

Funções escalares de várias variáveis

Derivadas Parciais

Objetivos:

- definição e interpretação geométrica das derivadas parciais;
- cálculo das derivadas parciais;
- derivada parcial como taxa de variação;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $(a, b) \in D$.

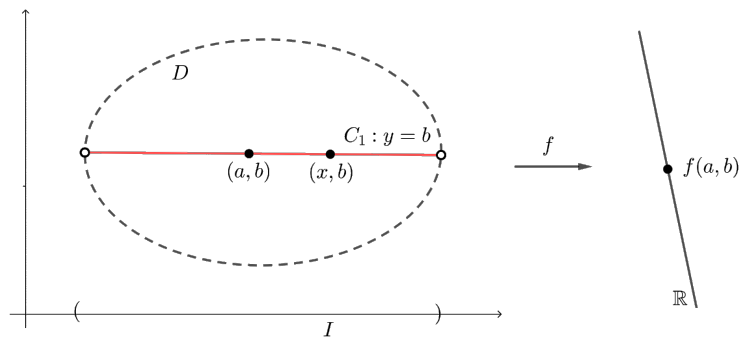


Figure 1: Segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$

Fixando $y = b$, obtemos o segmento interseção $C_1 : y = b, x \in I$. A função $g(x) = f(x, b), x \in I$, é bem definida em C_1 . A derivada de g em $x = a$ seria dada por

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \end{aligned}$$

se existir o limite. Essa derivada é dita derivada parcial de f em relação a x no ponto (a, b) é indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f_x(a, b) \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \text{ ou } z_x(a, b).$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

Analogamente, definimos a derivada parcial de f em relação a y , no ponto (a, b) , por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = z_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$: Geometricamente, estamos fazendo a restrição de f sobre a reta $y = b$ e olhando para a curva correspondente $f(C_1)$, sobre o gráfico de f . Dessa maneira, o número $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \tan \alpha$.

Interpretação geométrica de $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$: Geometricamente, temos que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(C_2)$ obtida como a interseção do G_f com o plano $x = a$, no ponto $(a, b, f(a, b))$. Isto é, $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \tan \beta$.

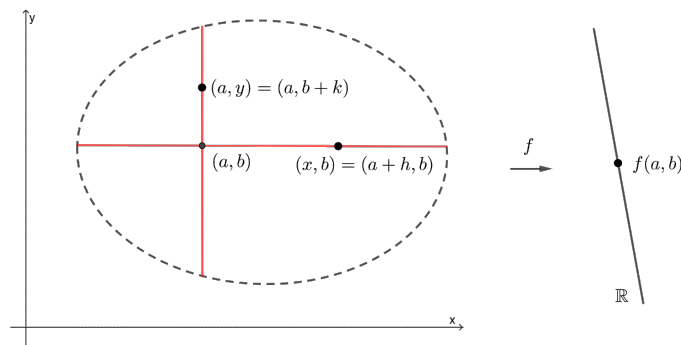


Figure 2: Segmento interseção $C_2 : x = a, y \in J$ e $C_1 : y = b, x \in I$

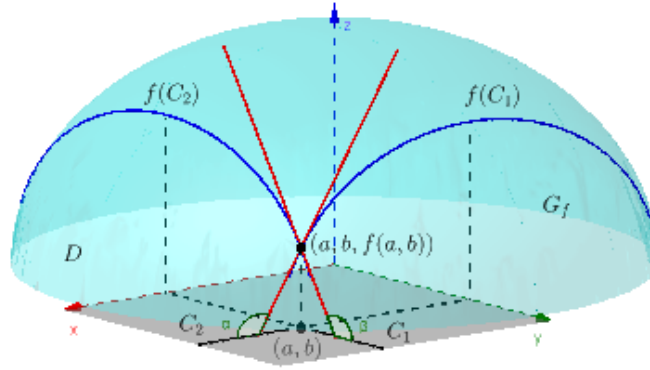


Figure 3: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Derivadas parciais como taxas de variação: Como $f_x(a, b)$ é a inclinação da reta tangente à curva $f(C_1)$ no ponto $(a, b, f(a, b))$, também pode ser interpretada como a taxa de variação da função f em relação a x no ponto (a, b) (ao longo da curva C_1).

