



## Transformações. Mudança de variável.

### Objetivos:

- transformações no plano e no espaço; mudança de variáveis;
- transformação inversa; jacobiano da inversa;
- teorema da função inversa.

**Definição:** Sejam  $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $n$  funções reais de  $n$  variáveis reais. Uma transformação é uma função vetorial de  $n$  variáveis do tipo

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ponto  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \longmapsto$  vetor  $f(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$

As funções reais  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são ditas de funções coordenadas.

A transformação  $f$  é diferenciável (e portanto contínua) no ponto  $X_0 \in D$  se e somente se cada função coordenada  $f_1, f_2, \dots, f_n$  é diferenciável em  $X_0$ .

A transformação  $f$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , no aberto  $A \subset D$  se e somente se cada função coordenada  $f_1, f_2, \dots, f_n$  é de classe  $C^k$  em  $A$ .

As transformações são chamadas também de mudanças de variável. Pois elas transformam as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nas novas variáveis

$$\begin{cases} u_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ u_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ u_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

A transformação inversa de  $f$ , caso existir, é a função vetorial  $g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $f \circ g = g \circ f = id$ . Ela é denotada por  $f^{-1}$ , donde  $f^{-1}(u_1, u_2, \dots, u_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**Observação:** Nem toda transformação admite inversa. Por exemplo,  $f(x, y) = (x^2, y)$ . Observe que  $f(2, 1) = f(-2, 1) = (4, 1)$  pelo que a inversa não estaria bem definida em  $(4, 1)$ .

**Transformações lineares:** São do tipo  $f(X) = AX$ . Por exemplo:

Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y) = (x + y, x - y)$ . As funções coordenadas são  $f_1(x, y) = x + y$  e  $f_2(x, y) = x - y$ .

Podemos representar essa função por

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = AX$$

**Transformações afins:** São do tipo  $f(X) = AX + B$ , composição de uma transformação linear e de uma translação de vetor  $\vec{B}$ . Por exemplo:

Seja  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dada por  $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2)$ . As funções coordenadas são  $g_1(x, y, z) = x + y + z + 1$ ,  $g_2(x, y, z) = -x + y + 2z - 3$  e  $g_3(x, y, z) = x + 2y + 2$ .

Podemos representar essa função por

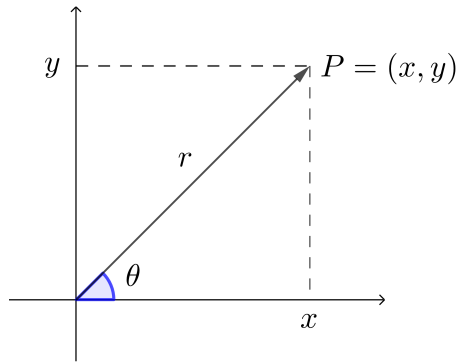
$$g \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z + 1 \\ -x + y + 2z - 3 \\ x + 2y + 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}_B = AX + B$$

**Transformações não afins:** São transformações que não podem ser expressas da forma  $AX + B$ , para alguma matriz quadrada  $A$  e vetor  $B$ . Por exemplo:

Seja  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $h(x, y) = (x + y, xy)$ . As funções coordenadas são  $h_1(x, y) = x + y$  e  $h_2(x, y) = xy$ .

Os exemplos mais conhecidos de mudança de variável não afim são as mudanças a coordenadas polares, cilíndricas ou esféricas:

- (I) Mudança de variáveis a coordenadas polares: Um ponto  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , descrito em coordenadas cartesianas, pode ser descrito em outro sistema de coordenadas. Por exemplo, o sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$ , onde  $r$  é o comprimento do vetor  $\overrightarrow{OP}$  e  $\theta$  é o ângulo em radianos, tomado no sentido anti-horário, entre  $\overrightarrow{OP}$  e o eixo  $x$  positivo.



