

# Funções escalares de várias variáveis

## Derivadas Parciais de Ordem Superior

### Objetivos:

- cálculo de derivadas parciais de ordem superior;
- teorema de Schwarz;
- polinômio de Taylor de ordem 2.

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, diferenciável. Então existem as funções derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as funções  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$  sejam diferenciáveis em  $D$ . Então, temos as funções derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Supondo as funções  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  diferenciáveis em  $D$ , temos as funções derivadas parciais de 3 ordem:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

E assim por diante.

**Observação:** Caso as parciais  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$  existam, essa seria sua definição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b + k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{k}$$

**Definição:** Dizemos que  $f$  é de classe  $C^k$  em  $D$  se  $f$  tem derivadas parciais de ordem  $k$  contínuas em  $D$ .

**Teorema de Schwarz** Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto. Se  $f$  for de classe  $C^2$  em  $D$ , então as derivadas parciais mistas são iguais em  $D$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D$$

### Polinômio de Taylor de Ordem 1

Seja  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Seja  $(a, b) \in D$ . O polinômio:

$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  perto de  $(a, b)$ .

Sabemos que  $\Delta f \simeq df$  quando  $(x, y) \simeq (a, b)$ . Logo,

$$f(x, y) - f(a, b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

Se  $(x, y) \simeq (a, b)$

Donde,

$$f(x, y) \simeq f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

Portanto,  $f(x, y) \simeq P_1(x, y)$ , se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

### Polinômio de Taylor de Ordem 2

Sejam  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  no aberto  $D \subset \mathbb{R}^2$  e  $(a, b) \in D$ . O polinômio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x - a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y - b)^2 \right]$$

é dito polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  perto de  $(a, b)$ .

Mostra-se que  $f(x, y) \simeq P_2(x, y)$  se  $(x, y) \simeq (a, b)$ .

### Observação

- (I)  $P_1(x, y) = L(x, y)$ , a função linearizada de  $f$  perto de  $(a, b)$ .
- (II)  $P_2(x, y)$  também serve para aproximar os valores da função  $f$  em pontos próximos a  $(a, b)$ . O erro de aproximação de  $P_2(x, y)$  é menor do que o erro de aproximação pela linearizada.
- (III) É aconselhável aproximar por  $P_2(x, y)$  quando  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ . Exemplo:  $f(x, y) = \cos(x + y)$  em  $(0, 0)$ .

## Exemplos

1. Calcule todas as derivadas parciais de 2 ordem de  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ .

### Solução

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 - 2x^2 + 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(1 + x^2 + y^2) - 2y \cdot 2y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 + 2y^2 - 4y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{2 + 2x^2 - 2y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2y \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

2. Seja  $u = f(x - at) + g(x + at)$ , onde  $f$  e  $g$  são duas funções quaisquer de uma variável real e deriváveis até a 2ª ordem. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação de onda.

### Solução

Derivando  $u$  em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + g'(x + at)$ .

Logo,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x - at)}_1 + g''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x + at)}_1$

donde,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x - at) + g''(x + at)$  (1)

Derivando  $u$  em relação a  $t$ , temos:

$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + g'(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a$

donde  $\frac{\partial u}{\partial t} = -af'(x - at) + ag'(x + at)$ .

Logo,  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(x - at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x - at)}_{-a} + ag''(x + at) \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(x + at)}_a$ , donde

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at) \frac{\partial}{\partial t}(x + at)$ , ou

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 (f''(x - at) + g''(x + at))$  (2)

De (1) e (2), vemos que  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , como queríamos verificar.

3. Seja  $w(x, t) = (a \cos(cx) + b \sen(cx))e^{-kc^2t}$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes. Verifique que

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Esta equação é conhecida como a equação do calor.

### Solução

Derivando  $w$  em relação a  $t$ , temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -kc^2 e^{-kc^2t} (a \cos(cx) + b \sen(cx))$$

Derivando  $w$  em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{kc^2t} (-ac \sen(cx) + bc \cos(cx))$$

Derivando de novo em relação a  $x$ , temos:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = e^{-k^2t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sen(cx)) = -c^2 e^{-kc^2t} (a \cos(cx) + b \sen(cx))$$

Portanto,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = k \left[ -c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \right] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

4. Sejam  $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $D$  aberto, duas funções de classe  $C^2$  e tais que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Prove que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  e  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ .

Esta equação é conhecida como equação de Laplace.

### Solução

Derivando  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$  em relação a  $x$ ; e  $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$  em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$

donde,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ .

