

Funções escalares de várias variáveis

Curvas de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de curvas de nível e sua relação com o domínio, imagem e gráfico da função;
- Calcular e identificar a curva de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar curvas de nível; Mapa de contorno.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \mapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$
 Seja $k \in \text{Im}f$, o conjunto $C_k = \{(x, y) \in D; f(x, y) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^2$ é dito curva de nível de f no nível k .

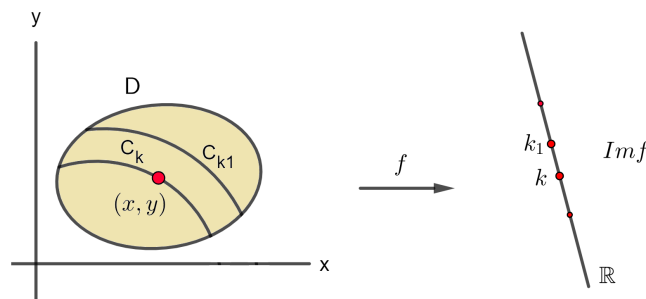


Figure 1: Relação da curva de nível com o domínio e a imagem da função

Observe que a curva $f(C_k)$ (imagem da curva de nível C_k pela função $f(x, y)$) é a curva interseção do gráfico da função f com o plano $z = k$.

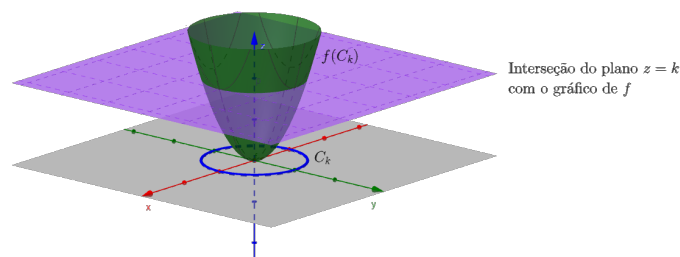


Figure 2: Relação da curva de nível com o gráfico da função

Observações:

- (I) $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$, $f(C_k) \subset G_f \subset \mathbb{R}^3$
- (II) Se $f(x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) , então C_k é uma isoterma (pontos de mesma temperatura)
- (III) Se f é energia potencial, então C_k é uma curva equipotencial.

Exemplos

1. Seja $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$. Determine:

- (a) D_f
- (b) $Im f$
- (c) G_f
- (d) curvas de nível C_k .

Solução

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b) $Im f =] - \infty, 1]$
- (c) $G_f : z = 1 - x^2 - y^2$. Vamos utilizar traços para esboçar G_f . Impondo $x = 0$, obtemos $z = 1 - y^2$, de modo que a interseção do G_f com plano yz ($x = 0$) é uma parábola. Impondo $z = 0$, obtemos o traço $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a uma circunferência no plano xy . Assim, temos a forma da superfície que é chamada de parabolóide.

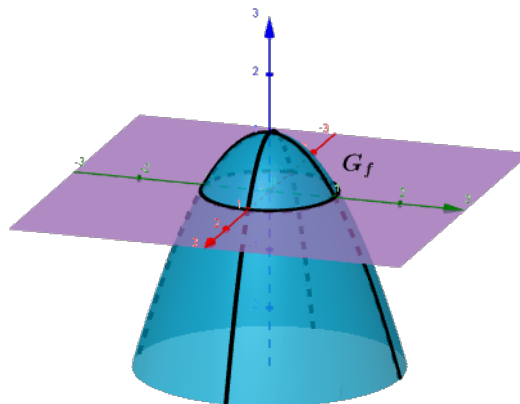


Figure 3: Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

- (d) Seja $k \in Im f =] - \infty, 1]$. Então, a curva de nível C_k é dada por

$$C_k : 1 - x^2 - y^2 = k \implies C_k : x^2 + y^2 = 1 - k$$

Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0 \implies x = 0, y = 0$. Logo, $C_1 = \{(0, 0)\}$.

Para $k < 1$, donde $1 - k > 0$, temos $C_k : x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - k})^2$. Assim, as curvas de nível ($k < 1$) são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1 - k}$.