**Figure 1: Coordenadas polares**

Temos a função vetorial

$$\varphi_p : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad D = [0, +\infty[ \times [0, 2\pi]$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_p : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}, \quad \text{onde } r \geq 0 \text{ e } \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de polares a cartesianas é  $\varphi_p^{-1}$  é apresentada como

$$\varphi_p^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad y \in \mathbb{R}.$$

- (II) Mudança de variáveis a coordenadas cilíndricas: A posição do ponto  $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  também pode ser determinado pelas suas coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . A relação entre as coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e as coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  é dada pela função

$$\varphi_c : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad D = [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R}$$

$$(r, \theta) \longmapsto (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

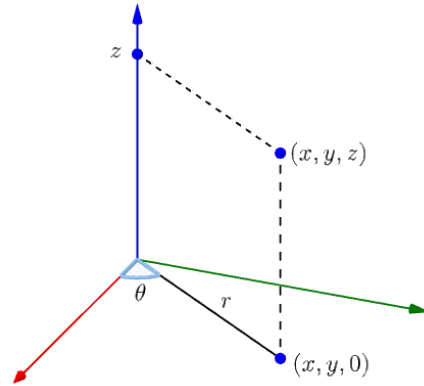


Figure 2: Coordenadas cilíndricas

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_c : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}, \text{ onde } r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

A mudança de coordenadas de cilíndricas a cartesianas é  $\varphi_c^{-1}$  é apresentada como

$$\varphi_c^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

- (III) Mudança de variáveis a coordenadas esféricas: A posição de um ponto  $P = (x, y, z)$  também fica determinada pelos números  $\rho, \phi, \theta$ , onde  $\rho$  é o comprimento do vetor  $\vec{OP}$ ,  $\phi$  é o ângulo (em radianos) entre o eixo  $z$  positivo e o vetor  $\vec{OP}$  e  $\theta$  é o ângulo, tomado no sentido anti-horário, entre o eixo  $x$  positivo e o vetor projeção de  $\vec{O}$  no plano  $xy$ .

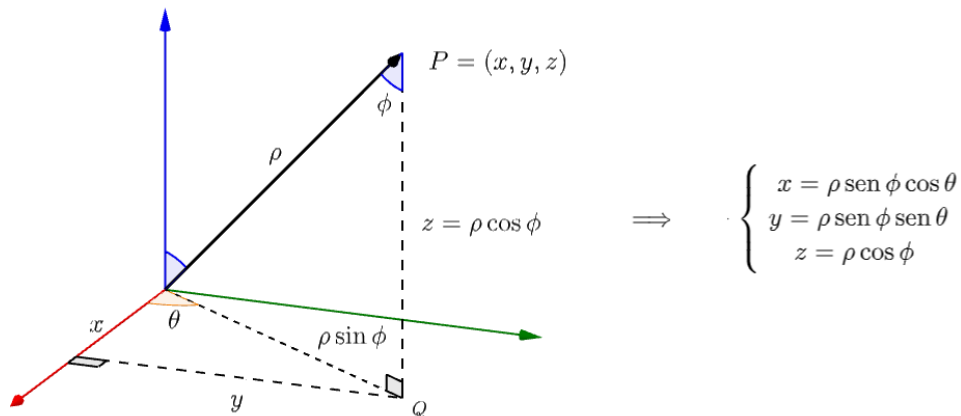


Figure 3: Coordenadas esféricas

A relação entre as coordenadas  $(x, y, z)$  e  $(\rho, \phi, \theta)$  é dada pela função

$$\begin{aligned}\varphi_c : D \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3, D = [0, +\infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \\ (\rho, \phi, \theta) &\longmapsto (x, y, z) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi)\end{aligned}$$

Ela também pode ser apresentada como

$$\varphi_c : \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}, \quad \text{onde } r \geq 0, \quad \phi \in [0, \pi] \quad \text{e} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

A mudança de coordenadas de esféricas a cartesianas é  $\varphi_c^{-1}$  é apresentada como

$$\varphi_c^{-1} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}, \quad x \neq 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

**Definição:** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma transformação diferenciável de coordenadas  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Se existirem todas as derivadas parciais das funções coordenadas, a derivada de  $f$  no ponto  $X_0 \in D$  é definida como a matriz quadrada:

$$f'(X_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{bmatrix}$$

Dita derivada é chamada de matriz jacobiana de  $f$  no ponto  $X_0$ . As vezes também é denotada por  $Df(X_0)$  ou por  $\frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}$ .

