



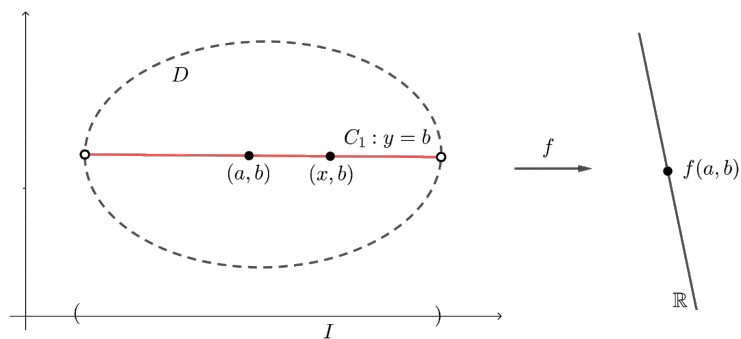
# Funções escalares de várias variáveis

## Derivadas Parciais

### Objetivos:

- definição e interpretação geométrica das derivadas parciais;
- cálculo das derivadas parciais;
- derivada parcial como taxa de variação;

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função definida no conjunto aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$ .



**Figure 1: Segmento interseção  $C_1 : y = b, x \in I$**

Fixando  $y = b$ , obtemos o segmento interseção  $C_1 : y = b, x \in I$ . A função  $g(x) = f(x, b), x \in I$ , é bem definida em  $C_1$ . A derivada de  $g$  em  $x = a$  seria dada por

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} \end{aligned}$$

se existir o limite. Essa derivada é dita derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$  é indicada por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \text{ ou } f_x(a, b) \text{ ou } \frac{\partial z}{\partial x}(a, b) \text{ ou } z_x(a, b).$$

Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a},$$

se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

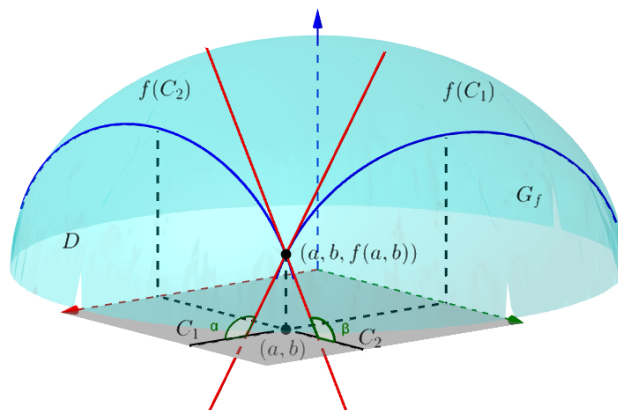
Analogamente, definimos a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$ , no ponto  $(a, b)$ , por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = f_y(a, b) = \frac{\partial z}{\partial y}(a, b) = z_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b},$$

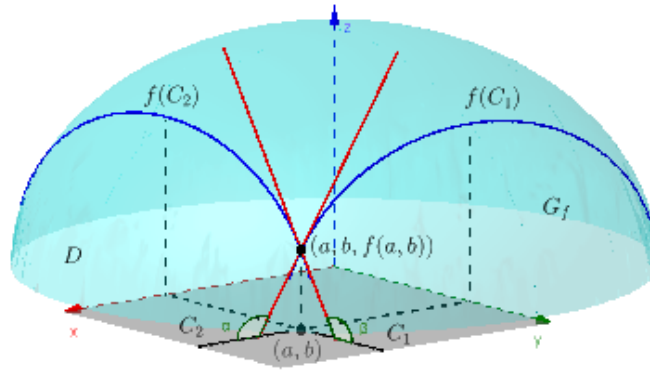
se o limite existir. Caso contrário diremos que a parcial não existe.

**Interpretação geométrica de  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ :** Geometricamente, estamos fazendo a restrição de  $f$  sobre a reta  $y = b$  e olhando para a curva correspondente  $f(C_1)$ , sobre o gráfico de  $f$ . Dessa maneira, o número  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva  $f(C_1)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Isto é  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \tan \alpha$ .

**Interpretação geométrica de  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ :** Geometricamente, temos que  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$  é o coeficiente angular da reta tangente à curva  $f(C_2)$  obtida como a interseção do  $G_f$  com o plano  $x = a$ , no ponto  $(a, b, f(a, b))$ . Isto é,  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \tan \beta$ .



