1 Les intervalles en musique

L'école pythagoricienne

Dans l'Antiquité, des systèmes musicaux ont commencé à voir le jour en plusieurs endroits du globe. En Grèce, l'école pythagoricienne (Fig. 1), active à partir du VIe siècle avant notre ère, considérait les nombres entiers et leurs rapports comme l'expression ultime de l'harmonie musicale, et de celle de l'Univers tout entier.

Fig. 1 : Pythagore et un monocorde, l'instrument d'étude de l'école pythagoricienne.

Les intervalles consonants

En musique, l'**intervalle** entre deux sons correspond au rapport de leurs fréquences fondamentales.

L'écoute de différents intervalles musicaux provoque des sensations plus ou moins agréables. Les sons consonants (qui « sonnent » bien), sont liés à des rapports simples d'entiers (Fig. 2). Ils ont alors des harmoniques communs.

Exemple : Quand on presse la corde d'un monocorde aux deux tiers, le son produit par le plus grand morceau de corde « sonne bien » avec le son fourni par la corde entière.

Deux notes séparées par une **octave** correspondent à une même note, à des hauteurs différentes.

Exemple : Quand un homme et une femme chantent la même ligne musicale, leurs voix se positionnent généralement à une ou plusieurs octaves de distance.

Nom de l'intervalle	Rapport de fréquences
Unisson	1/1
Octave	2/1
Quinte	3/2
Quarte	4/3

Fig. 2 : Exemples d'intervalles consonants.

2 Les gammes dites de Pythagore

Pour construire une **gamme** (c'est-à-dire une suite finie de **notes** réparties sur une octave), les disciples de Pythagore ont exploité uniquement les intervalles qu'ils jugeaient les plus consonants, c'est-à-dire l'octave et la **quinte**.

Les gammes dites de Pythagore sont créées par une succession de quintes (caractérisées par une multiplication de la fréquence par 3/2) et de réductions à l'octave (caractérisées par une division de la fréquence par 2).

Construction d'une gamme avec le cycle des quintes

– On construit la gamme à partir d'un son de fréquence f.
– On multiplie cette fréquence par 3/2 pour former une première quinte.
– On trouve la quinte suivante en multipliant la fréquence de la note précédente par 3/2. Si la fréquence obtenue n'est plus dans l'intervalle $[f\,;2f]$, on la « ramène » dans l'octave en la divisant par 2 (Fig. 3). On obtient ainsi une nouvelle note.
– On continue ce procédé jusqu'à obtenir une $(n+1)^e$ note de fréquence voisine de f. En l'identifiant à f, on obtient ainsi une gamme de n notes réparties dans l'octave (Fig. 4).

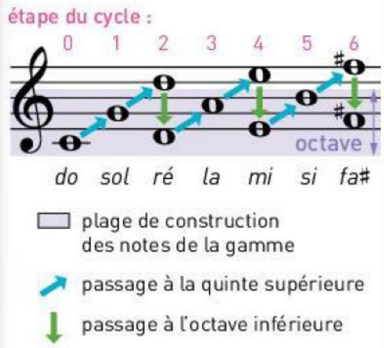
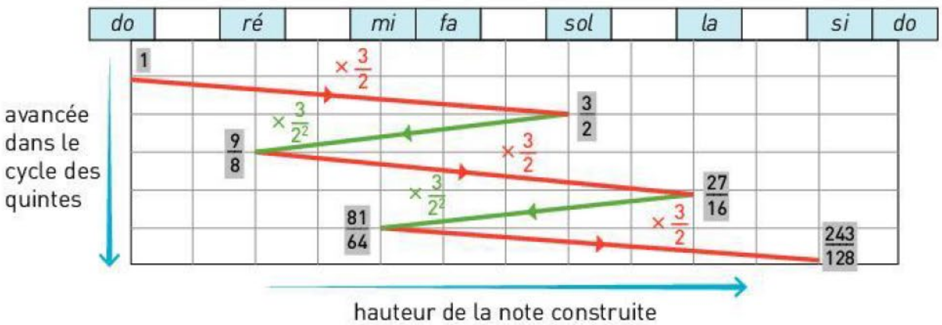


Fig. 3 : Principe du cycle des quintes.



n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{9}{8}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{81}{64}f$

Fig. 4 : Gamme de Pythagore à 5 notes. La 6e note, de fréquence $243/128\,f \approx f$, « reboucle » presque.

