1 Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Expression du vecteur accélération

On étudie le mouvement d'un objet de masse m au voisinage de la Terre. Dans ce domaine restreint, on peut considérer que le **champ de pesanteur** $\vec{g}_0$ est **uniforme**.

Toutes les actions mécaniques autres que celle modélisée par le poids $\vec{P}$, résultant du champ de pesanteur, seront négligées.

D'après la deuxième loi de Newton, $m \times \vec{a} = \vec{P} = m \times \vec{g}_0$ et $\vec{a} = \vec{g}_0$.

Le **vecteur accélération $\vec{a}$** du centre de masse d'un objet placé uniquement dans un champ de pesanteur uniforme est constant et égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}_0$.

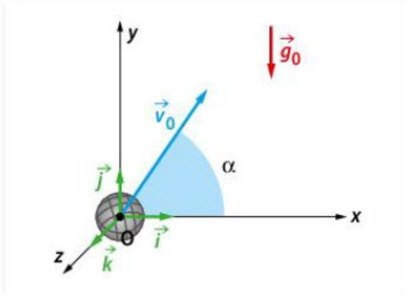


FIG. 1 Le système est lancé depuis O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g}_0$.

Équations horaires du mouvement

Les équations horaires du mouvement sont les expressions des coordonnées des vecteurs vitesse $\overrightarrow{v(t)}$ et position $\overrightarrow{OG(t)}$ du système. Pour un système, de centre de masse G, lancé depuis le point O dans le plan (xOy) avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan (xOy) (FIG. 1), on exprime dans le repère d'espace orthonormé $(0\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les vecteurs $\vec{g}_0 \begin{cases} 0 \\ -g_0 \\ 0 \end{cases}$ et $\vec{v}_0 \begin{cases} v_0 \times \cos\alpha \\ v_0 \times \sin\alpha \\ 0 \end{cases}$.

Puisque $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, on a $\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = a_x = 0 \\ \dfrac{dv_y}{dt} = a_y = -g_0 \\ \dfrac{dv_z}{dt} = a_z = 0 \end{cases}$.

UN PONT VERS LES MATHS

Souvent liée au calcul d'intégrales, le terme intégration désigne ici la recherche de primitive. Une primitive d'une fonction f du temps définie sur un intervalle est une fonction F, définie et dérivable sur cet intervalle, dont la dérivée est f.

➥ Fiche MATHS p. 535

Par intégration, on en déduit un ensemble de primitives possibles :

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = k_1 \\ v_y(t) = -g_0 \times t + k_2 \\ v_z(t) = k_3 \end{cases}$$ où k_1, k_2 et k_3 sont des constantes.

La connaissance de la vitesse initiale (à $t = 0$ s) permet d'établir les valeurs de chacune des trois constantes par identification de deux termes égaux :

$$\overrightarrow{v(0)} = \vec{v}_0 \text{ d'où } \begin{cases} v_x(0) = k_1 = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y(0) = -g_0 \times 0 + k_2 = v_0 \times \sin\alpha \\ v_z(0) = k_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y(t) = -g_0 \times t + v_0 \times \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

La composante horizontale de la vitesse est constante, la composante verticale de la vitesse est une fonction affine décroisssante du temps (FIG. 2) car l'axe Oy est de sens opposé à $\vec{g}_0$.

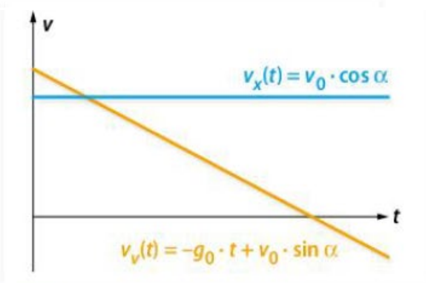


FIG. 2 L'évolution des composantes horizontale $v_x(t)$ et verticale $v_y(t)$ de la vitesse en fonction du temps.

De même, puisque $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$ après intégration et en connaissant la position initiale O à $t = 0$ s, les équations horaires de la position s'écrivent :

$$\overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g_0 \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Le mouvement s'effectue dans le plan (xOy) car $z(t) = 0$ **(FIG. 3)**.

Le **mouvement** du centre de masse d'un système **dans un champ uniforme est plan**, le plan étant défini par les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{g}_0$.