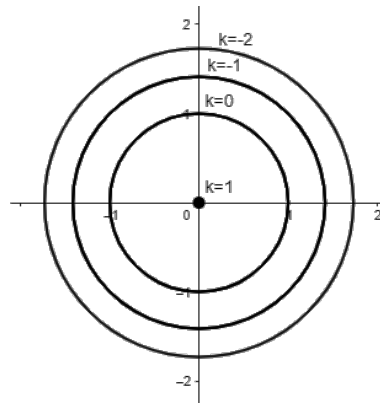


Figure 4: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$

2. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Determine:

- (a) D_f
- (b) Imf
- (c) G_f
- (d) curvas de nível C_k .

Solução

- (a) $D_f : 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow D_f : x^2 + y^2 \leq 1$ (disco de centro em $(0, 0)$ e raio 1)
- (b) $Imf = [0, 1]$
- (c) $G_f : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z^2 = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0 \Rightarrow G_f : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ (hemisfério superior de centro em $(0, 0, 0)$ e raio 1)

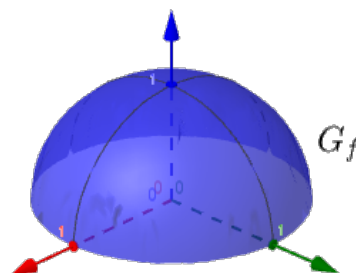


Figure 5: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(d) Seja $k \in Imf = [0, 1]$. A curva de nível correspondente a $z = k$ é

$$C_k : f(x, y) = k \quad \text{ou} \quad \sqrt{1 - x^2 - y^2} = k \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = 1 - k^2$$

Para $k = 0$, temos $C_0 : x^2 + y^2 = 1$.

Para $k = 1$, temos $C_1 : x^2 + y^2 = 0$, então $C_1 = \{(0, 0)\}$.

Para k , tal que $0 < k < 1$, temos circunferência concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{1 - k^2}$.

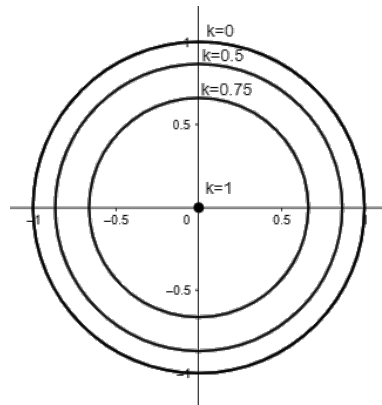


Figure 6: Curvas de nível da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Observação: $f(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \Rightarrow G_f : z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$. Portanto, $G_f : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \leq 0$ (hemisfério inferior de centro na origem e raio 1).

3. Seja $z = f(x, y) = 1 - x^2$. Determine:

- (a) D_f
- (b) Imf
- (c) G_f
- (d) curvas de nível C_k .

Solução

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b) $Imf =] - \infty, 1]$
- (c) $G_f : z = 1 - x^2$. Observe que a equação do gráfico, $z = 1 - x^2$, não envolve a variável y . Portanto, qualquer plano vertical $y = k$ (paralelo ao plano xz) intercepta o G_f segundo uma parábola de equação $z = 1 - x^2$. Assim, G_f é obtido tomando a parábola $z = 1 - x^2$ no plano xz e movendo-a na direção do eixo y . A superfície é dita cilindro parabólico.

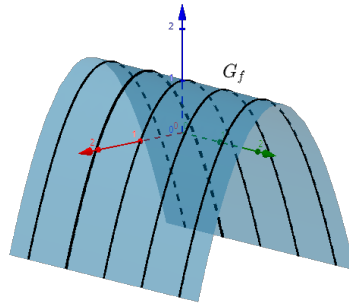


Figure 7: Gráfico da função $f(x, y) = 1 - x^2$

(d) Seja $k \in \text{Im}f =] - \infty, 1]$. A curva de nível correspondente é

$$C_k : 1 - x^2 = k \implies C_k : x^2 = 1 - k > 0 \implies C_k : x = \pm\sqrt{1 - k}$$

Se $k = 1$, temos $C_1 : x = 0$ (eixo y);

