



Funções escalares de várias variáveis

Aproximação linear de funções

Objetivos:

- diferencial total; estimação da variação de uma função; cálculo de erro absoluto e relativo;
- aproximação linear de uma função; estimação de valores da função em um ponto;

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(a, b) \in D$. Então

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$\text{Onde } \varepsilon(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k.$$

Diferencial: Se define diferencial de f no ponto (a,b) relativa aos acréscimos h e k como a função

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k = \text{diferencial de } f \text{ em } (a,b)$$

que depende de h e k .

Se f é diferenciável em (a,b) , temos

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h,k) &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|} \cdot \|(h,k)\| \\ &= \underbrace{\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\|(h,k)\|}}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \|(h,k)\|}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) \simeq \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k, \quad \text{se } (h,k) \simeq (0,0).$$

Pondo $\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a,b)$ = variação de f quando se passa de (a,b) para $(a+h, b+k)$, obtemos:

$$\Delta f \simeq df, \text{ se } (h, k) \simeq (0, 0)$$

O valor df também pode ser interpretado como o erro total nos valores de $f(x, y)$ se os incrementos h e k medem o erro na medição dos valores x e y respectivamente. O erro relativo é o quociente $|\frac{df}{f(a, b)}|$ e a percentagem de variação é $|\frac{df}{f(a, b)}| * 100\%$.

Observe-se que na notação de $h = \Delta x$, $k = \Delta y$, a diferencial é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y$$

Analogamente, seja $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, D aberto em \mathbb{R}^3 , é uma função de três variáveis com derivadas parciais contínuas em D (logo diferenciável). Para cada $(a, b, c) \in D$, definimos a diferencial de f em (a, b, c) relativa aos acréscimos $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)\Delta z$$

Mostra-se que $\Delta f \simeq df$ se $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \simeq (0, 0, 0)$.

Observação:

1. Notação clássica de diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

2. Em funções de uma variável $y = f(x)$, a diferencial é definida como $dy = f'(x)dx$, sendo dx a variável independente.
3. Como $\Delta f \simeq df$, temos que se $df > 0$ (respectivamente $df < 0$), a função aumenta (diminui) quando se passa de (a, b) para $(a + h, b + k)$.
4. Se $df = 0$, então a função não varia quando se passa de (a, b) para $(a + h, b + k)$.

Função linearizada: Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, e $(a, b) \in D$. Se existem as parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$, a função

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é bem definida e é chamada de função linearizada de f perto de (a, b) .

Se f é diferenciável em (a, b) , temos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(x, y) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

e podemos garantir que $f(x, y) \simeq L(x, y)$ para todo (x, y) suficientemente próximo de (a, b) .

Observação:

1. A função $L(x, y)$ é usada para estimar valores de $f(x, y)$ quando os mesmos forem complicados de calcular e também quando não se tem uma expressão explícita de f . Por exemplo quando temos apenas dados experimentais numa tabela e desconhecemos a lei ou modelo.
2. A superfície $z = L(x, y)$ é o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a, b))$.
3. $df = L(x, y) - f(a, b)$

Interpretação geométrica da diferencial: Se $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então $dy = f'(a)dx$, e geometricamente se corresponde com a distancia entre os pontos R e Q da figura abaixo. Em quanto Δy se corresponde com a distancia entre os pontos R e P .

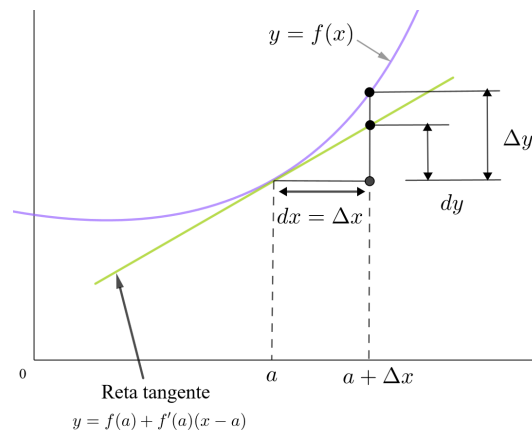


Figure 1: Diferencial de uma função de uma variável

Observe que Δy representa a variação da função $f(x)$ e dy representa a variação da função linearizada de f , $L(x)$ perto do ponto $(a, f(a))$, cujo gráfico é a reta tangente a $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

Ora, se $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, então $dz = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy$, e geometricamente corresponde à distancia do ponto $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b))$ ao ponto do plano tangente $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$. Ora, o valor Δz se corresponde com a distancia entre os pontos $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a, b))$ e o ponto $(a + \Delta x, b + \Delta y, f(a + \Delta x, b + \Delta y))$ do gráfico $z = f(x, y)$.

