

Exercícios resolvidos

Exercícios de Revisão

1. (Ex. 6 - Aula 3). Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy , de modo que a temperatura (em $^{\circ}\text{C}$) no ponto (x, y) é inversamente proporcional à distância da origem.

- (a) Descreva as isotermas (conjunto de pontos com mesma temperatura).
 (b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é 40°C , ache a equação da isoterma para uma temperatura de 20°C .

Solução

- (a) A distância de (x, y) a origem é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Como a temperatura em (x, y) é inversamente proporcional a $\sqrt{x^2 + y^2}$, então,

$$T(x, y) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0, 0),$$

onde $c > 0$ é uma constante de proporcionalidade. Seja $k \in \text{Im } T =]0, +\infty[$. Então a isoterma ou curva de nível de T , no nível k , é dada por

$$C_k : T(x, y) = k \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{k} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{c^2}{k^2}.$$

Portanto, as isotermas são circunferências centradas em $(0, 0)$ e de raio $\frac{c}{k}$.

- (b) No ponto indicado, temos: $T(4, 3) = 40 \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{16 + 9}} = 40$. Então $c = 40 \cdot 5 = 200$.

Logo, $T(x, y) = \frac{200}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. A equação da isoterma para a temperatura de 20°C é dada por C_{20} :

$$\frac{200}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 20 \Leftrightarrow 10 = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 100}.$$

2. (Ex. 6 - Aula 5). Discuta a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 2 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução

As funções $\operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ e $1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, pois são compostas de funções contínuas.

Logo, $f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}}$ é contínua em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. (1)

Analisemos a continuidade em $(0, 0)$.

Façamos $u = x^2 + y^2$, e portanto $u \geq 0$. Como $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, então $u \rightarrow 0^+$.

Temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{1 - \cos \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos \sqrt{u}}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital temos

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2}(u)^{-1/2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{u}}{\operatorname{sen} \sqrt{u}} \cdot \cos u = 2 \cdot 1 \cdot 1 = f(0, 0).$$

Logo, f é contínua em $(0, 0)$. (2)

De (1) e (2), temos que f é contínua em \mathbb{R}^2 .

3. (Ex. 1 - Aula 7). Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^5}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) f é diferenciável em $(0, 0)$? Por quê?

Solução

(a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h^5}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3h^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} \lim_{k \rightarrow 0} 0 = 0.$$

(b) Para avaliarmos a diferenciabilidade, calculamos $E(h, k)$:

$$\begin{aligned} E(h, k) &= f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \\ &= \frac{3h^5}{h^2 + k^2} - 0 - 0 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{3h^5}{h^2 + k^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{\frac{3h^5}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{3h^5}{(h^2 + k^2)^{3/2}} = 3h^2 \cdot \left(\frac{h^2}{h^2 + k^2} \right)^{3/2},$$

onde

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} 3h^2 = 0, \quad \text{e} \quad 0 \leq \frac{h^2}{h^2 + k^2} \leq \frac{h^2 + k^2}{h^2 + k^2} = 1,$$

portanto, temos uma função limitada em produto com uma função cujo limite dá zero. Logo, pelo teorema do anulamento, temos $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = 0$.
Então f é diferenciável em $(0, 0)$.

4. (Ex. 1 - Aula 8). Seja $f(x, y) = 1 + \ln(x^2 + y^2)$. Determine

- (a) o domínio de f , D_f .
- (b) a imagem de f , Im_f .
- (c) as curvas de nível de f .
- (d) o gráfico de f , G_f .
- (e) o conjunto de pontos onde f é diferenciável.
- (f) o plano tangente e a reta normal ao G_f no ponto $(1, 0, 1)$.
- (g) um valor aproximado para $f(0,99; 0,01)$.
- (h) o conjunto de pontos de continuidade da função

$$g(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) [f(x, y) - 1], & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Solução

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
- (b) $Im_f =]-\infty, +\infty[$.
- (c) Seja $k \in Im f =]-\infty, +\infty[$. Então, temos

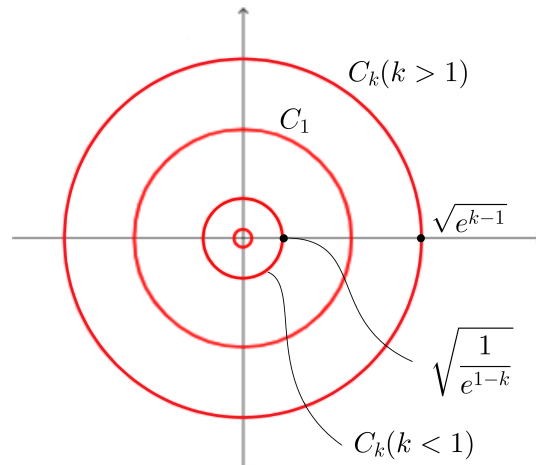
$$C_k : 1 + \ln(x^2 + y^2) = k \Leftrightarrow \ln(x^2 + y^2) = k - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^{k-1}.$$

$$k = 1 \Rightarrow c_1 : x^2 + y^2 = 1.$$

$$k > 1 \Rightarrow k - 1 > 0 \Rightarrow C_k : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{e^{k-1}} \right)^2.$$

$$k < 1 \Rightarrow k - 1 < 0 \Rightarrow 1 - k > 0.$$

$$\text{Logo, } e^{k-1} = e^{-(1-k)} = \frac{1}{e^{1-k}} \text{ e } c_k : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{e^{1-k}}} \right)^2.$$



