



Funções escalares de várias variáveis

Derivadas Direcionais. Propriedades do Vetor Gradiente.

Objetivos:

- definição de derivada direcional; derivada direcional como taxa de variação;
- interpretação geométrica da derivada direcional;
- propriedades do vetor gradiente.

Derivada direcional

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, e $(a, b) \in D$.

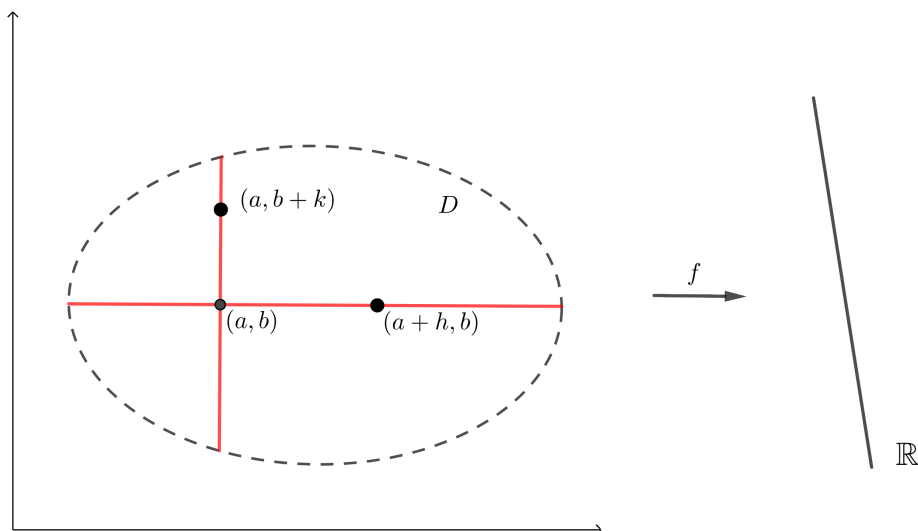


Figure 1: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in I_2$ e $C_1 : y = b, x \in I_1$

Vimos no capítulo de derivadas parciais, que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \text{ se existir o limite,}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}, \text{ se existir o limite.}$$

Como $\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}$ é a taxa de variação média de f quando se passa de (a, b) para $(a+h, b)$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ é a taxa de variação de f em (a, b) na direção do eixo x ou na direção do vetor unitário \vec{i} .

Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é a taxa de variação de f em (a, b) na direção do eixo y ou na direção do vetor unitário \vec{j} .

Pergunta natural: Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário em \mathbb{R}^2 , isto é, $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Qual é a taxa de variação de f em (a, b) , na direção do vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$?

Solução

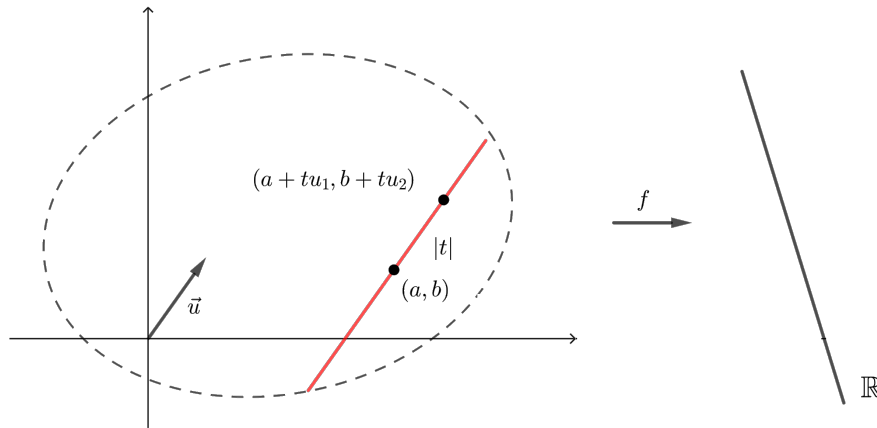


Figure 2: Segmento interseção $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$

Seja r a reta que passa pelo ponto (a, b) e é paralela ao vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$. Uma equação paramétrica dela é:

$$r : (x, y) = (a, b) + t\vec{u} = (a, b) + t(u_1, u_2) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in \mathbb{R}$$

Seja $C \subset$ reta r , tal que $C \subset D$. Então, temos $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$.

