1. Die Symbole der Mengensprache

Mengen:
...jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten in unserer Anschauung oder des Denkens.

Schreibweisen:

- e $\in$ M: e ist Element der Menge M.
- e $\notin$ M: e ist kein Element der Menge M.
- $\varnothing$: leere Menge.
- A $\subseteq$ B: A ist Teilmenge von B.

2. Mengenangaben durch Aussonderung

$\{x \mid Bedingung(x)\}$: Die Mengen aller x, die die gegebene Bedingung erfüllen.
z.B.: alle geraden x $\{x \mid \exists y \quad y \cdot 2 = x)\}$

- $A \cap B$: Schnitt von A und B.
- $A \cup B$: Vereinigung von A und B.
- $A \setminus B$: Differenz von A und B.

3. Mengenoperationen (Paar und Produkt)

geordnete Paare (a,b)
(a,b) sind Menge der Gestalt $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

$(a, b) \neq (b, a)$
$\{a, b\} = \{b, a\}$
$(a, b) = (c, d) \Rightarrow a = cundb = d$
$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$

4. Kodieren mit Mengen

Produktmenge
$A \times B$ zweier Mengen A,B wird definiert durch:
$A \times B \ := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
Schreiben $|A|$ für die Anzahl der Elemente der Menge A.

Relationen
Eine Teilmenge R von A und B heißt (binär oder zweistellige) Relation.

Falls A=B, so spricht man auch von einer zweistelligen Relation auf A.

Potenzmenge
Die Potenzmenge von A, geschrieben $\mathcal{P}(A)$, ist die Menge aller Teilmengen von A.
Es gilt: $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

5. Doppeltes Abzählen

Das doppelte Abzählen ist ein kombinatorisches Beweisprinzip.

Zähle auf zweierlei Weise die Kardinalität z von:
$\{(t_i, t_j) \mid t_i \ gibt \ t_j \ die \ Hand\}$
x_i: Anzahl der Personen denen t_i die Hand reicht
y: Anzahl aller Handschläge
Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} = x_i = z = 2y$$

und es folgt, dass eine gerade Anzahl der x_i ungerade sein muss. $\square$

6. Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k}$ (gesprochen: n über k)
die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.
Bem.:
$\binom{n}{0} = 1$
$\binom{n}{n} = 1$
...sind Extremfälle

Schreiben n! für $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, definieren $0! := 1$

Proposition
Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Insbesondere gilt:
$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Wollen zeigen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Bilden k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge: wähle erstes Element, dann ein zweites usw., bis zum k-ten Element.
Dafür gilt: $n \cdot (n-1) \cdot (...) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k!)}$ Möglichkeiten.
Auswahlreihenfolge spielt keine Rolle:
jeweils k! Möglichkeiten führen zur gleichen Teilmenge. $\square$

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n,k gilt:
$\binom{n}{k} = nn \cdot k$
(kombinatorischer Beweis:) Doppeltes Abzählen:

1. Aus n Spielern einer Mannschaft mit k Spielern aufstellen.
2. Aus n Spielern n-k Spieler auswählen, die nicht spielen.

(algebraischer Beweis:)
Folgt direkt aus $\binom{n}{k} = n\binom{n!}{k!(n-k)!}$ $\square$

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n,k gilt:
$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
(kombinatorischer Beweis): Doppeltes Abzählen

1. Aus n Spielern einer Mannschaft mit k Spielern inklusive Kapitän aufstellen.
2. Aus n Spielern einen Kapitän auswählen und dann aus den übrigen k-1 Spieler auswählen

(algebraischer Beweis):
$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$ $\square$

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} = 2^n$$

Es gilt 2^n Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Pascalsches Dreieck

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:
$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Beweis: Sei M eine (n+1) elementige Menge und $x \in M$
wählen x aus $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten.

wählen x nicht aus $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. $\square$

7 Die Russelsche Antinomie

allgemein: $\{x \mid Eigenschaften\}$
betrachte: $R := \{x \mid x \notin x\}$

Gilt $R \in R$

- Falls ja: Dann muss R die Aussonderungsbedingung erfüellen. (Eigenschaft gilt nicht für R $\rightarrow$ R $\notin$ R $\lightning$
- Falls nein: Eigenschaft erfüllt: R$\notin$ R $\rightarrow$ R $\in$ R $\lightning$

8 Die Axiome von Zermelo-Fraenkel

- Extensionalität: z.B.: $\{a, b\} = \{b, a, b\}$
- Vereinigung: z.B.: $\{\{a, b\}\{c, d, a\}\}$
- unendliche Mengen: z.B.: $\{\{\varnothing\}\{\{\varnothing\}\}\{\{\{\varnothing\}\}\}\}$
- Fundierung: ($x \notin x$: zum selber knobeln)