$$(d) G_f : z = 1 + \ln(x^2 + y^2)$$

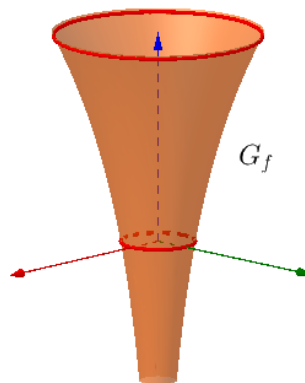
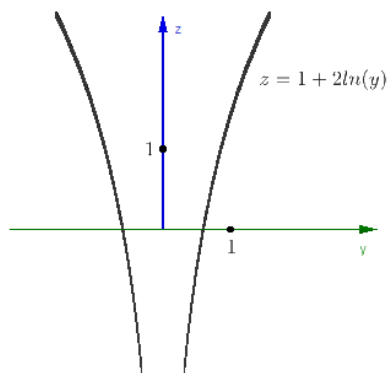
Primeiro notamos que esta função é “simétrica” em relação as coordenadas x e y . Isso nos implica que o que tivermos de comportamento em x também teremos em y . Isso nos permite analisar o gráfico isoladamente em cada eixo.

Assim, fazendo $x = 0$, temos $z = 1 + \ln y^2 = 1 + 2 \ln |y|$, que representa a interseção do G_f com o plano yz .

Fazendo $z = 0$, temos $\ln(x^2 + y^2) = -1$, donde $x^2 + y^2 = e^{-1}$, que representa a interseção do G_f com o plano xy .

Fazendo $z = c$ (constante), temos $\ln(x^2 + y^2) = c - 1$, donde $x^2 + y^2 = e^{c-1}$, que representa a interseção, do G_f com o plano horizontal $z = c$.

Assim, temos o esboço de G_f .



(e) Temos $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ que são funções racionais em D_f , portanto contínuas em D_f . Logo, f é diferenciável em D_f .

- (f) Como f é diferenciável em $(1, 0)$, então existe um plano tangente ao G_f no ponto $(1, 0, 1)$ e é dado por

$$z - f(1, 0) = (x - 1) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + (y - 0) \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0).$$

Temos

$$f(1, 0) = 1 + \ln(1 + 0) = 1 + \ln 1 = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{2}{1 + 0} = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Substituindo acima, temos

$$z - 1 = 2(x - 1) + 0(y - 0) \Leftrightarrow z = 1 + 2x - 2 \Leftrightarrow \boxed{z = 2x - 1}.$$

A reta normal é dada por

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0), -1 \right), \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\boxed{(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}}.$$

- (g) Sejam $(a, b) = (1, 0)$, $(h, k) = (-0, 01; 0, 01)$.

Logo, $x = a + h = 1 - 0, 01 = 0, 99$ e $y = b + k = 0 + 0, 01 = 0, 01$.

Como f é diferenciável em $(1, 0)$ e $(x, y) \simeq (a, b) = (1, 0)$, então

$$\Delta f \simeq df,$$

onde

$$\Delta f = f(x, y) - f(a, b) = f(a + h, b + k) - f(a, b).$$

$$df = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b),$$

ou seja,

$$f(0, 99; 0, 01) - f(1, 0) \simeq (-0, 01) \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) + (0, 01) \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0).$$

Substituindo os valores das derivadas parciais,

$$f(0, 99; 0, 01) \simeq (1 + \ln 1) + (-0, 01).2 + (0, 01).0 = 1 - 0, 02 = 0, 98.$$

- (h) $g(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ é contínua em $(a, b) \neq (0, 0)$, pois

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} g(x, y) = (a^2 + b^2) \ln(a^2 + b^2) = g(a, b) \quad (\text{i}).$$

Analisemos a continuidade em $(0, 0)$.

Façamos $u = x^2 + y^2$. Logo, $u \geq 0$. Como $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, então $u \rightarrow 0^+$. Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(\ln u)'}{(\frac{1}{u})'}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(\ln u)'}{(\frac{1}{u})'} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} (-u) = 0 = g(0, 0).$$

Logo, g é contínua em $(0, 0)$. (ii)

De (i) e (ii), concluímos que g é contínua em \mathbb{R}^2 .

5. (Ex. 7 - Aula 8). A temperatura do ponto (x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2} - 12)$.

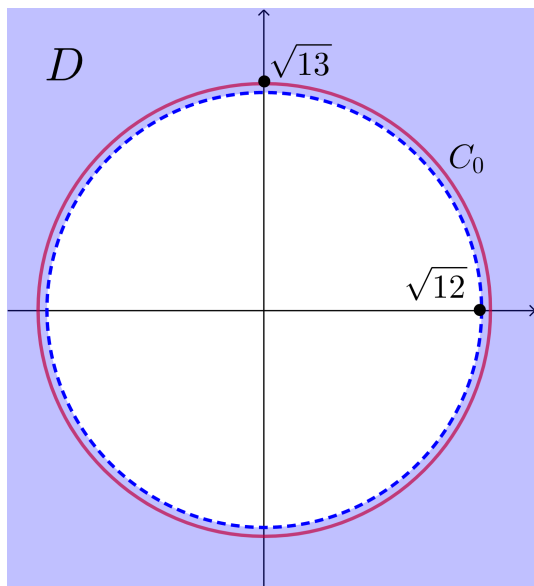
- Determine o domínio de $T(x, y)$ e represente-o no plano xy .
- Determine a equação da isoterma (conjunto de pontos com mesma temperatura) que contém o ponto $(2, 3)$ e faça o seu esboço.
- Determine o plano $z = ax + by + c$ que melhor se aproxima do gráfico de $T(x, y)$ no ponto $(2, 3)$.
- Calcule um valor aproximado da temperatura em $(1, 01; 2, 99)$.

