Funções escalares de várias variáveis

Exercícios de revisão resolvidos

1. (Ex. 6 - Aula 3). Uma chapa plana de metal está situada em um plano xy, de modo que a temperatura (em °C) no ponto (x, y) é inversamente proporcional á distância da origem.

   (a) Descreva as isotermas (conjunto de pontos com mesma temperatura).

   (b) Se a temperatura no ponto $P(4, 3)$ é 40°C, ache a equação da isoterma para uma temperatura de 20°C.

   Solução

   (a) A distância de (x, y) a origem é igual a $\sqrt{x^2 + y^2}$. Como a temperatura em (x, y) é inversamente proporcional a $\sqrt{x^2 + y^2}$, então,

   $$T(x, y) = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0, 0),$$

   onde $c > 0$ é uma constante de proporcionalidade. Seja $k \in \operatorname{Im} T =]0, +\infty[$. Então a isoterma ou curva de nível de T, no nível k, é dada por

   $$C_k : T(x, y) = k \Leftrightarrow \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k \Leftrightarrow$$

   $$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{k} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{c^2}{k^2}.$$

   Portanto, as isotermas são circunferências centradas em $(0, 0)$ e de raio $\frac{c}{k}$.

   (b) No ponto indicado, temos: $T(4, 3) = 40 \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{16 + 9}} = 40$. Então $c = 40 \cdot 5 = 200$.
   Logo, $T(x, y) = \frac{200}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. A equação da isoterma para a temperatura de 20°C é dada por C_{20}:

   $$\frac{200}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = 100}.$$

2. (Ex. 6 - Aula 5). Discuta a continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 2 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Solução

As funções $\operatorname{sen}(x^2+y^2)$ e $1 - \cos\sqrt{x^2+y^2}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, pois são compostas de funções continuas.

Logo, $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$ é contínua em $R^2 - \{(0,0)\}$. (1)

Analisemos a continuidade em $(0,0)$.

Façamos $u = x^2+y^2$, e portanto $u \geqslant 0$. Como $(x,y) \to (0,0)$, então $u \to 0^+$.

Temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{1-\cos\sqrt{u}}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital temos

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{\cos u}{\operatorname{sen}\sqrt{u}\cdot \frac{1}{2}(u)^{-1/2}} = \lim_{u\to 0^+} \frac{2\sqrt{u}}{\operatorname{sen}\sqrt{u}} \cdot \cos u = 2.1.1 = f(0,0).$$

Logo, f é contínua em $(0,0)$. (2)

De (1) e (2), temos que f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

3. (Ex. 1 - Aula 7). Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^5}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (b) f é diferenciável em $(0,0)$? Por quê?

Solução

(a) Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3h^5}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 3h^2 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k}\lim_{k\to 0} 0 = 0.$$

(b) Para avaliarmos a diferenciabilidade, calculamos $E(h,k)$:

$$E\left(h,k\right) = f(h,k) - f(0,0) - h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) - k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \\ = \frac{3h^5}{h^2+k^2} - 0 - 0\cdot h - 0\cdot k = \frac{3h^5}{h^2+k^2}.$$

Logo,

$$\frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\dfrac{3h^5}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{3h^5}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 3h^2\cdot\left(\frac{h^2}{h^2+k^2}\right)^{3/2},$$

onde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} 3h^2 = 0, \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \frac{h^2}{h^2+k^2} \leqslant \frac{h^2+k^2}{h^2+k^2} = 1,$$

portanto, temos uma função limitada em produto com uma função cujo limite dá zero. Logo, pelo teorema do anulamento, temos $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{E\left(h,k\right)}{\|(h,k)\|} = 0.$ Então f é diferenciável em $(0,0)$.

4. (Ex. 1 - Aula 8). Seja $f(x,y) = 1 + \ln\left(x^2+y^2\right)$. Determine

(a) o domínio de f, D_f.

(b) a imagem de f, Im_f.

(c) as curvas de nível de f.

(d) o gráfico de f, G_f.

(e) o conjunto de pontos onde f é diferenciável.

(f) o plano tangente e a reta normal ao G_f no ponto $(1,0,1)$.

(g) um valor aproximado para $f(0,99;0,01)$.

(h) o conjunto de pontos de continuidade da função

$$g(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\left[f(x,y)-1\right], & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Solução

(a) $D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

(b) $Imf =]-\infty, +\infty[$.

(c) Seja $k \in \text{Im}\, f =]-\infty, \infty[$. Então, temos

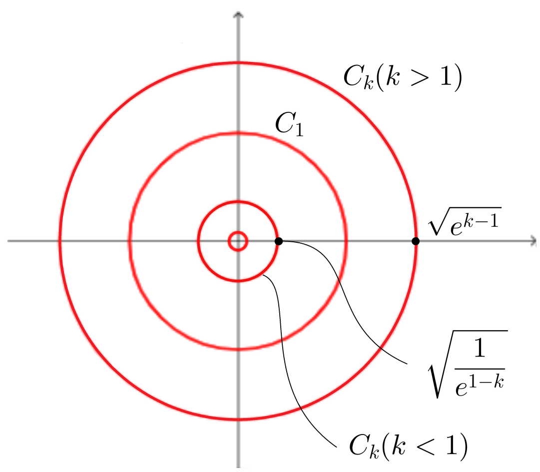
$$C_k : 1 + \ln\left(x^2 + y^2\right) = k \Leftrightarrow \ln\left(x^2 + y^2\right) = k - 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = e^{k-1}.$$

$k = 1 \Rightarrow c_1 : x^2 + y^2 = 1.$

$k > 1 \Rightarrow k - 1 > 0 \Rightarrow C_k : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{e^{k-1}}\right)^2.$

$k < 1 \Rightarrow k - 1 < 0 \Rightarrow 1 - k > 0.$

Logo, $e^{k-1} = e^{-(1-k)} = \frac{1}{e^{1-k}}$ e $c_k : x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{e^{1-k}}}\right)^2.$



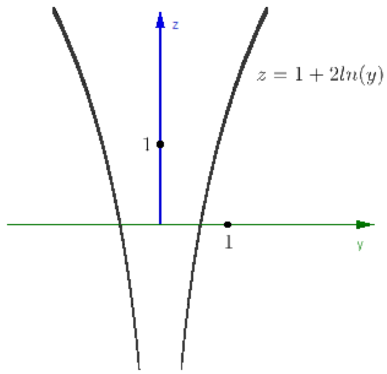
(d) $G_f : z = 1 + \ln\left(x^2 + y^2\right)$
Primeiro notamos que esta função é "simétrica" em relação as coordenadas x e y. Isso nos implica que o que tivermos de comportamento em x também teremos em y. Isso nos permite analisar o gráfico isoladamente em cada eixo.