Observe que I deve conter o 0 para garantir que $(a, b) \in C$. Aliás,

$$\|(x, y) - (a, b)\| = \|t\vec{u}\| = |t| \underbrace{\|\vec{u}\|}_1 = |t|.$$

Logo, podemos calcular a taxa de variação média de f em (a, b) quando se passa de (a, b) para $(x, y) = (a + tu_1, b + tu_2)$ como sendo:

$$\frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{\|(x, y) - (a, b)\|} = \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{|t|}.$$

Donde a taxa de variação (instantânea) de f em (a, b) na direção do vetor unitário \vec{u} ou a derivada direcional de f em (a, b) na direção do vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t},$$

se o limite existir.

Observações

(I) Na direção do eixo OX , $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$$

(II) Na direção do eixo OY , $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a, b + t) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

(III) Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(a, b, c) \in D$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é um vetor unitário, então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2, c + tu_3) - f(a, b, c)}{t},$$

se o limite existir.

(IV) Da definição de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) \simeq \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t}, \quad \text{se } t \simeq 0$$

ou

$$f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b) \simeq t \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b), \quad \text{se } t \simeq 0$$

Logo, também poderíamos usar a derivada direcional para aproximar valores da função f em pontos (x, y) próximos a (a, b) na direção do vetor \vec{u} .

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + t \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b), \quad (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), \quad t \simeq 0$$

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $r : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2)$ e olhando para a curva interseção do gráfico de f e o plano $(x, y, z) = (a + tu_1, b + tu_2, s)$, $t \in I$, $s \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, o número $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva interseção no ponto $(a, b, f(a, b))$ relativo à reta r . Isto é $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \tan \alpha$.

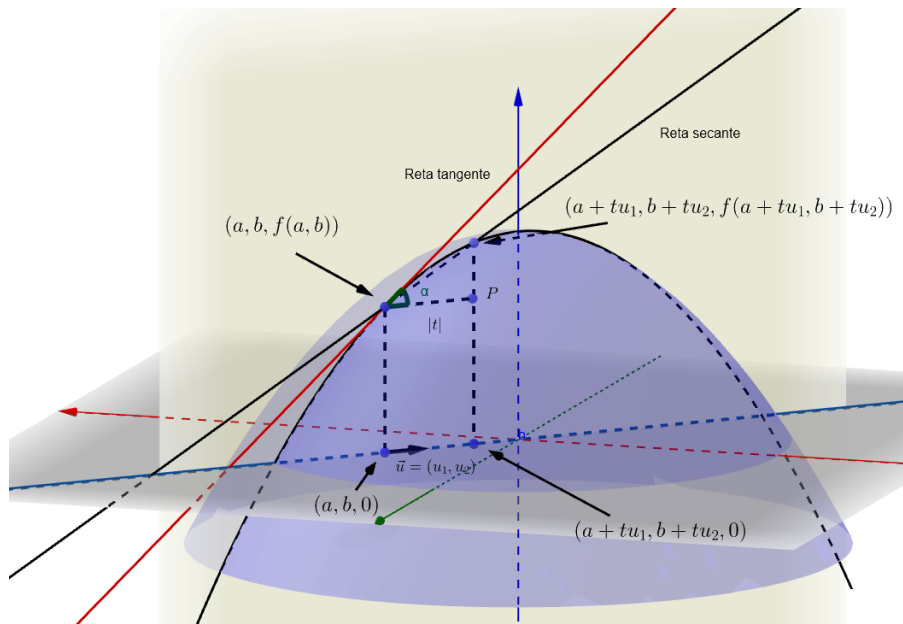


Figure 3: Interpretação geométrica das derivadas direcionais

Propriedades do vetor gradiente:

Teorema Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a, b) \in D$. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário. Então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$$

Demonstração:

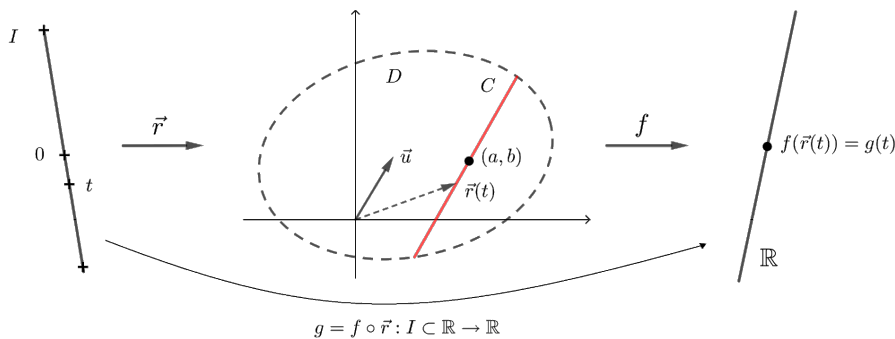


Figure 4: Composição de f com a parametrização do segmento $C : (x, y) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I$

