VORLESUNG 6 NACH TITEL FRAGEN - Teil3

Definiton:
Sei V ein K-VR, $T \subseteq V$
T heißt eine Basis von V, wenn gilt:

1. $Span(T) = V$ (T ist ein erzeugendes System von V)
2. T ist linear unabhängig

Beweis:
eine Basis $(k_1, k_2, ..., k_n)$ ist ein minimales erzeugendes System, denn $b_k \notin Span(\{k_1, ..., k_n\} \backslash \{b_i\})$

Anmerkung:
$b_i \; inSpan(...) \rightarrow$ es existiert
$k_1, ..., k_{i-1}, k_{i+1}, ..., k_n$ mit $k_1 \cdot b_1 + ... + k_{i-1} \cdot b_{i-1} + k_{i+1} \cdot b_{i+1} + k_n \cdot b_n = b_i$
$\rightarrow k_1 \cdot b_1 + ... + (-1) \cdot b + ... + k_n \cdot b_n = 0_v$????????????????
$\rightarrow (b_1, ..., b_n)$ linear abhängig

Satz:
Sei V ein K-VR und B_1, B_2 seine Basen dieses VR. Dann gilt: $|B_1| = |B_2|$

Definition:
Sei V ein K-VR und B eine Basis dieses VR.
Gilt: $|B| = n \in \mathbb{N}$, dann ist V ein n-dimensionaler VR (dim V = n)
Andernfalls ist V ein unendlich Dimensionaler VR (dim V = ∞)

Satz:
Sei V ein K-VR und $(b_1, ..., b_n)$ eine Basis dieses VR. Dann existiert für jedes $v \in V$ eindeutig bestimmte $k_1, ..., k_n \in K$
mit $v = k_1 \cdot b_1 + ... + k_n \cdot b_n)$ (Basisdarstellung von V)
Man nennt $V_{b_1,...,b_n} = \begin{pmatrix} k_1 \\ ... \\ k_n \end{pmatrix}_{b_1,...,b_n}$ den Koordinatenvektor von v bzgl. $(b_1, .., b_n)$