Como  $g$  é de classe  $C^2$  então, pelo teorema de Schwarz, temos  $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$ .

Logo,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .

Derivando,  $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y}$  em relação a  $x$  e  $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$  em relação a  $y$ , temos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Logo,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

Como  $f$  é de classe  $C^2$ , então  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Assim,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ .

5. Mostre que a seguinte função é solução da equação do calor, para  $a, b$  e  $c$  constantes.

$$w(x, t) = (a \cos(cx) + b \sin(cx)) e^{-ke^2 t}$$

### Solução

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= -kc^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \\
\frac{\partial \omega}{\partial x} &= e^{-kc^2 t} (-ac \sin(cx) + bc \cos(cx)) \\
\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= e^{-kc^2 t} (-ac^2 \cos(cx) - bc^2 \sin(cx)) = \\
&= -c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx)) \\
\frac{\partial \omega}{\partial t} &= k [-c^2 e^{-kc^2 t} (a \cos(cx) + b \sin(cx))] = k \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

### Solução

6. Seja  $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- (a) Determine  $P_1(x, y)$ , o polinômio de Taylor de ordem 1, de  $f$  em volta de  $(1, 1)$ .
- (b) Utilizando  $P_1(x, y)$ , calcule um valor aproximado para  $f(x, y)$ , sendo  $x = 1,001$  e  $y = 0,99$ .

### Solução

(a) Temos  $P_1(x, y) = f(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)(y - 1)$

Como  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 2x$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 + 4$ , resulta  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 1$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 7$ .

Então,  $P_1(x, y) = 5 + 1(x - 1) + 7(y - 1)$ , ou seja,  $P_1(x, y) = x + 7y - 3$ .

(b) Como  $x = 1.001 \simeq 1$  e  $y = 0.99 \simeq 1$ , então

$$f(1.001, 0.99) \simeq P_1(1.001, 0.99) = 1.001 + 7 \cdot (0.99) - 3 = 1,001 + 6.93 - 3 = 4.931.$$

7. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x, y) = x \sin y$ , ao redor do ponto  $(0, 0)$ .

### Solução

Temos

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right].$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos y, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x \sin y$$

$$\text{então, } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0.$$

$$\text{Assim, } P_2(x, y) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{1}{2} [0 \cdot x^2 + 2 \cdot 1 \cdot xy + 0 \cdot y^2]$$

$$\text{ou seja, } P_2(x, y) = xy$$

8. Use o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f(x, y) = \text{sen } x$  na origem para obter uma aproximado de  $f(0.1, 0.1)$ .

### Solução

Como  $(0.1, 0.1) \simeq (0, 0)$ , então

$$f(0.1, 0.1) \simeq P_1(0.1, 0.1) = (0, 1)(0, 1)$$

ou seja,

$$f(0.1, 0.1) \simeq 0.01$$

## Exercícios

1. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x, y) = x^3y^2 + xy^4$ .
2. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x, y) = xye^{xy^2}$ .
3. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da função  $f(x, y, z) = x^2 \text{sen}(yz)$ .
4. Calcule todas as derivadas de segunda ordem da seguinte função no ponto  $(0, 0)$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

5. Dizemos que uma função de duas variáveis é harmônica se é de classe  $C^2$  e satisfaz a equação de Laplace:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Mostre que a seguinte função é harmônica

$$k(x, y) = e^x \text{sen } y + e^y \cos x$$

6. Use o polinômio de Taylor de ordem 1 da função  $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$  no ponto  $(1, 1)$  para obter uma aproximação de  $f(1.1, 0.9)$ .
7. Determine  $P_2(x, y)$  de  $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$  ao redor de  $(0, 0)$ .
8. Usando o polinômio de Taylor de 2 ordem para alguma função conveniente, dê o valor aproximado de  $(0.95)^{2.01}$  (considere  $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}$ )

**Respostas**

1.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y + 4y^3$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3 + 12xy^2$ .
2.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{y^2(1+2y^2)}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xye^{y^2}(3 + 2y^2)$ .
3.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \text{ sen}(yz)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2xz \text{ cos}(yz)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2xy \text{ cos}(yz)$ ,  
 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2z^2 \text{ sen}(yz)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -x^2yz \text{ sen}(yz)$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -x^2y^2 \text{ sen}(yz)$ .
4.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ .
5. sem resposta
6. 0.95
7.  $x + 2y - \frac{x^2}{2} - 2xy - 2y^2$
8. 0.90225