Se $k < 1$, temos $C_k =$ reta $x = \sqrt{1 - k}$ ou reta $x = -\sqrt{1 - k}$

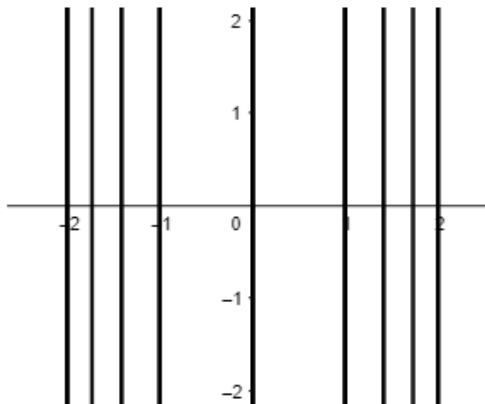


Figure 8: Curvas de nível da função $f(x, y) = 1 - x^2$

Observação: $f(x, y) = x^2, g(x, y) = a^2 - y^2 \implies G_f$ e G_g são cilindros parabólicos.

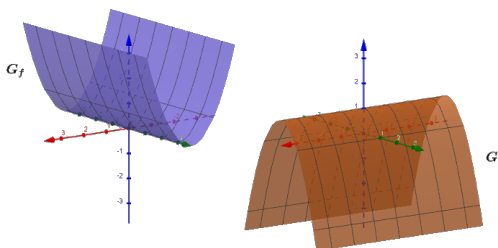


Figure 9: Cilindros parabólicos

4. Seja $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine:

- (a) D_f
- (b) $Im f$
- (c) G_f
- (d) curvas de nível C_k .

Solução

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b) $Im f = [0, +\infty[$
- (c) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Fazendo $x = 0$, temos $z = |y|$, que é a curva interseção do G_f com plano yz . Fazendo $z = c$, $c > 0$, temos $x^2 + y^2 = c^2$, de modo que a interseção do G_f com o plano horizontal $z = c$ é uma circunferência. Assim, temos que G_f é a parte superior do cone.

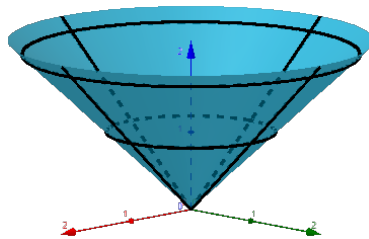


Figure 10: Gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

- (d) Seja $k \in Im f = [0, +\infty[$. Então, a curva de nível correspondente é dada por $C_k : \sqrt{x^2 + y^2} = k$ ou $x^2 + y^2 = k^2$.
Se $k = 0$, temos $C_0 = \{(0, 0)\}$.
Se $k > 0$ temos circunferências concêntricas na origem e raio k .

Observações:

- (i) Os gráficos de $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = a - \sqrt{x^2 + y^2}$, $f(x, y) = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$, $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$ são partes de cones circulares.

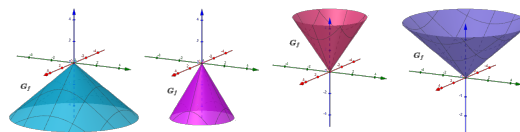


Figure 11: Cones circulares

- (ii) O gráfico de $f(x, y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$, $a > 0, b > 0, a \neq b \implies G_f$ é a parte superior do cone elíptico.

5. Seja, $z = f(x, y) = y^2 - x^2$. Determine:

- (a) D_f
- (b) Imf
- (c) G_f
- (d) curvas de nível C_k .

Solução

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$
- (b) $Imf = \mathbb{R}^2$
- (c) $G_f : z = y^2 - x^2$. Fazendo $x = 0$, o traço no plano yz é a parábola $z = y^2$ com concavidade para cima. Os traços verticais $y = k$ são parábolas $z = k^2 - x^2$ com concavidade para baixo. Os traços horizontais $z = k, k > 0$, são hipérboles $y^2 - x^2 = k$ e os tracos horizontais $z = -k, k > 0$, são hipérboles $x^2 - y^2 = k_0$. Assim, temos o esboço do G_f , dito parabolóide hiperbólico (que tem a forma de uma sela).