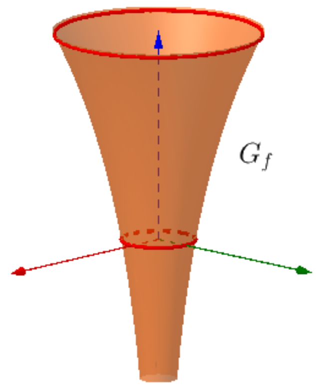
Assim, fazendo $x = 0$, temos $z = 1 + \ln y^2 = 1 + 2\ln|y|$, que representa a interseção do G_f com o plano yz.

Fazendo $z = 0$, temos $\ln\left(x^2 + y^2\right) = -1$, donde $x^2 + y^2 = e^{-1}$, que representa a interseção do G_f com o plano xy.

Fazendo $z = c$ (constante), temos $\ln\left(x^2 + y^2\right) = c - 1$, donde $x^2 + y^2 = e^{c-1}$, que representa a interseção, do G_f com o plano horizontal $z = c$.

Assim, temos o esboço de G_f.





(e) Temos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2}$ que são funções racionais em D_f, portanto contínuas em D_f. Logo, f é diferenciável em D_f.

(f) Como f é diferenciável em $(1,0)$, então existe um plano tangente ao G_f no ponto $(1,0,1)$ e é dado por

$$z - f(1,0) = (x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + (y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0).$$

Temos

$$f(1,0) = 1 + \ln(1+0) = 1 + \ln 1 = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{1+0} = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0.$$

Substituindo acima, temos

$$z - 1 = 2(x-1) + 0(y-0) \Leftrightarrow z = 1 + 2x - 2 \Leftrightarrow \boxed{z = 2x - 1}.$$

A reta normal é dada por

$$(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right), \lambda \in \mathbb{R}$$

ou seja,

$$\boxed{(x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(2,0,-1), \lambda \in \mathbb{R}}.$$

(g) Sejam $(a,b) = (1,0)$, $(h,k) = (-0,01; 0,01)$.
Logo, $x = a + h = 1 - 0,01 = 0,99$ e $y = b + k = 0 + 0,01 = 0,01$.
Como f é diferenciável em $(1,0)$ e $(x,y) \simeq (a,b) = (1,0)$, então

$$\Delta f \simeq df,$$

onde

$$\Delta f = f(x,y) - f(a,b) = f(a+h,b+k) - f(a,b).$$

$$df = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b),$$

ou seja,

$$f(0,99;0,01) - f(1,0) \simeq (-0,01)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + (0,01)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0).$$

Substituindo os valores das derivadas parciais,

$$f(0,99;0,01) \simeq (1+\ln 1) + (-0,01).2 + (0,01).0 = 1 - 0,02 = 0,98.$$

(h) $g(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ é contínua em $(a,b) \neq (0,0)$, pois

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \left(a^2+b^2\right)\ln\left(a^2+b^2\right) = g(a,b) \qquad \text{(i)}.$$

Analisemos a continuidade em $(0,0)$.
Façamos $u = x^2+y^2$. Logo, $u \geqslant 0$. Como $(x,y) \to (0,0)$, então $u \to 0^+$.
Assim,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right) = \lim_{u\to 0^+} u\ln u = \lim_{u\to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \overset{\text{L'Hospital}}{=}$$

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{(\ln u)'}{\left(\frac{1}{u}\right)'} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to 0^+}(-u) = 0 = g(0,0).$$

Logo, g é contínua em $(0,0)$. (ii)
De (i) e (ii), concluímos que g é contínua em $\mathbb{R}^2$.

5. (Ex. 7 - Aula 8). A temperatura do ponto (x,y) de uma chapa é dada por $T(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2-12}\right)$.

   (a) Determine o domínio de $T(x,y)$ e represente-o no plano xy.

   (b) Determine a equação da isoterma (conjunto de pontos com mesma temperatura) que contém o ponto $(2,3)$ e faça o seu esboço.

   (c) Determine o plano $z = ax + by + c$ que melhor se aproxima do gráfico de $T(x,y)$ no ponto $(2,3)$.

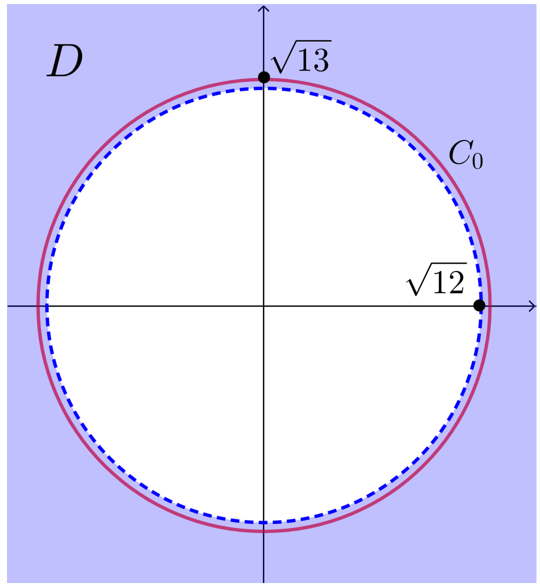
   (d) Calcule um valor aproximado da temperatura em $(1,01;2,99)$.

Solução

(a) Os pontos (x,y) do domínio de f são aqueles que obedecem a relação, $x^2+y^2-12>0$, portanto:

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 > 12\right\}.$$

Fazemos um esboço do domínio abaixo:



(b) Primeiro encontramos a que nível k a função T se encontra através de $k = T(2,3)$. Ou seja, $k = \ln\sqrt{4+9-12} = \ln 1 = 0$. Isso quer dizer que $C_0 : T(x,y) = 0$ é a isoterma (curva de nível) desejada. Agora encontramos uma expressão cartesiana para C_0.
$C_0 : T(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2-12} = 0 \Rightarrow C_0 : x^2+y^2-12 = 1$. Portanto, $\boxed{C_0 : x^2+y^2 = 13}$.

