Funções escalares de várias variáveis

Superfícies de nível

Objetivos:

- Compreender a noção de superfícies de nível e sua relação com o domínio e imagem da função.
- Calcular e identificar a superfície de nível que passa por um dado ponto.
- Esboçar as superfícies de nível.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \quad \longmapsto w = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}$.

Seja $k \in \Im_f$. O conjunto $\mathcal{C}_k = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in D; f(x_1, x_2, ..., x_n) = k\} \subset D \subset \mathbb{R}^n$ é dito conjunto de nível de f no nível k. As curvas de nível são o caso particular $n = 2$.

Quando $n = 3$, os conjuntos de nível se denotam por S_k e se chamam superfície de nível de f no nível k.

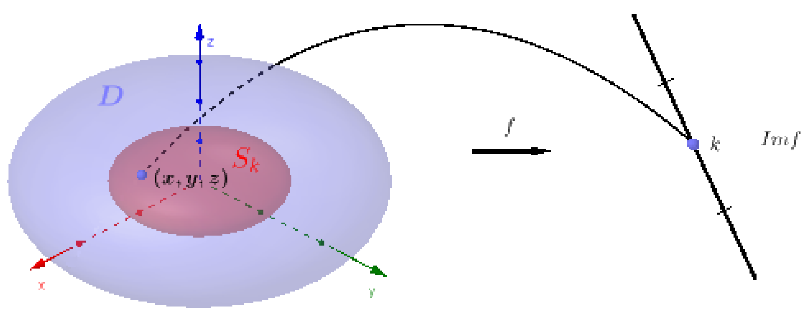

Figure 1: Relação da superfície de nível com o domínio e a imagem da função

Observação

(I) Se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^3$, $C_k \subset D \subset \mathbb{R}^2$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^4$, $S_k \subset D \subset \mathbb{R}^3$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

(II) Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, então $G_f \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{C}_k \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $Imf \subset \mathbb{R}$.

Exemplos

1. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) a superfície de nível que passa pelo ponto $(1, 0, 0)$

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^3$

   (b) $Imf = [0, +\infty[$

   (c) $f(1, 0, 0) = 1$, então o nível da curva é $k = 1$. Daí, $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ é a curva desejada. Como essa equação não envolve a variável z, isso significa que qualquer plano horizontal $z = k$ (paralelo ao plano xy) intercepta o G_f segundo a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Assim, o G_f é obtido tomando-se a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no plano xy e deslocando-a paralelamente ao eixo z. A superfície é dita <u>cilindro circular reto</u>.

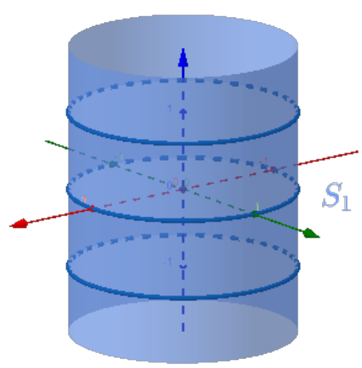

Figure 2: Superfície de nível $k = 1$ da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

2. Seja $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Determine:

   (a) D_f

   (b) Imf

   (c) S_k, superfícies de nível

   Solução

   (a) $D_f = \mathbb{R}^3$

   (b) $Imf = \mathbb{R}$

   (c) Seja $k \in I_mf = \mathbb{R}$. Então, a superfície de nível correspondente é

$$S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$$

Se $k = 0$, temos $S_0 : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ou $z^2 = x^2 + y^2$. Fazendo $x = 0$, temos $z = \pm|y|$ e fazendo $z = c$, temos $x^2 + y^2 = c^2$. Logo, temos a forma de S_0 que é um cone.

Se $k > 0$, temos $S_k : x^2 + y^2 - z^2 = k$. Fazendo $x = 0$, temos a hipérbole $y^2 - z^2 = k$ no plano yz de vértices $(0, \sqrt{k}, 0)$ e $(0, -\sqrt{k}, 0)$. Fazendo $z = c$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = k + c^2$. Assim, temos a superfície S_k, $k > 0$, dita hiperboloide de uma folhas.

