Funções escalares de várias variáveis

Diferenciabilidade. Plano tangente.

Objetivos:

- diferenciabilidade de uma função de duas ou três variáveis;
- funções de classe C^1; condição suficiente para uma função ser diferenciável;
- equações cartesianas do plano tangente ao gráfico da função em um ponto;
- equações paramétricas da reta normal ao gráfico da função em um ponto;

Diferenciabilidade: Lembrando o conceito de diferenciabilidade em funções de uma variável.

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$ um ponto no domínio. Dizemos que f é diferenciável em a se o seguinte limite existir

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Temos, portanto

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$$

Onde,

$$\varepsilon(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)h$$

Essa definição sugere a seguinte definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis.

Definição 1: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a,b) \in D$. Dizemos que f é diferenciável em (a,b) se existirem $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$, tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0,$$

onde

$$\varepsilon\,(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Definição 2: Dizemos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no aberto $A \subset D$ se for diferenciável em todos os pontos $(a,b) \in A$. Em particular, dizemos que f é diferenciável se for diferenciável no domínio aberto D.

Exemplo: Mostre que $f(x,y) = xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Com efeito, seja $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, temos $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = b$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = a$. Portanto,

$$\varepsilon(h,k) = f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k =$$

$$= (a+h)(b+k) - ab - bh - ak = ab + ak + bh + hk - ab - bh - ak = hk$$

Donde

$$\frac{\varepsilon(h,k)}{|\,|(h,k)|\,|} = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = h \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Temos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} h = 0 \quad \text{e} \quad |\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,| = \frac{|\,k\,|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|k|^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2+k^2}} \leq \sqrt{\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}}$$

Então, pelo teorema do anulamento, temos $\displaystyle\lim_{(h,k)\to\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{|\,|\,(h,k)|\,|} = 0$ Portanto, $f(x,y) = xy$ é diferenciável em $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Como (a,b) é arbitrário, segue que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1: Se f é diferenciável em $(a,b) \Rightarrow f$, então f é contínua em (a,b).

Teorema 2: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(a,b) \in D$. Se existirem $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ em um aberto contendo (a,b) e forem contínuas em (a,b), então f é diferenciável (a,b).

Definição 2: Dizemos que f é de classe C^1 no aberto $A \subset D$ se as funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ forem contínuas em todos os pontos $(a,b) \in A$.

Observações:

1. O limite da Definição 1 é equivalente a

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

e a

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(a+\Delta x,b+\Delta y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$$

2. Se uma das derivadas parciais não existir em (a,b), então f não é diferenciável em (a, b).

3. Se $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ e $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} \neq 0$ ou se $\nexists \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{||(h,k)||}$, então f não é diferenciável em (a, b).

4. Em particular, se para algum caminho C_1, $\lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}$ for diferente de zero ou não existir, então f não é diferenciável em (a, b).

5. f não é contínua em $(a, b) \Rightarrow f$ não é diferenciável em (a, b).

6. Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, D aberto, for de classe C^1 em D, então f é diferenciável (em todo o domínio D).

Plano tangente e Reta normal: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e diferenciável em $(a, b) \in D$.

O plano de equação

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

é denominado plano tangente ao G_f, gráfico de f, no ponto $(a, b, f(a, b))$.

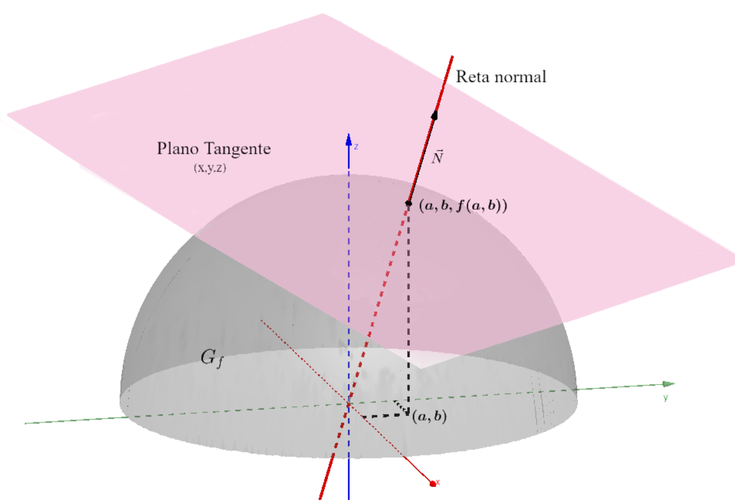

Figure 1: Plano tangente a G_f em $(a, b, f(a, b))$

Da equação do plano temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-a) - (z - f(a,b)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1)}_{\vec{N}} \cdot \underbrace{(x-a, y-b, z-f(a,b))}_{\text{vetor do plano tangente}} = 0$$

Logo, $\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente no ponto $(a, b, f(a, b))$.