**Observação:** A matriz jacobiana de uma transformação  $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é uma matriz quadrada  $n \times n$ , e, assim tem determinante. Dito determinante é chamado de jacobiano de  $f$ :

$$Jf(X_0) = \det f'(X_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X_0) \end{vmatrix}$$

**Regra da Cadeia:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  aberto, e  $g : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $E$  aberto, duas transformações tais que  $f(D) \subset E$ . Se  $f$  é diferenciável em  $X_0$  e  $g$  é diferenciável em  $f(X_0)$ , então a composta  $g \circ f$  é diferenciável em  $X_0$  e

$$(g \circ f)'(X_0) = g'(f(X_0)) \cdot f'(X_0),$$

onde  $g'(f(X_0))$  é a matriz jacobiana de  $g$  em  $f(X_0)$  e  $f'(X_0)$  é a matriz jacobiana de  $f$  em  $X_0$ .

**Teorema da Função Inversa:** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D$  aberto, uma transformação de classe  $C^1$ . Se  $f'(X_0)$  é uma matriz inversível (i.e.  $Jf(X_0) \neq 0$ ), então existe um aberto  $U$  contendo  $X_0$ , tal que  $f : U \rightarrow V = f(U)$  é inversível com inversa  $f^{-1} : V \rightarrow U$  de classe  $C^1$  e

$$(f^{-1})'(Y_0) = (f'(X_0))^{-1},$$

onde  $Y_0 = f(X_0)$ .

**Observação:**

- (I) Nas condições do teorema da regra da cadeia, o jacobiano da composta é o produto dos jacobianos:

$$J(g \circ f)(X_0) = Jg(f(X_0)) \cdot Jf(X_0)$$

- (II) Nas condições do teorema da função inversa, o jacobiano da transformação inversa é o recíproco do jacobiano da transformação:

$$Jf^{-1}(Y_0) = \det(f'(X_0))^{-1} = \frac{1}{Jf(X_0)},$$

onde  $Y_0 = f(X_0)$ .

## Exemplos

1. Calcule a imagem do quadrado de vértices  $(1, 1)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(5, 5)$  e  $(1, 5)$  pela transformação  $f(x, y) = (4x, \frac{1}{2}y)$ .

**Solução**

A fronteira do quadrado  $Q$  é:  $\vec{\alpha}_1(t) = (t, 1)$ ,  $\vec{\alpha}_2(t) = (5, t)$ ,  $\vec{\alpha}_3(t) = (-t + 6, 5)$ ,  $\vec{\alpha}_4(t) = (1, -t + 6)$ , para todo  $t \in [1, 5]$ .

A imagem da fronteira pela transformação são os segmentos:  $f(t, 1) = (4t, \frac{1}{2})$ ,  $f(5, t) = (20, \frac{1}{2}t)$ ,  $f(-t + 6, 5) = (-4t + 24, \frac{5}{2})$  e  $f(1, -t + 6) = (4, -\frac{1}{2}t + 3)$ , respectivamente.

Consideremos, para cada  $1 < c < 5$ , os segmentos verticais  $\vec{r}_c(t) = (c, t)$ , com  $1 \leq t \leq 5$ , no interior do quadrado  $Q$ . A imagem desses segmentos são:  $f(c, t) = (4c, \frac{1}{2}t)$ . Ainda segmentos verticais no interior de  $f(Q)$ .

Consideremos, para cada  $1 < c < 5$ , os segmentos horizontais  $\vec{s}_c(t) = (t, c)$ , com  $1 \leq t \leq 5$ , no interior do quadrado  $Q$ . A imagem desses segmentos são:  $f(t, c) = (4t, \frac{c}{2})$ . Ainda segmentos horizontais no interior de  $f(Q)$ .

