OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 25 Febbraio 2020

1. Determinare il costo della soluzione ottima del seguente problema

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{2,k}^2 + u_k^2) + x_{1,3}^2, \tag{1}$$

in presenza del vincolo dinamico

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + x_{2,k}\,,$$

$$x_{2,k+1} = x_{1,k} + u_k\,,$$

a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1,\, 0)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \dot{x} = x + u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]
   b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(1) = 2$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(2x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 4x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & a x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + b x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

   i) Determinare valori dei parametri a e b tali che le matrici $K_0 = [-2 \;\; -1]$ e

$$P_0 = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right]$$

   possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato. [4 PUNTI]

   ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -2x_1 - x_2$ abbia costo pari a 1. [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e dimostrare che l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie di ottimalità. [6 PUNTI]

5. Descrivere l'equazione differenziale di Riccati per un problema di controllo ottimo su orizzonte finito. Dimostrare che l'equazione ammette una soluzione nell'intervallo $[0, T]$ [6 PUNTI]