Gammes à 5, 7 et 12 notes

Le cycle des quintes retombe « presque » sur la fréquence de la note de départ pour un nombre de notes égal à 5, 7 et 12.

En effet, on a $3^5 \approx 2^8$; $3^7 \approx 2^{11}$; $3^{12} \approx 2^{19}$. Pendant des siècles, les musiciens ont employé des gammes à 7 et 12 notes (Fig. 5).

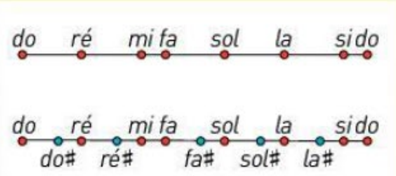


Fig. 5 : Les gammes de Pythagore à 7 et 12 notes.

La quinte du loup

Un raisonnement mathématique montre qu'il n'existe aucune suite de notes construites sur le cycle des quintes qui « reboucle » exactement.

La dernière quinte de la gamme à 12 notes sonne un peu faux : c'est la quinte du loup.

Exemple : Dans la gamme de Pythagore à 12 notes, l'intervalle entre le *mi* # (dernière note de la gamme) et le *fa* est d'environ 1,0136 (au lieu de 1) (Fig. 6).

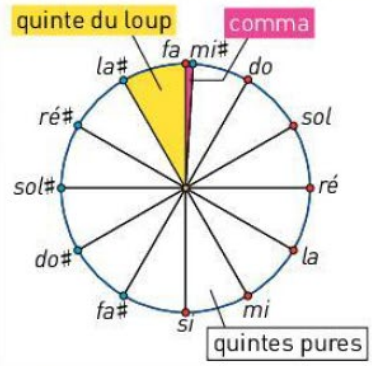


Fig. 6 : La quinte du loup.

3 Les gammes au « tempérament égal »

Le problème de transposition

Une **transposition** consiste à adapter une mélodie au registre de la voix ou d'un instrument en la « déplaçant » vers l'aigu ou le grave.

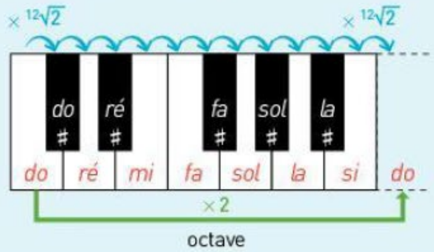
Les gammes de Pythagore ne facilitent pas la transposition, car les intervalles entre les différentes notes de la gamme sont inégaux (Fig. 7).

La gamme tempérée à 12 notes

Le modèle qui s'impose à partir du XVIIIe siècle est le tempérament égal, qui permet de transposer une mélodie dans toutes les tonalités sans la déformer.

La gamme tempérée à 12 notes est une gamme dont tous les intervalles sont égaux. L'intervalle d entre deux notes successives de la gamme est égal à la **racine douzième de 2** :

$$d = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946.$$



L'oreille humaine tolère bien le tempérament égal même si aucun intervalle, sauf l'octave, n'est dans un rapport simple.

Fig. 7 : Le clavecin est souvent accordé dans un tempérament inégal : les accords sont plus harmonieux, mais les transpositions sont difficiles.

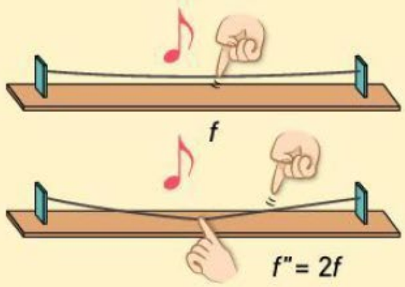
Le vocabulaire à retenir

- **Gamme :** suite finie de notes réparties sur une octave.
- **Intervalle (musical) entre deux sons :** rapport de leurs fréquences fondamentales.
- **Note (de musique) :** ensemble des sons dont les fréquences ont un rapport de la forme 2^n (n entier).
- **Octave :** intervalle entre deux sons de rapport 2.
- **Quinte :** intervalle entre deux sons de rapport 3/2.
- **Racine douzième d'un nombre positif a :** nombre d tel que $d^{12} = a$.
- **Transposition :** opération consistant à multiplier par un même nombre les fréquences des notes d'une mélodie.