(c) O plano que melhor se aproxima do G_T no ponto $(2,3,T(2,3))$ é o plano tangente ao gráfico de T no ponto $(2,3,T(2,3)) = (2,3,0)$, dado por:

$$z - T(2,3) = (x-2)\frac{\partial T}{\partial x}(2,3) + (y-3)\frac{\partial T}{\partial y}(2,3).$$

Como

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-12}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2-12}} = \frac{x}{x^2+y^2-12},$$
$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-12}} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2-12}} = \frac{y}{x^2+y^2-12},$$

então,

$$\frac{\partial T}{\partial x}(2,3) = \frac{2}{4+9-12} = 2, \frac{\partial T}{\partial y}(2,3) = 3.$$

Assim, temos

$$z - 0 = 2(x-2) + 3(y-3) \Leftrightarrow \boxed{z = 2x + 3y - 13}.$$

(d) Sejam $(a, b) = (2, 3), (h, k) = (0{,}01; -0{,}01)$, Como $(h, k) \simeq (0, 0)$, então

$$\begin{aligned} \Delta T \simeq dT &= h\frac{\partial T}{\partial x}(2,3) + k\frac{\partial T}{\partial y}(2,3) \\ &= 2 \cdot (0{,}01) + 3 \cdot (-0{,}01) = -0{,}01, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(2{,}01; 2{,}99) - \underbrace{T(2,3)}_{=0} \simeq -0{,}01.$$

Logo,

$$\boxed{T(2{,}01; 2{,}99) \simeq -0{,}01}.$$

6. (Ex. 4 - Aula 8) O ângulo central de um setor circular é $80°$ e o raio é 20 cm e deseja-se reduzir o ângulo em $1°$. Qual deve ser o acréscimo no raio para que a área fique inalterada?

Solução

A área de um setor circular de raio r e ângulo central θ em radianos é dada por $A = A(r, \theta) = \frac{1}{2}r\theta$.

Como $1° = \dfrac{2\pi}{360}$ então $80° = \dfrac{2\pi}{360} \cdot 80 = \frac{4\pi}{9}$. Temos $\Delta\theta = -\dfrac{2\pi}{360} \simeq 0$.

Então,

$$\begin{aligned} \Delta A \cong dA &= \frac{\partial A}{\partial r}\left(20, \frac{4\pi}{9}\right)\Delta r + \frac{\partial A}{\partial \theta}\left(20, \frac{4\pi}{9}\right)\Delta\theta \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi}{9}\Delta r + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(-\frac{2\pi}{360}\right) \\ &= \frac{2\pi}{9}\Delta r - \frac{\pi}{18}. \end{aligned}$$

Para que a área fique inalterada, devemos ter $\Delta A = 0$. Logo, $0 \simeq \dfrac{2\pi}{9}\Delta r - \dfrac{\pi}{18}$ ou $\dfrac{2\pi\Delta r}{9} \simeq \dfrac{\pi}{18}$, donde $\Delta r \simeq \dfrac{1}{4} = 0,25$.

Portanto, o acréscimo no raio é de aproximadamente $0,25$ cm.

7. (Ex. 3 - Aula 9) A pressão de $1\ mol$ de um gás ideal está aumentando em uma taxa de $0,05\ kPa/s$ e a temperatura está aumentando em uma taxa de $0,15\ K/s$. Use a equação $PV = 8,31\,T$ para determinar a taxa de variação do volume quando a pressão for $20\ kPa$ e a temperatura for $320\ K$.

   Solução

   A partir da expressão dada, temos que o volume V se relaciona com P e T através da função:
$$V(T,P) = (8{,}31\ \mathsf{kPa}\cdot\ell/\mathsf{K})\frac{T}{P}.$$
   Agora percebemos que tanto a temperatura T quanto a pressão P estão variando com o tempo, que chamaremos de t. Ou seja, temos um $T(t)$ e um $P(t)$, com isto, queremos $V'(t) \equiv \dfrac{dV}{dt}$. Pela regra da cadeia, temos:
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial V}{\partial P}\frac{dP}{dt},$$
   a partir da função V, encontramos:
$$\frac{\partial V}{\partial T} = (8{,}31\ \mathsf{kPa}\cdot\ell/\mathsf{K})\frac{1}{P}; \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial P} = -(8{,}31\ \mathsf{kPa}\cdot\ell/\mathsf{K})\frac{T}{P^2}.$$
   Com os dados da questão: $P = 20$ kPa e $T = 320$ K, temos
$$\frac{\partial V}{\partial T} = (8{,}31\ \mathsf{kPa}\cdot\ell/\mathsf{K})\frac{1}{20\ \mathsf{kPa}} = 0{,}4155\ \ell/\mathsf{K},$$
   e
$$\frac{\partial V}{\partial P} = -(8{,}31\ \mathsf{kPa}\cdot\ell/\mathsf{K})\frac{320\ \mathsf{K}}{(20\ \mathsf{kPa})^2} = -6{,}648\ \ell/\mathsf{kPa},$$
   o que nos dá:
$$\frac{dV}{dt} = 0{,}4155\ \ell/\mathsf{K}\cdot 0{,}15\ \mathsf{K/s} + (-6{,}648\ \ell/\mathsf{kPa})\cdot 0{,}05\ \mathsf{kPa/s} \approx \boxed{-0{,}27\ \ell/\mathsf{s}}.$$

8. (Ex. 6 - Aula 9) Suponha que $f(x,y)$ é uma função de classe C^1, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2,-3) = -1$. Sabe-se que um ponto se desloca sobre o gráfico de $z = f(x,y)$, ao longo de uma curva $\vec{r}(t) = (2\,\mathsf{sen}\,t, 7\cos t - 3, z(t))$, onde t representa o tempo. Determine o vetor velocidade no instante em que suas coordenadas são $(2,-3,6)$.

   Solução

   Se $\vec{r}(t) = (2\,\mathsf{sen}\,t, 7\cos t - 3, z(t))$ é o vetor posição de um ponto no instante t, então $\vec{r}\,'(t) = (2\cos t, -7\,\mathsf{sen}\,t, z'(t))$ é o vetor velocidade no instante t.