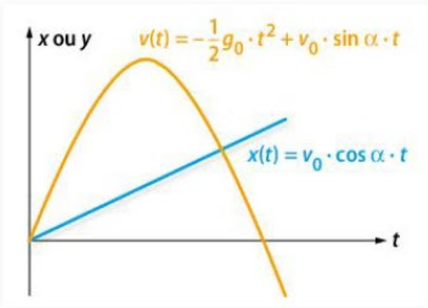


FIG. 3 Les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ au cours du mouvement. $x(t)$ est fonction affine du temps et $y(t)$ est fonction parabolique du temps.

Équation de la trajectoire

La trajectoire du centre de masse dans le plan (xOy) est donnée par la courbe d'équation $y = f(x)$. Cette équation s'obtient ainsi :

$x(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t$ d'où $t = \dfrac{x}{v_0 \times \cos\alpha}$ et en reportant t dans $y(t)$, on obtient :

$$y(x) = \frac{-g_0}{2 \times v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x^2 + x \times \tan\alpha$$

La **trajectoire** du centre de masse d'un système dans un champ de pesanteur uniforme est une portion de **parabole** **(FIG. 4)**.

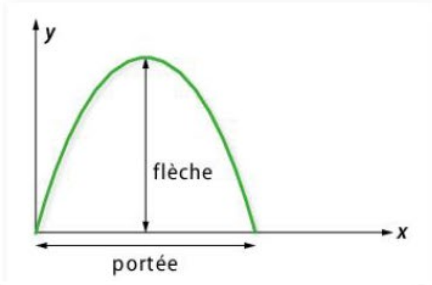


FIG. 4 La flèche est la hauteur maximale atteinte par le système, la portée est la distance entre le point de lancer et le point d'impact sur l'axe horizontal.

2 Mouvements dans un champ électrique uniforme

Le condensateur plan

Un condensateur plan est formé de deux armatures métalliques, lames conductrices planes et parallèles, proches l'une de l'autre et séparées par un isolant comme l'air ou le vide **(FIG. 5)**.

Entre les deux armatures d'un condensateur plan chargé règne un champ électrique uniforme $\vec{E}$ perpendiculaire aux armatures et orienté vers l'armature chargée négativement.

$$E = \frac{U_{AB}}{d}$$

- champ électrique ($V \cdot m^{-1}$) → E
- U_{AB} : tension entre les deux armatures A et B (V)
- d : distance entre les armatures (m)

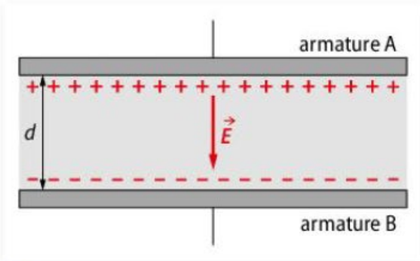


FIG. 5 Condensateur plan.

Particule chargée dans un champ électrique uniforme

À l'intérieur d'un condensateur plan, une particule de charge q n'est soumise qu'à l'action du champ électrique $\vec{E}$ uniforme car le poids $\vec{P}$ de la particule est négligeable devant la force électrique $\vec{F}_e$. D'après la deuxième loi de Newton, on écrit : $m \times \vec{a} = \vec{F}_e = q \times \vec{E}$, d'où $\vec{a} = \dfrac{q}{m} \times \vec{E}$.

Le **vecteur accélération $\vec{a}$** d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme est dirigé selon le vecteur champ électrique $\vec{E}$.

Le **sens du vecteur $\vec{a}$** dépend de l'orientation du champ $\vec{E}$ et du signe de la charge q.

EXEMPLE

Le mouvement d'une particule de charge q positive **(FIG. 6)** a pour équations horaires :

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{-qE}{m} \times t + v_0 \times \sin\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-qE}{m} \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \end{cases}$$

La trajectoire de la particule est une portion de parabole d'équation $y(x) = \dfrac{-q \times E}{2 m v_0^2 \cos^2 \infty} \times x^2 + x \times \tan\alpha$ dont la concavité dépend du signe de q.

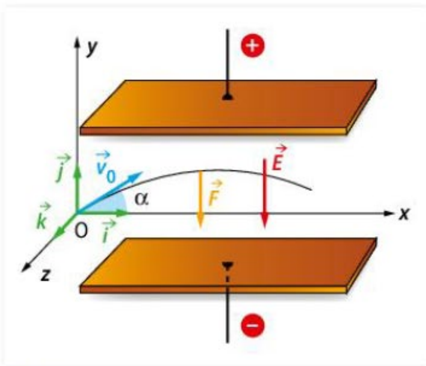


FIG. 6 Charge q positive entrant dans un condensateur plan avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$.

