Funções escalares de várias variáveis

Aproximação linear de funções

Objetivos:

- diferencial total; estimação da variação de uma função; cálculo de erro absoluto e relativo;
- aproximação linear de uma função; estimação de valores da função em um ponto;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(a, b) \in D$. Então

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

Onde $\varepsilon\,(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a, b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)h - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)k$.

Diferencial: Se define diferencial de f no ponto (a, b) relativa aos acréscimos h e k como a função

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k = \text{ diferencial de } f \text{ em } (a, b)$$

que depende de h e k.

Se f é diferenciável em (a, b), temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{||(h, k)||} \cdot ||(h, k)||$$

$$= \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h, k)}{||(h, k)||}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} ||(h, k)||}_{=0} = 0.$$

Logo,

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)k, \quad \text{se} \quad (h, k) \simeq (0, 0).$$

Pondo $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) =$ varação de f quando se passa de (a, b) para $(a + h, b + k)$, obtemos:

$$\Delta f \simeq df, \text{ se } (h,k) \simeq (0,0)$$

O valor df também pode ser interpretado como o erro total nos valores de $f(x,y)$ se os incrementos h e k medem o erro na medição dos valores x e y respectivamente. O erro relativo é o quociente $|\dfrac{df}{f(a,b)}|$ e a percentagem de variação é $|\dfrac{df}{f(a,b)}| * 100\%$.

Observe-se que na notação de $h = \Delta x$, $k = \Delta y$, a diferencial é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta x$$

Analogamente, seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto em $\mathbb{R}^3$, é uma função de três variáveis com derivadas parciais contínuas em D (logo diferenciável). Para cada $(a,b,c) \in D$, definimos a diferencial de f en (a,b,c) relativa aos acréscimos Δx, Δy, Δz por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)\Delta z$$

Mostra-se que $\Delta f \simeq df$ se $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \simeq (0,0,0)$.

Observação:

1. Notação clássica de diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

2. Em funções de uma variável $y = f(x)$, a diferencial é definida como $dy = f'(x)dx$, sendo dx a variável independente.

3. Como $\Delta f \simeq df$, temos que se $df > 0$ (respectivamente $df < 0$), a função aumenta (diminui) quando se passa de (a,b) para $(a+h, b+k)$.

4. Se $df = 0$, então a função não varia quando se passa de (a,b) para $(a+h, b+k)$.

Função linearizada: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, e $(a,b) \in D$. Se existem as parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, a função

$$L(x,y) = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é bem definida e é chamada de função linearizada de f perto de (a,b).

Se f é diferenciável em (a,b), temos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

e podemos garantir que $f(x,y) \simeq L(x,y)$ para todo (x,y) suficientemente próximo de (a,b).

Observação:

1. A função $L(x,y)$ é usada para estimar valores de $f(x,y)$ quando os mesmos forem complicados de calcular e também quando não se tem uma expressão explícita de f. Por exemplo quando temos apenas dados experimentais numa tabela e desconhecemos a lei ou modelo.

2. A superfície $z = L(x,y)$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a,b))$.

3. $df = L(x,y) - f(a,b)$

Interpretação geométrica da diferencial: Se $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, então $dy = f'(a)dx$, e geometricamente se corresponde com a distancia entre os pontos R e Q da figura abaixo. Em quanto Δy se corresponde com a distancia entre os pontos R e P.

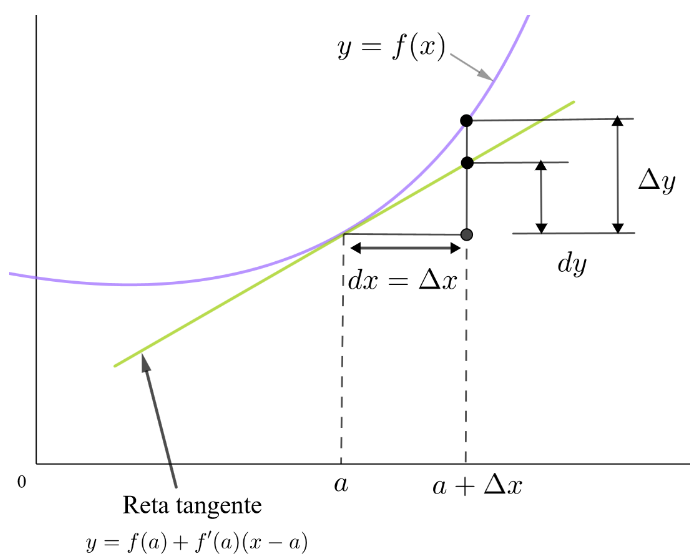


Figure 1: Diferencial de uma função de uma variável

Observe que Δy representa a variação da função $f(x)$ e dy representa a variação da função linearizada de f, $L(x)$ perto do ponto $(a, f(a))$, cujo gráfico é a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

Ora, se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, então $dz = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)dy$, e geometricamente corresponde à distancia do ponto $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a,b))$ ao ponto do plano tangente $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$. Ora, o valor Δz se corresponde com a distancia entre os pontos $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a,b))$ e o ponto $(a+\Delta x, b+\Delta y, f(a+\Delta x, b+\Delta y))$ do gráfico $z = f(x,y)$.