**Figure 2: Segmento interseção  $C_2 : x = a, y \in J$  e  $C_1 : y = b, x \in I$**



**Figure 3: Interpretação geométrica das derivadas parciais**

**Derivadas parciais como taxas de variação:** Como  $f_x(a, b)$  é a inclinação da reta tangente à curva  $f(C_1)$  no ponto  $(a, b, f(a, b))$ , também pode ser interpretada como a taxa de variação da função  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$  (ao longo da curva  $C_1$ ).

Com efeito,  $f_x(a, b)$  é a taxa de variação instantânea da função  $g(x) = f(x, b)$ ,  $x \in I$ , no ponto  $x = a$ . Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_x(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{f(a + h_1, b) - f(a, b)}{h_1} + \frac{f(a + h_2, b) - f(a, b)}{h_2} \right],$$

com  $a + h_1 < a < a + h_2$ .

Analogamente,  $f_y(a, b)$  é a taxa de variação da função  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(a, b)$  (ao longo da curva  $C_2$ ). Como tal, ela pode ser aproximada por taxas de variação médias:

$$f_y(a, b) \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{f(a, b + k_1) - f(a, b)}{k_1} + \frac{f(a, b + k_2) - f(a, b)}{k_2} \right],$$

com  $b + k_1 < b < b + k_2$ .

**Regra prática para calcular as parciais:** Para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ , faz-se  $y$  constante e deriva-se  $f$  em relação a  $x$  e para calcular  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ , faz-se  $x$  constante e deriva-se  $f$  em relação a  $y$ .

Por exemplo, se  $f(x, y) = x^3 y^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2yx^3$ .

**Derivadas parciais de funções de três variáveis:** Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, e  $(a, b, c) \in D$ . Definimos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b, c) - f(a, b, c)}{\Delta x}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y, c) - f(a, b, c)}{\Delta y}, \text{ se o limite existir.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(a, b, c + \Delta z) - f(a, b, c)}{\Delta z}, \text{ se o limite existir.}$$

Na hora de calcular  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , faz-se  $x$  e  $y$  constantes e deriva-se  $f$  em relação a  $z$ . Analogamente para calcular  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Exemplos

1. Seja  $f(x, y) = x$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  pela definição.

**Solução**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x - x}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0$$

2. Seja  $f(x, y) = y$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  pela definição.

**Solução**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y - y}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{y + k - y}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1$$

3. Seja  $f(x, y) = 2xy - 3y$ . Calcule

(a)  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

(b)  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

(c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

(d)  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1)$ .

**Solução**

(a) Mantendo  $y$  constante e derivando em relação a  $x$ , temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 2y - 0 = 2y$$

(b) Mantendo  $x$  constante e derivando em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(3y) = 2x - 3$$

- (c) Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2$ .
- (d) Como  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x - 3$ , para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , então  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 1) = -5$ .

4. Calcule as derivadas parciais de  $z = x^2 \ln(x^2 + y^2)$ .

### Solução

Mantendo  $y$  constante e usando regras de derivação para as funções de uma variável, como  $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (x^2) \ln(x^2 + y^2) + x^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2 + y^2) = 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \\ &= 2x \ln(x^2 + y^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = 2x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Analogamente, mantendo  $x$  constante, temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2 + y^2) = x^2 \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

5. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção do parabolóide  $z = 2x^2 + 3y^2$  e o plano  $x = 1$  no ponto  $(1, 2, 14)$ .

**Solução** Observe que o ponto  $(1, 2, 14)$  pertence à interseção de  $G_f$  e o plano  $x = 1$ . Portanto, o coeficiente angular da reta tangente será  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 6y|_{(1,2)} = 6 \cdot 2 = 12$ . Logo, a equação da reta tangente é:

$$\begin{cases} z = 14 + 12(y - 2) \\ x = 1 \end{cases}$$

6. Calcule a equação da reta tangente à curva de interseção da superfície  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$  e o plano  $y = 0$  no ponto  $(2, 0, -1)$ .