Uma parametrização de C é dada por

$$C : \vec{r}(t) = (a + tu_1, b + tu_2), t \in I \quad (\text{contendo } 0)$$

Observe que \vec{r} é diferenciável em I e $\vec{r}'(0) = (a, b)$. Temos a função composta $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(a + tu_1, b + tu_2)$. Pela regra da cadeia, temos

$$g'(0) = \nabla f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}'(0) = \nabla f(a, b) \cdot (u_1, u_2) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}.$$

Mas

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu_1, b + tu_2) - f(a, b)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b).$$

Logo, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b) = \nabla f(a, b) \cdot \vec{u}$, como queríamos demonstrar.

Observação:

(I) Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, diferenciável em $(a, b, c) \in D$ e \vec{u} um vetor unitário de \mathbb{R}^3 , então

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a, b, c) = \nabla f(a, b, c) \cdot \vec{u}$$

(II) Seja f diferenciável em X_0 , tal que $\nabla f(X_0) \neq \vec{0}$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(X_0)\| \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} \cos \alpha = \|\nabla f(x_0)\| \cos \alpha,$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\nabla f(X_0)$ e \vec{u} .

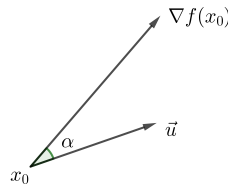


Figure 5: Ângulo entre o vetor gradiente e o vetor unitário

Como $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, então $-\|\nabla f(X_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) \leq \|\nabla f(X_0)\|$.

Conclusão: O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ é igual a $\|\nabla f(X_0)\|$ e ocorre quando $\alpha = 0$ ou quando \vec{u} for o versor de $\nabla f(X_0)$. Já o valor mínimo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0)$ é igual a $-\|\nabla f(X_0)\|$ e ocorre quando $\vec{u} = -\frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$.

Portanto, estando em X_0 , é na direção do vetor $\nabla f(x_0)$ que f cresce mais rapidamente. E é na direção de $-\nabla f(x_0)$ que f decresce mais rapidamente.

Interpretação geométrica do vetor gradiente Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b) \in D$ (aberto), tal que $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$. Seja $k = f(a, b)$. Considere a curva de nível de f , no nível k , que passa por (a, b) :

