Diskrete Strukturen 11.11.2015 Vertretung:Baumann

Graph: Algebraische Struktur| $\neq$ Graphendiagramm, aber man kann aus ihm das Graphendiagramm konstruieren. z.B.
G_1=({1,2,3,4},$\binom{V}{2}$))
$G_2 = \{(1,2,3,4), \{\{1,2\}\{1,3\}\{2,3\}\}$

Beschriftetes Graphendiagramm: Veranschaulichung eines Graphen. Siehe Tafelbild zu G_1, G_2.

Unbeschriftete Graphendiagramm stellen eine Isomorphieklasse von Graphen dar.

Isomorphie: G_1, G_2, G_3 haben alle 7 Knoten, alle Knoten haben den Grad 4.
Siehe Tafelbild.
Frage: $G_1 \cong G_2$? Gelesen: Ist der Graph G_1 **isomorph zu** dem Graphen G_2
Ja, da man durch Umbenennung der Knoten den gleichen Graphen erhält.
Einer der unbeschrifteten Graphendiagramme von G_1 *oder* G_2 beschreibt die Isomorphieklasse.
Frage: $G_1 \cong G_3$? NEIN, Knotenanzahl, Kantenanzahl und Grad der Knoten zwar gleich, aber: Wenn man den Graphen G-0 bildet (G-0:={0,...,6}\{0},E\{{0,6}{0,1}{0,2}{0,5}}
Zeichnet man $G_1 - 0$, dann gibt es zwei miteinander verbundene Knoten mit Grad 4. Bei $G_3 - 0$ bleiben ebenfalls 2 Knoten mit Grad 4, aber diese sind nicht über eine Kante verbunden!

Isomorphieproblem für Graphen: Geg: G_1, G_2
Entscheide, ob $G_1 \cong G_2$.
⇒ Bisher angenommen: Problem nicht effizient lösbar.
Aber am 10.11.2015 wurde in einem Vortrag bewiesen, dass es Quasipolynomiell lösbar ist, also sehr nah an den polynomiellen Problemklassen liegt.

Färbbarkeit
Definition: Sei G=(V,E) ein Graph. G heißt k-färbbar (k-partit), wenn es eine Abbildung f: V→{0,1,...,k-1} so gibt, dass gilt:
∀ {x,y}∈E: f(x)≠f(y)
Jede solche Abbildung f heißt k-Färbung (Färbung) von G.
Beispiel: Siehe Tafelbild.
Für jeden endlichen Graphen gibt es ein k so, dass der Graph k-färbbar ist,
z.B. k:=max$\{d_G(v)|v \in V(G)\}$+1
Diese Formel gibt nicht die minimale Zahl für k aus.
⇒ Wenn ein Graph 2-färbbar ist, dann ist er auch 4-färbbar.
Also wenn ein Graph k-färbbar ist, dann ist er auch j-färbbar mit j≥k.

2-färbbar=2-partit=bipartit

Satz: Ein endlicher Graph G ist 2-färbbar genau dann, wenn G keinen Kreis ungerader Länge enthält.
Beweis: (1) ($\Rightarrow$) zu zeigen: Wenn G bipartit ist, dann enthält G keinen Kreis ungerade Länge
Annahme: G enthält doch einen Kreis ungerader Länge.
Dann werden zum Färben des Kreises mindestens drei Farben benötigt. Widerspruch.
(2) ($\Leftarrow$) Zu zeigen: Wenn der Graph G keinen ungeraden Kreis enthält, dann gibt es eine 2-Färbung für G.
Es genügt die Behauptung für jede Zusammenhangskomponente zu zeigen.
Sei C eine Zusammenhangskomponente von G. Sei u ein beliebiger Knoten aus V(C).
(1) f(u):=0
(2) Gilt $\{u,v\}\in E$, dann f(v):1
(3) Sind alle Knoten gefärbt, dann ist die Behauptung bewiesen. (C ist bipartit)
(4) Falls nicht: Es existiert ein Knoten $w\in V(C)$, der noch nicht gefärbt ist, aber einen Nachbarn w' hat, der schon gefärbt ist.
Setze f(w):=1-i.
Die Farbe von dem Knoten w ist eindeutig bestimmt, weil alle schon gefärbten Nachbarn von w, die gleiche Farbe haben.(Sonst würde es ungerade Kreise geben.)
(5) Gehe zu (3)
Weil G endlich ist, ist G nach endlich vielen Schritten mit 2 Farben gefärbt.

Bemerkung: Es ist für k>2, kein effizienter Algorithmus bekannt, der entscheidet, ob ein Graph g k-färbbar ist.

Definition: Ein Graph G heißt Baum, wenn G zusammenhängend ist und keinen Kreis enthält.
Ein Knoten vom Grad 1 in einem Baum wird Blatt genannt.
Graphen, die keinen Kreis enthalten, heißen Wälder.
Bemerkung: Bäume und Wälder sind 2-färbbar.
Beispiel: Isomorphieklassen für Bäume mit 5 Knoten: Siehe Tafelbild.

Lemma: Sei G=(V,E) ein endlicher Baum
(1) Ist $|V|>1$, dann hat G mindesten 2 Blätter.
(2) Es gilt: $|E|=|V|-1$.
(3) Sind $v,w\in V$, dann gibt es genau einen Weg in G von v nach w.
Beweis: (1) Siehe Tafelbild
(2) Induktion über die Knotenanzahl n:
Induktionsanfang: (2) gilt, weil 1-1=0 $\surd$
Induktionsschritt: Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für alle Bäume mit Knotenanzahl$\leq$n
Induktionsbehauptung: Dann hat G Kantenanzahl (n+1)-1=n
Induktionsbeweis: G enthält ein Blatt v.
G-v ist zusammenhängend und kreislos, also ein Baum und hat deshalb Kantenanzahl

n-1 (nach Induktionsvorausssetzung)
G hat durch das hinzunehmen der einen Kante des Blattes genau (n-1)+1=n Kanten. □

Lemma: Sei G ein endlicher Graph. Dann sind äquivalent:
(1) G ist ein Baum
(2) G ist ein minimal zusammenhängender Graph (minimale Kantenanzahl)
(3) G ist maximal kreislos (Hinzufügen erzeugt in jedem Fall einen Kreis)