Com efeito, $f_x(a, b)$ é a taxa de variação instantânea da função $g(x) = f(x, b)$, $x \in I$, no ponto $x = a$. Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_x(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1} + \frac{f(a + h_2, b) - f(a, b)}{h_2} \right],$$

com $a + h_1 < a < a + h_2$.

Analogamente, $f_y(a, b)$ é a taxa de variação da função f em relação a y no ponto (a, b) (ao longo da curva C_2). Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_y(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{f(a, b + k_1) - f(a, b)}{k_1} + \frac{f(a, b + k_2) - f(a, b)}{k_2} \right],$$

com $b + k_1 < b < b + k_2$.

Regra prática para calcular as parciais: Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, faz-se y constante e deriva-se f em relação a x e para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, faz-se x constante e deriva-se f em relação a y .

Por exemplo, se $f(x, y) = x^3 y^2$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx^3$.

Derivadas parciais de funções de três variáveis: Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto, e $(a, b, c) \in D$. Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y, c) - f(a, b, c)}{\Delta y}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + \Delta z) - f(a, b, c)}{\Delta z}, \text{ se o limite existir.}$$

Na hora de calcular $\frac{\partial f}{\partial z}$, faz-se x e y constantes e deriva-se f em relação a z . Analogamente para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = x$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pela definição.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x - x}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. Seja $f(x, y) = y$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pela definição.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{y + k - y}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1$$

3. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão está relacionada com a temperatura e o volume de um gás. Suponha que o volume V seja medido em litros (l) e a temperatura T seja medida em kelvins (K). Use a tabela a seguir para:

		Temperatura K°			
Volume L		10,00	30,00	50,00	70,00
	20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
	40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
	60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
	80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

Figure 4: Tabela lei dos gases ideais

- (a) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 50 K e o volume permanecer constante em 60 l;
- (b) obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação ao volume se a temperatura permanecer constante a 30 K e o volume for 40 l;

- (c) A pressão aumenta ou diminui em relação à temperatura? E em relação ao volume?

Solução

- (a) Dado que $\frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0 + h, V_0) - P(T_0, V_0)}{h}$, a taxa de variação pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{P(50 + 20, 60) - P(50, 60)}{20} + \frac{P(50 - 20, 60) - P(50, 60)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{420 - 16.67}{20} + \frac{10 - 16.67}{-20} \right) = \frac{1}{2}(20.17 + 0.33) = 10.25 \end{aligned}$$

- (b) Dado que $\frac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0, V_0 + h) - P(T_0, V_0)}{h}$, a taxa de variação considerada pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{P(30, 40 + 20) - P(30, 40)}{20} + \frac{P(30, 40 - 20) - P(30, 40)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 - 15}{20} + \frac{20 - 15}{-20} \right) = \frac{1}{2}(-0.25 + (-0.25)) = -0.50 \end{aligned}$$

- (c) Como $\frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) > 0$, a pressão aumenta em relação à temperatura quando o volume é constante $V = 60$ e a temperatura pega o valor de 50K. Já em relação ao volume quando a temperatura é constante a $T = 30$ e o volume pega o valor de 40L a pressão diminui, pois $\frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) < 0$.

Observamos que, segundo os dados da tabela, quando afixamos o volume e percorremos os valores da temperatura a pressão sempre aumenta. Porém, se fixamos a temperatura e percorremos os valores do volume, a pressão diminui.

4. Seja $f(x, y) = 2xy - 3y$. Calcule

- (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$
- (b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$
- (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$
- (d) $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$.

Solução

(a) Mantendo y constante e derivando em relação a x , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 2y - 0 = 2y$$

(b) Mantendo x constante e derivando em relação a y , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3y) = 2x - 3$$

(c) Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$.

(d) Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 3$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -5$.

5. Calcule as derivadas parciais de $z = x^2 \ln(x^2 + y^2)$.

Solução

Mantendo y constante e usando regras de derivação para as funções de uma variável, como $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2) \ln(x^2 + y^2) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2) = 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \\ &= 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Analogamente, mantendo x constante, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) = x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

6. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = 2x^2 + 3y^2$ e o plano $x = 1$ no ponto $(1, 2, 14)$.

Solução Observe que a função $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ é diferenciável no ponto $(1, 2)$ por ser polinomial e que o ponto $(1, 2, 14)$ pertence à interseção de G_f e o plano $x = 1$. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 6y|_{(1,2)} = 6 \cdot 2 = 12$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = 14 + 12(y - 2) \\ x = 1 \end{cases}$$

7. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e o plano $y = 0$ no ponto $(2, 0, -1)$.