3 Aspect énergétique dans un champ uniforme

Principe d'un accélérateur linéaire de particules chargées

Les accélérateurs linéaires de particules sont constitués d'un ou plusieurs condensateurs plans associés en série. Ils sont principalement utilisés en recherche, en imagerie ou à des fins thérapeutiques (FIG. 7).

FIG. 7 Accélérateur linéaire de particule au CERN.

Dans un condensateur plan, le **travail de la force électrique** $\vec{F}_e$ fait varier l'énergie cinétique d'une particule de charge q.

$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{AB} = q \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = q \times U_{AB}$$

- ΔE_c : variation d'énergie cinétique (J)
- U_{AB} : tension électrique entre A et B (V)
- q : charge électrique (C)

Dans un condensateur plan, la relation $E = \dfrac{U_{AB}}{AB}$ est toujours vérifiée.

EXEMPLE

Dans un canon à électron (FIG. 8), des électrons sont produits sans vitesse initiale en O puis accélérés dans un condensateur plan. La tension aux bornes du condensateur est égale à $U_{AB} = -5{,}0$ kV. Le travail de la force électrique entre les deux armatures A et B vaut :

$$W_{AB}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{AB} = q \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = q \times E \times d \times \cos 0 = q \times U_{AB}$$

soit $\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F}_e) = -1{,}6 \times 10^{-19} \times -5\,000 = 8{,}0 \times 10^{-16}$ J.

Le travail est moteur et l'énergie cinétique du système augmente.

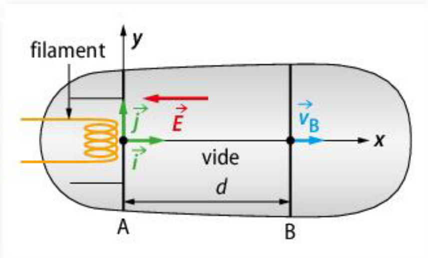


FIG. 8 Canon à électron constitué d'une source d'électron et d'un condensateur plan accélérant les électrons produits.

Conservation de l'énergie

Dans les deux cas de champs uniformes étudiés ici, la force de pesanteur ou la force électrique sont constantes donc **conservatives** et associées respectivement à une **énergie potentielle de pesanteur** E_{pp} ou une **énergie potentielle électrique** $E_{p(élec)}$.

On peut exploiter le principe de conservation de l'énergie selon les deux variantes :

L'**énergie mécanique se conserve** en l'absence de force non conservative : $E_m = E_c + E_p = c^{ste}$ (FIG. 9). Il y a conversion intégrale d'énergie cinétique en énergie potentielle et réciproquement.

La seconde variante utilise l'expression du travail des forces en exploitant le **théorème de l'énergie cinétique** :

$$\Delta E_c = \sum W_{AB}(\vec{F}).$$

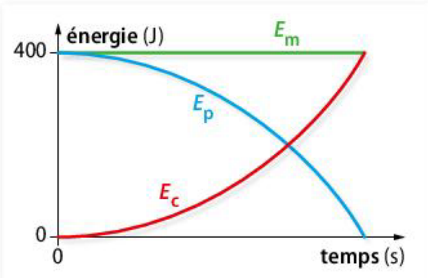


FIG. 9 Conservation de l'énergie mécanique dans un champ uniforme.

EXEMPLE

Dans le cas du canon à électron (FIG. 8) pour un parcours entre A et B, d'après la conservation de l'énergie mécanique, $\Delta E_m = 0$ d'où $\Delta E_c = -\Delta E_{p(élec)}$.