Solução

- (a) Os pontos (x, y) do domínio de f são aqueles que obedecem a relação, $x^2 + y^2 - 12 > 0$, portanto:

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 > 12\}.$$

Fazemos um esboço do domínio abaixo:



- (b) Primeiro encontramos a que nível k a função T se encontra através de $k = T(2, 3)$. Ou seja, $k = \ln \sqrt{4 + 9} - 12 = \ln 1 = 0$. Isso quer dizer que

$C_0 : T(x, y) = 0$ é a isoterma (curva de nível) desejada. Agora encontramos uma expressão cartesiana para C_0 .

$$C_0 : T(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 12} = 0 \Rightarrow C_0 : x^2 + y^2 - 12 = 1. \text{ Portanto, } \boxed{C_0 : x^2 + y^2 = 13}.$$

- (c) O plano que melhor se aproxima do G_T no ponto $(2, 3, T(2, 3))$ é o plano tangente ao gráfico de T no ponto $(2, 3, T(2, 3)) = (2, 3, 0)$, dado por:

$$z - T(2, 3) = (x - 2) \frac{\partial T}{\partial x}(2, 3) + (y - 3) \frac{\partial T}{\partial y}(2, 3).$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 12}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 12}} = \frac{x}{x^2 + y^2 - 12}, \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 12}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 - 12}} = \frac{y}{x^2 + y^2 - 12}, \end{aligned}$$

então,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(2, 3) = \frac{2}{4 + 9 - 12} = 2, \frac{\partial T}{\partial y}(2, 3) = 3.$$

Assim, temos

$$z - 0 = 2(x - 2) + 3(y - 3) \Leftrightarrow \boxed{z = 2x + 3y - 13}.$$

- (d) Sejam $(a, b) = (2, 3)$, $(h, k) = (0, 01; -0, 01)$, Como $(h, k) \simeq (0, 0)$, então

$$\begin{aligned} \Delta T &\simeq dT = h \frac{\partial T}{\partial x}(2, 3) + k \frac{\partial T}{\partial y}(2, 3) \\ &= 2 \cdot (0, 01) + 3 \cdot (-0, 01) = -0, 01, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(2, 01; 2, 99) - \underbrace{T(2, 3)}_{=0} \simeq -0, 01.$$

Logo,

$$\boxed{T(2, 01; 2, 99) \simeq -0, 01}.$$

6. (Ex. 4 - Aula 8) O ângulo central de um setor circular é 80° e o raio é 20 cm e deseja-se reduzir o ângulo em 1° . Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?

Solução

A área de um setor circular de raio r e ângulo central θ em radianos é dada por $A = A(r, \theta) = \frac{1}{2}r\theta$.

$$\text{Como } 1^\circ = \frac{2\pi}{360} \text{ então } 80^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 80 = \frac{4\pi}{9}. \text{ Temos } \Delta\theta = -\frac{2\pi}{360} \simeq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned}\Delta A &\cong dA = \frac{\partial A}{\partial r} \left(20, \frac{4\pi}{9}\right) \Delta r + \frac{\partial A}{\partial \theta} \left(20, \frac{4\pi}{9}\right) \Delta \theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{9} \Delta r + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(-\frac{2\pi}{360}\right) \\ &= \frac{2\pi}{9} \Delta r - \frac{\pi}{18}.\end{aligned}$$

Para que a área fique inalterada, devemos ter $\Delta A = 0$. Logo, $0 \simeq \frac{2\pi}{9} \Delta r - \frac{\pi}{18}$ ou $\frac{2\pi \Delta r}{9} \simeq \frac{\pi}{18}$, donde $\Delta r \simeq \frac{1}{4} = 0,25$.

Portanto, o acréscimo no raio é de aproximadamente 0,25 cm.

7. (Ex. 3 - Aula 9) A pressão de 1 mol de um gás ideal está aumentando em uma taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura está aumentando em uma taxa de 0,15 K/s. Use a equação $PV = 8,31 T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for 20 kPa e a temperatura for 320 K.

Solução

A partir da expressão dada, temos que o volume V se relaciona com P e T através da função:

$$V(T, P) = (8,31 \text{ kPa} \cdot \ell/\text{K}) \frac{T}{P}.$$

Agora percebemos que tanto a temperatura T quanto a pressão P estão variando com o tempo, que chamaremos de t . Ou seja, temos um $T(t)$ e um $P(t)$, com isto, queremos $V'(t) \equiv \frac{dV}{dt}$. Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial V}{\partial P} \frac{dP}{dt},$$

a partir da função V , encontramos:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = (8,31 \text{ kPa} \cdot \ell/\text{K}) \frac{1}{P}; \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial P} = -(8,31 \text{ kPa} \cdot \ell/\text{K}) \frac{T}{P^2}.$$

Com os dados da questão: $P = 20 \text{ kPa}$ e $T = 320 \text{ K}$, temos

$$\frac{\partial V}{\partial T} = (8,31 \text{ kPa} \cdot \ell/\text{K}) \frac{1}{20 \text{ kPa}} = 0,4155 \ell/\text{K},$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -(8,31 \text{ kPa} \cdot \ell/\text{K}) \frac{320 \text{ K}}{(20 \text{ kPa})^2} = -6,648 \ell/\text{kPa},$$

o que nos dá:

$$\frac{dV}{dt} = 0,4155 \ell/\text{K} \cdot 0,15 \text{ K/s} + (-6,648 \ell/\text{kPa}) \cdot 0,05 \text{ kPa/s} \approx \boxed{-0,27 \ell/\text{s}}.$$

8. (Ex. 6 - Aula 9) Suponha que $f(x, y)$ é uma função de classe C^1 , tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x, y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2 \sin t, 7 \cos t - 3, z(t))$, onde t representa o tempo. Determine o vetor velocidade no instante em que suas coordenadas são $(2, -3, 6)$.