Solução Como a terceira coordenada do ponto $(2, 0, -1)$ é negativa, consideraremos a função $f(x, y) = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$, que é diferenciável em $(2, 0)$ por ser polinomial. O ponto $(1, 0, -1)$ pertence à interseção de G_f e o plano $y = 0$, portanto, o coeficiente angular da reta tangente será $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -2x|_{(2,0)} = -2 \cdot 2 = -4$. Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = -1 - 4(x - 2) \\ y = 0 \end{cases}$$

8. Seja $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$, se $(x, y) = (0, 0)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Solução

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$, aplicamos regras de derivação. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - y^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + 3y^4 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em $(x, y) = (0, 0)$, usamos a definição. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Seja $f(x, y, z) = \int_0^{x+y^2+z^4} g(t)dt$, onde $g(3) = 4$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$.

Solução

Aqui, usaremos a seguinte aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo: " Se

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)dt, \text{ então } F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)''.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 1 = g(x + y^2 + z^4)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = g(1 + 1 + 1) = g(3) = 4$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 2y,$$

$$\text{donde } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 2 = 8.$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial z}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 4z^3,$$

$$\text{donde } \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 4 = 16$$

10. Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e seja $f(x, y) = (x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Mostre que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$.

Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y},$$

$$\text{donde } x \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

donde, $y \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^2 \phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right)$

Somando as duas expressões das parciais, temos

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2f$$

como queríamos mostrar.

11. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e seja g dada por $g(x, y, z) = f(r)$, onde $r = \|(x, y, z)\|$. Verifique

$$\frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = r f'(r).$$

Solução

Temos

$$g(x, y, z) = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{z}{r}$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \frac{x^2}{r} + f'(r) \frac{y^2}{r} + f'(r) \frac{z^2}{r}$$

$$= f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = f'(r) \frac{r^2}{r} = r f'(r)$$

Como queríamos verificar.

Exercícios

1. Determine as derivadas parciais da função:

(a) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

(b) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(c) $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt$

(d) $z = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

(e) $\omega = x e^{x-y-z}$

2. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Velocidade do vento (km/h)

- (a) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação à velocidade do vento quando dita velocidade é de 30 km/h e sabendo que o vento se mantém na mesma intensidade por um tempo de 20 horas? Justifique a resposta.
- (b) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação ao tempo no qual o vento se mantém na mesma intensidade se dito tempo é de 20 horas e sabendo que a velocidade do vento permanece constante a 30 km/h ? Justifique a resposta.
- (c) nas condições do item (a) e (b), a altura das ondas aumenta ou diminui em relação ao tempo? E em relação à velocidade do vento? Justifique a resposta.
3. Use as derivadas parciais para encontrar, se possível, a equação da reta tangente à curva interseção do plano $x = \pi$ com a superfície $z = \frac{2y}{y + \cos x}$ nos pontos $P(\pi, 2, 4)$, $Q(2\pi, 1, 1)$ e $R(\pi, 0, 1)$.
4. Seja $z = f(x^2 - y^2)$, onde $f(u)$ é uma função diferenciável de uma variável. Verifique que
- $$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
5. Seja $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \phi(y)$. Determine uma função ϕ , de modo que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}$.
6. Seja $f(x, y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$. Calcule $f(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.

7. Seja $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0), f(x, y) = 0, (x, y) = (0, 0)$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$.

Respostas

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(x^3+y^2+3)^2}}$
 (b) $f_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, f_y = \frac{x}{x^2+y^2}$
 (c) $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}, \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$
 (d) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$
 (e) $\frac{\partial \omega}{\partial x} = (1+x)e^{x-y-z}, \frac{\partial \omega}{\partial y} = -xe^{x-y-z}, \frac{\partial \omega}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$
2. (a) $0,095 \text{ km/h}$
 (b) 0 km/h^2
 (c) Aumenta em relação ao tempo e permanece constante em relação a velocidade do vento.
3. A reta tangente no ponto P é $\begin{cases} z = 8 - 2y \\ x = \pi \end{cases}$ e não existe nos pontos Q e R.
4. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.
5. $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$
6. $\frac{12}{5}$
7. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$