Funções escalares de várias variáveis

Domínio, imagem e gráfico

Objetivos:

- Compreender a noção de função escalar de várias variáveis, domínio, imagem e gráfico;
- Calcular e esboçar os conjuntos domínio, imagem e gráfico;

Uma função real de n variáveis é uma função do tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que associa a cada n-upla $(x_1, ..., x_n) \in D$ um único número $w = f(x_1, ..., x_n)$. O conjunto D é o domínio da função; a imagem da função é dada pelo conjunto

$$Im(f) = \{w = f(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}; (x_1, ..., x_n) \in D\} = f(D) \subset \mathbb{R}$$

e o conjunto

$$G_f = \{(x_1, ..., x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1}; w = f(x_1, ...x_n), (x_1, ..., x_n) \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

é o gráfico da função.

Observações:

(I) Se $n = 1 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de uma variável.

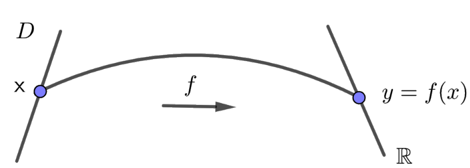


Figure 1: Domínio e imagem de uma função real de uma variável real

Temos:

(i) D é o domínio da função

(ii) $Imf = \{y = fx \in \mathbb{R}; x \in D\} \subset \mathbb{R}$

(iii) $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$

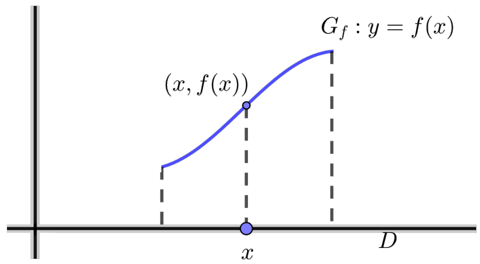


Figure 2: Gráfico de uma função real de uma variável real

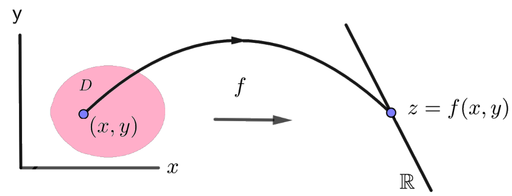


Figure 3: Domínio e imagem de uma função real de duas variáveis reais

(II) Se $n = 2 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in D \longmapsto z = f(x, y) \in \mathbb{R}$, é uma função real de duas variáveis.

Temos que:

(i) D=domínio da função

(ii) $Imf = f(D) = \{z = f(x, y) \in \mathbb{R}; (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}$

(iii) $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$

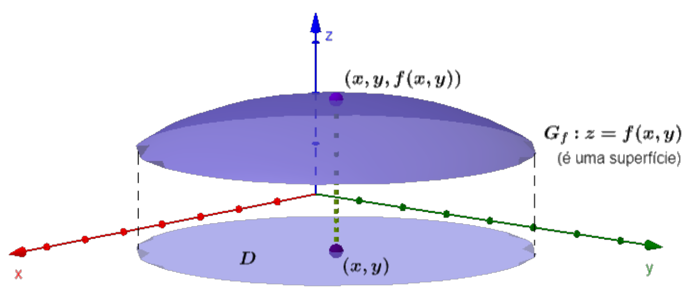


Figure 4: Gráfico de uma função real de duas variáveis reais

Atenção: Nem toda superfície do $\mathbb{R}^3$ é gráfico de alguma função $f(x, y)$. Com efeito, seja $S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ (esfera de raio 1 e centro (0,0,1).

Dado (x,y) no interior do disco $D : x^2 + y^2 \leq 1$, temos que a reta paralela ao eixo z, passando por (x,y), intercepta S em dois pontos distintos. Logo, S não pode ser gráfico de uma função de x e y.

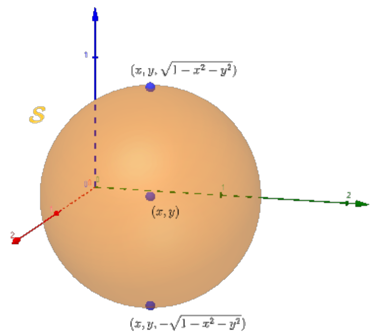


Figure 5: Superfície em $\mathbb{R}^3$ que não é gráfico de uma função

(III) Se $n = 3 \Longrightarrow f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \in D \longmapsto w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ é uma função real de três variáveis.

