



Funções escalares de várias variáveis

Topologia em \mathbb{R}^n

Objetivos:

- Compreender a noção de bola aberta; identificar conjuntos abertos, fechados, limitados e compactos.
- Identificar se um conjunto é aberto ou fechado a partir do conjunto fronteira.
- Compreender a definição de pontos fronteira e pontos de acumulação.

Definição 1. A bola aberta de centro $P \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ é o conjunto dos pontos $X \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto P é menor do que r . Indicaremos por $B_r(P)$. Assim,

$$B_r(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - P\| < r\}$$

Quando $n = 1$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro P e raio r na reta é o intervalo aberto $]P - r, P + r[$.

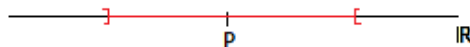


Figure 1: Bola de centro P e raio $r > 0$ em \mathbb{R}

Quando $n = 2$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro P e raio r no plano \mathbb{R}^2 é o disco aberto. Se $P = (a, b)$, então

$$B_r(a, b) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(x, y) - (a, b)\| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < r \right\}$$

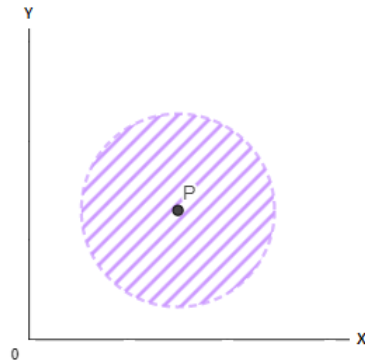


Figure 2: Bola de centro P e raio $r > 0$ em \mathbb{R}^2

Quando $n = 3$, a bola aberta $B_r(P)$ de centro $P = (a, b, c)$ e raio r no espaço \mathbb{R}^3 é a esfera aberta

$$B_r(a, b, c) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < r \right\}$$

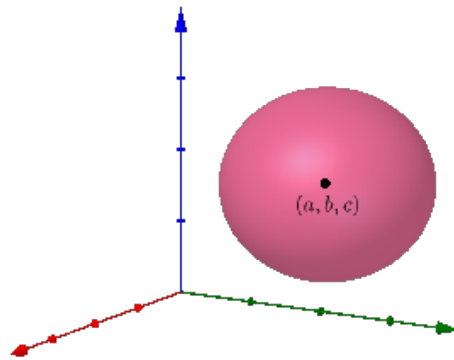


Figure 3: Bola de centro P e raio $r > 0$ em \mathbb{R}^3

Definição 2. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto aberto, se dado $P \in D$ existir uma bola aberta $B_r(P) \subset D$.

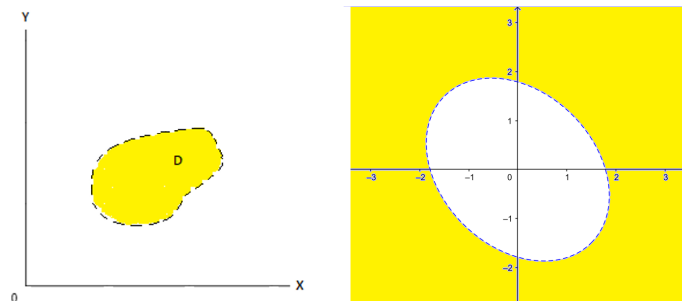


Figure 4: Conjuntos abertos em \mathbb{R}^2

Os conjuntos \emptyset , \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 e todas as bolas abertas são conjuntos abertos.

Definição 3. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que F é um conjunto fechado, se o complementar dele $D = \mathbb{R}^n \setminus F$ for aberto.

Observação:

(I) Os conjuntos

$$\overline{B_r(P)} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - p\| \leq r\}$$

são fechados. Eles são chamados de bolas fechadas.

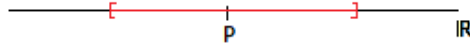


Figure 5: Bola fechada em \mathbb{R}

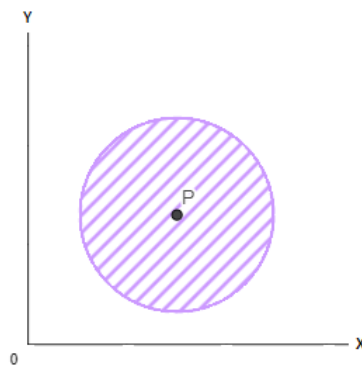


Figure 6: Bola fechada em \mathbb{R}^2

(II) Os únicos conjuntos em \mathbb{R}^n abertos e fechados ao mesmo tempo são \emptyset e \mathbb{R}^n .