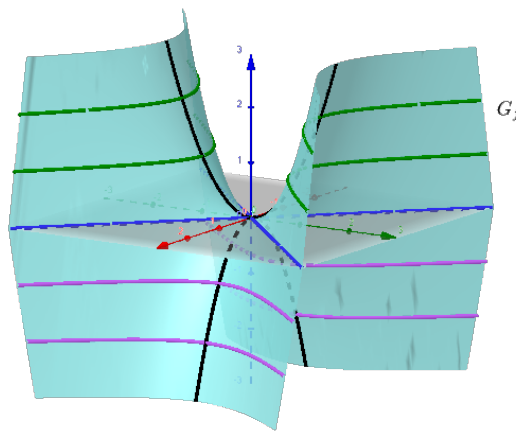


Figure 12: Gráfico da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

- (d) Seja $k \in Imf = \mathbb{R}$. A curva de nível correspondente é dada por

$$C_k : y^2 - x^2 = k$$

Se $k > 0$, temos hipérboles com vértices $(0, \pm\sqrt{k})$.

Se $k = 0$, temos duas retas pela origem, $y = x$ e $y = -x$.

Se $k < 0$, temos hipérboles com vértices $(\pm\sqrt{-k}, 0)$.

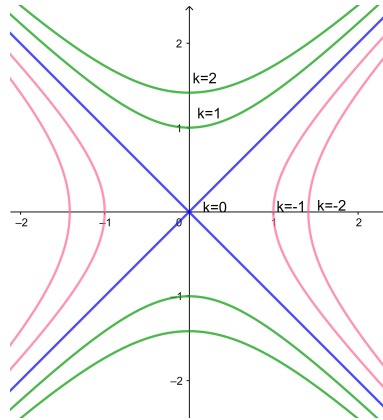


Figure 13: Curvas de nível da função $f(x, y) = y^2 - x^2$

6. Seja, $z = f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Determine:

- A curva de nível que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$.
- A reta tangente à curva de nível do item (a) no ponto $(1, \sqrt{2})$. Identifique o vetor velocidade.
- Esboce em um único gráfico a curva, a reta tangente e a direção do vetor velocidade.

Solução

- Como $f(0, \sqrt{3}) = -1$, então a curva de nível é $-\sqrt{4 - x^2 - y^2} = -1$, isto é, $C_{-1} : x^2 + y^2 = 3$.
- Observe que $f(1, \sqrt{2}) = -1$. portanto $(1, \sqrt{2}) \in C_{-1}$ e faz sentido calcular a reta tangente a C_{-1} nesse ponto. Caso contrário não existiria.

Uma parametrização de C_{-1} é $\gamma : \begin{cases} x(t) = \sqrt{3} \cos t \\ y(t) = \sqrt{3} \sin t \end{cases}, \forall t \in [0, 2\pi]$.

Portanto, a equação paramétrica da reta seria $\gamma(s_0) + \gamma'(s_0)t, \forall t \in \mathbb{R}$, onde s_0 é tal que $\gamma(s_0) = (1, \sqrt{2})$.

Calculando s_0 $\begin{cases} \sqrt{3} \cos s_0 = 1 \\ \sqrt{3} \sin s_0 = \sqrt{2} \end{cases}$ e substituindo na derivada da parametrização,

$\gamma' : \begin{cases} x'(t) = -\sqrt{3} \sin t \\ y'(t) = \sqrt{3} \cos t \end{cases}$, temos que $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Daí, a equação paramétrica da reta tangente é: $(1, \sqrt{2}) + (-\sqrt{2}, 1)t, \forall t \in \mathbb{R}$.

