6. Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k}$ (gesprochen: n über k)
die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.
Bem.:
$\binom{n}{0} = 1$
$\binom{n}{n} = 1$
...sind Extremfälle

Schreiben n! für $1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, definieren 0! := 1

Proposition
Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Insbesondere gilt:
$\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Wollen zeigen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Bilden k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge: wähle erstes Element, dann ein zweites usw., bis zum k-ten Element.
Dafür gilt: $n \cdot (n-1) \cdot (...) \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k!)}$ Möglichkeiten.
Auswahlreihenfolge spielt keine Rolle:
jeweils k! Möglichkeiten führen zur gleichen Teilmenge. □

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n,k gilt:
$\binom{n}{k} = nn \cdot k$
(kombinatorischer Beweis:) Doppeltes Abzählen:

1. Aus n Spielern einer Mannschaft mit k Spielern aufstellen.

2. Aus n Spielern n-k Spieler auswählen, die nicht spielen.

(algebraischer Beweis:)
Folgt direkt aus $\binom{n}{k} = n\binom{n!}{k!(n-k)!}$ □

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n,k gilt:
$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
(kombinatorischer Beweis): Doppeltes Abzählen

1. Aus n Spielern einer Mannschaft mit k Spielern inklusive Kapitän aufstellen.

2. Aus n Spielern einen Kapitän auswählen und dann aus den übrigen k-1 Spieler auswählen

(algebraischer Beweis):
$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$ $\square$

Beobachtung: Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k} = 2^n$$

Es gilt 2^n Teilmengen einer n-elementigen Menge.

Pascalsches Dreieck

$n = 0$:					1				
$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

Für alle natürlichen Zahlen n, k gilt:
$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

Beweis: Sei M eine (n+1) elementige Menge und $x \in M$
wählen x aus $\binom{n}{k-1}$ Möglichkeiten.
wählen x nicht aus $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. $\square$