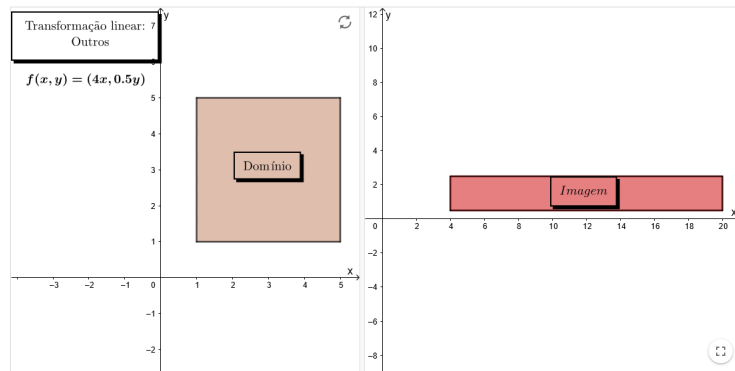


Figure 4: Imagem de um retângulo por uma transformação linear

Portanto a imagem do quadrado  $Q$  é o retângulo de vértices  $(4, \frac{1}{2})$ ,  $(20, \frac{1}{2})$ ,  $(20, \frac{5}{2})$  e  $(4, \frac{5}{2})$ .

- Calcule a imagem do retângulo de vértices  $(-1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  e  $(-1, 2)$  pela transformação  $f(x, y) = (y \cos x, y \sin x)$ .

### Solução

A fronteira do retângulo  $R$  é:  $\vec{\alpha}_1(t) = (t, 1)$ ,  $\vec{\alpha}_3(t) = (-t + 1, 2)$ , para todo  $t \in [-1, 2]$ ; e  $\vec{\alpha}_2(t) = (2, t)$ ,  $\vec{\alpha}_4(t) = (-1, -t + 3)$ , para todo  $t \in [1, 2]$ .

A imagem da fronteira pela transformação são os arcos

$f(t, 1) = (\cos t, \sin t)$ ,  $f(-t + 1, 2) = (2 \cos(-t + 1), 2 \sin(-t + 1))$ , para todo  $t \in [-1, 2]$ ;

e os segmentos

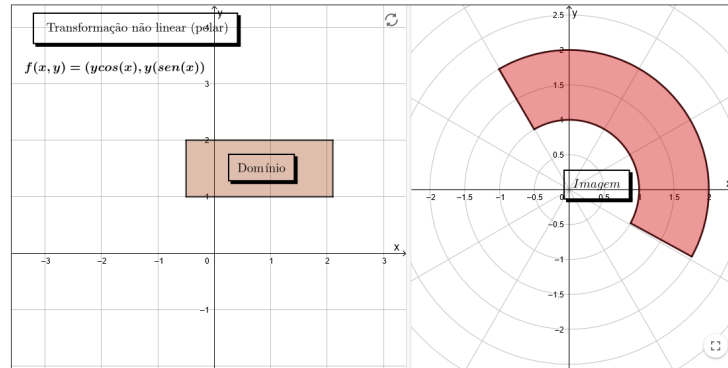
$f(2, t) = (t \cos(2), t \sin(2))$ ,  $f(-1, -t + 3) = ((-t + 3) \cos(-1), (-t + 3) \sin(-1))$ , para todo  $t \in [1, 2]$ ;

respectivamente.

Consideremos, para cada  $-1 \leq c \leq 2$ , os segmentos verticais  $\vec{r}_c(t) = (c, t)$ , com  $1 \leq t \leq 2$ . A imagem desses segmentos são:  $f(c, t) = (t \cos(c), t \sin(c))$ , segmentos de reta que passa pela origem e tem vetor diretor  $(\cos c, \sin c)$ .

Consideremos, para cada  $1 \leq c \leq 2$ , os segmentos horizontais  $s_c(t) = (t, c)$ , com  $-1 \leq t \leq 2$ . A imagem desses segmentos são:  $f(t, c) = (c \cos(t), c \sin(t))$ , arco de circunferência de centro  $(0, 0)$  e raio  $c$ .