Seja t_0 o instante que o ponto passa por $(2,-3,6)$. Logo, $\vec{r}\,(t_0)=(2,-3,6)$ ou $(2\,\textsf{sen}\,t_0, 7\,\textsf{cos}\,t_0-3, z\,(t_0))=(2,-3,6)$, donde $2\,\textsf{sen}\,t_0=2$, $7\,\textsf{cos}\,t_0-3=-3$, $z\,(t_0)=6$. Logo, $t_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Queremos calcular $z'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Como a curva $\vec{r}(t)=(2\,\textsf{sen}\,t, 7\,\textsf{cos}\,t-3, z(t))$ está no gráfico de $z=f(x,y)$, então $z(t)=f(2\,\textsf{sen}\,t, 7\,\textsf{cos}\,-3)$. Temos $z(t)=f(x,y)$, com $x=2\,\textsf{sen}\,t$, $y=7\,\textsf{cos}\,t-3$ diferenciáveis. Pela regra da cadeia, temos

$$z'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}(2\,\textsf{sen}\,t, 7\,\textsf{cos}\,t-3)(2\,\textsf{cos}\,t)+\frac{\partial f}{\partial y}(2\,\textsf{sen}\,t, 7\,\textsf{cos}\,t-3)(-7\,\textsf{sen}\,t),$$

de onde encontramos,

$$z'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)\left(2\,\textsf{cos}\,\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)\left(-7\,\textsf{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)=0+(-1)(-7).$$

Logo, $z'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=7$ e $\vec{r}\,'(\dfrac{\pi}{2})=(2\,\textsf{cos}\,\dfrac{\pi}{2}, -7\,\textsf{sen}\,\dfrac{\pi}{2}, 7)$.

Donde, o vetor velocidade é $\boxed{\vec{r}\,'(\dfrac{\pi}{2})=(0,-7,7)}$.

9. (Ex. 10 - Aula 9) . Seja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ diferenciável em $P_0=(0,0,0)$, tal que: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)=2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)=\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)=0$, $f(P_0)=1$. Uma função g é dada por

$$g(u,v)=f\left(u-v, u^2-v, 3v-3\right).$$

Calcule a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,1)$.

Solução

Temos $g(u,v)=f(x,y,z)$, onde $x=x(u,v)=u-v$, $y=y(u,v)=u^2-v$, $z=z(u,v)=3v-3$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial u}}_{1}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial u}}_{2u}+\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial z}{\partial u}}_{0}, \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial v}}_{-1}+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial v}}_{-1}+\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\underbrace{\dfrac{\partial z}{\partial v}}_{3}, \end{cases}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(u-v,u^2-v,3v-3\right)+2u\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(u-v,u^2-v,3v-3\right),\\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(u-v,u^2-v,3v-3\right)-\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(u-v,u^2-v,3v-3\right)+\\ \hfill +3\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(u-v,u^2-v,3v^2-3\right).\end{array}\right.$$

Como $g(u,v)=f(x,y,z)$, temos que $g(1,1)=f(0,0,0)=f(P_0)$, logo

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial u}(1,1)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)+2\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)=2+2\cdot 0=2,\\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(1,1)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0)+3\dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0)=-2-0+0=-2.\end{array}\right.$$

Equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(1,1,g(1,1))=(1,1,1)$ é dada através de

$$w-g(1,1)=(u-1)\frac{\partial g}{\partial u}(1,1)+(v-1)\frac{\partial g}{\partial v}(1,1)=2(u-1)+(-2)(v-1),$$

portanto,

$$\boxed{w=1+u-2v}.$$

10. (Ex. 11 - Aula 10) Suponha que a equação $\ln(x^2+y^2-1)+e^{xz}=1$ define implicitamente uma função $z=f(x,y)$ diferenciável em $(\sqrt{2},0)$.

   (a) Calcule $\nabla f(\sqrt{2},0)$.

   (b) Calcule a equação do plano tangente à superfície $z=f(x,y)$ no ponto $(\sqrt{2},0,f(\sqrt{2},0))$.

   (c) Aproxime o valor de $f(1.3,0.1)$. Considere $\sqrt{2}=1,41$.

Solução

(a) Derivando a expressão $\ln(x^2+y^2-1)+e^{xz}=1$ em relação a x temos:

$$\frac{2x}{x^2+y^2-1}+e^{xz}(z+x\frac{\partial z}{\partial x})=0$$

Isolando $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ da fórmula temos

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\dfrac{2x}{x^2+y^2-1}-e^{xz}}{xe^{xz}},\text{ desde que } x\neq 0$$

Analogamente, derivando a expressão $\ln(x^2+y^2-1)+e^{xz}=1$ em relação à variável y temos:

$$\frac{2y}{x^2+y^2-1}+e^{xz}(x\frac{\partial z}{\partial y})=0$$

Isolando $\frac{\partial z}{\partial y}$ da fórmula temos

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{2y}{x^2+y^2-1}}{xe^{xz}},\text{ desde que } x\neq 0$$

Sabemos que $\nabla f(\sqrt{2},0)=(\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{2},0),\frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{2},0))$. Só que para substituir nas expressões de $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ preciso saber qual é o valor de z quando $x=\sqrt{2}$ e $y=0$.

Observe que $z=f(x,y)$, então $z_0=f(\sqrt{2},0)$ e o ponto $(\sqrt{2},0,f(\sqrt{2},0))$ deve verificar a expressão original $\ln(x^2+y^2-1)+e^{xz}=1$. Então,

$$\ln\Big((\sqrt{2})^2+0^2-1\Big)+e^{\sqrt{2}z_0}=1,$$

donde, $z_0=0$ e

$$\nabla f(\sqrt{2},0)=(\frac{\partial z}{\partial x}(\sqrt{2},0),\frac{\partial z}{\partial y}(\sqrt{2},0))=(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},0)=(-2,0)$$

(b) A equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(\sqrt{2},0,f(\sqrt{2},0))$ é $z=f(\sqrt{2},0)+\frac{\partial f}{\partial x}(\sqrt{2},0)(x-\sqrt{2})+\frac{\partial f}{\partial y}(\sqrt{2},0)(y-0)$. Isto é, $z=-2(x-\sqrt{2})$, pois $f(\sqrt{2},0)=z_0=0$.