Solução

Se $\vec{r}(t) = (2 \sin t, 7 \cos t - 3, z(t))$ é o vetor posição de um ponto no instante t , então $\vec{r}'(t) = (2 \cos t, -7 \sin t, z'(t))$ é o vetor velocidade no instante t .

Seja t_0 o instante que o ponto passa por $(2, -3, 6)$. Logo, $\vec{r}(t_0) = (2, -3, 6)$ ou $(2 \sin t_0, 7 \cos t_0 - 3, z(t_0)) = (2, -3, 6)$, donde $2 \sin t_0 = 2$, $7 \cos t_0 - 3 = -3$, $z(t_0) = 6$. Logo, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Queremos calcular $z'(\frac{\pi}{2})$. Como a curva $\vec{r}(t) = (2 \sin t, 7 \cos t - 3, z(t))$ está no gráfico de $z = f(x, y)$, então $z(t) = f(2 \sin t, 7 \cos t - 3)$. Temos $z(t) = f(x, y)$, com $x = 2 \sin t$, $y = 7 \cos t - 3$ diferenciáveis. Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(2 \sin t, 7 \cos t - 3)(2 \cos t) + \frac{\partial f}{\partial y}(2 \sin t, 7 \cos t - 3)(-7 \sin t), \end{aligned}$$

de onde encontramos,

$$z'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, -3) \left(2 \cos \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -3) \left(-7 \sin \frac{\pi}{2}\right) = 0 + (-1)(-7).$$

Logo, $z'(\frac{\pi}{2}) = 7$ e $\vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = (2 \cos \frac{\pi}{2}, -7 \sin \frac{\pi}{2}, 7)$.

Donde, o vetor velocidade é $\boxed{\vec{r}'(\frac{\pi}{2}) = (0, -7, 7)}$.

9. (Ex. 10 - Aula 9) . Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em $P_0 = (0, 0, 0)$, tal que: $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = 0$, $f(P_0) = 1$. Uma função g é dada por

$$g(u, v) = f(u - v, u^2 - v, 3v - 3).$$

Calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, 1)$.

Solução

Temos $g(u, v) = f(x, y, z)$, onde $x = x(u, v) = u - v$, $y = y(u, v) = u^2 - v$, $z = z(u, v) = 3v - 3$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{2u} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial z}{\partial u}}_0, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial v}}_{-1} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial y}{\partial v}}_{-1} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \underbrace{\frac{\partial z}{\partial v}}_3, \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u - v, u^2 - v, 3v - 3) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(u - v, u^2 - v, 3v - 3), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -\frac{\partial f}{\partial x}(u - v, u^2 - v, 3v - 3) - \frac{\partial f}{\partial y}(u - v, u^2 - v, 3v - 3) + \\ + 3 \frac{\partial f}{\partial z}(u - v, u^2 - v, 3v^2 - 3). \end{cases}$$

Como $g(u, v) = f(x, y, z)$, temos que $g(1, 1) = f(0, 0, 0) = f(P_0)$, logo

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 2 + 2 \cdot 0 = 2, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) = -\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) + 3 \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = -2 - 0 + 0 = -2. \end{cases}$$

Equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1, 1, g(1, 1)) = (1, 1, 1)$ é dada através de

$$w - g(1, 1) = (u - 1) \frac{\partial g}{\partial u}(1, 1) + (v - 1) \frac{\partial g}{\partial v}(1, 1) = 2(u - 1) + (-2)(v - 1),$$

portanto,

$$\boxed{w = 1 + u - 2v}.$$

10. (Ex. 11 - Aula 10) Suponha que a equação $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$ define implicitamente uma função $z = f(x, y)$ diferenciável em $(\sqrt{2}, 0)$.

- Calcule $\nabla f(\sqrt{2}, 0)$.
- Calcule a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $(\sqrt{2}, 0, f(\sqrt{2}, 0))$.
- Aproxime o valor de $f(1.3, 0.1)$. Considere $\sqrt{2} = 1,41$.

Solução

- (a) Derivando a expressão $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$ em relação a x temos:

$$\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} + e^{xz}(z + x \frac{\partial z}{\partial x}) = 0$$

Isolando $\frac{\partial z}{\partial x}$ da fórmula temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{2x}{x^2 + y^2 - 1} - e^{xz}}{xe^{xz}}, \text{ desde que } x \neq 0$$

Analogamente, derivando a expressão $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$ em relação à variável y temos:

$$\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} + e^{xz}(x \frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

Isolando $\frac{\partial z}{\partial y}$ da fórmula temos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \cdot \frac{1}{xe^{xz}}, \text{ desde que } x \neq 0$$

Sabemos que $\nabla f(\sqrt{2}, 0) = (\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{2}, 0), \frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{2}, 0))$. Só que para substituir nas expressões de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ preciso saber qual é o valor de z quando $x = \sqrt{2}$ e $y = 0$.