$$C_k : f(x, y) = k.$$

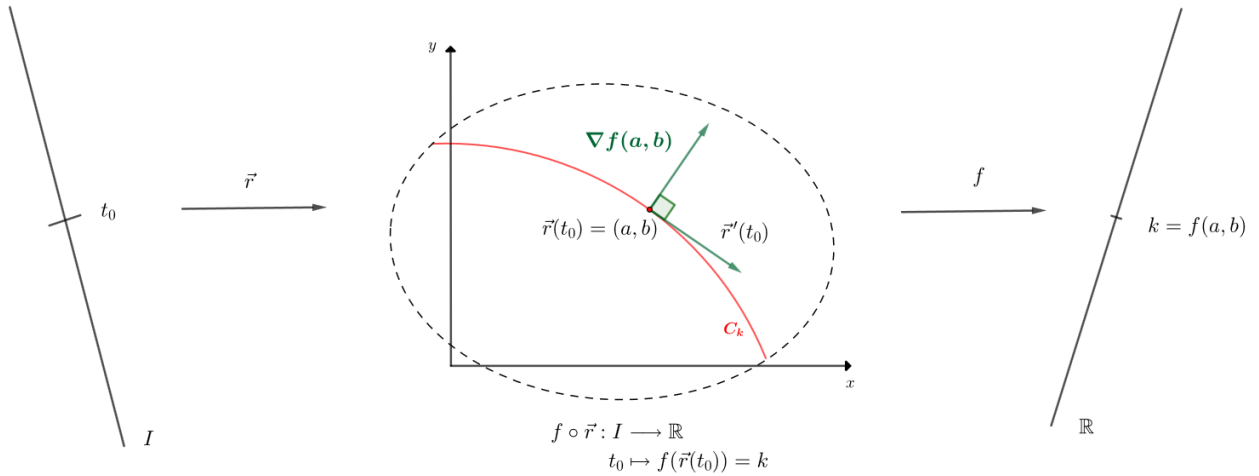


Figure 6: O vetor gradiente é perpendicular à curva de nível

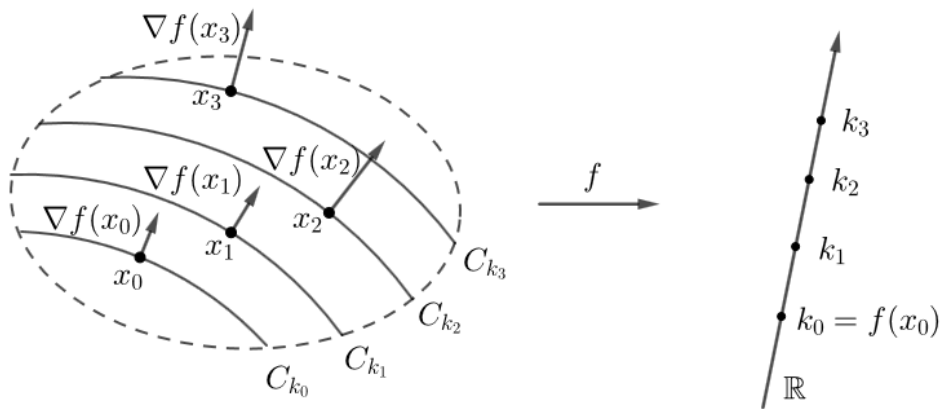


Figure 7: O vetor gradiente em várias curvas de nível

Seja $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t_0 \in I$, uma parametrização diferenciável de C_k . Seja $t_0 \in I$, tal que, $\vec{r}(t_0) = (a, b)$. Temos a função composta $f(\vec{r}(t)) = k$, para todo $t \in I$. Derivando em relação a t , temos $(f(\vec{r}(t)))' = 0$, para todo t .

Aplicando a regra da cadeia, temos $\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$, para todo t .

Em particular

$$\nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t_0) = 0$$

ou

$$\nabla f(a, b), \vec{r}'(t_0) = 0$$

Como $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$, então $\nabla f(a, b) \perp \vec{r}'(t_0)$.

Conclusão: se $\nabla f(a, b) \neq \vec{0}$, então $\nabla f(a, b) \perp C_k$ em (a, b) , i.e., $\nabla f(a, b)$ é normal a curva de nível de f que passa por (a, b) .

Portanto temos que:

Equação da reta tangente à curva de nível de f no ponto (a, b)

$$[(x, y) - (a, b)] \cdot \nabla f(a, b) = 0$$

Equação da reta normal a curva de nível de f no ponto (a, b)

$$(x, y) = (a, b) + \lambda \nabla f(a, b), \lambda \in \mathbb{R}$$

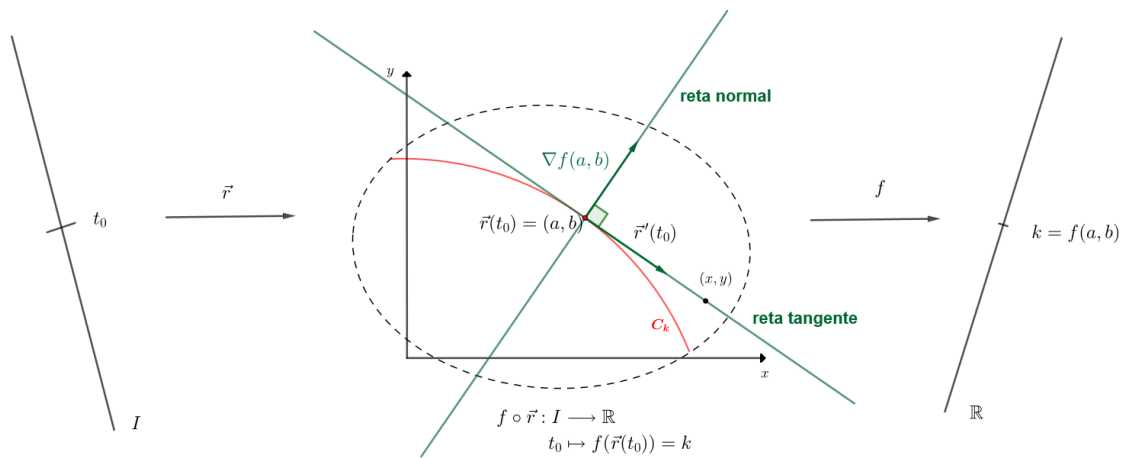


Figure 8: Reta normal e reta tangente à curva de nível

Observação: Seja: $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $(a, b, c) \in D$. Se $\nabla f(a, b, c) \neq \vec{0}$, então $\nabla f(a, b, c) \perp S_k$ em (a, b, c) , onde S_k é a superfície de nível de f em (a, b, c) , i.e. $\nabla f(a, b, c)$ é normal a superfície de nível de f que passa por (a, b, c) .