(c) Dado que f é diferenciável $(\sqrt{2},0)$ podemos aproximar a função f pela função linearizada $L(x,y)=-2(x-\sqrt{2})$, pois o ponto $(1.3,0.1)$ é próximo suficiente de $(\sqrt{2},0)$. Portanto,

$$f(1.3,0.1)\approx -2(1.3-1.41)=-0.22$$

11. (Ex. 2 - Aula 11) Encontre a derivada direcional de $f(x,y,z)=xe^{y^2-z^2}$ no ponto $(1,2,-2)$ e na direção do vetor tangente $\vec{r}'(t)$ à curva $\vec{r}(t)=(t,2\cos(t-1),-2e^{t-1})$.

Solução

Temos $\vec{r}'(t)=(1,-2\,\text{sen}\,(t-1),-2e^{t-1})$, donde $\vec{r}'(1)=(1,0,-2)$. Seja $\vec{u}=\frac{\vec{r}'(1)}{\|\vec{r}'(1)\|}=\frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}}$ vetor unitário na direção e sentido do vetor tangente.

Como f é diferenciável em $(1,2,-2)$, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2,-2) = \nabla f(1,2,-2)\cdot \vec{u},$$

onde $\nabla f(1,2,-2) = \left(e^{y^2-z^2}, 2xye^{y^2-z^2}, -2xze^{y^2-z^2}\right)|_{(1,2,-2)} = (1,4,4)$. Então, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2,-2) = (1,4,4)\cdot\frac{(1,0,-2)}{\sqrt{5}} = \frac{1-8}{\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

12. (Ex. 11 - Aula 11) Suponha que $T(x,y) = 40-x^2-2y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xy e um individuo que se encontra na posição $(3,2)$ pretende dar um passeio

    (a) Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer para desfrutar sempre da mesma temperatura.

    (b) Qual a direção e sentido que deverá tomar se quisesse caminhar na direção de maior crescimento da temperatura?

    (c) Se x e y são medidos em km e a temperatura em ^oC, quanto se elevará aproximadamente a temperatura, caso caminhe $0,01\ km$ na direção encontrada no item b?

    Solução

    (a) Na posição $(3,2)$, a temperatura é dada por $T(3,2) = 23$ (°C). Queremos então encontrar outros valores de (x,y) que nos mantenha a mesma temperatura de 23°C, ou seja, queremos determinar a curva de nível C_{23} da função T.

    $$C_{23} : T(x,y) = 23 \Rightarrow 40 - x^2 - 2y^2 = 23 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = 17.$$

    Podemos escrever então,

    $$C_{23} : \left(\frac{x}{\sqrt{17}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{17/2}}\right)^2 = 1,$$

    ou seja, uma elipse com semi-eixo menor (em y) de tamanho $\sqrt{17/2}$ e um semi-eixo maior (em x) de tamanho $\sqrt{17}$.

    (b) Como a função temperatura é diferenciável por ser polinomial, a direção de maior crescimento, a partir de um ponto, é a direção (unitária!) dada pelo gradiente. Logo, calculando o gradiente da função T em $(3,2)$, obtemos:

    $$\nabla T(3,2) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}\right)\bigg|_{(3,2)} = (-2x,-4y)\bigg|_{(3,2)} = (-6,-8).$$

Agora precisamos obter a direção (unitária) do vetor gradiente em $(3,2)$. Conseguimos isso através de:

$$\vec{u} = \frac{\nabla T(3,2)}{||\nabla T(3,2)||} = \frac{(-6,-8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Como as duas componentes do vetor gradiente são negativas, elas apontam no sentido de diminuir os valores de x e de y.

(c) Estamos variando a função em uma direção específica, no caso $\vec{u}$. Assim, a derivada direcional de T nesta direção será:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \vec{u}}\right|_{(3,2)} = \nabla T(3,2) \cdot \vec{u} = ||\nabla T(3,2)|| = \sqrt{6^2+8^2} = 10.$$

Então, se o indivíduo anda $\Delta d = 0{,}01$ km na direção $\vec{u}$, a temperatura T irá se elevar aproximadamente de $\Delta T \simeq \dfrac{\partial T}{\partial \vec{u}} \Delta d = 10 \cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}1°\text{C}}$.

13. (Ex. 7 - Aula 12). A distribuicão da temperatura de um disco com centro na origem é dada por $T(x,y)$ de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$.

Sabe-se que $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}(x,y) = 0$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 2$ em $\mathbb{R}^2$.

Calcule $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho,\theta)$, sendo $U(\rho,\theta) = T(\rho \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$, em termos das derivadas parciais de T em relação à x.

Solução

Temos $U(\rho,\theta) = T(x,y)$, onde $x = \rho\cos\theta, y = \rho \operatorname{sen}\theta$ são funções diferenciáveis.

Então, pela regra da cadeia, temos $\dfrac{\partial U}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \dfrac{\partial T}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial T}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$. Como $\dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \operatorname{sen}\theta$, $\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \rho\cos\theta$ e $\dfrac{\partial T}{\partial y}(x,y) = 2$, então

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho \operatorname{sen}\theta \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) + 2\rho\cos\theta.$$

Como $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x,y)$ é uma função composta, pois $x = \rho\cos\theta, y = \rho\operatorname{sen}\theta$, então para derivar em relação a θ, devemos usar novamente a regra da cadeia. Temos, então

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\rho,\theta) = -\rho\cos\theta \frac{\partial T}{\partial x}(x,y) - \rho \operatorname{sen}\theta \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-\rho \operatorname{sen}\theta} + \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}}_{=0} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{p\cos\theta}\right] - $$
$$- 2\rho \sec\theta.$$

Finalmente, encontramos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}(\rho,\theta) = -\rho\cos\theta\frac{\partial T}{\partial x} + \rho^2\,\text{sen}^2\,\theta\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 2\rho\sec\theta}.$$

Exercícios desafiadores resolvidos

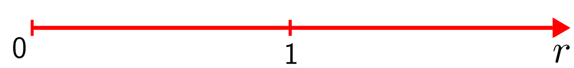
1. (Ex. 6 - Aula 5). Discuta a continuidade da função

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{x^2+y^2-1}} & \text{se } x^2+y^2<1; \\ 0 & \text{se } x^2+y^2\geqslant 1. \end{cases}$$

Solução Façamos $r = x^2+y^2$. Logo, $r \geqslant 0$. Se $x^2+y^2<1$, então $0\leqslant r<1$ e se $x^2+y^2\geqslant 1$, então $r\geqslant 1$.

