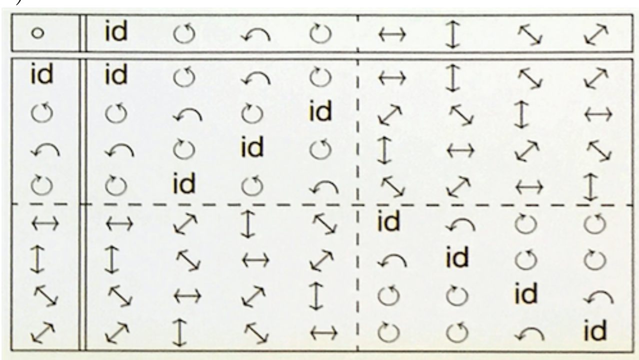
31. Beispiele für Gruppen

Beispiele:
a) $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
+...Addition
-...$x \mapsto -x$

b) $\mathbb{Z}_n = \{0, ..., n-1\}$
$(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$
+/-...(modulo n)

c) Die von 0 verschiedenen rationalen Zahlen bilden bzgl. der Multiplikation eine Gruppe.

d) Sei $D = \{1, 2, 3\}$. Die Menge aller Permutationen auf D bildet eine Gruppe bzgl. $\circ$ (Komposition von Funktion)

e)


∘	id	↺	↶	↻	↔	↕	⤡	⤢
id	id	↺	↶	↻	↔	↕	⤡	⤢
↺	↺	↶	↻	id	⤢	⤡	↕	↔
↶	↶	↻	id	↺	↕	↔	⤢	⤡
↻	↻	id	↺	↶	⤡	⤢	↔	↕
↔	↔	⤢	↕	⤡	id	↶	↻	↺
↕	↕	⤡	↔	⤢	↶	id	↺	↻
⤡	⤡	↔	⤢	↕	↺	↻	id	↶
⤢	⤢	↕	⤡	↔	↻	↺	↶	id

Gruppen allgemein:

1. $\circ$ ist assoziativ
2. $\forall g \in G gibt es ein Element g^{-1} : g = g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ (Inverses Element)
3. $\forall g \in G \quad g \circ e = e \circ g = g$ (e...neutrales Element)

Beispiel:
$(\mathbb{Z}, +, -, 0) \qquad \forall g, h \in G \qquad g \circ h = h \circ g$ (abelsche Gruppe) ist kommutativ
$(\mathbb{Z}_n, +_{modn}, -, 0)$
(Permutationen von $\{1, 2, 3\}, 0, \circ, ^{-1}, id) \rightarrow$ NICHT abelsch

$g := \binom{1 \quad 2 \quad 3}{2 \quad 3 \quad 1} \qquad h := \binom{1 \quad 2 \quad 3}{2 \quad 1 \quad 3}$

$g \circ h = \binom{1 \quad 2 \quad 3}{3 \quad 2 \quad 1} \qquad h \circ g = \binom{1 \quad 2 \quad 3}{1 \quad 3 \quad 2}$