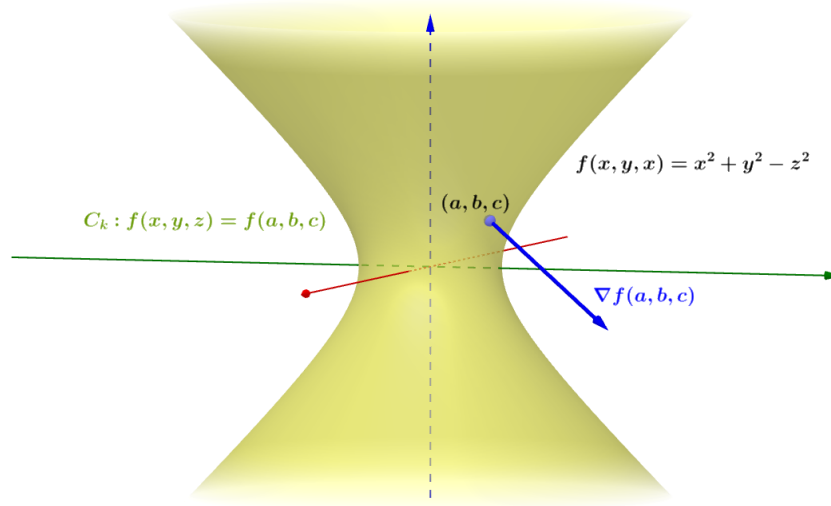


Figure 9: O vetor gradiente é perpendicular à superfície de nível de nível

Equação do plano tangente:

$$[(x, y, z) - (a, b, c)] \cdot \nabla f(a, b, c) = 0$$

Equação da reta normal:

$$[x, y, z] = (a, b, c) + \lambda \nabla f(a, b, c), \lambda \in \mathbb{R}$$

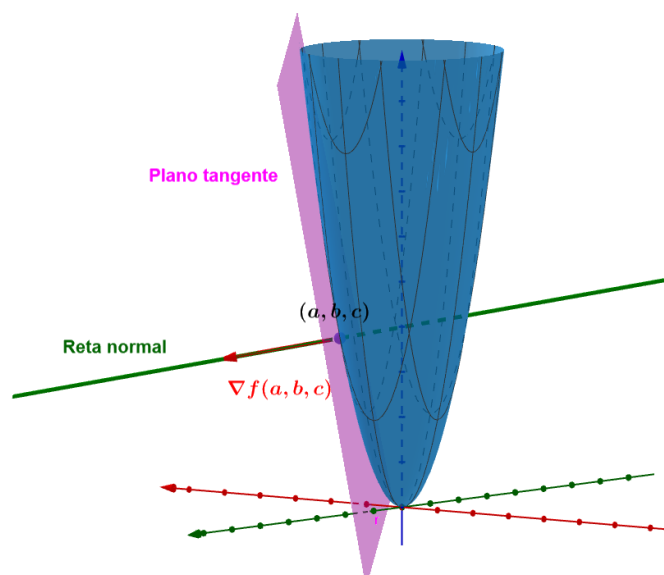


Figure 10: Plano tangente e reta normal à superfície de nível de nível $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde \vec{u} é o versor de $\vec{v} = (-1, 1)$,

(a) pela definição;

Solução

$$\text{Se } \vec{v} = (-1, 1), \text{ então } \vec{u} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1 + t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), 1 + t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) - f(1, 1)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + 1 + \frac{2t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} - 2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0. \end{aligned}$$

(b) usando o vetor gradiente.

Solução

Como $f(x, y) = x^2 + y^2$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 e $u = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ é unitário, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) &= \nabla f(1, 1) \cdot \vec{u} = (2x, 2y)|_{(1,1)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= (2, 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned}$$

2. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, onde $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$.

Solução

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^3}{t^2 \underbrace{(u_1^2 + u_2^2)}_1 \cdot t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^3}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} u_1^3 = u_1^3 \end{aligned}$$

3. Calcule a taxa de variação de $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ em $(0, 0)$ na direção que forma um ângulo de 45° com o eixo x positivo.

