Kern und Rang von Matrizen

Zusammenhang LGS/Matrizen/Unter-VR
Lösbarkeitskriterium für LGS $\rightarrow$ LGS lösbar $\leftrightarrow L \neq \emptyset$

LGS $\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_1 + ... + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ ... \\ a_{mn} \end{pmatrix} \cdot x_n = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n \\ ... \\ a_{m1} \cdot x_1 + ... + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$
$A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1}$

1. Homogene LGS: $A \cdot x = 0$ ($A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = 0_{m\times 1}$)
   Lösungsmenge $L* = \{x \in K^n | A \cdot x = 0\}$; $L* \neq \emptyset$, denn $0 \in L*$

   Beweis: $L*$ ist ein UVR von K^n (K-Körper)

   a) $L* \neq \emptyset, 0 \in L*$
   b) $x_1, x_2 \in L* \rightarrow x_1 + x_2 \in L*$, denn:
      $A \cdot (x_1 + x_2) = A \cdot x_1 + ! \cdot x_2 = 0_{K^m} + 0_{K^m} = 0_{K^m}$
   c) $x\ inL*$ und $k \in K \rightarrow k \cdot x \in L*$, denn:
      $A \cdot (k \cdot x) = k \cdot A \cdot x = k \cdot 0_{m\times 1} = 0_{m\times 1}$

   Definition:
   Sei $A \in K^{m\times n}$ (K-Körper), dann nennt man
   $Ker(A) := \{x \in K^n | A \cdot x = 0_{m\times 1}\}$
   den Kern der Matrix A

   Bemerkung:
   Den Kern einer Matrix A kann man durch Lösen eines homogenen LGS mit Koeffizienten-Matrix A bestimmen

   Bemerkung:
   Dr Kern einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist ein UVR von K^n

   Bsp.
   $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad Ker(A) = \{\begin{pmatrix} 1 \cdot t \\ 0 \cdot t \\ -1 \cdot t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\})$ (1 freier Parameter)
   $\rightarrow Ker(A) = \{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$

$\rightarrow dimKer(A) = 1$, Basis von Ker(A): $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $Ker(A) = Span(\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\})$

2. Inhomogene LGS: $A \cdot x = b = \emptyset$ $(A_{m\times n} \cdot x_{n\times 1} = b_{m\times 1} \neq 0_{m\times 1})$
   Lösungsmenge $L = \{x \in K^n | A \cdot x = b\}$, $0_{K^n} \notin L \rightarrow L$ kein VR (UVR)
   Lösungsmenge $L * deszugehörigenhomogenenLGS :$
   $L* = \{x \in K^n | A \cdot x = 0_{m\times n}\}$
   Sei $A \cdot x_1 = b$ (d.h. $x_1 \in L$)
   Dann $L = \{x_1 + x^* | x^* \in L^*\}$
   Bsp. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
   spezielle Lösung:
   $L = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R}\}$

Behauptung:
$L = x_1 + L^*$, zu zeigen:
$L \subseteq x_1 + L^*$
(i) $x_1 + L^* \subseteq L$, also: $A \cdot x_1 = b$ und $x^* \in L^* \to x_1 + x^* \in L$
(ii) $L \subseteq x_1 + L^*, also x_2 \in L \to x_2 \in x_1 + L^*$, d.h. es gibt ein $x^* \in L^*$ mit $x_2 = x_1 + x^* \to x^* = x_2 - x_1$

Wir zeigen:
$X_1, x_2 \in L \to x_2 - x_1 \in L^*$
$A \cdot x_1 = b$, $A \cdot x_2 = b$
$\to A \cdot (x_1 - x_1) = A \cdot x_2 - A \cdot x_1 = b - b = 0$

Bsp:
$L = \{(\begin{pmatrix} 8 \cdot t_1 + 15 \cdot t_2 \\ 15 + 8 \cdot t_1 \\ 8 + 13 \cdot t_2 \end{pmatrix})|t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$
$= \{\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot t_1\}$
... BSP ABSCHREIBEN

Definition:
Sei K ein Körper und V ein K-VR. Sei U ein UVR von V. Dann nennt man $v + U := \{v + u | u \in U\}$ $(v \in V)$ einen affinen Teilraum von V.

Bemerkung:
$v + U ist ein UVR \rightleftarrows v \in U$

Beispiel:
$V = \mathbb{R}^2$
————BILD————
Geraden, die nicht durch den Ursprung verlaufen, beschreiben keinen UVR, sondern einen affinen Teilraum

Bemerkung:
$dim(v + U) := dim(U)$

Bemerkung:
0-dim. affine TR (Punkt)
1-dim. affine TR (Gerade)
2-dim. affine TR (Ebene)
(n-1) dim. affine TR für einen VR der Dim n (Hyperebene)

$$A \in K^{m\times n}, A = (\begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix} \cdot ... \cdot \begin{pmatrix} ... \\ ... \\ ... \end{pmatrix}) = (s_1, s_2, ..., s_n) \qquad \text{Spaltenvektoren}$$

$Col(A) := Span(\{s_1, ..., s_n\}) = \{t_1 \cdot s_1 + ... + t_n \cdot t_n \in K\} = \{b \in K^m | exex.t_1, ..., t_n \in Kmitb = t_1 \cdot x_1 + ... + t_n \cdot x_n\}$
Spaltenraum von der Matrix A $\rightarrow Col(A) = \{b \in K^m | A \cdot x = b \rightarrow lösbar\}$

Definition
Die Dimension von Col(A) heißt Spaltenrang von A.

A= –BILD—- = $\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$

$Row(A) := Span(\{z_1, ..., z_2\})$

Definition
Die Dimension von Row(A) heißt Zeilenrang von A

Satz
dim(Col(A)) = dim(Row(A)) für jede MAtrix A

Definition
Man nennt rg(A):=dim(Col(A)) (=dim Row(A))

Bemerkung
$rg(a) <= do, (Col(S)), min - dim(Row(A))$

Bsp

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2} \qquad rg(A) \in \{1, 2, 3, 4\}$$

2 lineare unabhängige Spaltenvektoren $\rightarrow rg(A) = 2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{rg(B)=3}$$

3 lin. unabh. Spaltenvektoren

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \text{rg(c) <= 3} \qquad \text{rg(c) = 2}$$

Rangkriterium für die Lösbarkeit von LGS:
LGS $A \cdot x = b$ lösbar $\rightleftarrows$ rg(A,b) = rg(A)