A reta que passa por $(a, b, f(a, b))$ e é paralela ao vetor $\vec{N}$ é dita reta normal ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$. A equação paramétrica da reta normal é:

$$(x, y, z) - (a, b, f(a, b)) = \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

Observação: O plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P = (a, b, f(a, b))$ contêm as duas retas tangentes T_1 e T_2 à curva interseção da superfície com os planos $x = a$ e $y = b$, respectivamente.

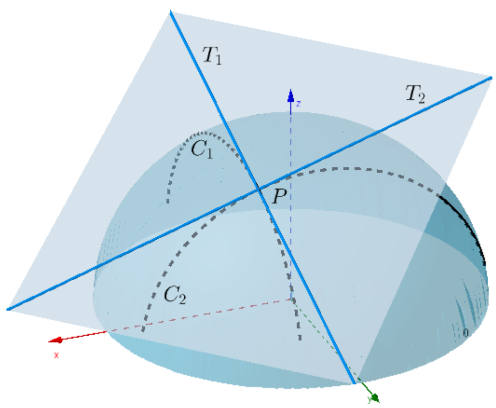

Figure 2: O plano tangente contêm as duas retas tangentes.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. f é diferenciável em $(0, 0)$?

   Solução

   Temos $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h_1 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$ não existe.

   Logo, pelo item 1 das Observações , concluímos que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

2. Mostre que a recíproca do teorema 1 é falsa.

   Solução

Considere a função $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y)\neq(0,0)$; $f(x,y)=0$, $(x,y)=(0,0)$.
Temos $f(x,y)=\frac{y^3}{x^2+y^2}=y\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}$, onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y=0$ e $\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|=\frac{y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$, donde $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada.
Logo, pelo corolário do teorema do confronto, segue que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

Portanto, f é continua em $(0,0)$.

Ora, na aula de Derivadas Parciais, exercício 5, vimos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$.

Logo,

$$\frac{\varepsilon\left(h_1 k\right)}{\left\|\left(h_1 k\right)\right\|}=\frac{f\left(h_1 k\right)-f(0,0)-0\cdot h-1\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{\frac{k^3}{h^2+k^2}-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{-h^2 k}{\left(h^2+k^2\right)\sqrt{h^2+k^2}}=g(h,k).$$

Consideremos o conjunto $C_1: h=0,\ k\neq 0$. Então, $g\left(h,k\right)=g(0,k)=0$ em C_1, donde $\lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_1}} g\left(h,k\right)=0$.

Consideremos o conjunto $C_2: k=h, h\neq 0$.

Então, $g(h,k)=g(h,h)=\frac{-h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}}=\frac{-h}{2\sqrt{2}|h|}$, donde $\nexists \lim\limits_{\substack{(h,k)\to(0,0)\\ \text{ao longo de } C_2}} g(h,k)$.

Portanto, $\nexists \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\varepsilon(h,k)}{||h,k||}$ e, assim f não é diferenciável em $(0,0)$.

3. $f(x,y)=3x^2y-2xy^2-5xy+4x-2y+1$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois $\frac{\partial f}{\partial x}=6xy-2y^2-5y+4$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-4xy-5x-2$ são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$.

4. A função $f(x,y)=\cos\left(x^2+y^2\right)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, pois $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x\,\text{sen}\left(x^2+y^2\right)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y\,\text{sen}\left(x^2+y^2\right)$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$

5. A função $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$, $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)=0$, $(x,y)=(0,0)$ é diferenciável em $(0,0)$?

Solução

Seja $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$ e $C_1: y=0, x\neq 0$. Temos $f(x,y)=f(x,0)=0$ em C_1. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)=0$ ao longo de C_1.

Seja $C_2: x=0, y\neq 0$. Temos $f(x,y)=f(0,y)=0$ em C_2. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ao longo de C_2. Seja $C_3: y=x, x\neq 0$. Temos $f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$ em

c_3. Logo, $\lim\limits_{(x,y)\to(00)} f(x,y) = \dfrac{1}{2}$ ao longo de C_3.Como os limites não coincidem, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Portanto f não é contínua em $(0,0)$. Logo, pelo teorema 1 , segue que f não é diferenciável em $(0,0)$.

6. Mostre que a função $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^2+y^2}$ se $(x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$ se $(x,y) = (0,0)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução

No exercício 7 , da aula de Derivadas Parciais , temos onde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

As funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(x,y) \neq (0,0)$, pois são funções racionais. Em $(x,y) = (0,0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2x \cdot \frac{x^4}{(x^2+y^2)^2} + 2x\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 2x = 0,$ e as funções $\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^2}$ e $\dfrac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$ são limitadas por 1 .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^4y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -2y \cdot \frac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

onde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (-2y) = 0$ e a função $\dfrac{x^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ é limitada por 1.

Assim, pelo teorema do anulamento, temos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$ e pelo teorema 2, concluímos que f é diferenciável (em $\mathbb{R}^2$).

7. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de $f(x,y) = 2x^2y$ no ponto $(1,1,f(1,1))$.

