P4a : Complexité

M. Zimmermann

IUT Robert Schuman, Département Informatique

2021/22

Chapitre 1

Notations O, o, θ

Vos connaissances solides en terme de limites à l'infini vous permettent de savoir que :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x = -\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 - x^3}{3x^3 - x} = -\frac{1}{3}.$$

Se cache derrière la notion de comparaison asymptotique (*i.e.* à l'infini) et de savoir qui converge plus rapidement vers l'infini. Les mathématiciens ont des notations pour décrire différentes comparaisons asymptotiques et les informaticiens peuvent être amenés à les utiliser si jamais ils leur vient à l'idée de faire des calculs de complexité d'algorithme.

Définition : $o(f)$

Soient f une fonctions réelle pour laquelle la limite en $+\infty$ a un sens. On définit l'ensemble suivant :

$$o(f) = \Big\{g \text{ fonction réelle } \Big| \; \exists x_0 > 0 \text{ t.q. } \; g(x) = \epsilon(x) \cdot f(x) \\ \text{avec } \lim_{x \to +\infty} \epsilon(x) = 0\Big\}$$

Remarque :

$$g(x) = \epsilon(x) \cdot f(x) \Longleftrightarrow \epsilon(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

donc $\lim_{x \to +\infty} \epsilon(x) = 0$ est une manière sûre d'exprimer que ce quotient tend vers 0 (ans avoir à se soucier que $f(x) \neq 0$).

Exemples :

Quelque fonctions dans $o(x^2)$:

$$x, \quad \ln(x), \quad 10, \quad \sqrt{x}, \quad 30000000000000x + 10^{10000}$$

mais pas :

$$x^2, \quad x^3, \quad \exp(x), \quad \frac{x^2}{10^{1000000}}$$

Définition : $O(x)$

Soient f une fonctions réelle pour laquelle la limite en $+\infty$ a un sens. On définit l'ensemble suivant :

$$O(f) = \left\{ g \text{ fonction réelle } \mid \exists x_0, k > 0 \text{ t.q. } |g(x)| \leqslant k \cdot |f(x)| \text{ pour } x \geqslant x_0 \right\};$$

Exemples :

Quelque fonctions dans $O(x^2)$:

$$x, \quad \ln(x), \quad 10, \quad \sqrt{x}, \quad 30000000000000x + 10^{10000}$$

et en plus

$$x^2, \quad 3x^2 - 1, \quad \frac{x^2}{10^{1000000}}$$

mais pas :

$$x^3, \quad \exp(x), \quad \frac{x^3}{10^{1000000}}$$

Définition : $\Theta(x)$

Soient f une fonctions réelle pour laquelle la limite en $+\infty$ a un sens. On définit l'ensemble suivant :

$$\Theta(f) = \Big\{g \text{ fonction réelle } \mid \exists x_0, k_1, k_2 > 0 \text{ t.q.} \\ k_1 \cdot |f(x)| \leqslant |g(x)| \leqslant k_2 \cdot |f(x)| \ \text{ pour } x \geqslant x_0\Big\} ;$$

Remarque :

Ce sont les fonctions telles que

1. $g \in O(f)$. En effet, pour $x > x_0$: $|g(x)| \leqslant k_2 \cdot |f(x)|$ et
2. $f \in O(g)$. En effet, pour $x > x_0$: $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{k_1}|g(x)|$.