Definição 4. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ (pertencente ou não a D) se diz ponto de fronteira de D se toda bola $B_r(P)$ intersesta a D e também a seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus D$. O conjunto formado por todos os pontos fronteira de D é chamado conjunto fronteira de D e denotado por $Fr(D)$.

Observação:

- (I) Um conjunto é fechado se contem todos os pontos de sua fronteira. Por exemplo, as bolas fechadas.
- (II) Se um conjunto contem pelo menos um ponto fronteira, então não é aberto. Por exemplo, o intervalo $]0, 1]$.

Definição 5. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto limitado, se existir um raio $r > 0$ tal que $D \subset B_r(0)$.

Dizemos que D é não limitado se para qualquer $r > R_0$, existe algum ponto em D que não pertence a $B_r(0)$.

Observação:

- (I) D também seria limitado se existir um raio $r > 0$ tal que $D \subset \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < r, \forall i = 1, \dots, n\}$. Se $n = 2$, esse conjunto seria um quadrado de lado r .
- (II) As bolas abertas e as bolas fechadas são conjuntos limitados.
- (III) O conjunto da Figura 4 (esquerda) é limitado. Já o conjunto da Figura 4 (direita) é não limitado, pois para qualquer $r > 3$ sempre existirá um ponto $(0, r + 1)$ fora da bola $B_r(0)$.

Definição 6. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que D é um conjunto compacto se for fechado e limitado.

As bolas fechadas são compactas, as bolas abertas não o são.

Definição 7. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $P \in \mathbb{R}^n$ (pertencente ou não a D) é um ponto de acumulação de D (p.a.) se qualquer bola aberta centrada em P contém pelo menos um ponto $x \in D$, $x \neq P$.

Os extremos de um intervalo aberto em \mathbb{R} são pontos de acumulação.

Exemplos

- Os seguintes conjuntos são abertos:

- interior e exterior de uma elipse

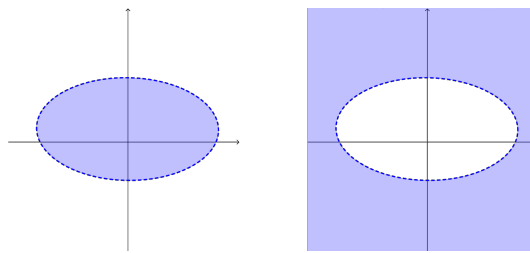


Figure 7: Interior (esquerda) e exterior (direita) de uma elipse

- interior e exterior de um polígono

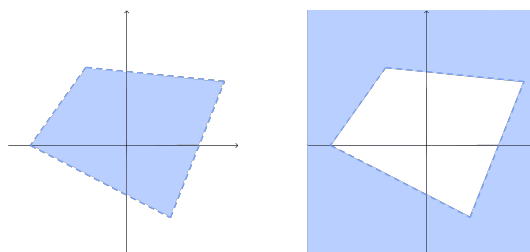


Figure 8: Interior (esquerda) e exterior (direita) de um polígono

- (c) conjuntos definidos algebricamente por uma desigualdade. Por exemplo, $x^2 - y^2 > 0$ ou $x^2 - y^2 < 0$.

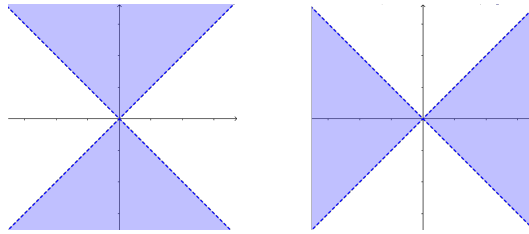


Figure 9: Conjunto dado por $x^2 - y^2 > 0$ (esquerda) e $x^2 - y^2 < 0$ (direita)

