Mathe

18. November 2015

1 Abbildungen

Seien A und B zwei Mengen. Eine *Abbildung*(oder *Funktion*) von A nach B weist jedem Element von A genau ein Element aus B zu. Formal ist die Funktion f von A nach B ein Paar (G_f, B), wobei $G_f \subseteq A \times B$ eine Relation ist, die folgende Eigenschaft erfüllt: zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ so dass $(a, b) \in G_f$. Die Relation G_f wird auch Graph von f genannt.

1.1 Notation

Wenn f eine Funktion von A nach B ist, so schreibt man auch $f : A \to B$ und nennt A den *Definitionsbereich* und B den *Zielbereich* der Funktion. Statt $(a, b) \in G_f$ schreibt man meist $f(a) = b$ und spricht, b sei der *Bild von a unter f.*
Eine Funktion f heißt

f ist injektiv falls für alle $a_1, a_2 \in Amitf(a_1) = f(a_2)gilt, sodassa_1 = a_2$. Keine zwei verschiedenen Elemente von A haben das gleiche Bild unter *f.* Zur Berechnung definiert man die Umkehrfunktion f^-1

surjektiv falls $f[A] = B$. D.h. für jedes $b \in Bgibteseina \in A$mit $f(a) = b$.

Bijektiv, falls sie sowohl injektiv, als auch surjektiv ist.

1.2 Der Satz von Cantor-Schröder-Bernstein

Seien $f : A \to Bundg : B \to A$ Injektion. Dann exisitiert auch eine Bijektion zwischen A und B.

1.3 Das Auswahlaxiom

Falls $f : A \to B$ eine Injektion ist, dann gibt es sicherlich eine Surjektion von $f[A]$ nach A, n'mlich die bereits eingeführte Umkehrabbildung f^-1 von f. Diese Umkehrbildung können wir beliebig auf Elemente aus $B \setminus [A]$ fortsetyen. Eine Fortsetyung erhalten wir dann beispielsweise, indem wir alle Elemente aus $B \setminus f[A]$ auf dasselbe Element aus A abbilden.

Falls $g : A \to B$ eine Surjektion ist, so gibt es auch eine Injektion $f : B \to A$ mit $g \circ f = id_B$.

1.4 Die Kontinuumshypothese

Für alle Mengen A gilt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$, d.h. die Potenzmenge einer belibigen Menge hat stets strikt mehr Elemente.

1.5 Permutationen

Eine Permutation einer Menge X ist eine Bijektion $\pi : X \to X$. Eine Permutation π wird oft in der folgenden Form angegeben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Permutationen können jedoch auch in einer kompakteren Form aufgeschrieben werden: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \end{pmatrix}$. In der Notation kommt es *nicht* darauf an:

- in welcher Reihenfolge die Zyklen notiert werden
- mit welchem Elemnt wir den Zyklus beginnen

Die Komposition(hintereinader Ausführung) zweier Permutationen ist wieder eine Permutation von X. Beispiel(von rechts nach links!):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Doch wieviele Permutationen mit n Elementen gibt es? Genau $n!$ viele. Bei sehr großen n kann man auch die *Stirling'sche Formel* benutzen: $n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$