Solução

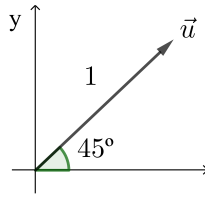


Figure 11: Vetor unitário com ângulo 45°

Temos $\vec{u} = (\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como f é diferenciável em \mathbb{R}^2 , então a taxa de variação é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) &= \nabla f(0,0) \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \vec{u} \\ &= (-e^{-x} \cos y, -e^{-x} \sin y)|_{(0,0)} \cdot \vec{u} = (-1, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

4. Calcule a derivada direcional de $f(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + z$ em $(-1, 2, -2)$ na direção do vetor $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solução

O versor de $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = (-1, 2, 2)$ é $\vec{u} = \frac{(-1, 2, 2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Como f é diferenciável em \mathbb{R}^3 , então $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1, 2, 2) = \nabla f(-1, 2, -2) \cdot \vec{u}$, donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1, 2, -2) &= (6x, 8y, 1)|_{(-1, 2, -2)} \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \\ &= (-6, 16, 1) \cdot \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{32}{3} + \frac{2}{3} = \frac{40}{3}.\end{aligned}$$

5. Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem no ponto $(1, 1)$ derivada direcional igual a 3 na direção $3\vec{i} + 4\vec{j}$ e igual a -1 na direção $4\vec{i} - 3\vec{j}$. Calcule

(a) $\nabla f(1, 1)$

(b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, onde \vec{u} é o versor de $\vec{i} + \vec{j}$.

Solução

(a) Temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(1, 1) &= 3, \quad \vec{u}_1 = \frac{(3, 4)}{\sqrt{9+16}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(1, 1) &= -1, \quad \vec{u}_2 = \frac{(4, -3)}{\sqrt{16+9}} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)\end{aligned}$$

Donde

$$\begin{cases} \nabla f(1,1) \cdot \vec{u}_1 = 3 \\ \nabla f(1,1) \cdot \vec{u}_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{5} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{4}{5} \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \\ \frac{4}{5} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{3}{5} \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1 \end{cases}$$

Multiplicando as duas equações por 5, temos

$$\begin{cases} 3 \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 15 \\ 4 \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - 3 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -5 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 4 e a segunda por 3, temos

$$\begin{cases} 12 \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 16 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 60 \\ -12 \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + 9 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = +15 \end{cases}$$

Logo,

$$25 \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 75 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$$

Portanto, $\nabla f(1,1) = (1,3)$.

(b) Temos $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \vec{u}$, onde $\vec{u} = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (1,3) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

6. Seja $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(0,0) = 0$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$, onde $\vec{u} = (u_1, u_2)$ é um vetor unitário.

Solução

Temos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Então $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Logo,

$$\nabla f(0,0) \cdot (u_1, u_2) = (1,0) \cdot (u_1, u_2) = u_1.$$

Vimos anteriormente que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = u_1^3$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot \vec{u}$. Isto acontece porque f não é diferenciável em $(0,0)$. Verifique!

7. Seja $f(x,y) = \ln \|(x,y)\|$.

- (a) Determine \vec{u} de modo que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$ seja máximo.
- (b) Qual o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$?
- (c) Estando em $(1, -1)$, que direção deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente? E em que direção decresce mais rapidamente?

Solução

Como $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, então $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

- (a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$ é máxima $\Leftrightarrow \vec{u} = \frac{\nabla f(1, -1)}{\|\nabla f(1, -1)\|}$, onde

$$\nabla f(1, -1) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \Big|_{(1, -1)} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

$$\text{Logo, } \vec{u} = \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}}$$

- (b) O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, -1)$ é igual a $\|\nabla f(1, -1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- (c) Em $(1, -1)$, f cresce mais rapidamente na direção de $\nabla f(1, -1) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}$ e decresce mais rapidamente na direção de $-\nabla f(1, -1) = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$.

8. Seja a temperatura do ar em um ponto do espaço dada pela função $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$. Um mosquito localizado em $(1, 2, 1)$ deseja esfriar o mais rápido possível. Em que direção ele deve voar?

Solução

Temos $\nabla f(1, 2, 1) = (2x, -1, 2z) \Big|_{(1, 2, 1)} = (2, -1, 2)$. Como o sentido de $\nabla f(1, 2, 1)$ é aquele em que a temperatura cresce mais rapidamente, estando em $(1, 2, 1)$, então o mosquito deverá voar no sentido oposto, o de $-\nabla f(1, 2, 1) = (-2, 1, -2)$.

9. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional a distância do centro da bola, que tomamos com centro na origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é 90°C .

- (a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
- (b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada pelo vetor que aponta para a origem.

Solução

Como a distância de (x, y, z) à origem é igual a $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e a temperatura em (x, y, z) é inversamente proporcional a essa distância, então

$$T(x, y, z) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, c > 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

Como $T(1, 2, 2) = 90^\circ$ então, $90 = \frac{c}{\sqrt{1+4+4}}$ ou $90 = \frac{c}{3}$, donde $c = 270$.

