VORLESUNG 6 NACH TITEL FRAGEN - Teil2

Sei V ein $K-VR$, $T \subseteq V$
Dann ist Span(T) der kleinste UVR von V, der sämtliche Elemente von T enthält
1.Fall: $T = \emptyset \rightarrow Span(T) = \{0_v\}$ Nullraum
2.Fall: $T = \{v_1, ..., v_n\} \rightarrow Span(T) = \{k_1 \cdot v_1 + k_2 \cdot v_2 + ... + k_n \cdot v_n | k_1, ..., k_n \in K\}$
(Linearkombination v_1, v_2, v_n mit Koeffizienten aus K)

Bsp $\{\begin{pmatrix} r_1 + 2 \cdot v_2 \\ 2 \cdot r_1 + r_3 \\ v_1 - v_2 + 5 \cdot r_3 \end{pmatrix} | r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\} =: U$ ist ein UVR von $\mathbb{R}^3$
$\rightarrow U = \{r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} | r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}\} = Span(\{r_1, r_2, r_3\})$

Ziel: Jedem / möglichst viele VR durch eine möglichst endliche Menge T von Vektoren beschreiben, so das $V = Span(T) gilt$
T wird ein Erzeugersystem für den VR V genannt.

Bemerkung:
Jeder VR mit mehr als einem Element hat verschiedene Erzeugersysteme.

gewollt:
möglichst kleine Erzeugersysteme XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Definition:
Sei V ein K-VR und $(v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Folge von Vektoren $v_1, ..., v_n \in V$

$(v_1, ..., v_n)$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
$\forall k_1, ..., k_n \in K$ gilt: $k_1 \cdot v_2 + ...k_n \cdot v_n = 0_v \rightarrow k_1 = ... = k_n = 0_k$

Ansonsten heißt $(v_1, ..., v_n)$ linear abhängig.
Beweis: Die Entscheidung linear(un)abhängig wird durch lösen eines LGS getroffen

Bsp.

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ist linear unabhängig, denn das homogene LGS mit der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ hat genau dann eine Lösung nämlich $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$

2. $(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix})$ ist linear abhängig, denn das homogene LGS mit der Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ hat mehr als eine Lösung

   z.B. $k_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

   $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1$

Bemerkung:
Analog pricht man von Linear (un)abhängigen Mengen von Vektoren bzw. von linear (un)abhängigen Vektoren

Beweis:
$\emptyset$ ist linear unabhängig