1 Les intervalles en musique

Octave

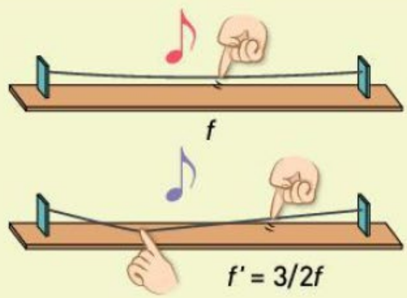
L'intervalle f''/f vaut 2/1.



Les deux sons correspondent à une même note, à deux hauteurs différentes.

Quinte

L'intervalle f'/f vaut 3/2.



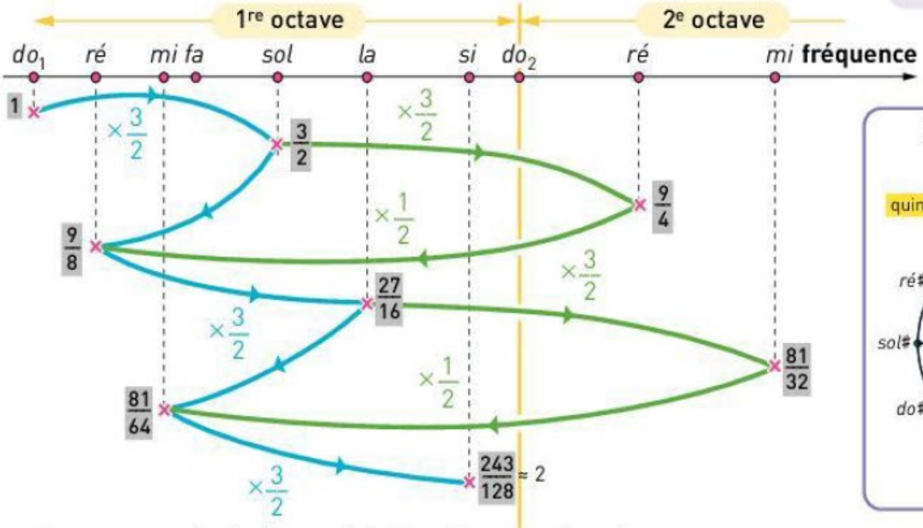
L'intervalle est consonant.

2 Les gammes de Pythagore

Construction par le cycle de quintes

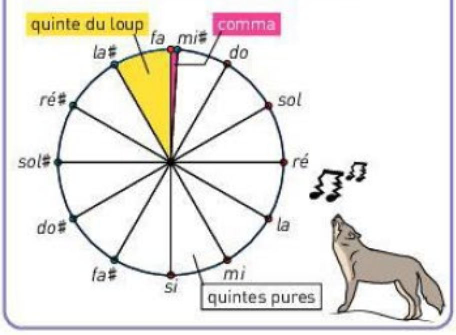
À partir d'un son donné, on construit la note suivante par adjonction de sa quinte, puis la suivante par la quinte de sa quinte, etc. La note est réduite à l'octave si besoin.

Le cycle des quintes est infini : il n'existe pas d'entiers non nuls n et p tels que $3^n = 2^{n+p}$.



Les gammes de Pythagore à 5, 7 et 12 notes « bouclent » presque.

Une des quintes de la gamme est légèrement fausse :

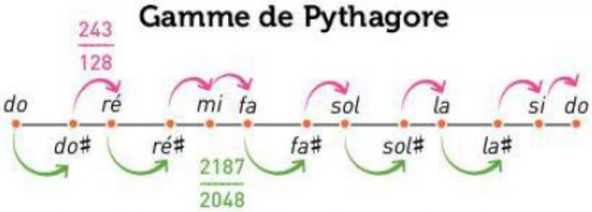


3 La gamme tempérée

La racine douzième de 2 est un nombre irrationnel.

