Titel

$A \in K^{m \times n}$ $\qquad$ $rg(A)$
homogenes LGS lösen $\rightarrow$ Rangberechnung
Rangberechnung

1. "direkt"

2. mittels Dimensionsformel

Bemerkung:
Der Rang einer Matrix ändert sich nicht, wenn man elementare Zeilenumformungen anwendet.

rg(a)=dim Col(A) = dim Row(A)
dim Col(A) = Maximalzahl linearer unabhängiger Spaltenvektoren von A
dim Row(A) = Maximalzahl linearer unabhängiger Zeilenvektoren

Rangberechnung:
$A \in K^{m \times n}$ mittels elementarer Zeilenumformungen in ZSF bringen

—BILD (ZSF)—
Der Rang von A ist die Anzahl der Zeilen, die nicht nur Null enthalten, in der ZSF.

dim Ker(A) ist die Anzahl der freien Parameter in der Lösungsmenge von $A \cdot x = 0$.

n=rg(A) + dim Ker(A). (Dimensionsformel)

Satz: (Dimensionsformel)
Für $A \in K^{m \times n}$ gilt: rg(A) + dim Ker(A) = n.

Beispiel:
$A\ in \mathbb{R}^{3 \times 3}$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{1 freier Parameter}$$
rg(A)=2
dim Ker(A) = 3-2 = 1

$$\text{Ker(A)} = \{ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} | \in \mathbb{R}\} \qquad t = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Basis von Ker(A)}$$

Beispiel:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ $\qquad rg(A) <= min\{2,4\}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & | \neq 0 & ... & ... \end{pmatrix}$

$rg(A^T) = 2 \rightarrow rg(A) = rg(A^T) = 2$

dim Ker(A) = n-rg(A) = 2 -2 = 0 $\rightarrow Ker(A) = \{0_Z\}$

Definition

Sei $A \in K^{\{}n \times n\}$ (K Körper).

a heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ gibt.

Die MAtrix A wird dann invertierbar genannt und A^{-1} die zu A inverse Matrix.

Beweis

1. A^{-1} ist eindeutig bestimmt (falls A^{-1} existiert), denn:
   Sei $A \cdot A_1^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E_n$,
   $A \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1} \cdot A = E_n$
   Dann: $A \cdot A_1^{-1} = A \cdot A_2^{-1} | A_1^{-1}$
   $(A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_1^{-1} = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} \rightarrow E_n \cdot A_1^{-1} = E_n \cdot A_2^{-1} \rightarrow A_1^{-1} \cdot A_2^{-1}$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ (Reihenfolge beachten)

Bemerkung

Zur Berechnung von A^-1 sind n LGS zu lösen (simultan);

damit kann man gleichzeitig entscheiden, ob A^{-1} existiert

1. Notiere $(A|E_n)$
2. Überführung im ZSF
   —BILD—
   Enthält diese Matrix eine Nullzeile, dann existiert A^{-1} nicht.
   —Bild—
   Enthält diese Matrix keine Nullzeile, dann existiert A^{-1}
3. Überführt in reduzierte ZSF $\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & | & \\ & 1 & ... & ... & | & A^{-1} \\ 0 & & & 1 & | & \end{pmatrix}$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to ... \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & \| & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ABSCHREIBEN

Bemerkung

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1^{-1} & 0 \\ 0 & d_n^{-1} \end{pmatrix}, \text{ falls } d_1 \neq 0, ..., d_n \neq 0$$

Bemerkung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = 1/a \cdot d - b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \text{ falls } a \cdot d - b \cdot c \neq 0,$$

denn:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot 1/a \cdot d - b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = 1/a \cdot d - b \cdot c \cdot \begin{pmatrix} a \cdot d - b \cdot c & 0 \\ 0 & a \cdot d - b \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$

A^{-1} existiert $\rightleftarrows rg(A) = n$

$\to$ dim Ker(A) = n - n = 0

$\to$ Ker (A) = 0_{K^n} Nullvektor

$\to$ Ax = 0 hat nur die triviale Lösung (Nullvektor)

5. Lineare Abbildungen

Definition
Sei V, W K-VR. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear (oder Homomorphismus), wenn:

1. $f(a +_V b) = f(a) +_W f(b)$ für $a, b \in V$
2. $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$ für $a \in V, k \in K$

Bemerkung
$f(k_1 \cdot a_1 + ... + k_n \cdot a_n) = k_1 \cdot f(a_1) + ... + k_n \cdot f(a_n)$
für $k_1, ..., k_n \in K, \qquad a_1, ..., a_n \in V$

Bemerkung
Lineare Abbildungen sind strukturverträglich

Bemerkung
$f(0_V) = 0_W$,
denn: $f(0) = f(a - a) = f(a + (-1) \cdot a) = f(a) + (-1) \cdot f(a) = f(a) - f(a) = 0_W$