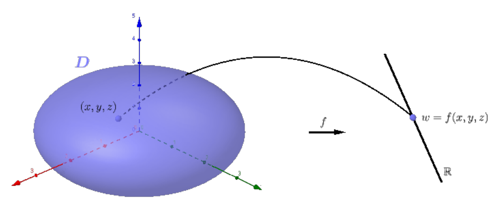


Figure 6: Domínio e imagem de uma função real de três variáveis reais

Temos que:

(i) $D =$ domínio da função

(ii) $Imf = f(D) = \{w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}; (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

(iii) $G_f = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\} \subset \mathbb{R}^4$

Atenção: Como $G_f \subset \mathbb{R}^4$, é impossível desenhá-lo.

Exemplos

1. Função Constante: Seja $f(x, y) = c,\ c \in \mathbb{R}$.

   Temos $D_f = \mathbb{R}^2$, $Imf = \{c\}$, $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = c,\ (x, y) \in \mathbb{R}^{\not 2}\}$

2. Função polinomial: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule,

   (a) $f(-1, 2)$ (b) $f(a, +b, a - b)$ (c) D_f (d) Imf (e) G_f

   Solução

   (a) $f(-1, 2) = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

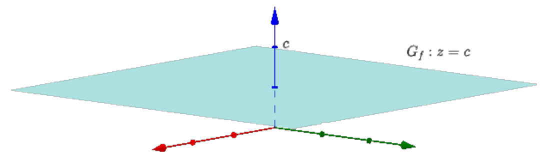


Figure 7: Gráfico da função constante

(b) $f(a+b, a-b) = (a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$

(c) $D_f = \mathbb{R}^2$

(d) $Im_f = [0, +\infty[$

(e) $G_f : z = f(x, y) \Longrightarrow G_f : z = x^2 + y^2$ (paraboloide circular)
Impondo $x = 0$, obtemos $z = x^2$, de forma que no plano yz a interseção do G_f é uma parábola. Se tomarmos $z = k \quad (k > 0)$ obteremos $x^2 + y^2 = k$. Isto significa que os traços ou cortes horizontais são circunferências.
Assim, o esboço do G_f é:

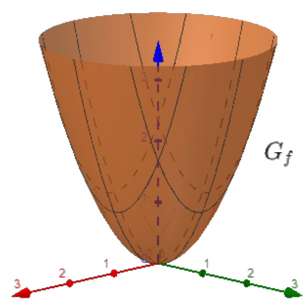


Figure 8: Gráfico da função $f(x, y) = x^2 + y^2$

3. Seja $f(x, y) = \sqrt{y - x} + \sqrt{1 - y}$. Esboce o domínio da função.

Solução
A função f está bem definida se os radicandos $y - x$ e $1 - y$ não forem negativos, isto é: $y - x \geqslant 0$ e $1 - y \geqslant 0 \Longleftrightarrow y \geqslant x$ e $y \leqslant 1$ Portanto, o domínio de f é dado por onde: $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geqslant x\}$ e $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leqslant 1\}$.

Exercícios

1. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$. Determine:
(a) $f(1, 1)$ (b) $f(e, 1)$ (c) o domínio de f (d) a imagem de f

2. Seja $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$. Determine:

(a) o domínio de f

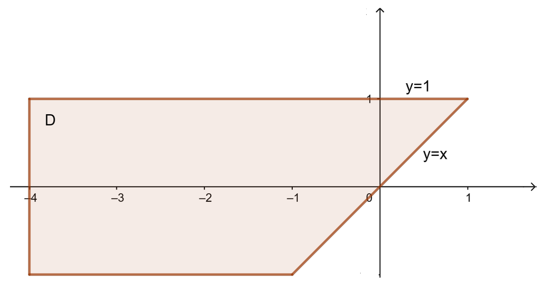


Figure 9: Domínio da função $f(x,y)=\sqrt{y-x}+\sqrt{1-y}$

(b) a imagem de f

(c) o gráfico de f.

3. Seja $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$. Determine:

   (a) $f(1,3,-4)$

   (b) o domínio de f

   (c) a imagem de f.