- (d) O conjunto $B_r(a, b, c) \setminus \{(a, b, c)\}$

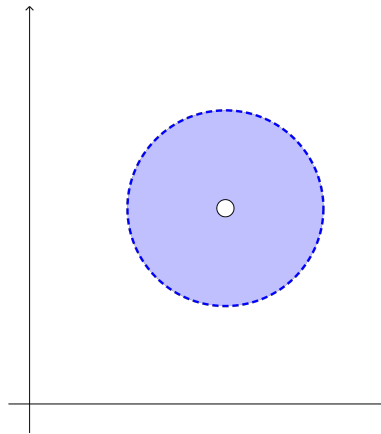


Figure 10: Bola furada em \mathbb{R}^2

2. Os seguintes conjuntos são fechados:

- (a) uma elipse

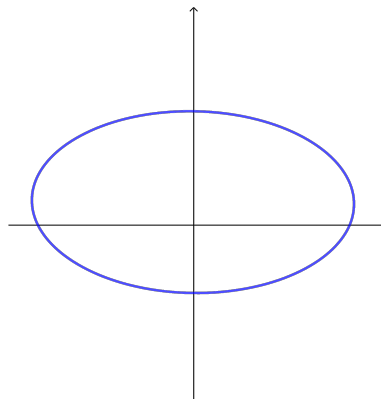


Figure 11: Elipse

- (b) um polígono

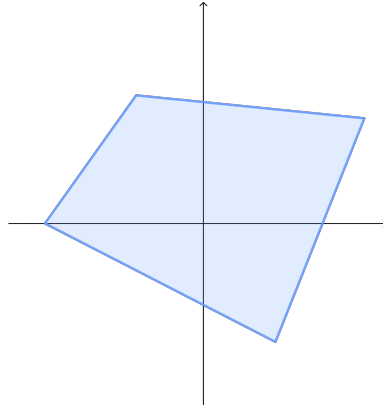


Figure 12: Polígono

(c) conjuntos definidos algebricamente por uma igualdade. Por exemplo, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 \leq 0$, $x^2 - y^2 \geq 0$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

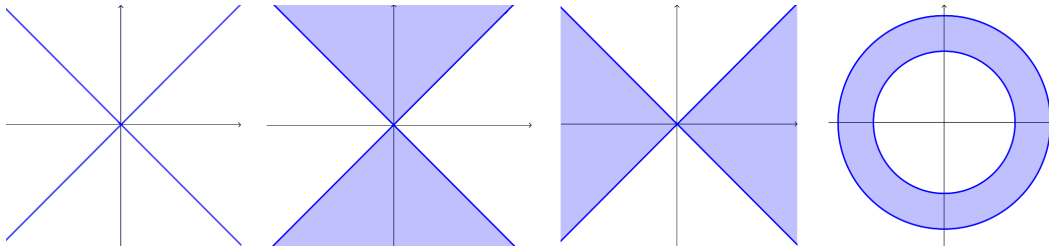
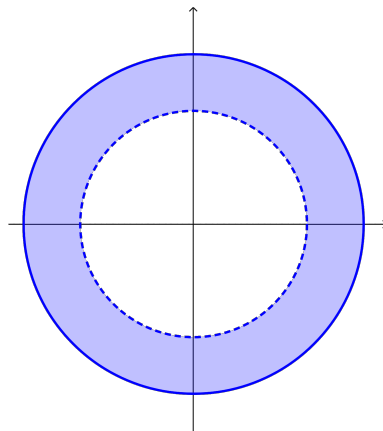


Figure 13: Conjuntos dados por $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 - y^2 \leq 0$, $x^2 - y^2 \geq 0$, $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ (respectivamente de esquerda a direita)

3. Os conjuntos definidos por uma igualdade e uma desigualdade. Por exemplo, $4 < x^2 + y^2 \leq 9$ não são nem abertos nem fechados.

Figure 14: Conjuntos dados por $4 < x^2 + y^2 \leq 9$

4. (a) A fronteira de um intervalo (fechado, aberto, aberto por um lado e fechado por o outro) está formada pelos extremos: $Fr(]P - r, P + r]) = Fr([P - r, P + r]) = Fr([P - r, P + r[) = Fr([P - r, P + r]) = \{P - r, P + r\}$.