Observe que $z = f(x, y)$, então $z_0 = f(\sqrt{2}, 0)$ e o ponto $(\sqrt{2}, 0, f(\sqrt{2}, 0))$ deve verificar a expressão original $\ln(x^2 + y^2 - 1) + e^{xz} = 1$. Então,

$$\ln((\sqrt{2})^2 + 0^2 - 1) + e^{\sqrt{2}z_0} = 1,$$

donde, $z_0 = 0$ e

$$\nabla f(\sqrt{2}, 0) = (\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{2}, 0), \frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{2}, 0)) = (-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, 0) = (-2, 0)$$

(b) A equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(\sqrt{2}, 0, f(\sqrt{2}, 0))$ é $z = f(\sqrt{2}, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2}, 0)(x - \sqrt{2}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2}, 0)(y - 0)$. Isto é, $z = -2(x - \sqrt{2})$, pois $f(\sqrt{2}, 0) = z_0 = 0$.

(c) Dado que f é diferenciável $(\sqrt{2}, 0)$ podemos aproximar a função f pela função linearizada $L(x, y) = -2(x - \sqrt{2})$, pois o ponto $(1.3, 0.1)$ é próximo suficiente de $(\sqrt{2}, 0)$. Portanto,

$$f(1.3, 0.1) \approx -2(1.3 - 1.41) = -0.22$$

11. (Ex. 2 - Aula 11) Encontre a derivada direcional de $f(x, y, z) = xe^{y^2 - z^2}$ no ponto $(1, 2, -2)$ e na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ à curva $\vec{r}(t) = (t, 2 \cos(t - 1), -2e^{t-1})$.

Solução

Temos $\vec{r}'(t) = (1, -2 \sin(t - 1), -2e^{t-1})$, donde $\vec{r}'(1) = (1, 0, -2)$. Seja $\vec{u} = \frac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|} = \frac{(1, 0, -2)}{\sqrt{5}}$ vetor unitário na direção e sentido do vetor tangente.

Como f é diferenciável em $(1, 2, -2)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2, -2) = \nabla f(1, 2, -2) \cdot \vec{u},$$

onde $\nabla f(1, 2, -2) = (e^{y^2 - z^2}, 2xye^{y^2 - z^2}, -2xze^{y^2 - z^2})|_{(1, 2, -2)} = (1, 4, 4)$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2, -2) = (1, 4, 4) \cdot \frac{(1, 0, -2)}{\sqrt{5}} = \frac{1 - 8}{\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

12. (Ex. 11 - Aula 11) Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - 2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy e um indivíduo que se encontra na posição $(3, 2)$ pretende dar um passeio
- Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.
 - Qual a direção e sentido que deverá tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?
 - Se x e y são medidos em km e a temperatura em $^{\circ}C$, quanto se elevará aproximadamente a temperatura, caso caminhe $0,01 km$ na direção encontrada no item b?

Solução

- (a) Na posição $(3, 2)$, a temperatura é dada por $T(3, 2) = 23 (^{\circ}C)$. Queremos então encontrar outros valores de (x, y) que nos mantenha a mesma temperatura de $23^{\circ}C$, ou seja, queremos determinar a curva de nível C_{23} da função T .

$$C_{23} : T(x, y) = 23 \Rightarrow 40 - x^2 - 2y^2 = 23 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 17.$$

Podemos escrever então,

$$C_{23} : \left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{17/2}}\right)^2 = 1,$$

ou seja, uma elipse com semi-eixo menor (em y) de tamanho $\sqrt{17/2}$ e um semi-eixo maior (em x) de tamanho $\sqrt{17}$.

- (b) Como a função temperatura é diferenciável por ser polinomial, a direção de maior crescimento, a partir de um ponto, é a direção (unitária!) dada pelo gradiente. Logo, calculando o gradiente da função T em $(3, 2)$, obtemos:

$$\nabla T(3, 2) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right) \Big|_{(3,2)} = (-2x, -4y) \Big|_{(3,2)} = (-6, -8).$$

Agora precisamos obter a direção (unitária) do vetor gradiente em $(3, 2)$. Conseguimos isso através de:

$$\vec{u} = \frac{\nabla T(3, 2)}{\|\nabla T(3, 2)\|} = \frac{(-6, -8)}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Como as duas componentes do vetor gradiente são negativas, elas apontam no sentido de diminuir os valores de x e de y .

- (c) Estamos variando a função em uma direção específica, no caso \vec{u} . Assim, a derivada direcional de T nesta direção será:

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} \Big|_{(3,2)} = \nabla T(3, 2) \cdot \vec{u} = \|\nabla T(3, 2)\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Então, se o indivíduo anda $\Delta d = 0,01 km$ na direção \vec{u} , a temperatura T irá se elevar aproximadamente de $\Delta T \simeq \frac{\partial T}{\partial \vec{u}} \Delta d = 10 \cdot 0,01 = \boxed{0,1^{\circ}C}$.

13. (Ex. 7 - Aula 12). A distribuição da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x, y)$ de classe C^2 em \mathbb{R}^2 .

Sabe-se que $\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$ em \mathbb{R}^2 .

Calcule $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta)$, sendo $U(\rho, \theta) = T(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$, em termos das derivadas parciais de T em relação à x .

Solução

Temos $U(\rho, \theta) = T(x, y)$, onde $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ são funções diferenciáveis.