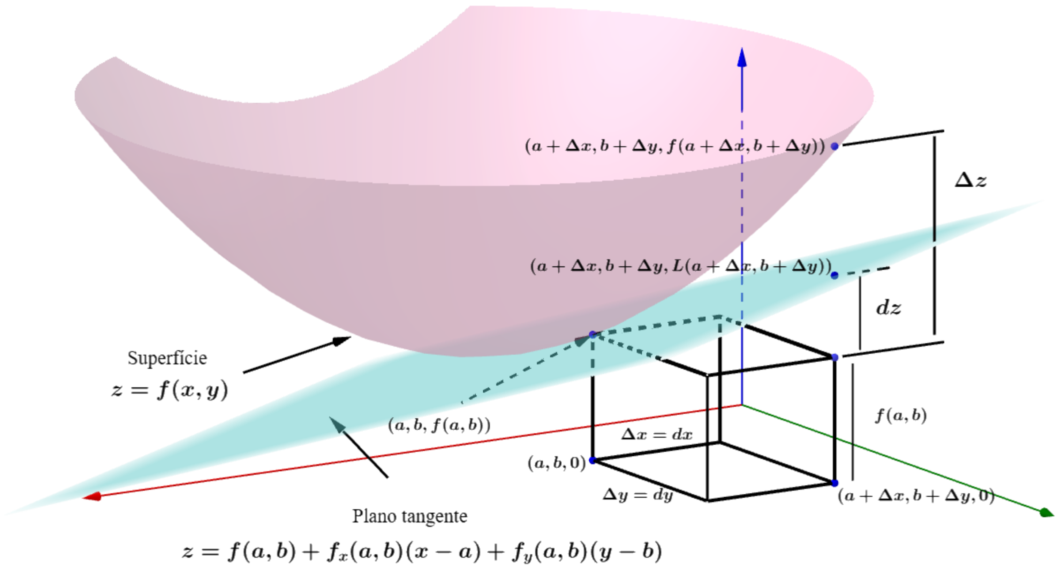


Figure 2: Diferencial de uma função de duas variáveis

Observe que Δz representa a variação da função $f(x,y)$ e dz representa a variação da função linearizada de f, $L(x,y)$ perto do ponto $(a,b,f(a,b))$. Daí $c = L(a+\Delta x, b+\Delta y)$ no ponto de variação no plano tangente $(a+\Delta x, b+\Delta y, c)$.

Exemplos

1. Calcule a diferencial de $z = \ln(x^2+y^2)$.

   Solução

   Temos
   $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy$$

2. Seja $z = xe^{x^2-y^2}$. Calcule um valor aproximado para z, correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

   Solução

   A função $z = xe^{x^2-y^2}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, por $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$ serem contínuas em $\mathbb{R}^2$.

   Sejam $(a,b) = (1,1), h = 0,01$ e $k = 0,002$. Como $(h,k) \simeq (0,0)$, Então
   $$\Delta z \simeq dz$$
   Onde $\Delta z = z(1.01, 1.002) - z(1,1) = z(1.01; 1.002) - 1$,
   $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1)h + \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)k =$$

$$= [e^{x^2-y^2} + x \cdot 2xe^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0.01) + [x \cdot (-2y)e^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0.002) =$$

$$= (1+2) \cdot (0,01) + (-2) \cdot (0,002) = 0,03 - 0,004 = 0,026$$

Então, $z(1.01, 1.002) - 1 \simeq 0,026$, ou seja $z(1.01, 1.002) \simeq 1,026$

3. A altura de um cone é $h = 20\ cm$ e o raio da base é $r = 12\ cm$. Calcule um valor aproximado para a variação, Δv no volume quando h aumenta de $2\ mm$ e r decresce $1\ mm$. Estime o erro relativo e a percentagem de variação do volume.

   Solução

   O volume do cone de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, que é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Sejam $r_0 = 12, h_0 = 20$.

   Como h aumenta de $2\ mm$, então $\Delta h = 0,2$ e como r decresce de $1\ mm$, então $\Delta r = -0,1$. Como $|\Delta r| \simeq 0$ e $|\Delta h| \simeq 0$, então $\Delta V \simeq dV$, onde

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h = \frac{2}{3}\pi r h\bigg|_{(12,20)} \cdot \Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2\bigg|_{(12,20)} \cdot \Delta h$$

$$= \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \cdot 20 \cdot (-0,1) + \frac{1}{3}\pi (12)^2 \cdot (0,2)$$

$$= -16\pi + 9,6\pi = -6,4\pi$$

   Assim,

$$\Delta V \simeq -6,4\pi$$

   ou seja, a variação ΔV no volume decresce aproximadamente de $6,4\pi\ cm^3$.