**Solução** Como a terceira coordenada do ponto  $(2, 0, -1)$  é negativa, consideraremos a função  $f(x, y) = -\sqrt{5 - x^2 - y^2}$ . O ponto  $(2, 0, -1)$  pertence à interseção de  $G_f$  e o plano  $y = 0$ , portanto, o coeficiente angular da reta tangente será

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = -\frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2 - y^2}} \Big|_{(2,0)} = 2. \text{ Logo, a equação da reta tangente é:}$$

$$\begin{cases} z = -1 + 2(x - 2) \\ y = 0 \end{cases}$$

7. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão está relacionada com a temperatura e o volume de um gás. Suponha que o volume  $V$  seja medido em litros (l) e a temperatura  $T$  seja medida em kelvins (K). Use a tabela a seguir para:

		Temperatura K°			
Volume L		10,00	30,00	50,00	70,00
	20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
	40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
	60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
	80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

**Figure 4: Tabela lei dos gases ideais**

- obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 50 K e o volume permanecer constante em 60 l;
- obter uma estimativa da taxa de variação instantânea da pressão em relação ao volume se a temperatura permanecer constante a 30 K e o volume for 40 l;
- A pressão aumenta ou diminui em relação à temperatura? E em relação ao volume?

### Solução

- (a) Dado que  $\frac{\partial P}{\partial T}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0 + h, V_0) - P(T_0, V_0)}{h}$ , a taxa de variação pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo,  $h_1 = 20$  e  $h_2 = -20$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{P(50 + 20, 60) - P(50, 60)}{20} + \frac{P(50 - 20, 60) - P(50, 60)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{23.33 - 16.67}{20} + \frac{10 - 16.67}{-20} \right) = \frac{1}{2}(0.33 + 0.33) = 0.33 \end{aligned}$$

- (b) Dado que  $\frac{\partial P}{\partial V}(T_0, V_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(T_0, V_0 + h) - P(T_0, V_0)}{h}$ , a taxa de variação considerada pode ser estimada considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo,  $h_1 = 20$  e  $h_2 = -20$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) &\approx \frac{1}{2} \left( \frac{P(30, 40 + 20) - P(30, 40)}{20} + \frac{P(30, 40 - 20) - P(30, 40)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{10 - 15}{20} + \frac{20 - 15}{-20} \right) = \frac{1}{2}(-0.25 + (-0.25)) = -0.50 \end{aligned}$$

- (c) Como  $\frac{\partial P}{\partial T}(50, 60) > 0$ , a pressão aumenta em relação à temperatura quando o volume é constante  $V = 60$  e a temperatura pega o valor de 50K. Já em relação ao volume quando a temperatura é constante a  $T = 30$  e o volume pega o valor de 40L a pressão diminui, pois  $\frac{\partial P}{\partial V}(30, 40) < 0$ .

Observamos que, segundo os dados da tabela, quando afixamos o volume e percorremos os valores da temperatura a pressão sempre aumenta. Porém, se fixamos a temperatura e percorremos os valores do volume, a pressão diminui.

8. Seja  $f(x, y) = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$ , se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$ , se  $(x, y) = (0, 0)$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ .

### Solução

Nos pontos  $(x, y) \neq (0, 0)$ , aplicamos regras de derivação. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-y^3 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3y^2(x^2 + y^2) - y^3 \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + 3y^4 - 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em  $(x, y) = (0, 0)$ , usamos a definição. Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k^3}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

9. Seja  $f(x, y, z) = \int_0^{x+y+z^4} g(t)dt$ , onde  $g(3) = 4$ . Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)$  e  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ .

**Solução**

Aqui, usaremos a seguinte aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo: " Se

$$F(x) = \int_a^{\alpha(x)} f(t)dt, \text{ então } F'(x) = f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)''.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 1 = g(x + y^2 + z^4)$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = g(1 + 1 + 1) = g(3) = 4$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial y}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 2y,$$

$$\text{donde } \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 2 = 8.$$

Temos,

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = g(x + y^2 + z^4) \frac{\partial}{\partial z}(x + y^2 + z^4) = g(x + y^2 + z^4) \cdot 4z^3,$$

$$\text{donde } \frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = g(3) \cdot 4 = 16$$

10. Seja  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e seja  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ .

Mostre que  $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2f$ .

**Solução**

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = 2x\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y},$$

$$\text{donde } x \frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right).$$

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) + (x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 2y\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y^2}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

$$\text{donde, } y \frac{\partial f}{\partial y} = 2y^2\phi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y}(x^2 + y^2) \phi'\left(\frac{x}{y}\right)$$



Somando as duas expressões das parciais, temos

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2 + y^2) \phi\left(\frac{x}{y}\right) = 2f$$

como queríamos mostrar.

11. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável e seja  $g$  dada por  $g(x, y, z) = f(r)$ , onde  $r = \|(x, y, z)\|$ . Verifique

$$\frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = r f'(r).$$

### Solução

Temos

$$g(x, y, z) = f(r), r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

.

Então,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f'(r) \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = f'(r) \cdot \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = f'(r) \frac{z}{r}$$

$$x \frac{\partial g}{\partial x} + y \frac{\partial g}{\partial y} + z \frac{\partial g}{\partial z} = f'(r) \frac{x^2}{r} + f'(r) \frac{y^2}{r} + f'(r) \frac{z^2}{r}$$

$$= f'(r) \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} = f'(r) \frac{r^2}{r} = r f'(r)$$

Como queríamos verificar.

## Exercícios

1. Determine as derivadas parciais da função:

(a)  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^2 + 3}$

(b)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

(c)  $f(x, y) = \int_{x^2}^{y^2} e^{-t^2} dt$

(d)  $z = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + y^2} \right)$

(e)  $\omega = x e^{x-y-z}$

2. A altura  $h$  de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento  $v$  e do tempo  $t$  durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função  $h = f(v, t)$  são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

$v \backslash t$	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Velocidade do vento (km/h)

- (a) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação à velocidade do vento quando dita velocidade é de  $30 \text{ km/h}$  e sabendo que o vento se mantém na mesma intensidade por um tempo de 20 horas? Justifique a resposta.
- (b) segundo a tabela, a qual taxa (estimada) varia a altura das ondas em relação ao tempo no qual o vento se mantém na mesma intensidade se dito tempo é de 20 horas e sabendo que a velocidade do vento permanece constante a  $30 \text{ km/h}$ ? Justifique a resposta.
- (c) nas condições do item (a) e (b), a altura das ondas aumenta o diminui em relação ao tempo? E em relação à velocidade do vento? Justifique a resposta.
3. Use as derivadas parciais para encontrar, se possível, a equação da reta tangente à curva interseção do plano  $x = \pi$  com a superfície  $z = \frac{2y}{y + \cos x}$  nos pontos  $P(\pi, 2, 4)$ ,  $Q(2\pi, 1, 1)$  e  $R(\pi, 0, 1)$ .
4. Seja  $z = f(x^2 - y^2)$ , onde  $f(u)$  é uma função diferenciável de uma variável. Verifique que
- $$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$
5. Seja  $f(x, y) = x^3 y^2 - 6xy + \phi(y)$ . Determine uma função  $\phi$ , de modo que
- $$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 y - 6x + \frac{y}{y^2 + 1}.$$
6. Seja  $f(x, y) = \frac{5xy^2}{x^2 + y^2}$  se  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(x, y) = 0$  se  $(x, y) = (0, 0)$ . Calcule
- $$f(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0).$$

7. Seja  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$  e  $f(0, 0) = 0$ . Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .

8. Seja  $f(x, y) = \frac{x^4}{x^2 + y^2}$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = 0$ ,  $(x, y) = (0, 0)$ . Determine  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ .

### Respostas

1. (a)  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt[3]{(x^3 + y^2 + 3)^2}}$

(b)  $f_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, f_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$

(c)  $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xe^{-x^4}, \frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{-y^4}$

(d)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}$

(e)  $\frac{\partial \omega}{\partial x} = (1 + x)e^{x-y-z}, \frac{\partial \omega}{\partial y} = -xe^{x-y-z}, \frac{\partial \omega}{\partial z} = -xe^{x-y-z}$

2. (a)  $0,095 \text{ km/h}$

(b)  $0 \text{ km/h}^2$

(c) Aumenta em relação ao tempo e permanece constante em relação a velocidade do vento.

3. A reta tangente no ponto P é  $\begin{cases} z = 8 - 2y \\ x = \pi \end{cases}$  e não existe nos pontos Q e R.

4.  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$  e  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$ .

5.  $\phi(y) = \frac{1}{2} \ln(1 + y^2)$

6.  $\frac{12}{5}$

7.  $0; -1$

8.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^5 + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{-2x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