Então, pela regra da cadeia, temos $\frac{\partial U}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$. Como $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 2$, então

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\rho, \theta) = -\rho \sin \theta \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) + 2\rho \cos \theta.$$

Como $\frac{\partial T}{\partial x}(x, y)$ é uma função composta, pois $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$, então para derivar em relação a θ , devemos usar novamente a regra da cadeia. Temos, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) &= -\rho \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x}(x, y) - \rho \sin \theta \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-\rho \sin \theta} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{\rho \cos \theta} \right] - \\ &\quad - 2\rho \sec \theta. \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho, \theta) = -\rho \cos \theta \frac{\partial T}{\partial x} + \rho^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2\rho \sec \theta.}$$

Exercícios desafiadores

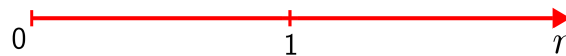
1. (Ex. 6 - Aula 5). Discuta a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2 + y^2} - 1} & \text{se } x^2 + y^2 < 1; \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Solução Façamos $r = x^2 + y^2$. Logo, $r \geq 0$. Se $x^2 + y^2 < 1$, então $0 \leq r < 1$ e se $x^2 + y^2 \geq 1$, então $r \geq 1$.

$$\text{Assim } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2 + y^2} - 1} & \text{se } x^2 + y^2 < 1; \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 \geq 1, \end{cases} \text{ implica em}$$

$$f(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r-1}}, & \text{se } 0 \leq r < 1; \\ 0, & \text{se } r \geq 1. \end{cases}$$



Temos:

$f(r) = 0$ em $]1, +\infty[\Rightarrow f$ é contínua em $]1, +\infty[$, pois f é uma função constante. (1)

$f(r) = e^{\frac{1}{r-1}}$ em $[0, 1[\Rightarrow f$ é contínua em $[0, 1[$, pois f é uma composta de funções contínuas. (2)

Analisemos a continuidade em $r = 1$. Temos

$$\lim_{r \rightarrow 1^+} f(r) = \lim_{r \rightarrow 1^+} 0 = 0 = f(1).$$

$$r < 1 \Rightarrow r - 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{r-1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{1-r} > 0.$$

Então,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} f(r) = \lim_{r \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{r-1}} = \lim_{r \rightarrow 1^-} e^{-\frac{1}{1-r}} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{1-r}}} = \frac{1}{e^\infty} = 0 = f(1).$$

Logo, f é contínua em $r = 1$. (3)

De (1), (2) e (3), vemos que $f(r)$ é contínua em $[0, +\infty[$ ou $f(x, y)$ é contínua em \mathbb{R}^2 .

2. (Ex. 3 - Aula 8) Determine uma estimativa do erro relativo ou erro percentual máximo no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo (erro percentual) em l igual a 1% e em g igual a 3%.

Solução

Como o erro percentual em l é igual a 1% e em g é igual a 3%, então temos $\left| \frac{\Delta l}{l} \right| = \frac{1}{100}$ e $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| = \frac{3}{100}$. Podemos considerar então que, $|\Delta l| \simeq dl$ e $|\Delta g| \simeq$

dg , isto é, que as variações nas medidas de l e g são pequenas. Isso nos implica então que $\Delta T \simeq dT$, donde $\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{dT}{T}$. Da diferencial de T , a saber,

$$dT = \frac{\partial T}{\partial l} dl + \frac{\partial T}{\partial g} dg,$$

com $|\Delta l| \simeq dl$, $|\Delta g| \simeq dg$ e $\Delta T \simeq dT$, teremos aproximadamente que

$$\begin{aligned} \Delta T &\simeq \frac{\partial T}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial T}{\partial g} \Delta g \\ &= 2\pi \frac{\frac{1}{g}}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \Delta l + 2\pi \frac{-\frac{l}{g^2}}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \Delta g = 2\pi \frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{2g \cdot \frac{l}{g}} \Delta l - 2\pi \frac{\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot l}{2g^2 \cdot \frac{l}{g}} \Delta g \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} = T \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - T \cdot \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}. \end{aligned}$$

Logo, $\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$, donde,

$$\left| \frac{\Delta T}{T} \right| \simeq \left| \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \right|.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta T}{T} \right| &\simeq \left| \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \right| \leq \left| \frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l} \right| + \left| \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{100} = \frac{4}{200} = \frac{2}{100}. \end{aligned}$$

Assim, o erro percentual máximo em T é de aproximadamente 2%.

3. (Ex. 7 - Aula 9) Seja $F(r, \theta) = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, sendo $f(x, y)$ diferenciável. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) + \sin \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta).$$

Solução

Temos $F(r, \theta) = f(x, y)$, onde $x = x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y = y(r, \theta) = r \sin \theta$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r \sin \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \operatorname{sen}^2 \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \end{cases}$$

Donde,

$$\operatorname{sen} \theta \frac{\partial F}{\partial x}(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = \underbrace{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}_{=1} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

como queríamos verificar.

4. (Ex. 8 - Aula 9). Se $u = x^m f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}, \frac{z}{x}\right)$. mostre que

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = mu.$$

Solução

Seja $u = x^m f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y, z) = \frac{y}{x}$, $s = s(x, y, z) = \frac{x}{z}$, e $t = t(x, y, z) = \frac{z}{x}$ são funções diferenciáveis em

