# Funções escalares de várias variáveis

## Conceito e propriedades de limites

Objetivos:

- Compreender a noção de limites; propriedades dos limites
- existência e unicidade do limite; limites por caminhos;

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathbb{R}^n$ um ponto de acumulação de $D$. Dizemos que o limite de $f(X)$ quando $X$ tende a $P$ é o número $L$, e escrevemos

$$\lim_{X \to P} f(X) = L \quad \text{ou} \quad f(X) \to L, \quad \text{se} \quad x \to p$$

quando

$$\lim_{||x-p|| \to 0} |f(x) - L| = 0$$

Se o limite existir, ele deve ser único.

Observação: Para $n = 2$, temos $P = (a, b), X = (x, y)$. Então,

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L \quad \text{ou} \quad f(x, y) \to L, \quad \text{se} \quad (x, y) \to (a, b)$$

quando

$$\lim_{||(x,y)-(a,b)|| \to 0} |f(x, y) - L| = 0$$

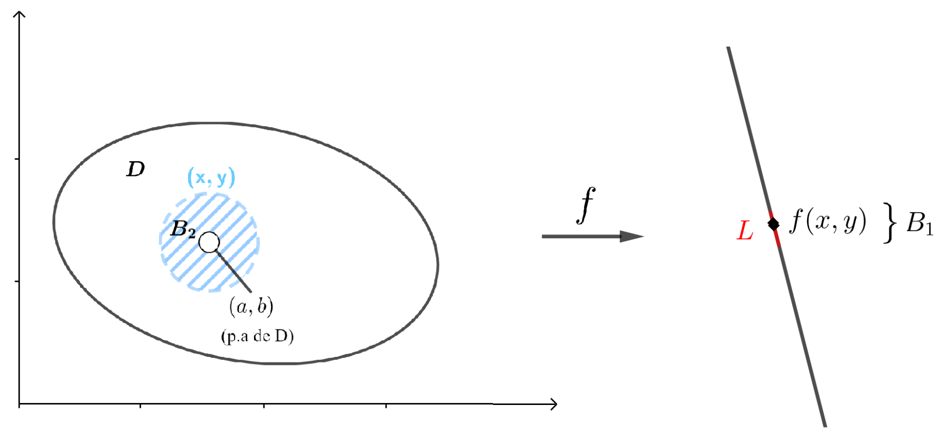


**Figure 1: Limite de uma função definida em $\mathbb{R}^2$**

Isso significa que para cada bola aberta $B_1$ de centro $L$, existe uma bola aberta $B_2$ de centro $(a, b)$, tal que para todo $(x, y) \in B_2 \subset D$ (exceto provavelmente $(a, b)$) tem-se $f(x, y) \in B_1 \subset Imf$.

Propriedades

Sejam $\lim\limits_{X \to P} f(X) = L_1$, $\lim\limits_{X \to P} g(X) = L_2$ e $k \in \mathbb{R}$.

1. $\lim\limits_{X \to P} (f(X) \pm g(X)) = L_1 \pm L_2$
2. $\lim\limits_{X \to P} (kf(X)) = kL_1$
3. $\lim\limits_{X \to p} (f(X) \cdot g(X)) = L_1 \cdot L_2$
4. $\lim\limits_{X \to P} \dfrac{f(X)}{g(X)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.
5. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{u \to L_1} h(u) = L$, então

$$\lim_{X \to P} h(f(X)) = \lim_{u \to L_1} h(u) = L$$

Limites por caminhos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se existe o limite $\lim\limits_{X \to P} f(X) = L$, então o valor do limite ao longo de qualquer caminho também é $L$, isto é,

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (a,b) \\ \text{ao longo de } C}} f(x, y) = \lim_{t \to t_0} f(\alpha(t)) = L,$$

para qualquer curva $C$ parametrizada por $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ e tal que $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = P$.

Observação:

(I) Temos o seguinte fato em cálculo de uma variável:

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Portanto, se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to a} f(x)$

(II) Temos o seguinte fato em cálculo de várias variáveis:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \exists \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C}} f(x,y) = L,$$

para toda curva $C$ passando por $(a,b)$.

Portanto, se $C_1$ e $C_2$ são duas curvas passando por $(a,b)$ tais que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$$

(II) Se acharmos dois (ou três ou mil) caminhos qualquer $C_1$ e $C_2$ tais que

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_2}} f(x,y) = L,$$

jamais poderemos dizer que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, pois poderia se dar o caso de encontrar um outro caminho $C_3$ com $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\ \text{ao longo de } C_1}} f(x,y) \neq L$. Ver Exemplo 7.

# Exemplos

1. Se $f(x,y) = c$ (função constante), então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} c = c$

2. Se $f(x,y) = x$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

3. Se $f(x,y) = y$, então $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

4. Seja $f(x,y) = 2xy^2 - x^2y + x - y - 3$. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y)$

   **Solução**
   Por propriedades de limite, temos

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2xy^2 - x^2y + x - y - 3 =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,-1)} 2xy^2 - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} x^2y + \lim_{(x,y)\to(1-1)} x - \lim_{(x,y)\to(1,-1)} y - \lim_{(x,y)\to(1-1)} 3 =$$

$$= 2\cdot 1\cdot(-1)^2 - 1^2(-1) + 1 - (-1) - 3 = 2 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2$$

5. Seja $f(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2-y^2-1}$. Calcule $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} f(x,y,z)$.

   **Solução**

   $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,1)} f(x,y,z) = \dfrac{0+0+1}{0-0+1} = -1$, já que o limite do denominador não se anula.

6. Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\text{sen}\,(xy)}{xy}$.

   **Solução**

   Não podemos aplicar nenhuma propriedade, pois $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$. Então, façamos $u = xy$. Como $(x,y)\to(0,0)$, então $u \to 0$. Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}\,(xy)}{xy} = \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,(u)}{u} = 1$$

7. Seja $f$ a função definida por $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

   (a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
   (i) eixo dos $x$; (ii) eixo dos $y$; (iii) da reta $y = x$.

   (b) Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

   **Solução**

   (a)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ao longo do eixo } x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t^2+0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ao longo do eixo } y}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t}{0^2+t^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b) \\ \text{ao longo da reta } y=x}} f(x,y) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot t}{t^2+t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

   (b) Observe que o limite ao longo dos eixos é $0$, pelo que alguém poderia pensar que o $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ e estaria errado. Pois o limite ao longo da reta $y = x$ da $\frac{1}{2}$. Não adianta calcular o limite ao longo de um milhão de caminhos, sempre pode (o não) existir um outro caminho com limite diferente. Se ligue!!

# Exercícios

1. Seja $f$ a função definida por $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(a) Calcule o limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende a $(0,0)$ ao longo de cada um dos seguintes caminhos:
(i) eixo dos $x$; (ii) eixo dos $y$; (iii) da reta $y=x$.

(b) Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$? Em caso afirmativo, qual o seu valor?

2. Calcule, se possível, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\tan\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,1,0)} \frac{(x+y+z-3)^5}{z^3(x-2)(y-1)}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(3x^2+3y^2\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\in(1+xy)\,\mathrm{sen}\,xy}{xy}$

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}\,(2x)\tan(xy)}{x^2y}$

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,\mathrm{sen}^2\,x}{x^2+y^4}$

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y}$

**Respostas**

1. (a) (i) $1$ ; (ii) $-1$; (iii) $0$
   (b) não existe

2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) 1 | (d) 2 | (g) 0 | (j) 0 |
| (b) não existe | (e) não existe | (h) 2 | (k) não existe |
| (c) não existe | (f) 0 | (i) 0 | |