Avec $E_{p(élec)} = q \times V$, on obtient $\Delta E_c = E_c(B) - 0 = q \times (V_A - V_B) = -eU_{AB}$

d'où $\dfrac{1}{2} \times m v_B^2 = -eU_{AB}$ et $v_B = \sqrt{\dfrac{-2eU_{AB}}{m}}$

soit $v_B = \sqrt{\dfrac{2 \times (-1{,}6 \times 10^{-19}) \times (-5{,}0 \times 10^{3})}{9{,}11 \times 10^{-31}}} = 4{,}2 \times 10^{7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, on retrouve également l'expression :

$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{AB} = q \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = -e \times E \times d \times \cos 0 = -eU_{AB}$$

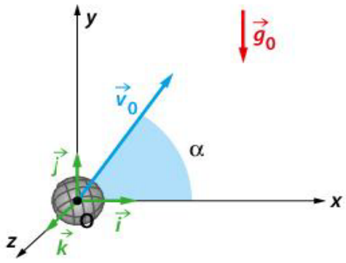
FICHE MÉMO PRÉPA BAC

Le vocabulaire à retenir

Les relations à connaître

1 Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

$$\overrightarrow{a_G(t)} = \vec{g}_0 \text{ soit } \overrightarrow{a_G(t)} \begin{cases} a_x(t) = a_z(t) = 0 \\ a_y(t) = -g_0 \end{cases}$$



Équations horaires du mouvement

Pour un objet lancé avec $\vec{v}_0$ oblique

$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y(t) = -g_0 \times t + v_0 \times \sin\alpha \\ v_z(t) = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} \times g_0 \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

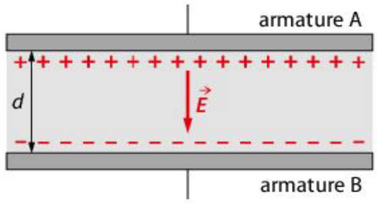
Puisque $z(t) = 0$, le mouvement s'effectue dans le plan (xOy) formé par les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{g}_0$.

Équation de la trajectoire parabolique

$$y(x) = \frac{-g_0}{2 \times v_0^2 \times \cos^2\alpha} \times x^2 + x \times \tan\alpha$$

2 Mouvement dans un champ électrique uniforme

Condensateur plan et champ électrique



tension entre les deux armatures A et B (en **V**)

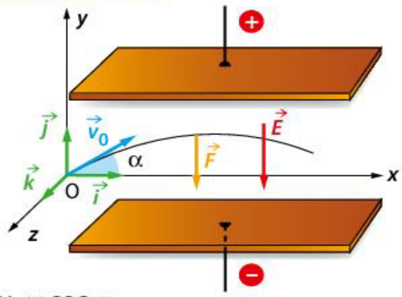
champ électrique (en **V · m⁻¹**) → $E = \dfrac{U_{AB}}{d}$

distance entre les armatures (en **m**)

Équations horaires du mouvement

Mouvement de particule de charge $q > 0$ dans le plan formé par les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$:

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \times \vec{E}.$$



$$\overrightarrow{v(t)} \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{-qE}{m} \times t + v_0 \times \sin\alpha \end{cases}$$

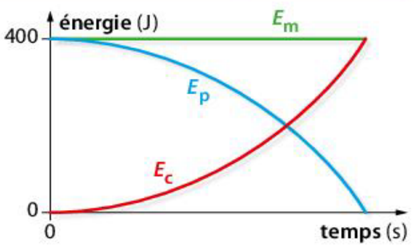
$$\overrightarrow{OG(t)} \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos\alpha \times t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-qE}{m} \times t^2 + v_0 \times \sin\alpha \times t \end{cases}$$

Équation de la trajectoire parabolique

$$y(x) = \frac{-q \times E}{2\,m v_0^2 \cos^2\alpha} \times x^2 + x \times \tan\alpha$$

3 Aspects énergétiques dans un champ uniforme

Conservation de l'énergie mécanique



énergie cinétique (en **J**)

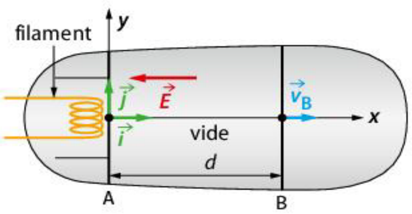
énergie mécanique (en **J**) → $Em = Ec + Ep$ ← énergie potentielle (en **J**)

masse (en **kg**)

$Ep(\text{pesanteur}) = m \times g \times y$ ← altitude (en **m**)

intensité de la pesanteur (en **m · s⁻²**)

Principe de l'accélérateur linéaire



$Ep(\text{électrique}) = q \times V$ ← potentiel électrique (en **V**)

charge électrique (en **C**)

variation d'énergie cinétique (en **J**)

tension électrique entre A et B (en **V**)

$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \overrightarrow{AB} = q \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = q \times U_{AB}$$

charge électrique (en **C**)