   O erro relativo é, portanto,

$$\frac{dV}{V(12,20)} = \frac{6,4\pi}{1/3\pi \cdot 144 \cdot 20} = 0,007$$

   e a percentagem de variação do volume é de $0,7$%.

4. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v,t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para

(a) determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas;

Solução

Supondo que a função f é diferenciável, uma aproximação linear da função altura para pontos suficientemente próximos de $(80, 20)$ seria a função

$$L(v,t) = f(80,20) + \frac{\partial f}{\partial v}(80,20)(v-80) + \frac{\partial f}{\partial t}(80,20)(t-20)$$

Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80,20) = \lim_{h\to 0} \frac{f(80+h,20)-f(80,20)}{h}$$

E podemos estimar esse valor considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80,20) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(80+20,20)-f(80,20)}{20} + \frac{f(80-20,20)-f(80,20)}{-20}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{12.2-8.6}{20} + \frac{5.2-8.6)}{-20}\right) = \frac{1}{2}(0.17+0.18) = 0.175.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(80,20) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{f(80,20+10)-f(80,20)}{10} + \frac{f(80,20-5)-f(80,20)}{-5}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9.5-8.6}{10} + \frac{7.7-8.6)}{-5}\right) = \frac{1}{2}(0.09+0.18) = 0.135.$$

Assim, a aproximação linear esperada seria

$$L(v,t) = 8.6 + 0.175(v-80) + 0.135(t-20)$$

(b) estimar a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Solução
Considerando a linearização do item (a),

$$f(84,24) \approx L(84,24) = 8.6 + 0.175(84-80) + 0.135(24-20) = 9.84$$

Portanto, as ondas teriam uma altura de aproximadamente 9.84 metros.

Exercícios

1. Seja $f(x,y) = 1 + \ln(x^2+y^2)$. Determine:

   (a) D_f

   (b) $Im(f)$

   (c) Curvas de nível

   (d) G_f

   (e) o plano tangente e a reta normal ao G_f no ponto $(1,0,1)$

   (f) Um valor aproximado para $f(0.99, 0.01)$

   (g) O conjunto dos pontos de diferenciabilidade da função

$$g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,(f(x,y)-1) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. Dê um valor aproximado de $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2}$.

3. Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo em l igual a 1% e em g igual a 3%.

4. O ângulo central de um setor circular é 80° e o raio é $20\ cm$ e deseja-se reduzir o ângulo de 1°. Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?

5. A sensação térmica $W(T,v)$ depende da velocidade do vento v e da temperatura T. Use os dados da seguinte tabela para

   (a) dar uma equação aproximada da lei $W(T,v)$ que determina a sensação térmica a velocidade do vento próxima a 10 milhas/h e temperatura próxima a 30^oF.

   (b) estimar a sensação térmica se a velocidade do vento for de 11milhas/h e a temperatura for 29^oF.

Temperatura T (F°)

Velocidade do vento v (milhas/h)

	10,00	30,00	50,00	70,00
20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

6. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por

$$S = 72,09w^{0,425}h^{0,725},$$

onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é a medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de uma pessoa, w=80kg e h=175cm, forem no máximo de 2%, utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da superfície do corpo.

7. A temperatura do ponto (x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 - 12}$.

   (a) Determine o domínio de $T(x, y)$ e represente-o no plano xy.

   (b) Determine a equação, da isoterma que contém o ponto $(2, 3)$ e faca o seu esboço.

   (c) Determine o plano $z = ax + by + c$ que melhor se aproxima do gráfico de $T(x, y)$ no ponto $(2, 3)$.

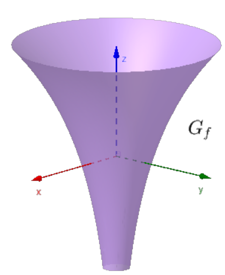
   (d) Calcule um valor aproximado da temperatura em $(1.01, 2.99)$.

Respostas

1. (a) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

   (b) $\mathbb{R}$

   (c) Circunferência de Centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{e^{k-1}}$



   (d)

   (e) $z = 1 + 2(x - 1); (x, y, z) =$

$(1, 0, 1) + \lambda(2, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$

(f) 0.98

(g) $\mathbb{R}^2$

2. 4.978

3. 2%

4. $\Delta r \simeq 0.25\ cm$

5. (a) $W(T, v) \simeq 21 + 1,2(T - 30) + 0,6(v - 10)$.
   (b) $W(29, 11) \simeq 19,2$

6. $2,3$%

7. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 12\}$
   (b) $k = 0 \Rightarrow c_0 : x^2 + y^2 = 13$
   (c) $z = 2x + 3y - 13$
   (d) $-2.01 - 0.01$