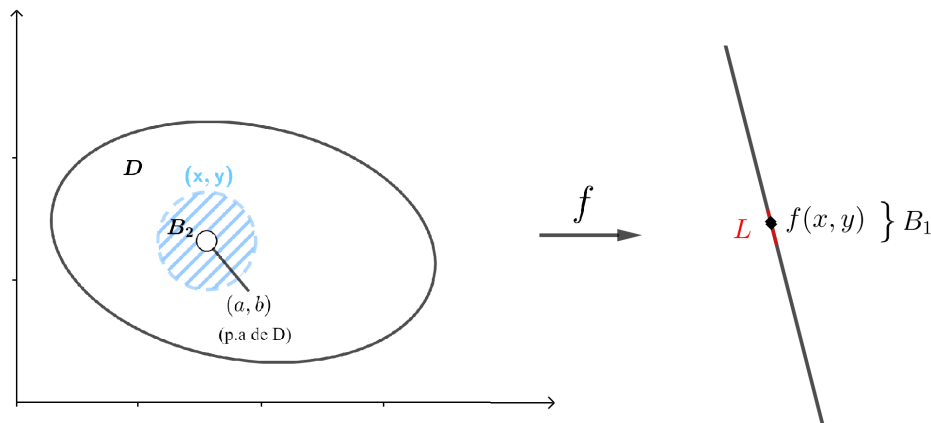


Figure 1: Limite de uma função definida em \mathbb{R}^2

Isso significa que para cada bola aberta B_1 de centro L , existe uma bola aberta B_2 de centro (a, b) , tal que para todo $(x, y) \in B_2 \subset D$ (exceto provavelmente (a, b)) tem-se $f(x, y) \in B_1 \subset \text{Im}f$.

Propriedades

Sejam $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L_1$, $\lim_{X \rightarrow P} g(X) = L_2$ e $k \in \mathbb{R}$.

$$1. \lim_{X \rightarrow P} (f(X) \pm g(X)) = L_1 \pm L_2$$

$$2. \lim_{X \rightarrow P} (kf(X)) = kL_1$$

$$3. \lim_{X \rightarrow P} (f(X) \cdot g(X)) = L_1 \cdot L_2$$

$$4. \lim_{X \rightarrow P} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

$$5. \text{ Se } h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{u \rightarrow L_1} h(u) = L, \text{ então}$$

$$\lim_{X \rightarrow P} h(f(X)) = \lim_{u \rightarrow L_1} h(u) = L$$

Limites por caminhos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se existe o limite $\lim_{X \rightarrow P} f(X) = L$, então o valor do limite ao longo de qualquer caminho também é L , isto é,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t)) = L,$$

para qualquer curva C parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e tal que $\lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = P$.

Observação:

(I) Temos o seguinte fato em cálculo de uma variável:

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

$$\text{Portanto, se } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

(II) Temos o seguinte fato em cálculo de várias variáveis:

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x, y) = L,$$

para toda curva C passando por (a, b) .

Portanto, se C_1 e C_2 são duas curvas passando por (a, b) tais que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_1}} f(x, y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_2}} f(x, y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$$

(II) Se acharmos dois (ou três ou mil) caminhos qualquer C_1 e C_2 tais que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) = L,$$

jamais poderemos dizer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$, pois poderia se dar o caso de encontrar um outro caminho C_3 com $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo de } C_3}} f(x,y) \neq L$. Ver Exemplo 7.

Exemplos

1. Se $f(x,y) = c$ (função constante), então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$
2. Se $f(x,y) = x$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$
3. Se $f(x,y) = y$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$
4. Seja $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + x - y - 3$. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y)$

Solução

Por propriedades de limite, temos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2xy^2 - x^2y + x - y - 3 = \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 2xy^2 - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x^2y + \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} x - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} y - \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} 3 = \\ &= 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1^2(-1) + 1 - (-1) - 3 = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2 \end{aligned}$$

5. Seja $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2-1}$. Calcule $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} f(x,y,z)$.

Solução

$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,1)} f(x,y,z) = \frac{0+0+1}{0-0+1} = -1$, já que o limite do denominador não se anula.

6. Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy}$.

Solução

Não podemos aplicar nenhuma propriedade, pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$. Então, façamos $u = xy$. Como $(x,y) \rightarrow (0,0)$, então $u \rightarrow 0$. Logo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = 1$$

7. Seja f a função definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

- (a) Calcule o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
 (i) eixo dos x ; (ii) eixo dos y ; (iii) da reta $y = x$.
- (b) Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

Solução

(a)

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo do eixo } x}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot 0}{t^2 + 0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo do eixo } y}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{0^2 + t^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ \text{ao longo da reta } y=x}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot t}{t^2 + t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

- (b) Observe que o limite ao longo dos eixos é 0, pelo que alguém poderia pensar que o $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ e estaria errado. Pois o limite ao longo da reta $y = x$ dá $\frac{1}{2}$. Não adianta calcular o limite ao longo de um milhão de caminhos, sempre pode (o não) existir um outro caminho com limite diferente. Se ligue!!

Exercícios

1. Seja f a função definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
- (a) Calcule o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a $(0, 0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
 (i) eixo dos x ; (ii) eixo dos y ; (iii) da reta $y = x$.
- (b) Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?
2. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\tan(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$

- (e) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$
- (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(3x^2 + 3y^2)$
- (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(1+xy) \cos xy}{xy}$
- (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(2x) \tan(xy)}{x^2 y}$
- (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 + y^4}$
- (k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}$

Respostas

1. (a) (i) 1 ; (ii) -1; (iii) 0
(b) não existe
2. (a) 1 (d) 2 (g) 0 (j) 0
(b) não existe (e) não existe (h) 2 (k) não existe
(c) não existe (f) 0 (i) 0