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0\}.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = mx^{m-1}f(r, s, t) + x^m \left[\frac{\partial f}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{-y/x^2} + \frac{\partial f}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial s}{\partial x}}_{1/z} + \frac{\partial f}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial x}}_{-z/x^2} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^m \left[\frac{\partial f}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_{1/x} + \frac{\partial f}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial s}{\partial y}}_0 + \frac{\partial f}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial y}}_0 \right], \\ \frac{\partial u}{\partial z} = x^m \left[\frac{\partial f}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial z}}_0 + \frac{\partial f}{\partial s} \underbrace{\frac{\partial s}{\partial z}}_{x/z^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial z}}_{1/x} \right], \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = mx^{m-1}f(r, s, t) - yx^{m-2} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x^m}{z} \frac{\partial f}{\partial s} - zx^{m-2} \frac{\partial f}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^{m-1} \frac{\partial f}{\partial r}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^{m+1}}{z^2} \frac{\partial f}{\partial s} + x^{m-1} \frac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Agora, multiplicando a primeira equação por x , a segunda por y e a terceira por z , temos:

$$\begin{cases} x \frac{\partial u}{\partial x} = mx^m f(r, s, t) - yx^{m-1} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x^{m+1}}{z} \frac{\partial f}{\partial s} - zx^{m-1} \frac{\partial f}{\partial t}, \\ y \frac{\partial u}{\partial y} = yx^{m-1} \frac{\partial f}{\partial r}, \\ z \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{x^{m+1}}{z} \frac{\partial f}{\partial s} + zx^{m-1} \frac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Somando todas as equações, chegamos em

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = mx^m f(r, s, t) = mu,$$

como queríamos mostrar.

5. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = x^2 + \text{sen}(xy)$ no ponto $(1, 0)$ tem valor 1.

Solução

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$, tal que $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Como f é diferenciável em $(1, 0)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) &= \nabla f(1, 0) \cdot \vec{u} = (2x + y \cos(xy), x \cos(xy))|_{(1,0)} \cdot \vec{u} = \\ &= (2, 1) \cdot (u_1, u_2) = 2u_1 + u_2 \end{aligned}$$

Por hipótese sabemos que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 0) = 1$, onde $u_1^2 + u_2^2 = 1$, então

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = 1 \\ u_1^2 + u_2^2 = 1 \end{cases}$$

Da primeira equação temos que $u_2 = 1 - 2u_1$. Substituindo na segunda equação temos que

$$\begin{aligned} u_1^2 + (1 - 2u_1)^2 &= 1 \Rightarrow u_1^2 + 1 - 4u_1 + 4u_1^2 = 1 \\ \Rightarrow 5u_1^2 - 4u_1 &= 0 \Rightarrow u_1(5u_1 - 4) = 0 \end{aligned}$$

Logo, $u_1 = 0$ ou $u_1 = \frac{4}{5}$. Onde, $u_2 = 1$ ou $u_2 = 1 - 2\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$.

Daí, $\vec{u} = (0, 1)$ ou $\vec{u} = (\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$. Assim, as direções são $\vec{u} = \vec{j}$ e $\vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$.

6. (Ex. 16 - Aula 11) Considere a curva C interseção das superfícies $A_1 : x^2 - 2xz + y^2z = 3$ e $A_2 : 3xy - 2yz = -2$. Determine:

- um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.
- os pontos do hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

Solução

- (a) Sejam $f(x, y, z) = x^2 - 2xz + y^2z - 3$ e $g(x, y, z) = 3xy - 2yz + 2$ que são de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Observe que $A_1 = S_0(f)$, $A_2 = S_0(g)$

Então, temos

$$\nabla f(1, -2, 1) = (2x - 2z, 2yz, -2x + y^2) \big|_{(1, -2, 1)} = (0, -4, 2)$$

que deve ser $\perp A_1$ em $(1, -2, 1)$. E

$$\nabla g(1, -2, 1) = (3y, 3x - 2z, -2y) \big|_{(1, -2, 1)} = (-6, 1, 4)$$

que deve ser $\perp A_2$ em $(1, -2, 1)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \nabla f(1, -2, 1) \times \nabla g(1, -2, 1) &= (0, -4, 2) \times (-6, 1, 4) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 2 \\ -6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-18, -12, -24) = -6(3, 2, 4) \end{aligned}$$

é um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.

O vetor $(3, 2, 4)$ é também um vetor tangente a C em $(1, -2, 1)$.

- (b) Seja $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 12$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . A superfície de nível de h no nível 0 é dada por

$$S : x^2 + y^2 - z^2 + 12 = 0.$$

Seja $(a, b, c) \in S$. Então $a^2 + b^2 - c^2 + 12 = 0$.

Temos que $\nabla h(a, b, c) = (2a, 2b, -2c) \perp S$ em (a, b, c) e perpendicular ao plano tangente a h em (a, b, c) .

Como o plano é perpendicular ao vetor $(3, 2, 4)$ do item (a), então $\nabla h(a, b, c) \parallel (3, 2, 4)$, ou seja,

$$(2a, 2b, -2c) = \lambda(3, 2, 4) \Rightarrow 2a = 3\lambda, 2b = 2\lambda, -2c = 4\lambda.$$

Encontramos, então que, $a = \frac{3b}{2}$ e $c = -2b$. Substituindo estes valores na expressão para a superfície S acima, encontramos:

$$S : \frac{9b^2}{4} + b^2 - 4b^2 + 12 = \frac{9 - 3 \cdot 4}{4}b^2 + 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

Com isso encontramos dois pontos do hiperboloide onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a), dado que $(a, b, c) = \left(\frac{3b}{2}, b, -2b\right)$, que são:

$$(a, b, c) = (6, 4, -8) \text{ e } (a, b, c) = (-6, -4, 8).$$

7. (Ex. 13 - Aula 11) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 7$.

Solução

Seja $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^2 . A curva de nível de f no nível 0 é dada por $C : f(x, y) = 0 \Rightarrow C : x^2 + xy + y^2 - 7 = 0 \Rightarrow C : x^2 + xy + y^2 = 7$. Em outras palavras, a curva C representa a curva dada na questão.