Se $k < 0$ ou $-k > 0$, temos $S_k : z^2 \to x^2 - y^2 = -k$. Fazendo $x = 0$, temos a hipérbole $z^2 - y^2 = -k$ no plano yz de vértices $(0, 0, \sqrt{-k})$, $(0, 0, -\sqrt{-k})$. Fazendo $z = c$, com $c > \sqrt{-k}$ ou $c < \sqrt{-k}$, temos circunferências $x^2 + y^2 = k + c^2$. Assim, temos a superfície S_k, $k < 0$, dita hiperboloide de duas folhas.

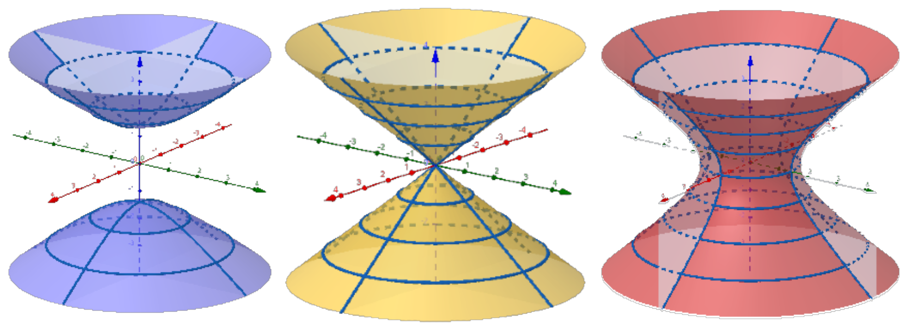

Figure 3: Superfície de nível $k < 0$ (azul), $k = 0$ (amarelo) e $k > 0$ (vermelho) da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

A versão do mapa de contorno para as superfícies de nível seria um gráfico 3D com as superfícies de nível uma dentro da outra:

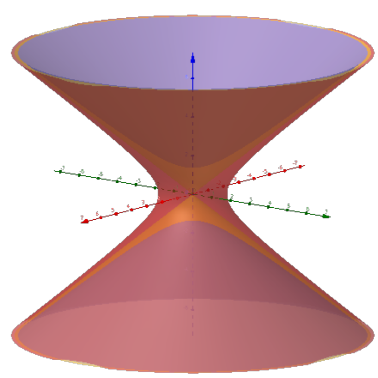

Figure 4: Gráfico 3D com as superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

Exercícios

1. Seja $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Determine:

   (a) D_f

(b) Imf

(c) superfícies de nível

2. A temperatura em uma região D do $\mathbb{R}^3$ é dada por $T(x,y,z)=\sqrt{36-4x^2-9y^2-z^2}$ Determine:

(a) a região D

(b) ImT

(c) o conjunto de pontos que possuem a mesma temperatura do que o ponto $(0,1,\sqrt{2})$

(d) as isotermas

3. Se a voltagem V no ponto $P(x,y,z)$ é dada por

$$V=\frac{6}{(x^2+4y^2+9z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Determine:

(a) domínio de V

(b) ImV

(c) as equipotenciais

Respostas

1. (a) $D_f : x^2+y^2+z^2>1$

(b) $Imf=\mathbb{R}$

(c) $S_k : x^2+y^2+z^2=1+e^k, \quad k\in\mathbb{R}$, esferas concêntricas de raio $\sqrt{1+e^k}$ e centro na origem.

2. (a) $D=\left\{(x,y,z); \quad \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{36}\leqslant 1\right\}$

(b) $ImT=[0,6]$

(c) $S_5 : 4x^2+9y^2+z^2=11$

(d) $S_0 : \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{36}=1, \quad S_6=\{(0,0,0)\}, \quad S_k : 4x^2+9y^2+z^2=36-k^2$, $0<k<6$, elipsoides concêntricos de centro na origem.

3. (a) $D_V=\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$

(b) $ImV=]0,+\infty[$

(c) $S_k : x^2+4y^2+9z^2=\frac{36}{k^2}$, $k>0$, elipsoides concêntricos de centro na origem.