Logo, $T(x, y, z) = \frac{270}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, que é diferenciável em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

(a) Pondo $P = (1, 2, 2)$, $Q = (2, 1, 3)$, então $\overrightarrow{PQ} = (2, 1, 3) - (1, 2, 2) = (1, -1, 1)$ e o seu versor é $\vec{u} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}}$. A taxa de variação de T em $P = (1, 2, 2)$ na direção de \vec{u} é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1, 2, 2) = \nabla T(1, 2, 2) \cdot \vec{u}.$$

Temos

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1, 2, 2) = \left[\frac{-270 \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \right]_{(1,2,2)} = \frac{-270}{(1+4+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-270}{27} = -10$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1, 2, 2) = \left[\frac{-270y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{(1,2,2)} = \frac{-540}{27} = -20$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}(1, 2, 2) = \left[\frac{-270z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{(1,2,2)} = -20$$

Logo,

$\nabla T(1, 2, 2) = (-10, -20, -20)$. Então,

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}(1, 2, 2) = (-10, -20, -20) \cdot \frac{(1, -1, 1)}{\sqrt{3}} = \frac{-10 + 20 - 20}{\sqrt{3}} = -\frac{10}{\sqrt{3}}.$$

(b) A direção de maior crescimento na temperatura em qualquer (x, y, z) da bola é a do vetor $\nabla T(x, y, z) = \frac{270}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}(-x, -y, -z)$ que aponta para a origem.

10. Determine as equações das retas tangente e normal á curva $C : e^{2x-y} + 2x + 2y = 4$ em $(\frac{1}{2}, 1)$.

Solução

Seja $f(x, y) = e^{2x-y} + 2x + 2y$. Logo, $f(\frac{1}{2}, 1) = e^{1-1} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 4$.

Então C é a curva de nível de f no nível 4. Temos $\nabla f(x, y) = (2e^{2x-y} + 2, -e^{2x-y} + 2)$, donde $\nabla f(\frac{1}{2}, 1) = (2e^{1-1} + 2, -e^{1-1} + 2) = (4, 1)$. Sabemos que $\nabla f(\frac{1}{2}, 1)$ é normal a C em $(\frac{1}{2}, 1)$.

Reta tangente: $[(x, y) - (\frac{1}{2}, 1)] \cdot \nabla f(\frac{1}{2}, 1) = 0$, donde $(x - \frac{1}{2}, y - 1) \cdot (4, 1) = 0 \Leftrightarrow 4x - 2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -4x + 3$

Reta normal: $(x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda \nabla f(\frac{1}{2}, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y) = (\frac{1}{2}, 1) + \lambda(4, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

11. Determine as equações do plano tangente e da reta normal a superfície $S : xyz + x^3 + y^3 + z^3 = 3z$ no ponto $(1, -1, 2)$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = xyz + x^3 + y^3 + z^3 - 3z$.

Logo, $f(1, -1, 2) = -2 + 1 - 1 + 8 - 6 = 0$. Então, S é a superfície de f no nível 0. Temos $\nabla f(x, y, z) = (yz + 3x^2, xz + 3y^2, xy + 3z^2 - 3)$, donde $\nabla f(1, -1, 2) = (-2 + 3, 2 + 3, -1 + 12 - 3) = (1, 5, 8)$.

Sabemos que $\nabla f(1, -1, 2)$ é perpendicular a S em $(1, -1, 2)$.

Plano tangente: $[(x, y, z) - (1, -1, 2)] \cdot \nabla f(1, -1, 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 1, y + 1, z - 2) \cdot (1, 5, 8) = 0 \Leftrightarrow x + 5y + 8z = 12$.

Reta normal: $(x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda \nabla f(1, -1, 2), \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x, y, z) = (1, -1, 2) + \lambda(1, 5, 8), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercícios

- Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$ no ponto $(-1, 1)$ e na direção do vetor $2\vec{i} + 3\vec{j}$.
- Encontre a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^{y^2 - z^2}$ em $(1, 2, -2)$ na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ à curva $\vec{r}(t) = (t, 2 \cos(t - 1), -2e^{t-1})$.
- Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$ no ponto $(1, 0)$ tem valor 1.
- Determine a taxa de variação da função $z = \frac{(y - 1)^2}{x}$ no ponto $P_0(1, 2)$, na direção da normal à elipse $2x^2 + y^2 = 6$ no ponto P_0 .
- Seja $g(r, \theta) = f(x, y)$, com $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, onde $f(x, y)$ é suposta diferenciável num aberto de \mathbb{R}^2 . Sejam $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ e $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$. Mostre que
 - $\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y)$ e $\frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y)$
 - $\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) \vec{u} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x, y) \vec{v}$.
- Considere a função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$ e o ponto $P_0 = (2, 2)$. Determine
 - A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor $(1, 1)$.
 - A taxa de variação de f em P_0 na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ a curva $\vec{r}(t) = (t, t^2 - t)$ em $(3, 6)$.