Portanto a imagem do retângulo  $R$  é a seção do anel de raios 1 e 2 da figura a seguir ou o retângulo circular de vértices  $(\cos(2), \sin(2))$ ,  $(2\cos(2), 2\sin(2))$ ,  $(2\cos(-1), 2\sin(-1))$  e  $(\cos(-1), \sin(-1))$ .



**Figure 5: A imagem de um retângulo por uma transformação não linear**

3. Calcule o jacobiano das seguintes transformações:

- (i)  $f(x, y) = (x + y, x - y)$ ;
- (ii)  $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2)$ ;
- (iii)  $h(x, y) = (x - y, xy)$ .

### Solução

- (i) Temos  $f(x, y) = (x + y, x - y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , donde  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = -1$ . Então,

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- (ii) Temos  $g(x, y, z) = (x + y + z + 1, -x + y + 2z - 3, x + 2y + 2) = (g_1(x, y, z), g_2(x, y, z), g_3(x, y, z))$ , donde  $\frac{\partial g_1}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial g_1}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial g_1}{\partial z} = 1$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial x} = -1$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial g_2}{\partial z} = 2$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial y} = 2$ ,  $\frac{\partial g_3}{\partial z} = 0$ . Então,

$$Jg(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0 - 2 + 2 - 1 - 0 - 4 = -5, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$



- (iii) Temos  $h(x, y) = (x - y, xy) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ , donde  $\frac{\partial h_1}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial h_1}{\partial y} = -1$ ,  $\frac{\partial h_2}{\partial x} = y$ ,  $\frac{\partial h_2}{\partial y} = x$ . Então,

$$Jh(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

4. Considere a translação  $f(x, y) = (ax + by + h, cx + dy + k)$ , para algum vetor  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  e coeficientes  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Calcule o determinante jacobiano de  $f$ .

### Solução

Seja  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Então,  $f(x, y) = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ .

Temos  $f(x, y) = (ax + by + h, cx + dy + k) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ , donde  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = a$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = b$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = c$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = d$ . Então,

$$Jf(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(A), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas polares a cartesianas no ponto  $(r, \theta)$ .

### Solução

Temos  $\varphi_p(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta))$ , onde  $x(r, \theta) = r \cos \theta$ ,  $y(r, \theta) = r \sin \theta$ . Logo,

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

Então

$$J\varphi_p(r, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_{=1} = r$$

Observe que o jacobiano da transformação depende unicamente do raio.

6. Determine o jacobiano da mudança de coordenadas cartesianas a polares em  $(x, y)$ .

### Solução

Temos  $T(x, y) = (r(x, y), \theta(x, y))$ , onde  $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\theta(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ . Logo,

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Então

$$\begin{aligned} JT(x, y) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

Observação: Observe que  $T = \varphi_p^{-1}$  e  $J\varphi_p(r, \theta) = r$ . Portanto, se  $r > 0$  podemos aplicar o teorema da função inversa para calcular  $JT(x, y)$ . Com efeito,

$$JT(x, y) = \frac{1}{J\varphi_p(r(x, y), \theta(x, y))} = \frac{1}{r(x, y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

7. Seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $f(x, y, z) = (x \cos y, x \sin y, z^2)$

- (a) Prove que  $f$  é diferenciável.
- (b) Calcule  $f'(1, \frac{\pi}{4}, 1)$
- (c) Calcule o jacobiano de  $f$

**Solução**

- (a) Temos  $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$  com  $f_1(x, y, z) = x \cos y$ ,  $f_2(x, y, z) = x \sin y$ ,  $f_3(x, y, z) = z^2$ .

Como  $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \cos y$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -x \sin y$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \sin y$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial y} = x \cos y$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial f_3}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0$  e  $\frac{\partial f_3}{\partial z} = 2z$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^3$ , então  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ .

- (b) Temos

$$\begin{aligned} f'(x, y, z) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ \sin y & x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow f'\left(1, \frac{\pi}{4}, 1\right) &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(c) \text{ Temos } J = \begin{vmatrix} \cos y & -x \sin y & 0 \\ \sin y & x \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{vmatrix} = 2z(x \cos^2 y + x \sin^2 y) = 2xz$$

8. Sejam  $f\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u^2 + 2uv + 3v \\ u - v \end{pmatrix}$ ,  $g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ .

Calcule o jacobiano da função composta  $g \circ f$  em (9).

9. Seja  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Mostre que  $f$  tem uma inversa em um aberto contendo  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e calcule  $[f^{-1}]'(y_0)$ ,  $Y_0 = f(x_0)$ ,

### Solução

Temos que  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2xy^2 \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$  é de classe em  $\mathbb{R}^2$  pois as derivadas para as de  $f_1$  e  $f_2$  são funções contínuas em  $\mathbb{R}^2$ . Tem também que

$$f' \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y^2 & -4xy \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde,

$$f'(x_0) = f' \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como  $Jf(x_0) = \det f'(x_0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4 \neq 0$ , então pelo teorema da função inversa, existe um conjunto aberto  $v$  contendo  $X_0$ , tal que  $f|_v$  ( $f$  restrita a  $v$ ) tem uma função inversa  $f^{-1}$ , de classe  $C^1$ , e além disso,

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = [f'(x_0)]^{-1},$$

onde  $f(x_0) = f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = y_0$  e  $(f'(x_0))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ . Logo,

$$(f^{-1})' \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exercícios

1. Calcule a imagem do retângulo de vértices  $(-1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 2)$  e  $(-1, 2)$  pelas seguintes transformações:

(i) Homotetia:  $f(x, y) = (4x, 4y)$ ;

(ii) Rotação:  $g(x, y) = (-x, y)$ ;

(iii) Reflexão:  $h(x, y) = (x, -y)$ ;

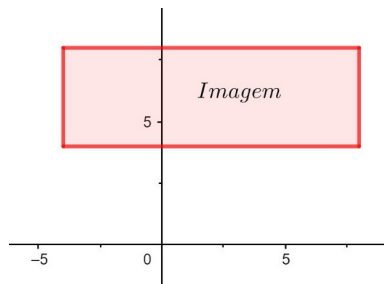
2. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a função definida por  $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ .

(i) Mostre que a função  $f$  transforma o círculo de centro na origem e raio  $r$  no círculo de centro na origem e raio  $r^2$ .

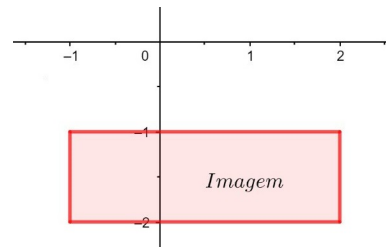
- (ii) Determine e esboce a imagem por  $f$  do retângulo de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$  e  $(-2, 2)$ .
3. Determine o jacobiano de  $\varphi_c$  e de sua inversa.
4. Determine o jacobiano de  $\varphi_e$  e de sua inversa.
5. Determine o determinante jacobiano de  $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2xy + 3y \\ x - y \end{pmatrix}$  em  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
6. Prove que o jacobiano de uma transformação afim  $T(X) = AX + B$  é  $JT(X) = \det(A)$ , para todo  $X \in \mathbb{R}^n$ .

### Respostas

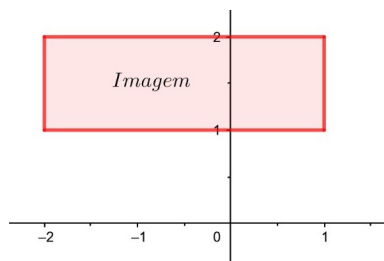
1. (i)



(iii)



(ii)



2. (i) sem resposta

(ii)

3.  $J\varphi_c = r$ ,  $J\varphi_c^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

4.  $J\varphi_e = \rho^2 \sin \phi$ ,  $J\varphi_e^{-1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}}$

5.  $-7$

6. sem resposta