O vetor velocidade é $\gamma'(s_0) = (-\sqrt{2}, 1)$. A direção dele é $\vec{v} = \frac{\gamma'(s_0)}{\|\gamma'(s_0)\|} = (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

(c)

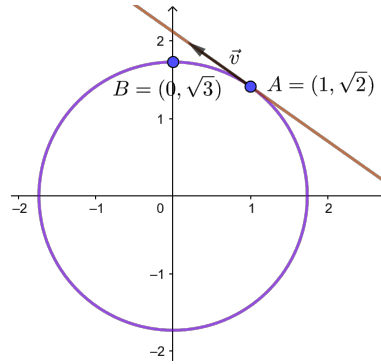


Figure 14: Curvas de nível da função $f(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ que passa pelo ponto $(0, \sqrt{3})$ (em roxo)

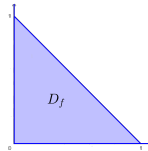
Exercícios

- Seja $z = f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}$. Determine:
 - D_f
 - $Im f$
 - G_f
 - curvas de nível C_k .
- Seja $z = f(x, y) = 1 - x^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x + y \leq 1$. Determine:
 - D_f
 - $Im f$
 - G_f
 - curvas de nível C_k .
- Seja a função $z = f(x, y) = \frac{y}{x-2}$. Determine:
 - D_f
 - $Im f$
 - curvas de nível C_k .
- Seja a função $z = f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$. Determine:
 - D_f
 - $Im f$
 - curvas de nível C_k .
- Suponha que $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2$ (em $^\circ\text{C}$) represente uma distribuição de temperatura no plano xy . Desenhe a isoterma correspondente à temperatura de 36°C .

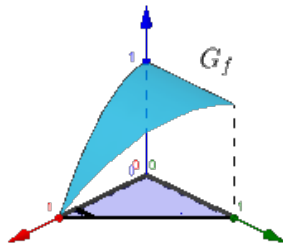
6. Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy , de modo que a temperatura (em $^{\circ}$) no ponto (x, y) é inversamente proporcional a distância da origem.
- Descreva as isotermas.
 - Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é 40°C , ache a equação da isoterma para uma temperatura de 20°C .
 - curvas de nível C_k .
7. Seja, $z = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y}$.
- Esboce o mapa de contorno de f .
 - Determine uma equação da reta tangente à curva de nível que passa pelo ponto $(0, 6)$ no ponto $(-3, 3)$. Identifique o vetor velocidade.
 - Identifique a curva de nível do item (b) no mapa de contorno do item (a). Esboce a reta tangente e a direção do vetor velocidade no mapa de contorno.

Respostas

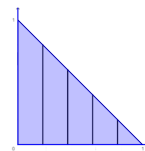
- $D_f = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$
 - $Imf = [0, 1]$
 - $G_f : x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$, semi-esfera.
- $D_f :$
 - $Imf = [0, 1]$



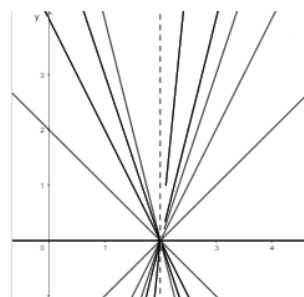
(c) $G_f :$



(d) $C_k :$



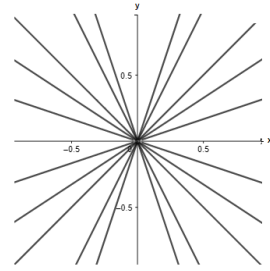
- $D_f = \{(x, y); x \neq 2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{reta } x = 2\}$
 - $Imf = \mathbb{R}$
 - $C_k : y = k(x - 2), x \neq 2$.



4. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

(b) $Imf = [0, 1]$

(c) $C_0 : x = 0, y \neq 0; \quad C_1 : y = 0, x \neq 0; \quad C_k : y = \pm \sqrt{\frac{1-k}{k}}x, \quad x \neq 0, \quad 0 < k < 1.$



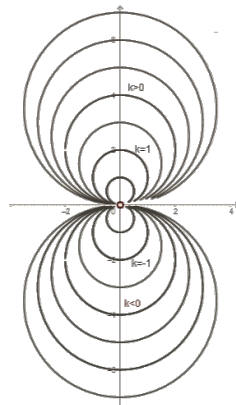
5. $c_{36} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

6. (a) Circunferências com centro em $(0,0)$

(b) $x^2 + y^2 = 100$

7. (a)

(c)



(b) Reta tangente a C_3 em $(-3,3)$ é $(-3,3) + (0,-3)t, \forall t \in \mathbb{R}$. A direção do vetor velocidade é $\vec{v} = (0, -1)$