Exemples :

Quelque fonctions dans $\Theta(x^2)$:

$$x^2, \quad 1000x^2 + 5, \quad ax^2 + x + c \text{ avec } a \neq 0$$

mais pas :

$$x^3, \quad \exp(x), \quad \frac{x^3}{10^{1000000}}$$

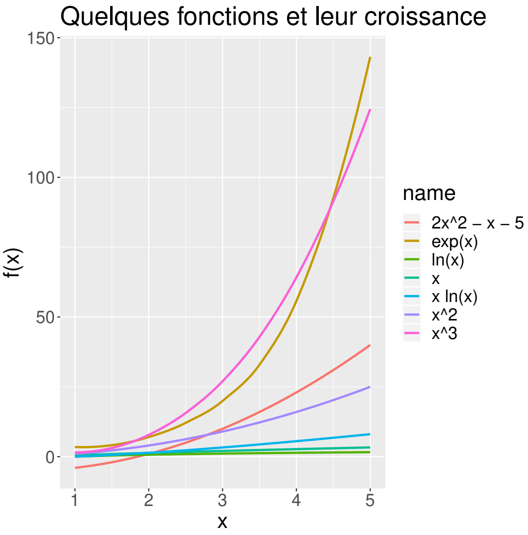
ni

$$x, \quad \ln(x), \quad 10, \quad \sqrt{x}, \quad 30000000000000x + 10^{10000}$$

Définition : $\Omega(f)$ et $\omega(f)$

Soient f une fonctions réelle pour laquelle la limite en $+\infty$ a un sens. On définit les ensembles suivants :

$$\Omega(f) = \{g \text{ fonction réelle } \mid f \in O(g)\}\,;$$
$$\omega(f) = \{g \text{ fonction réelle } \mid f \in o(g)\}.$$


Quelques fonctions et leur croissance
150
100
50
0
f(x)
1
2
3
4
5
x
name
2x^2 – x – 5
exp(x)
ln(x)
x
x ln(x)
x^2
x^3

Remarques :

1. Il y a une autre définition de $O(f)$. On a donné celle utilisée en théorie des algorithmes (Knuth).
2. $g(x) = \epsilon(x) \cdot f(x)$ est équivalent à $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \epsilon(x)$ dès lors que $f(x) \neq 0$. $g \in o(f)$ est donc équivalent à $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ dans ce cas-là.
3. $f \in o(g) \Longleftrightarrow g \in \omega(f)$ et $f \in O(g) \Longleftrightarrow g \in \Omega(f)$.
4. $f = \Theta(g) \Longleftrightarrow f \in O(g)$ et $g \in O(f)$.

Notation :

Ne reculant devant aucune ignominie, l'usage a toléré la notation suivante :

$$\text{« } f = O(g) \text{ » ou « } f(x) = O(g(x)) \text{ » au lieu de } f \in O(g).$$

Et de même pour les autres notations. . . Que dire devant tant de bassesse. . .

Remarque :

On peut se rappeler des différentes notations de comparaisons en faisant les analogies suivantes, les comparaisons portant sur les croissances asymptotiques :

$$\begin{array}{c|c}
f = o(g) & f < g \\
f = O(g) & f \leqslant g \\
f = \Theta(g) & f = g \\
f = \Omega(g) & f \geqslant g \\
f = \omega(g) & f > g
\end{array}$$

Pour estimer la performance d'un algorithme, de manière théorique, on ne cherche pas à déterminer exactement le temps de calcul (par exemple) car cela dépend de beaucoup de paramètres extérieurs à l'algorithme (puissance de la machine, langage utilisé, compilation. . .) et surtout des données à traiter.
Se donner une mesure de la complexité c'est se donner un comportement asymptotique de la durée du traitement en fonction de la taille des données à traiter.
En terme de croissance asymptotique, $x^2 \sim 2x^2 \sim x^2 + 5 \dots$

Dire qu'un algorithme est $\theta(10^n)$ veut dire la chose suivante : lorsque la taille passe d'un ordre $n = 10$ à $n = 12$ le temps de calcul est multiplié par 100 ! C'est mal ! A l'inverse, si l'algorithme est $\theta(\log(n))$, la taille peu doubler et cela ne rajoute qu'un temps constant de calcul à chaque fois : c'est bien !
Il y a un autre écueil : les données elles-mêmes. On peut donc être amené à calculer la complexité d'un algorithme en temps moyen ou au cas le plus mauvais.