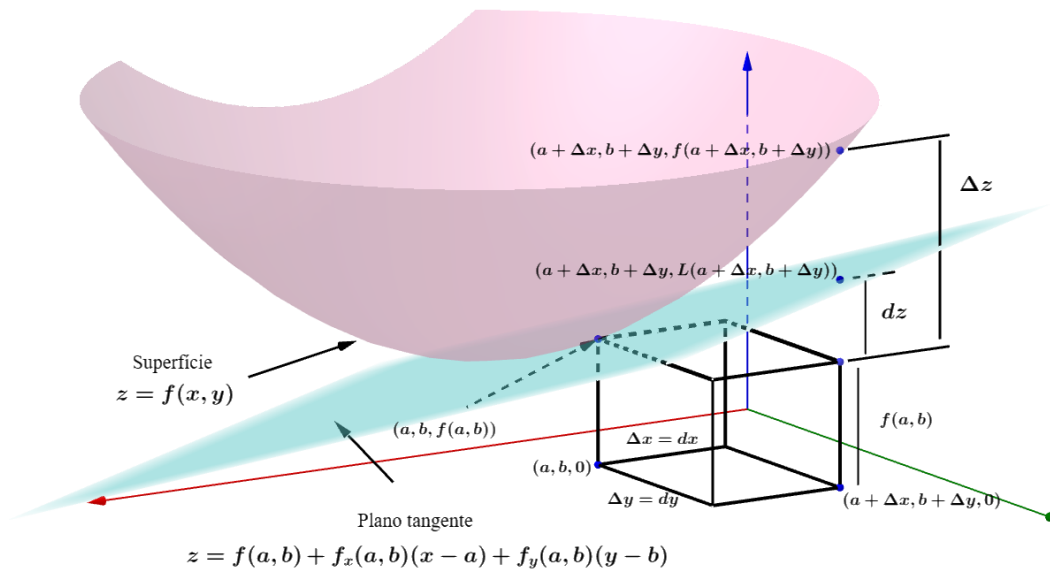


Figure 2: Diferencial de uma função de duas variáveis

Observe que Δz representa a variação da função $f(x, y)$ e dz representa a variação da função linearizada de f , $L(x, y)$ perto do ponto $(a, b, f(a, b))$. Daí $c = L(a + \Delta x, b + \Delta y)$ no ponto de variação no plano tangente $(a + \Delta x, b + \Delta y, c)$.

Exemplos

1. Calcule a diferencial de $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Solução

Temos

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$$

2. Seja $z = xe^{x^2 - y^2}$. Calcule um valor aproximado para z , correspondente a $x = 1,01$ e $y = 1,002$.

Solução

A função $z = xe^{x^2 - y^2}$ é diferenciável em \mathbb{R}^2 , por $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ serem contínuas em \mathbb{R}^2 .

Sejam $(a, b) = (1, 1)$, $h = 0,01$ e $k = 0,002$. Como $(h, k) \simeq (0, 0)$, Então

$$\Delta z \simeq dz$$

Onde $\Delta z = z(1.01, 1.002) - z(1, 1) = z(1.01; 1.002) - 1$,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}(1, 1)h + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1)k =$$

$$\begin{aligned}
&= [e^{x^2-y^2} + x \cdot 2xe^{x^2-y^2}]_{(1,1)} \cdot (0,01) + [x \cdot (-2y)e^{x^2-y^2}]_{(1,0)} \cdot (0,002) = \\
&= (1+2) \cdot (0,01) + (-2) \cdot (0,002) = 0,03 - 0,004 = 0,026
\end{aligned}$$

Então, $z(1,01, 1,002) - 1 \simeq 0,026$, ou seja $z(1,01, 1,002) \simeq 1,026$

3. A altura de um cone é $h = 20 \text{ cm}$ e o raio da base é $r = 12 \text{ mm}$. Calcule um valor aproximado para a variação, Δv no volume quando h aumenta de 2 mm e r decresce 1 mm . Estime o erro relativo e a percentagem de variação do volume.

Solução

O volume do cone de altura h e raio da base r é dado por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, que é uma função diferenciável em \mathbb{R}^2 . Sejam $r_0 = 12$, $h_0 = 20$.

Como h aumenta de 2 mm , então $\Delta h = 2$ e como r decresce de 1 mm , então $\Delta r = -1$. Como $|\Delta r| \simeq 0$ e $|\Delta h| \simeq 0$, então $\Delta V \simeq dV$, onde

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = \frac{2}{3}\pi r h \Big|_{(12,20)} \cdot \Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2 \Big|_{(12,20)} \cdot \Delta h \\
&= \frac{2}{3}\pi \cdot 12 \cdot 20 \cdot (-1) + \frac{1}{3}\pi (12)^2 \cdot (2) \\
&= -16\pi + 9,6\pi = -6,4\pi
\end{aligned}$$

Assim,

$$\Delta V \simeq -6,4\pi$$

ou seja, a variação ΔV no volume decresce aproximadamente de $6,4\pi \text{ cm}^3$.

O erro relativo é, portanto,

$$\frac{dV}{V(12,20)} = \frac{6,4\pi}{\frac{1}{3}\pi \cdot 144 \cdot 20} = 0,007$$

e a percentagem de variação do volume é de $0,7\%$.

4. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

		Duração (horas)						
Velocidade do vento (km/h)	v \ t	5	10	15	20	30	40	50
	40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
	60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
	80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
	100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
	120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para

- (a) determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas;

Solução

Supondo que a função f é diferenciável, uma aproximação linear da função altura para pontos suficientemente próximos de $(80, 20)$ seria a função

$$L(v, t) = f(80, 20) + \frac{\partial f}{\partial v}(80, 20)(v - 80) + \frac{\partial f}{\partial t}(80, 20)(t - 20)$$

Ora,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(80, 20) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(80 + h, 20) - f(80, 20)}{h}$$

E podemos estimar esse valor considerando a média das taxas de variação média com, por exemplo, $h_1 = 20$ e $h_2 = -20$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(80, 20) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{f(80 + 20, 20) - f(80, 20)}{20} + \frac{f(80 - 20, 20) - f(80, 20)}{-20} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{12.2 - 8.6}{20} + \frac{5.2 - 8.6}{-20} \right) = \frac{1}{2}(0.17 + 0.18) = 0.175. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(80, 20) &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{f(80, 20 + 10) - f(80, 20)}{10} + \frac{f(80, 20 - 5) - f(80, 20)}{-5} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{9.5 - 8.6}{10} + \frac{7.7 - 8.6}{-5} \right) = \frac{1}{2}(0.09 + 0.18) = 0.135. \end{aligned}$$

Assim, a aproximação linear esperada seria

$$L(v, t) = 8.6 + 0.175(v - 80) + 0.135(t - 20)$$

Observação: A estimativa das duas parciais vale 1,5 ponto, se o aluno coloca = em vez de \approx vale até 1. A expressão de $L(v, t)$ vale 2 pontos (incluindo a justificação e a correta formulação da linearizada), se o aluno coloca = em vez de \approx vale 1 pontos.

- (b) estimar a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

Resposta: Considerando a linearização do item (a),

$$f(84, 24) \approx L(84, 24) = 8.6 + 0.175(84 - 80) + 0.135(24 - 20) = 9.84$$

Portanto, as ondas teriam uma altura de aproximadamente 9.84 metros.

Exercícios

- Seja $f(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$. Determine:
 - D_f
 - Im_f
 - Curvas de nível
 - G_f
 - o plano tangente e a reta normal ao G_f no ponto $(1, 0, 1)$
 - Um valor aproximado para $f(0.99, 0.01)$
 - O conjunto dos pontos de continuidade da função

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2[f(x, y) - 1], & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

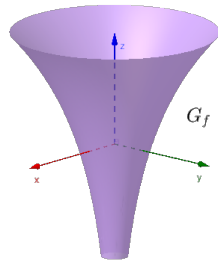
- Dê um valor aproximado de $\sqrt{(0.01)^2 + (3.98)^2 + (2.99)^2}$.
- Determine o erro relativo máximo (aproximado) no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da fórmula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo em l igual a 1% e em g igual a 3%.
- O ângulo central de um setor circular é 80° e o raio é 20 cm e deseja-se reduzir o ângulo de 1° . Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?
- A sensação térmica $W(T, v)$ depende da velocidade do vento v e da temperatura T . Use os dados da seguinte tabela para

		Temperatura T (F°)			
Velocidade do vento v (milhas/h)		10,00	30,00	50,00	70,00
	20,00	10,00	30,00	50,00	70,00
	40,00	5,00	15,00	25,00	35,00
	60,00	3,33	10,00	16,67	23,33
	80,00	2,50	7,50	12,50	17,50

- (a) dar uma equação aproximada da lei $W(T, v)$ que determina a sensação térmica a velocidade do vento próxima a 10 milhas/h e temperatura próxima a $30^\circ F$.
- (b) estimar a sensação térmica se a velocidade do vento for de 11 milhas/h e a temperatura for $29^\circ F$.
6. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por
- $$S = 72,09w^{0,425}h^{0,725},$$
- onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é a medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de uma pessoa, $w=80\text{kg}$ e $h=175\text{cm}$, forem no máximo de 2%, utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da superfície do corpo.
7. A temperatura do ponto (x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 12}$.
- (a) Determine o domínio de $T(x, y)$ e represente-o no plano xy .
- (b) Determine a equação, da isoterma que contém o ponto $(2, 3)$ e faça o seu esboço.
- (c) Determine o plano $z = ax + by + c$ que melhor se aproxima do gráfico de $T(x, y)$ no ponto $(2, 3)$.
- (d) Calcule um valor aproximado da temperatura em $(1.01, 2.99)$.

Respostas

1. (a) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (c) Circunferência de Centro $(0, 0)$ e raio $\sqrt{e^{k-1}}$
- (b) \mathbb{R}



(d)

(e) $z = 1 + 2(x - 1); (x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(2, 0, -1), \lambda \in \mathbb{R}$

(f) 0.98

(g) \mathbb{R}^2

2. 4.978

3. 2%

4. $\Delta r \simeq 0.25 \text{ cm}$ 5. (a) $W(T, v) \simeq 21 + 1,2(T - 30) + 0,6(v - 10)$.(b) $W(29, 11) \simeq 19,2$

6. 2,3%

7. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 12\}$ (b) $k = 0 \Rightarrow c_0 : x^2 + y^2 = 13$ (c) $z = 2x + 3y - 13$ (d) $-2.01 - 0.01$ 