Seja $(a, b) \in C$. Logo $a^2 + ab + b^2 = 7$. Temos que

$$\nabla f(a, b) \perp C \quad \text{em} \quad (a, b).$$

Logo, $\nabla f(a, b) = (2a + b, a + 2b)$ é perpendicular à reta tangente a C em (a, b) . Como a reta $4x + 5y = 7$ é paralela à reta tangente, então o vetor $(4, 5)$ que é perpendicular a essa reta é paralelo ao $\nabla f(a, b)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a, b) = \lambda(4, 5)$, ou seja,

$$(2a + b, a + 2b) = \lambda(4, 5).$$

Assim, desta expressão tiramos que

$$\begin{cases} 2a + b = 4\lambda \\ a + 2b = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{2a + b}{4} = \frac{a + 2b}{5} \therefore 10a + 5b = 4a + 8b \therefore b = 2a.$$

Substituindo $b = 2a$ em $a^2 + ab + b^2 = 7$, temos

$$a^2 + 2a^2 + 4a^2 = 7a^2 = 7 \therefore a = \pm 1, b = \pm 2.$$

Encontramos dois possíveis valores pontos onde as condições do problema são satisfeitas, $(a, b) = (1, 2)$ e $(a, b) = (-1, -2)$.

Para $(a, b) = (1, 2)$, temos $(x - 1, y - 2) \cdot (4, 5) = 0 \therefore \boxed{4x + 5y - 14 = 0}$.

Para $(a, b) = (-1, -2)$, temos $(x + 1, y + 2) \cdot (4, 5) = 0 \therefore \boxed{4x + 5y + 14 = 0}$.

8. (Ex. 14 - Aula 11). Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 11/6$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \frac{11}{6}$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . A superfície de nível de f no nível 0 é dada por

$$S : f(x, y, z) = 0 \Rightarrow S : x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \frac{11}{6} = 0 \Rightarrow S : x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}.$$

Seja $(a, b, c) \in S$. Logo, $a^2 + 3b^2 + 2c^2 = \frac{11}{6}$.

Temos que, $\nabla f(a, b, c) \perp S$ em (a, b, c) . Logo, $\nabla f(a, b, c) = (2a, 6b, 4c)$ é perpendicular ao plano tangente a S em (a, b, c) .

Como o plano $x + y + z = 10$ é paralelo ao plano tangente, então o vetor $(1, 1, 1)$ que é perpendicular a esse plano é paralelo ao $\nabla f(a, b, c)$.

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(2a, 6b, 4c) = \lambda(1, 1, 1)$. Desta relação, tiramos que:

$$\begin{cases} 2a = \lambda, \\ 6b = \lambda, \\ 4c = \lambda, \end{cases} \Rightarrow a = 3b = 2c \Rightarrow b = \frac{a}{3}, c = \frac{a}{2}.$$

Substituindo acima, temos

$$a^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11}{6}a^2 = \frac{11}{6} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1, b = \pm \frac{1}{3}, c = \pm \frac{1}{2}.$$

Portanto, temos dois pontos possíveis $(a, b, c) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ ou $(a, b, c) = (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$.

Equações do plano tangente:

Para $(a, b, c) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, temos: $(x - 1, y - \frac{1}{3}, z - \frac{1}{2}) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z - \frac{11}{6} = 0}.$

Para $(a, b, c) = (-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$, temos: $(x + 1, y + \frac{1}{3}, z + \frac{1}{2}) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z + \frac{11}{6} = 0}.$

9. (Ex. 15 - Aula 11). Considere a função $z = \frac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y}$, Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2, 2, 1)$.

Solução

$$S : z = \frac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y} \Leftrightarrow S : zy = \sqrt[4]{8 + x^2 + y^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow S : z^4 y^4 = 8 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow S : 8 + x^2 + y^2 - z^4 y^4 = 0.$$

Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 8 + x^2 + y^2 - z^4 y^4$ que é de classe C^1 em \mathbb{R}^3 . Observe que a superfície S é a superfície de nível de f no nível 0, que contém $(2, 2, 1)$.

Temos que $\nabla f(1, 1, 1) = (2x, 2y + 4z^4 y^3, -4z^3 y^4)_{(2,2,1)} = (4, -28, -64)$ é perpendicular a S em $(2, 2, 1)$.

Com isso, obtemos a equação do plano tangente:

$$(x - 2, y - 2, z - 1) \cdot (4, -28, -64) = 0 \Rightarrow \boxed{x - 7y - 16z + 28 = 0}.$$

Equação da reta normal: $\boxed{(x, y, z) = (2, 2, 1) + \lambda(4, -28, -64), \lambda \in \mathbb{R}}.$

10. (Ex. 8 - Aula 12) Seja $v(r, \theta) = u(x, y)$, onde $u(x, y)$ é uma função de classe C^2 com $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Solução

Temos $v(r, \theta) = u(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\sin \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r \sin \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r \cos \theta} \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}. \end{array} \right. \quad (1) \quad (2)$$

Derivando (1) em relação a r , temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \cos \theta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\sin \theta} \right] + \sin \theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\sin \theta} \right),$$

e agora derivando (2) em relação a θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = & -r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r \sin \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r \cos \theta} \right] + \\ & -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r \cos \theta \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r \sin \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r \cos \theta} \right]. \end{aligned}$$

Como $u(x, y)$ é de classe C^2 , então, pelo Teorema de Schwarz, temos que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)$. Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} + r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \quad - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{array} \right.$$

Agora fazendo a soma $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = & \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{r \cos \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{r \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ & + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

De onde conseguimos,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = (\cos \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

como queríamos verificar.