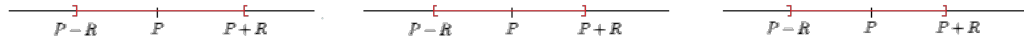


Figure 15: intervalos limitados com mesma fronteira

- (b) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em \mathbb{R}^2 são circunferências:
 $Fr(B_r(a, b)) = Fr(\overline{B_r(a, b)}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}$

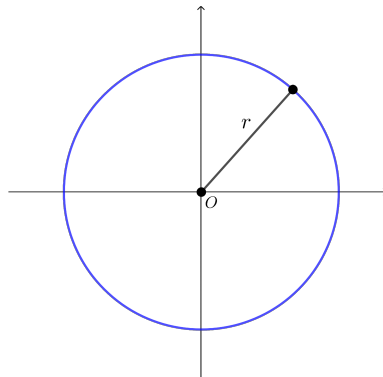


Figure 16: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em \mathbb{R}^2

- (c) A fronteira das bolas abertas e das bolas fechadas em \mathbb{R}^3 são esferas: $Fr(B_r(a, b, c)) = Fr(\overline{B_r(a, b, c)}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2\}$

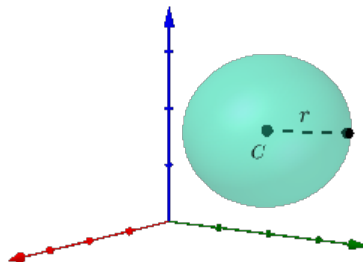


Figure 17: Fronteira de bola aberta e de bola fechada em \mathbb{R}^3

5. Seja D um intervalo aberto de \mathbb{R} . Sejam $P \in D$ e $Q, R \notin D$.

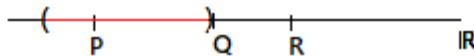


Figure 18: Pontos de acumulação no interior e nos extremos do intervalo

Vemos que $P \in D$ é um p.a. de D , $Q \notin D$ é também um p.a. de D , mas $R \notin D$ não é um p.a. de D .

6. Seja $D =]a_1, c[\cup]c, b[$.

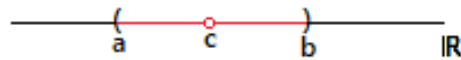


Figure 19: Pontos de acumulação em intervalos furados

Vemos que $c \notin D$ é um p.a. de D .

7. O ponto (a, b) é de acumulação do conjunto $\overline{B_r(a, b)} \setminus \{(a, b)\}$.

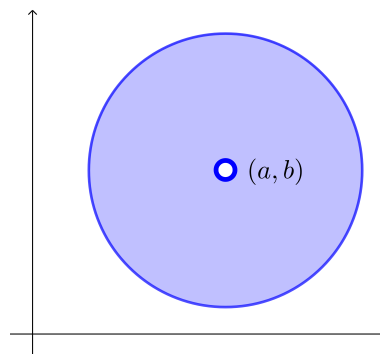


Figure 20: Ponto de acumulação da bola fechada furada em \mathbb{R}^2

8. Considere o conjunto D abaixo:

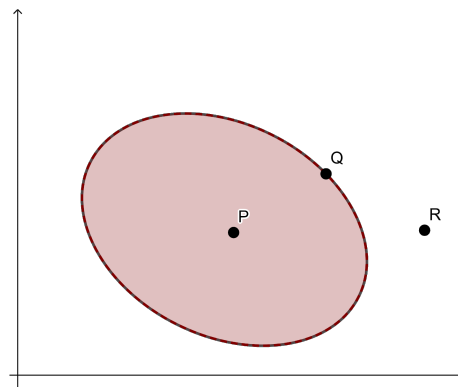


Figure 21: Pontos de acumulação em conjuntos fechados de \mathbb{R}^2

Temos que $P, Q \in D$ são p.a. de D e $R \notin D$ não é p.a. de D .

9. Considere o conjunto D abaixo:

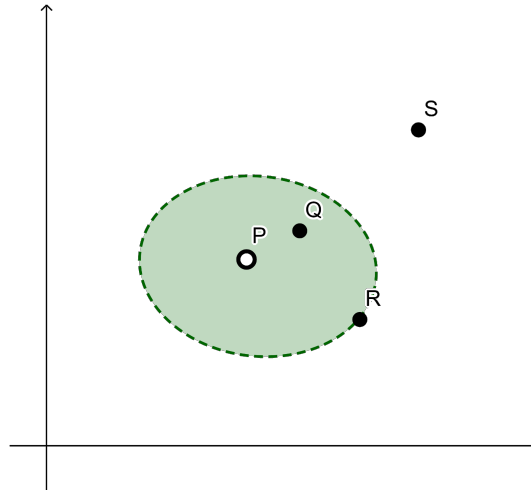


Figure 22: Pontos de acumulação em conjuntos abertos de \mathbb{R}^2

Temos que $P \notin D$ é um p.a. de D , $Q \in D$ é p.a., $R \notin D$ é p.a. e $S \notin D$ não é p.a.