$\sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946...$

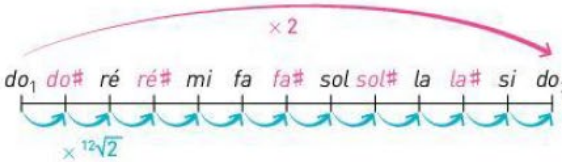
Gamme de Pythagore



Les intervalles entre notes consécutives ne sont pas égaux.

transposition difficile

Gamme tempérée à 12 notes



Tous les intervalles sont égaux et valent $\sqrt[12]{2}$.

transposition facile

2 Questions à choix unique

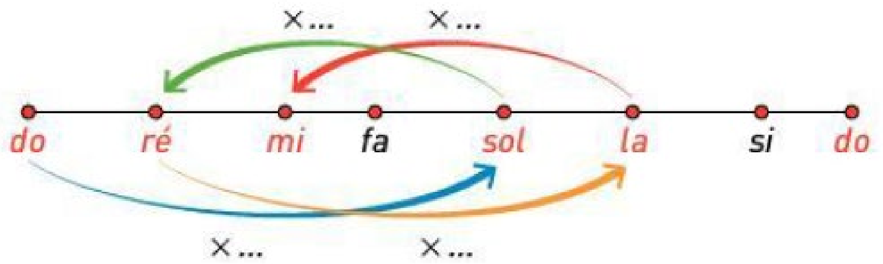
Choisir l'unique bonne réponse.

	1	2	3
A - Un intervalle musical correspond :	à la différence entre deux fréquences.	au rapport de deux fréquences.	au produit de deux fréquences.
B - Une quinte est :	un intervalle de valeur $\frac{3}{2}$.	un intervalle de valeur $\frac{1}{5}$.	un ensemble de cinq notes de musique.
C - Si on enchaîne deux quintes à partir d'un son de fréquence f, la fréquence du son obtenu est :	$\frac{9}{8}f$.	$3f$.	$\frac{9}{4}f$.
D - Dans la gamme tempérée, l'écart entre les fréquences du *do* et du *ré* est égal à :	$\sqrt[12]{2}$.	$2\sqrt[12]{2}$.	$(\sqrt[12]{2})^2$.
E - Si le sol_2 a pour fréquence 196 Hz, alors la fréquence du do_3 dans la gamme tempérée vaut, à 1 Hz près :	233.	261.	294.

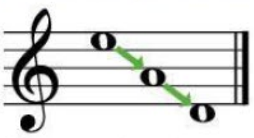
7 Compléter un schéma

On démarre un cycle des quintes à partir de la note *do*, à la fréquence f.

Recopier et compléter la figure en indiquant les fractions manquantes et les fréquences des notes en rouge.



8 Construction d'une gamme avec des quintes descendantes



Soit une note de fréquence f que l'on normalise à 1. On se propose de construire une gamme pythagoricienne à partir de cette note, mais à l'aide de quintes descendantes (voir figure ci-contre) et non de quintes ascendantes. Comme dans la gamme classique, si une note sort de l'intervalle de fréquences [1 ; 2], on l'y ramène en passant à l'octave.

les clés de l'énoncé

- L'énoncé donne la définition d'une **quinte descendante**.
- Le passage à l'octave exige ici une **multiplication** par 2.

1. À la première étape du calcul, on trouve un son de fréquence f_1 telle que l'intervalle musical entre f_1 et 1 soit une quinte. **Justifier** que $f_1 = 2/3$.

2. **Montrer** que la deuxième note de la gamme a pour fréquence 4/3.

3. **Calculer** la fréquence des trois notes suivantes.

4. **Justifier** qu'on obtient ainsi une gamme à cinq notes qui « boucle » presque.

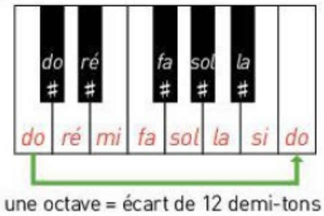
9 Calculs de fréquences dans des gammes différentes

La note donnée par ce diapason a pour fréquence 440 Hz. On l'appelle la_3.

1. a. Calculer la fréquence du *la* situé une octave au-dessus du la_3, que l'on nomme la_4.
b. Calculer la fréquence du la_1, situé deux octaves au-dessous du la_3.

