

Rechnen mit Matrizen

1. Transponieren: Sei $A = (a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$

Dann ist $A^T := (b_{ij})_{n \times m} \in K^{n \times m}$ mit $b_{ij} = a_{ji}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

2. Skalarmultiplikation: Sei $k \in K$, k fest, $A \in K^{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Dann ist $k * A := (k * a_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, k = \pi \Rightarrow k * A = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi \\ 3\pi & 4\pi \end{pmatrix}$

3. Addition: Sei $A, B \in K^{m \times n}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$

Dann ist $A + B := (c_{ij})_{m \times n} \in K^{m \times n}$ mit $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$

Bemerkung: $A - B := A + (-1) * B$, mit $(-1) \in K$

4. Multiplikation: Sei $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$, $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times p}$

Dann ist $A * B := (c_{ij})_{m \times p}$ mit $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} * b_{kj}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3}, B = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

$(A * B)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1a + 2b + 3c & 1d + 2e + 3f \\ 4a + 5b + 6c & 4d + 5e + 6f \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise für Lineare Gleichungssysteme

$A = (a_{ij})$ Koeffizientenmatrix

$(A|b)$ Erweiterte Koeffizientenmatrix

$A * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$

$A * x = b$