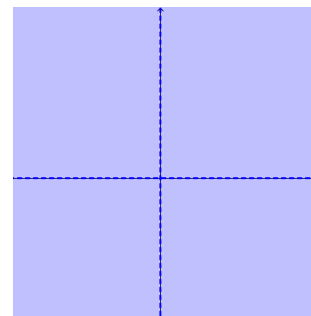
Exercícios

- Esboçar e determinar se os seguintes conjuntos são abertos, fechados, limitados e/ou compactos. Calcule os conjuntos fronteira.

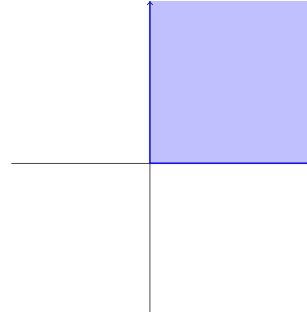
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$.
- $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$.
- $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 1 - x^2\}$.
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$.
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x^2\}$.
- $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3 < x^2 + y^2 < 9\}$.
- $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x^2 + y^2 \leq 7\}$.
- $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x^2 + y^2 < 7\}$.

Respostas

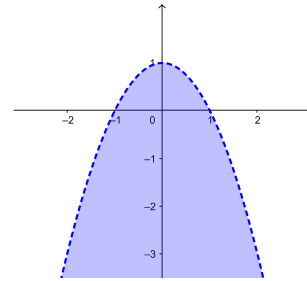
- aberto, não fechado, não limitado e não compacto. $Fr(A) = \{\text{reta } x = 0\} \cup \{\text{reta } y = 0\} = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$.



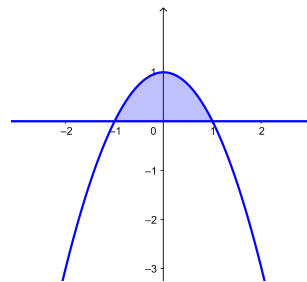
- (b) não aberto, fechado, não limitado, não compacto. $Fr(B) = \{0\} \times [0, +\infty) \cup [0, +\infty) \times \{0\}$.



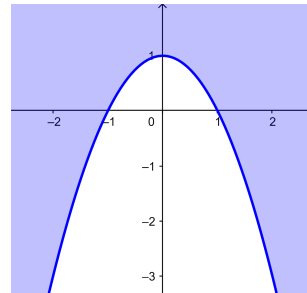
- (c) aberto, não fechado, não limitado, não compacto. $Fr(C) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$.



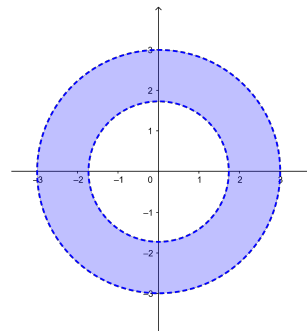
- (d) não aberto, fechado, limitado, compacto. $Fr(D) = \{(t, 1 - t^2) : t \in [-1, 1]\} \cup [-1, 1] \times \{0\}$.



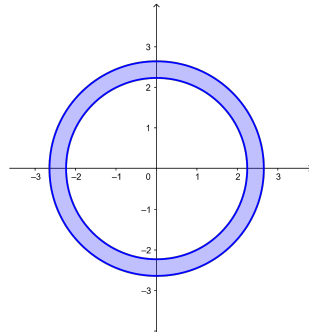
- (e) não aberto, fechado, não limitado, não compacto. $Fr(E) = \{(t, 1 - t^2) : t \in \mathbb{R}\}$.



- (f) aberto, não fechado, limitado, não compacto. $Fr(F) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$.



- (g) não aberto, fechado, limitado, compacto. $Fr(G) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 7\}$.



- (h) não aberto, não fechado, limitado, não compacto. $Fr(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 7\}$