2. L'intervalle la_3-mi_4 est une quinte ascendante. Quelle est la fréquence du mi_4 dans la gamme pythagoricienne ?

3. Dans la gamme tempérée, combien de demi-tons séparent le *la* et le *mi* formant une quinte ascendante ? En déduire la fréquence du mi_4 dans la gamme tempérée. Comparer les résultats trouvés pour les deux gammes.



11 Un programme pour les gammes pythagoriciennes

1. On veut créer un programme Python qui, pour un nombre de quintes *n* donné ($n \geqslant 2$), retourne la liste des fréquences de la gamme pythagoricienne associée.
a. Recopier le programme ci-contre et compléter les instructions manquantes.
b. Exécuter ce programme pour $n = 12$, 27 et 53. Pour lesquelles de ces valeurs la gamme « reboucle »-t-elle presque ?

```python
# cycle pythagoricien de n quintes
def cyclepytha(n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        a=...
        if a>=2:
            ...
        L.append(a)
    return(L)
```

2. On veut à présent déterminer une gamme pythagoricienne de *n* notes qui « boucle » presque parfaitement, c'est-à-dire telle que le rapport des fréquences entre le son de départ et le son final soit inférieur à 10^{-p}, où *p* est un entier naturel donné.
a. Élaborer un programme Python qui retourne la première valeur de *n* qui soit solution.
b. Quelle valeur de *n* trouve-t-on pour $p = 2$? Pour $p = 3$?

13 Les quintes et les quartes alternées

Dans l'Antiquité, les Grecs élaborèrent une autre méthode pour définir une gamme : utiliser une succession alternée de quintes montantes et de quartes descendantes. Une quarte est un intervalle de valeur 4/3.

1. On part d'un son de fréquence 1. Donner la fréquence f_1 du son se situant une quinte au-dessus, puis celle f_2 du son se situant une quarte en dessous. Les résultats seront donnés sous forme de fractions.

2. Continuer ainsi par une alternance de quintes et de quartes jusqu'à f_7. Comparer la gamme obtenue avec la gamme pythagoricienne.

16 Une formule pour la gamme tempérée

Le clavier d'un piano moderne comporte 88 touches noires et blanches. Deux touches voisines sont séparées d'un demi-ton. Au milieu du clavier, là où se trouve usuellement la serrure du couvercle, se trouve la touche du do_3, aussi appelée « do serrure » (en bleu, ci-dessous). La fréquence du la_3 de la même octave (en jaune) est 440 Hz.

1. Calculer la fréquence du do_4 (situé une octave au-dessus du do_3), puis celle du do_3.

2. On note *n* le nombre de demi-tons entre une note donnée et le la_3, compté positivement vers le haut ou négativement vers le bas.
Déterminer la formule donnant la fréquence de cette note dans la gamme tempérée, en hertz, en fonction de *n*.

3. Calculer la fréquence de la note donnée par la plus haute touche du clavier.

18 Un cycle des quintes particulier

La fréquence du $ré_3$ est de 294 Hz. On démarre un cycle de quintes à partir de ce son.

1. Calculer la fréquence du *ré* de l'octave supérieure.

2. Calculer la fréquence f du son S situé à une quinte ascendante du $ré_3$.

3. a. Calculer la fréquence du son situé à la quinte supérieure du son S précédent.
b. Pourquoi n'appartient-il pas à la même octave que les précédents ?
c. Le ramener dans l'octave, et donner la fréquence f_1 du son obtenu.

19 Un tableau de fréquences

Le tableau ci-dessous donne les fréquences de quelques notes d'une gamme.

1. S'agit-il d'une gamme tempérée ou d'une gamme de Pythagore ?
2. Quelle est, à 0,1 près, la fréquence du la_4 ?

	Octave 0	Octave 1	Octave 2	Octave 3	Octave 4
do	32,70	65,41	130,8	261,6	523,3
do♯ ré♭	34,65	69,30	138,6	277,2	554,4
ré	36,71	73,42	146,8	293,7	587,3
ré♯ mi♭	38,89	77,78	155,6	311,1	622,3
mi	41,20	82,41	164,8	329,6	659,3
fa	43,65	87,31	174,6	349,2	698,5
fa♯ sol♭	46,25	92,50	185,0	370,0	740,0
sol	49,00	98,00	196,0	392,0	784,0