Vektorräume
Bemerkung
Vektoren sind Elemente von Vektorräumen, z.B. $\nearrow, \pi, i, 2+3i, \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

Definition
Sei K ein Körper, Ein K -Vektorraum (kurz: $K:-VR$ also VR über k) $(V;+,(k|k \in K))$ besteht aus:

1. einer Menge V $(V \notin \emptyset)$
2. einer Addition $+; v \times v \to v$
3. einer Skalarmultiplikation $(k|k\ inK); K \times K \to V$ mit der Eigenschaften (v1) bis (v10)

Die Elemente von V heißen Vektoren
Bezeichnungen:
$\mathbb{R}-VR$ (d.h. $K=\mathbb{R}$): reeller VR
$\mathbb{C}-VR$ (d.h. $K=\mathbb{C}$): komplexer VR

kurz: VR V (wenn klar ist, um welchen Körper es geht)
$\vec{V} \in V$ Skalar $\to k \in K$

Vektorräume - Axiome

1. Zu je zwei $v_1, v_2 \in V$ existiert ein eindeutig bestimmtes $v_1 + v_2$ in V
2. Für alle v_1, v_2, $v_3 \in V$ gilt: $(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$
(+ ist assoziativ)
3. Für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $v_1+v_2 = v_2+v_1$
(+ ist kommutativ)
4. Es gibt in V ein Element $0(Null, Nullvektor)$ mit $v+0=0+v=v$ für alle $v \in V$
5. Zu jedem $v \in V$ existiert ein $-v \in V$ mit $v+-v=-v+v=0$
6. Zu jedem $k\ inK$ und jedem $v \in V$ existiert ein eindeutig bestimmtes $k \cdot v \in V$
7. Für alle $v \in V$ gilt: $1 \cdot v = v$ (1 bzw. 1_k ist das Einselement aus K)
8. Für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $v \in V$ gilt: $k_1 \cdot (k_2 \cdot v) = (k_1 \cdot k_2) \cdot v$
9. Für alle $k_1, k_2 \in K$ und alle $vinV$ gilt: $(k_1+k_2) \cdot v = k_1 \cdot v + k_2 \cdot v$
10. Für alle $k \in K$ und alle $v_1, v_2 \in V$ gilt: $k \cdot (v_1+v_2) = k \cdot v_1 + k \cdot v_2$