Assim $f(x,y) = \begin{cases} e^{\dfrac{1}{x^2+y^2-1}} & \text{se } x^2+y^2<1; \\ 0 & \text{se } x^2+y^2\geqslant 1, \end{cases}$ implica em

$$f(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r-1}}, & \text{se } 0\leqslant r<1; \\ 0, & \text{se } r\geqslant 1. \end{cases}$$



Temos:

$f(r) = 0$ em $]1,+\infty[\Longrightarrow f$ é contínua em $]1,+\infty[$, pois f é uma função constante. (1)

$f(r) = e^{\frac{1}{r-1}}$ em $[0,1[\Longrightarrow f$ é contínua em $[0,1[$, pois f é uma composta de funções contínuas. (2)

Analisemos a continuidade em $r=1$. Temos

$$\lim_{r\to 1^+} f(r) = \lim_{r\to 1^+} 0 = 0 = f(1).$$

$$r<1 \Rightarrow r-1<0 \Rightarrow \frac{1}{r-1}<0 \Rightarrow \frac{1}{1-r}>0.$$

Então, $\lim\limits_{r\to 1^-} e^{\frac{1}{1-r}} = \infty$ e

$$\lim_{r\to 1^-} f(r) = \lim_{r\to 1^-} e^{\frac{1}{r-1}} = \lim_{r\to 1^-} e^{-\frac{1}{1-r}} = \lim_{r\to 1^-} \frac{1}{e^{\frac{1}{1-r}}} = 0 = f(1),$$

Logo, f é contínua em $r = 1$. (3)

De (1), (2) e (3), vemos que $f(r)$ é contínua em $[0, +\infty[$ ou $f(x, y)$ é contínua em $\mathbb{R}^2$.

2. (Ex. 3 - Aula 8) Determine uma estimativa do erro relativo ou erro percentual máximo no cálculo do período T de um pêndulo simples, através da formula $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, sendo o erro relativo (erro percentual) em l igual a 1% e em g igual a 3%.

Solução

Como o erro percentual em l é igual a 1**%** e em g é igual a 3**%**, então temos $\left|\frac{\Delta l}{l}\right| = \frac{1}{100}$ e $\left|\frac{\Delta g}{9}\right| = \frac{3}{100}$. Podemos considerar então que, $|\Delta l| \simeq dl$ e $|\Delta g| \simeq dg$, isto é, que as variações nas medidas de l e g são pequenas. Isso nos implica então que $\Delta T \simeq dT$, donde $\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{dT}{T}$. Da diferencial de T, a saber,

$$dT = \frac{\partial T}{\partial l}dl + \frac{\partial T}{\partial g}dg,$$

com $|\Delta l| \simeq dl$, $|\Delta g| \simeq dg$ e $\Delta T \simeq dT$, teremos aproximadamente que

$$\begin{aligned}
\Delta T &\simeq \frac{\partial T}{\partial l}\Delta l + \frac{\partial T}{\partial g}\Delta g \\
&= 2\pi\frac{\frac{1}{g}}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\Delta l + 2\pi\frac{-\frac{l}{g^2}}{2\sqrt{\frac{l}{g}}}\Delta g = 2\pi\frac{\sqrt{\frac{l}{g}}}{2g\cdot\frac{l}{g}}\Delta l - 2\pi\frac{\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot l}{2g^2\cdot\frac{l}{g}}\Delta g \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g} = T\cdot\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - T\cdot\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\Delta T}{T} \simeq \frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}$, donde,

$$\left|\frac{\Delta T}{T}\right| \simeq \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right|.$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta T}{T}\right| &\simeq \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l} - \frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta l}{l}\right| + \left|\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{100} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{100} = \frac{4}{200} = \frac{2}{100}.\end{aligned}$$

Assim, o erro percentual máximo em T é de aproximadamente 2%.

3. (Ex. 7 - Aula 9) Seja $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$, sendo $f(x,y)$ diferenciável. Verifique que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta) + \mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta).$$

Solução

Temos $F(r,\theta) = f(x,y)$, onde $x = x(r,\theta) = r\cos\theta$, $y = y(r,\theta) = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{sen}\,\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial\theta}}_{-r\,\mathrm{sen}\,\theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial\theta} = -r\,\mathrm{sen}\,\theta\dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

Temos

$$\begin{cases}\mathrm{sen}\,\theta\dfrac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \mathrm{sen}^2\,\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), \\ \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta) = -\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).\end{cases}$$

Donde,

$$\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial F}{\partial x}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta}(r,\theta) = \underbrace{\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta}_{=1}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y),$$

como queríamos verificar.

4. (Ex. 8 - Aula 9). Se $u = x^m f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{z}, \dfrac{z}{x}\right)$. mostre que

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = mu.$$

Solução

Seja $u = x^m f(r,s,t)$, onde $r = r(x,y,z) = \dfrac{y}{x}$, $s = s(x,y,z) = \dfrac{x}{z}$, e $t = t(x,y,z) = \dfrac{z}{x}$ são funções diferenciáveis em

$$D = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \neq 0,\, y \neq 0, z \neq 0\big\}.$$

Pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = mx^{m-1}f(r,s,t) + x^m \left[\dfrac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial x}}_{-y/x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\underbrace{\dfrac{\partial s}{\partial x}}_{1/z} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\dfrac{\partial t}{\partial x}}_{-z/x^2}\right], \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^m \left[\dfrac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial y}}_{1/x} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\underbrace{\dfrac{\partial s}{\partial y}}_{0} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\dfrac{\partial t}{\partial y}}_{0}\right], \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = x^m \left[\dfrac{\partial f}{\partial r}\underbrace{\dfrac{\partial r}{\partial z}}_{0} + \dfrac{\partial f}{\partial s}\underbrace{\dfrac{\partial s}{\partial z}}_{x/z^2} + \dfrac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\dfrac{\partial t}{\partial z}}_{1/x}\right], \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = mx^{m-1}f(r,s,t) - yx^{m-2}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^m}{z}\dfrac{\partial f}{\partial s} - zx^{m-2}\dfrac{\partial f}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{x^{m+1}}{z^2}\dfrac{\partial f}{\partial s} + x^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Agora, multiplicando a primeira equação por x, a segunda por y e a terceira por z, temos:

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} = mx^m f(r,s,t) - yx^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^{m+1}}{z}\dfrac{\partial f}{\partial s} - zx^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial t}, \\ y\dfrac{\partial u}{\partial y} = yx^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial r}, \\ z\dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{x^{m+1}}{z}\dfrac{\partial f}{\partial s} + zx^{m-1}\dfrac{\partial f}{\partial t}. \end{cases}$$

Somando todas as equações, chegamos em

$$x\frac{\partial u}{\partial u}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=mx^m f(r,s,t)=mu,$$

como queríamos mostrar.