4. Determine e faca o esboço do domínio das função

   (a) $f(x,y)=\frac{5\ln(x+y)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

   (b) $f(x,y,z)=\ln\left(16-4x^2-4y^2-z^2\right)$

5. Esboce o gráfico da função

   (a) $f(x,y)=2$

   (b) $f(x,y)=1-x-y$

   (c) $f(x,y)=4-x^2-y^2$

   (d) $f(x,y)=1-x^2$

   (e) $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-16y^2}$

   (f) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

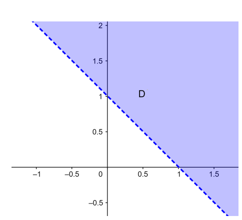
   (g) $f(x,y)=y^2-x^2$

   (h) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$

Respostas

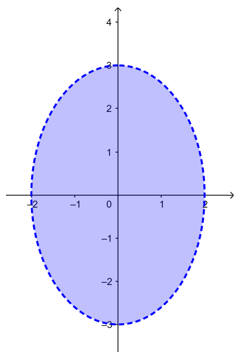
1. (a) 0 (b) 1

   (c) $\{(x,y);x+y>1\}$



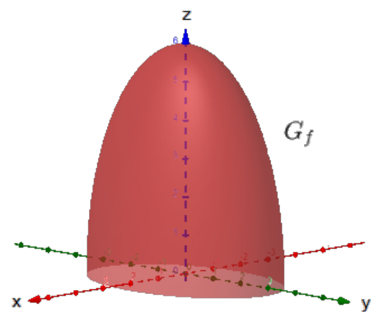
(d) $\mathbb{R}$

2. (a) $\left\{(x,y); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leqslant 1\right\}$



(b) $[0,6]$

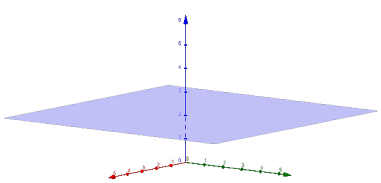
(c) $G_f : \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36}=1, z \geqslant 0$



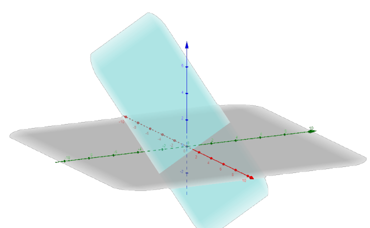
3. (a) $\frac{1}{5}$
   (b) $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2>1\}$
   (c) $]0,+\infty[$

4. (a) $(x,y); x^2+y^2<4ey>-x$
   (b) $(x,y,z); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}<1$

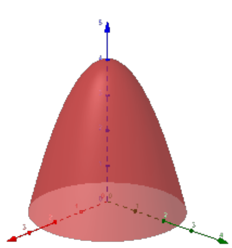
5. (a) $G_f : z=2$ (plano horizontal)



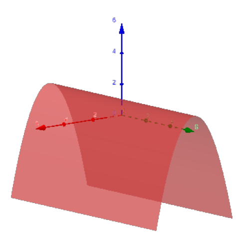
(b) $x+y+z=1$ (plano)



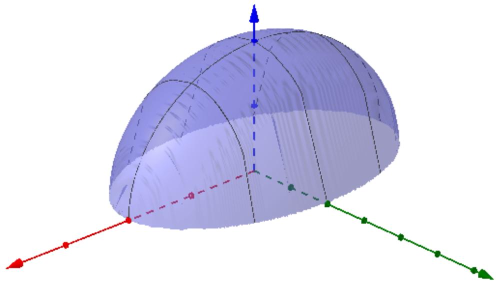
(c) $z=4-x^2-y^2$ (paraboloide)



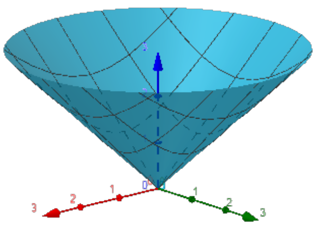
(d) $G_f : z = 1-x^2$ (cilindro parabólico)



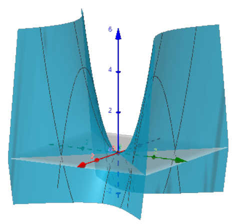
(e) $G_f : \frac{x^2}{16}+y^2+\frac{z^2}{16}=1, z \geq 0$



(f) $G_f : z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (parte superior do cone)



(g) $G_f : z = y^2 - x^2$ (paraboloide hiperbólico)



(h) $G_f : z = \frac{1}{x^2+y^2}$