Satz von Moivre

Ein Sonderfall ist die Formel von Moivre:
$z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = 1^n * e^{i*(n\varphi)}$
$\Leftrightarrow z = e^{i\varphi} \Rightarrow z^n = e^{i*(n\varphi)}$

Bemerkung: Die Potenzen einer komplexen Zahl, welche auf dem Einheitskreis liegt, liegen auch auf dem Einheitskreis.

Wurzelziehen in $\mathbb{C}$:
1) Gesucht: Alle Lösungen von $z^n = 1$
2) Gesucht: Alle Lösungen von $z^n = z_0$, für eine beliebige komplexe Zahl z_0
$\Rightarrow$ Ges.: $z, n \in \mathbb{N}, z_0 \in \mathbb{C}$
$z_0 = r_0 * e^{i\varphi_0}$

Zu 1)
Definition: Eine komplexe Zahl heißt n-te Einheitswurzel, wenn $z^n = 1$ gilt.
Beispiel: i ist eine 4-te Einheitswurzel, denn: $i \in \mathbb{C}, 4 \in \mathbb{N}$ und $i^4 = i * i * i * i = (-1) * (-1) = 1$
-i ist eine 4-te Einheitswurzel, denn: $-i \in \mathbb{C}, 4 \in \mathbb{N}$ und $i^4 = -i * -i * -i * -i = (-1) * (-1) = 1$
i ist keine 2-te Einheitswurzel, denn: $i \in \mathbb{C}, 2 \in \mathbb{N}$, aber $i^2 = i * i = -1 \neq 1$

Ermitteln der n-ten Einheitswurzel
$z_k = 1 * e^{i*\frac{2\pi}{n}*k}, (k = \{0, 1, ..., n-1\})$ sind die n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$

Zu 2)
$z^n = z_0 \Leftrightarrow (r * e^{i\varphi})^n = r_0 * e^{i\varphi_0}$
$\Leftrightarrow r^n * e^{i*(n\varphi)} = r_0 * e^{i\varphi_0}$
$\Leftrightarrow r^n = r_0$ und $n\varphi = \varphi_0 + k * 2\pi$
$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r_0}$ und $\varphi = \frac{\varphi_0}{n} + k * \frac{2\pi}{n}$
$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{r_0}$ und $\varphi \in \{\frac{\varphi_0}{n} + k * \frac{2\pi}{n} | k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}\}$
Es gibt genau n Lösungen, nämlich:
$z_k = \sqrt[n]{r_0} * e^{i*(\frac{\varphi_0}{n} + k*\frac{2\pi}{n})} (k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\})$

Bemerkung: $z_k = \sqrt[n]{r_0} * \underset{\substack{\text{Spez. Lsg. von} \\ z_n = z_0}}{e^{i*(\frac{\varphi_0}{n})}} * \underset{\substack{\text{n-te Einheits-} \\ \text{wurzel}}}{e^{i*\frac{2\pi}{n}*k}}$

denn:
$(\sqrt[n]{r_0} e^{i*\frac{\varphi_0}{n}})^n = (\sqrt[n]{r_0})^n * (e^{i*\frac{\varphi_0}{\cancel{n}}})^{\cancel{n}} = r_0 * e^{i\varphi_0} = z_0$

Beispiel:
Gesucht: $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 16$
Genau 4 Lösungen:
$z_0 = 2 * 1 = 2$
$z_1 = 2 * i = 2i$
$z_2 = 2 * (-1) = -2$
$z_3 = 2 * (-i) = -2i$

Lösbarkeit von Gleichungen in $\mathbb{C}$
(1) $z^2 = -1$ hat in $\mathbb{C}$ genau 2 Lösungen: i und -i
(2) $z^2 = z_0 \in \mathbb{C}$ hat in $\mathbb{C}$ genau 2 Lösungen
(3) $a * z^2 + b * z + c = 0$ hat in $\mathbb{C}$ genau 2 Lösungen
Bemerkung: $z^2 + pz + q = 0$
$z_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{2} - q} \Rightarrow$ Lösung von $x^2 = \frac{-p}{4} - q$
$\sqrt{-1} \Rightarrow$ ist Lösung von $x^2 = -1$