5. (Ex. 3 - Aula 11) Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x,y)=x^2+\text{sen}\,(xy)$ no ponto $(1,0)$ tem valor 1.

Solução

Seja $\vec{u}=(u_1,u_2)$, tal que $u_1^2+u_2^2=1$. Como f é diferenciável em $(1,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=\nabla f(1,0)\cdot\vec{u}=(2x+y\cos(xy),x\cos(xy))|_{(1,0)}\cdot\vec{u}=\\ =(2,1)\cdot(u_1,u_2)=2u_1+u_2\end{aligned}$$

Por hipótese sabemos que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,0)=1$, onde $u_1^2+u_2^2=1$, então

$$\begin{cases}2u_1+u_2=1\\ u_1^2+u_2^2=1\end{cases}$$

Da primeira equação temos que $u_2=1-2u_1$. Substituindo na segunda equação temos que

$$\begin{aligned}u_1^2+(1-2u_1)^2=1\Rightarrow u_1^2+1-4u_1+4u_1^2=1\\ \Rightarrow 5u_1^2-4u_1=0\Rightarrow u_1(5u_1-4)=0\end{aligned}$$

Logo, $u_1=0$ ou $u_1=\frac{4}{5}$. Donde, $u_2=1$ ou $u_2=1-2\frac{4}{5}=-\frac{3}{5}$.

Daí, $\vec{u}=(0,1)$ ou $\vec{u}=\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$. Assim, as direções são $\vec{u}=\vec{\jmath}$ e $\vec{u}=\dfrac{4}{5}\vec{\imath}-\dfrac{3}{5}\vec{\jmath}$.

6. (Ex. 16 - Aula 11) Considere a curva C interseção das superfícies $A_1: x^2-2xz+y^2z=3$ e $A_2: 3xy-2yz=-2$. Determine:

   (a) um vetor tangente a C em $(1,-2,1)$.

   (b) os pontos do hiperboloide $x^2+y^2-z^2+12=0$, onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a).

Solução

(a) Sejam $f(x,y,z)=x^2-2xz+y^2z-3$ e $g(x,y,z)=3xy-2yz+2$ que são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Observe que $A_1=S_0(f), A_2=S_0(g)$

Então, temos

$$\nabla f(1,-2,1)=\left(2x-2z,2yz,-2x+y^2\right)\big|_{(1,-2,1)}=(0,-4,2)$$

que deve ser $\perp A_1$ em $(1,-2,1)$. E

$$\nabla g(1,-2,1) = (3y, 3x-2z, -2y)\big|_{(1,-2,1)} = (-6,1,4)$$

que deve ser $\perp A_2$ em $(1,-2,1)$.
Logo,

$$\nabla f(1,-2,1) \times \nabla g(1,-2,1) = (0,-4,2) \times (-6,1,4) =$$
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 2 \\ -6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (-18,-12,-24) = -6(3,2,4)$$

é um vetor tangente a C em $(1,-2,1)$.
O vetor $(3,2,4)$ é também um vetor tangente a C em $(1,-2,1)$.

(b) Seja $h(x,y,z) = x^2+y^2-z^2+12$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. A superfície de nível de h no nível 0 é dada por

$$S: x^2+y^2-z^2+12 = 0.$$

Seja $(a,b,c) \in S$. Então $a^2+b^2-c^2+12 = 0$.
Temos que $\nabla h(a,b,c) = (2a,2b,-2c) \perp S$ em (a,b,c) e perpendicular ao plano tangente a h em (a,b,c).
Como o plano é perpendicular ao vetor $(3,2,4)$ do item (a), então $\nabla h(a,b,c) \parallel (3,2,4)$, ou seja,

$$(2a,2b,-2c) = \lambda(3,2,4) \Rightarrow 2a = 3\lambda, 2b = 2\lambda, -2c = 4\lambda.$$

Encontramos, então que, $a = \dfrac{3b}{2}$ e $c = -2b$. Substituindo estes valores na expressão para a superfície S acima, encontramos:

$$S: \frac{9b^2}{4} + b^2 - 4b^2 + 12 = \frac{9-3.4}{4}b^2 + 12 = 0 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

Com isso encontramos dois pontos do hiperboloide onde o plano tangente é perpendicular ao vetor encontrado no item (a), dado que $(a,b,c) = \left(\dfrac{3b}{2}, b, -2b\right)$, que são:

$$\boxed{(a,b,c) = (6,4,-8) \text{ e } (a,b,c) = (-6,-4,8)}.$$

7. (Ex. 13 - Aula 11) Determine uma reta que seja tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela a reta $4x + 5y = 7$.

Solução

Seja $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 7$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. A curva de nível de f no nível 0 é dada por $C : f(x, y) = 0 \Rightarrow C : x^2 + xy + y^2 - 7 = 0 \Rightarrow C : x^2 + xy + y^2 = 7$. Em outras palavras, a curva C representa a curva dada na questão.

Seja $(a, b) \in C$. Logo $a^2 + ab + b^2 = 7$. Temos que

$$\nabla f(a, b) \perp C \quad \text{em} \quad (a, b).$$

Logo, $\nabla f(a, b) = (2a + b, a + 2b)$ é perpendicular à reta tangente a C em (a, b). Como a reta $4x + 5y = 7$ é paralela à reta tangente, então o vetor $(4, 5)$ que é perpendicular a essa reta é paralelo ao $\nabla f(a, b)$. Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(a, b) = \lambda(4, 5)$, ou seja,

$$(2a + b, a + 2b) = \lambda(4, 5).$$

Assim, desta expressão tiramos que

$$\begin{cases} 2a + b = 4\lambda \\ a + 2b = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{2a + b}{4} = \frac{a + 2b}{5} \therefore 10a + 5b = 4a + 8b \therefore b = 2a.$$

Substituindo $b = 2a$ em $a^2 + ab + b^2 = 7$, temos

$$a^2 + 2a^2 + 4a^2 = 7a^2 = 7 \therefore a = \pm 1, b = \pm 2.$$

Encontramos dois possíveis valores pontos onde as condições do problema são satisfeitas, $(a, b) = (1, 2)$ e $(a, b) = (-1, -2)$.