- (c) A direção na qual a taxa de variação de f em P_0 é máxima.
7. A função diferenciável $f(x, y, z)$ tem no ponto $(1, 1, 1)$, derivada direcional igual a 1 na direção $4\vec{j} + 3\vec{k}$, igual a 2 na direção $-4\vec{i} + 3\vec{j}$ e igual a zero na direção \vec{j} . Calcule o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1, 1)$
8. Seja $f(u, v, w)$ uma diferenciável em $P(0, 0, 0)$, tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(P) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = -3$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(P) = 2$. Defina $g(x, y) = f(5x - 5, 2xy - 2, 4y^2 - 4)$. Determine a taxa de variação de g no ponto $(1, 1)$ e na direção do vetor $-\vec{i} + \vec{j}$.
9. Suponha que, para todo t , $f(3t, t^3) = \arctan t$, onde $f(x, y)$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 e $\frac{\partial f}{\partial y}(3, 1) = 2$. Calcule a taxa de variação de f em $(3, 1)$ na direção de um vetor tangente à curva $x^2 + 4y^2 = 13$ no ponto $(3, 1)$.
10. Seja $g(x, y) = xf(x^2 + y^2, 2y, 2x - y)$. Suponha que $f(2, 2, 1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial u}(2, 2, 1) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 2, 1) = 2$ e $\frac{\partial f}{\partial w}(2, 2, 1) = -2$.
- (a) Calcule a taxa de variação de g no ponto $(1, 1)$ na direção da normal à elipse $2x^2 + y^2 = 3$ no ponto $(1, 1)$.
- (b) Calcule a taxa de variação máxima de g no ponto $(1, 1)$. Em que direção isso ocorre?
11. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy e um indivíduo que se encontra na posição $(3, 2)$ pretende dar um passeio
- (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.
- (b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
- (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura em 0°C , de quanto a temperatura se elevará aproximadamente, caso caminhe $0,01 \text{ km}$ na direção encontrada no item b?
12. Determine uma equação do plano tangente e uma equação da reta normal ao hiperboloide de equação $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 10$ no ponto $(4, -1, 1)$.
13. Determine uma reta que seja tangente a curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 17$.
14. Determine um plano que seja tangente a superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

15. Considere a função $z = \frac{\sqrt[4]{8+x^2+y^2}}{y}$. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2, 2, 1)$.
16. Considere a curva C intersecção das superfícies de equações $S_1 : x^2 - 2xz + y^2z = 3$ e $S_2 : 3xy - 2yz = -2$. Determine:
- (a) um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.
 - (b) Os pontos do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

Respostas

1. $-\frac{\sqrt{13}}{13}$
2. $-\frac{7\sqrt{5}}{5}$
3. $\vec{u} = \vec{j}, \vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
5. sem resposta
6. (a) $3\sqrt{2}$
(b) $\frac{7\sqrt{26}}{13}$
(c) $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$
7. $\frac{5}{6}\sqrt{13}$
8. $3\sqrt{2}$
9. $-\frac{8}{3}$
10. (a) $\frac{-6\sqrt{5}}{5}$
(b) $\sqrt{41}$ na direção $-5\vec{i} + 4\vec{j}$
11. (a) $C : x^2 + 2y^2 = 17$ (elipse)
(b) $-6\vec{i} - 8\vec{j}$
(c) A temperatura se elevará aproximadamente de $0,1^\circ C$ na direção de $-\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$
12. $2x - 2y - z + 1 = 0$
13. $2x + y - 2z = 5; (x, y, z) = (4, -1, 1) + \lambda(8, 4, -8), \lambda \in \mathbb{R}$
14. $y - 2 = -\frac{4}{5}(x - 1)$ ou $y + 2 = -\frac{4}{5}(x + 1)$
15. $x + y + z = \frac{11}{6}$ ou $x + y + z = -\frac{11}{6}$

16. (a) $(3, 2, 4)$
(b) $(6, 4, -8)$ e $(-6, -4, 8)$