Solução:

Equação do plano tangente:

$$z - f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) \to \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

onde

$$\begin{cases} f(1,1) = 2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy \quad \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \end{cases}$$

Logo, a equação do plano tangente é:

$$z - 2 = 4(x-1) + 2(y-1) \text{ ou } 4x + 2y - z = 4$$

Equação da reta normal:

$$(x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(4,2,-1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

8. Determine o plano que passa pelos pontos $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e que seja tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$.

Solução

Seja $(a,b) \in D_f = \mathbb{R}^2$. A equação do plano tangente ao G_f no ponto $(a,b,f(a,b)) = (a,b,ab)$ é :

$$z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

donde $z = ab + b(x-a) + a(y-b)$ ou $z = bx + ay - ab$.

Como $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ estão neste plano, então

$$\begin{cases} 2 = b + a - ab \\ 1 = -b + a - ab \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow 1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$. Substituindo $b = \frac{1}{2}$ em (1), temos $2 = \frac{1}{2} + a - \frac{a}{2}$, donde $a = 3$. Assim, a equação do plano tangente é:

$$z = \frac{1}{2}x + 3y - \frac{3}{2} \text{ on } x + 6y - 2z = 3$$

9. Seja $f(x,y) = \frac{x^4y}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0)$ e $f(x,y) = 0$, $(x,y) = (0,0)$.

   (a) Calcule $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.

   (b) f é diferenciável em $(0,0)$?

   (c) f é contínua em $(0,0)$.

Solucão

(a) Temos $f_x(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$, $f_y(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{0-0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$.

(b) Temos $\varepsilon\,(h_1 k) = f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k = \frac{h^4 k}{h^2+k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{h^4 k}{h^2+k^2}\cdot$.

Donde,

$$\frac{\varepsilon\,(h_1 k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{h^4 k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^4 k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = h^2 \cdot \frac{h^2}{h^2+k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

onde,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} = 0, \left|\frac{h^2}{h^2+k^2}\right| = \frac{h^2}{h^2+k^2} \leqslant \frac{h^2+k^2}{h^2+k^2} = 1, \left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{|k|^2}{h^2+k^2}} = \sqrt{\frac{k^2}{h^2+k^2}} \leqslant \sqrt{\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}} = 1.$$

Logo, pelo teorema do anulamento, segue que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h_1 k)\|} = 0$$

portanto, f é diferenciável em $(0,0)$.

(c) Se f é diferenciável em $(0,0)$, então f contínua em $(0,0)$.

10. Considere a superfície S de equação $z = 2x^2 + 2y^2$.

(a) Determine o ponto $P_0 \in S$, tal que o plano tangente aS em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$.

(b) Escreva a equação do plano tangente referido no item (a).

Solução

(a) a equação do plano tangente aS em $P_0 = (a, b, z(a,b)) = (a, b, 2a^2 + 2b^2)$ é:

$$z = z(a,b) + z_x(a,b)(x-a) + z_y(a,b)(y-b)$$

onde,

$$z_x(a,b) = 4x|_{(a,b)} = 4a \quad \text{e} \quad z_y(a,b) = 4y|_{(a,b)} = 4b$$

Temos então,

$$z = 2a^2 + 2b^2 + 4ax - 4a^2 + 4by - 4b^2$$

ou seja,

$$4ax + 4by - z = 2a^2 + 2b^2$$

Daí, concluímos que $(4a, 4b, -1)$ é um vetor ortogonal ao plano tangente a S em P_0. Como queremos que plano tangente a S em P_0 seja ortogonal ao vetor $V = \left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$, então

$$(4a, 4b, -1)//\left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

ou seja, $(4a, 4b, -1) = \lambda\left(0, 1, -\frac{1}{6}\right)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.
Logo, $4a = 0, 4b = \lambda, -1 = \frac{-\lambda}{6}$. Donde, $a = 0, \lambda = 6$ e $b = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.
Então, o ponto P_0 é dado por $P_0 = \left(0, \frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

(b) A equação do plano tangente é:

$$6y - z = \frac{9}{2} \quad \text{ou} \quad 12y - 2z - 9 = 0$$

Exercícios

1. Seja $f(x, y) = \dfrac{3x^5}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$.
   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.
   (b) f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?
2. Verifique se a função $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cos y$ é diferenciável em $(0, 0)$.
3. Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função $f(x, y) = xe^{x^2 - y^2}$ no ponto $(2, 2, f(2, 2))$.
4. Encontre o ponto onde o plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = x^2y^2 + 2(x - y)$ é horizontal.

Respostas

1. (a) $0; 0$
   (b) É diferenciável em $(0, 0)$
2. f não é diferenciável em $(0, 0)$, pois não existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$
3. $z = 9x - 8y; (x, y, z) = (2, 2, 2) + \lambda(9, -8, -1), \lambda \in \mathbb{R}$
4. $(-1, 1, -3)$