Para $(a, b) = (1, 2)$, temos $(x - 1, y - 2) \cdot (4, 5) = 0 \therefore \boxed{4x + 5y - 14 = 0}$.

Para $(a, b) = (-1, -2)$, temos $(x + 1, y + 2) \cdot (4, 5) = 0 \therefore \boxed{4x + 5y + 14 = 0}$.

8. (Ex. 14 - Aula 11). Determine um plano que seja tangente à superfície $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 11/6$ e paralelo ao plano $x + y + z = 10$.

Solução

Seja $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \frac{11}{6}$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. A superfície de nível de f no nível 0 é dada por

$$S : f(x, y, z) = 0 \Rightarrow S : x^2 + 3y^2 + 2z^2 - \frac{11}{6} = 0 \Rightarrow S : x^2 + 3y^2 + 2z^2 = \frac{11}{6}.$$

Seja $(a,b,c) \in S$. Logo, $a^2 + 3b^2 + 2c^2 = \dfrac{11}{6}$.

Temos que, $\nabla f(a,b,c) \perp S$ em (a,b,c). Logo, $\nabla f(a,b,c) = (2a, 6b, 4c)$ é perpendicular ao plano tangente a S em (a,b,c).

Como o plano $x + y + z = 10$ é paralelo ao plano tangente, então o vetor $(1,1,1)$ que e perpendicular a esse plano é paralelo ao $\nabla f(a,b,c)$.

Logo, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(2a, 6b, 4c) = \lambda(1,1,1)$. Desta relação, tiramos que:

$$\begin{cases} 2a = \lambda, \\ 6b = \lambda, \\ 4c = \lambda, \end{cases} \Rightarrow a = 3b = 2c \Rightarrow b = \frac{a}{3}, c = \frac{a}{2}.$$

Substituindo acima, temos

$$a^2 + \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{2} = \frac{11}{6}a^2 = \frac{11}{6} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1, b = \pm\frac{1}{3}, c = \pm\frac{1}{2}.$$

Portanto, temos dois pontos possíveis $(a,b,c) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ ou $(a,b,c) = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$.

Equações do plano tangente:

Para $(a,b,c) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$, temos: $\left(x - 1, y - \frac{1}{3}, z - \frac{1}{2}\right) \cdot (1,1,1) = 0 \Rightarrow \boxed{x + y + z - \dfrac{11}{6} = 0}$.

Para $(a,b,c) = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$, temos: $\left(x + 1, y + \frac{1}{3}, z + \frac{1}{2}\right) \cdot (1,1,1) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x + y + z + \dfrac{11}{6} = 0}$.

9. (Ex. 15 - Aula 11). Considere a função $z = \dfrac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y}$, Determine as equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função dada no ponto $(2,2,1)$.

Solução

$S : z = \dfrac{\sqrt[4]{8 + x^2 + y^2}}{y} \Leftrightarrow S : zy = \sqrt[4]{8 + x^2 + y^2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow S : z^4y^4 = 8 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow S : 8 + x^2 + y^2 - z^4y^4 = 0$.

Considere a função f dada por $f(x,y,z) = 8 + x^2 + y^2 - z^4y^4$ que é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Observe que a superfície S é a superfície de nível de f no nível 0, que contém $(2,2,1)$.

Temos que $\nabla f(1,1,1) = (2x, 2y + 4z^4y^3, -4z^3y^4)_{(2,2,1)} = (4, -28, -64)$ é perpendicular a S em $(2,2,1)$.

Com isso, obtemos a equação do plano tangente:
$(x-2, y-2, z-1)\cdot(4,-28,-64)=0 \Rightarrow \boxed{x-7y-16z+28=0}$.

Equação da reta normal: $\boxed{(x,y,z)=(2,2,1)+\lambda(4,-28,-64), \lambda\in\mathbb{R}}$.

10. (Ex. 8 - Aula 12) Seja $v(r,\theta)=u(x,y)$, onde $u(x,y)$ é uma função de classe C^2 com $x=r\cos\theta$ e $y=r\,\text{sen}\,\theta$. Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}.$$

Solução

Temos $v(r,\theta)=u(x,y)$, onde $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\,\theta$ são funções diferenciáveis. Então, pela regra da cadeia, temos

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial r}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\theta}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial r}}_{\text{sen}\,\theta}\\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\underbrace{\dfrac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r\,\text{sen}\,\theta}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\underbrace{\dfrac{\partial y}{\partial \theta}}_{r\cos\theta}\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial v}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}, & (1)\\ \dfrac{\partial v}{\partial \theta}=-r\,\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial u}{\partial y}. & (2)\end{array}\right.$$

Derivando (1) em relação a r, temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}=\cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\text{sen}\,\theta}\right]+\text{sen}\,\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}}_{\cos\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}}_{\text{sen}\,\theta}\right),$$

e agora derivando (2) em relação a θ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\,\text{sen}\,\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r\,\text{sen}\,\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r\cos\theta}\right]+&\\ -r\,\text{sen}\,\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \theta}}_{-r\,\text{sen}\,\theta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial \theta}}_{r\cos\theta}\right]&.\end{aligned}$$

Como $u(x,y)$ é de classe C^2, então, pelo Teorema de Schwarz, temos que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}(x,y)$. Então,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \cos^2\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathrm{sen}^2\,\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \dfrac{\partial u}{\partial x} - r\,\mathrm{sen}\,\theta \dfrac{\partial u}{\partial y} + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{array}\right.$$

Agora fazendo a soma $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$, encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = {} & \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathrm{sen}^2\,\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{r\cos\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{r\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \\ & + \mathrm{sen}^2\,\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

De onde conseguimos,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \left(\cos\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

como queríamos verificar.

BY NC ND