MATRICI DI ROTAZIONE $\boldsymbol{R_x(\theta_x), R_y(\theta_y), R_z(\theta_z)}$

Notazione per esprimere le coordinate di un punto P durante una rotazione nel piano:

$P :=$ coordinate del punto dopo la rotazione

$\hat{P} :=$ coordinate del punto prima della rotazione

$R_k(\theta_k) :=$ matrice di rotazione rispetto all'asse $k \epsilon \{x, y, z\}$ di un angolo θ_k

Matrice di rotazione attorno all'asse x $\boldsymbol{R_x(\theta_x)}$

Nella matrice di rotazione attorno all'asse x, i punti lungo l'asse x rimangono invariati mentre gli assi y e z rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di una rotazione nel piano.

La prima riga e la prima colonna sono uguali ad $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ poiché il piano che ruota è yz e la coordinata che rimane invariata è la x.
Sussistono le seguenti relazioni relazioni:

$$x = \hat{x}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} & x = \hat{x}, \\ & y = c\,\mathrm{os}(\theta)\,\hat{y} - \sin(\theta)\,\hat{z} \\ & z = \sin(\theta)\,\hat{y} + \cos(\theta)\hat{z} \end{aligned}$$

```
(%i1) R[x](theta) := matrix([1,0,0],
                            [0,cos(theta),-sin(theta)],
                            [0,sin(theta), cos(theta)]);
```

(%o1) $R_x(\vartheta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

```
(%i4) R[x](theta[x]);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta_x) & -\sin(\vartheta_x) \\ 0 & \sin(\vartheta_x) & \cos(\vartheta_x) \end{pmatrix}$

Matrice di rotazione attorno all'asse y $R_y(\theta_y)$

Nella matrice di rotazione attorno all'asse y, i punti lungo l'asse y rimangono invariati mentre gli assi z e y rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di una rotazione del piano.

La seconda riga e la seconda colonna sono rispettivamente uguali a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ poiché il piano che ruota è zx e la coordinata che rimane sempre inviariata è la y.

Sussistono le seguenti relazioni:

$$y = \hat{y}$$
$$\begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

Dai cui:

$$y = \hat{y}$$
$$z = \cos(\theta)\,\hat{z} - \sin(\theta)\,\hat{x}$$
$$x = \sin(\theta)\hat{z} + \cos(\theta)\,\hat{x}$$

```
(%i1) R[y](theta) := matrix([cos(theta),0,sin(theta)],
                            [0,1,0],
                            [-sin(theta),0, cos(theta)]);
```

(%o1) $R_y(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$

```
(%i2) R[y](theta[y])
```

(%o2) $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta_y) & 0 & \sin(\vartheta_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta_y) & 0 & \cos(\vartheta_y) \end{pmatrix}$

```
(%i3)
```

Matrice di rotazione attorno all'asse z $R_z(\theta_z)$

Nella matrice di rotazione attorno all'asse z, i punto lungo l'asse z rimangono invariati mentre gli assi x e y rappresentano rispettivamente l'ascissa e l'ordinata di una rotazione del piano.

La terza riga e la seconda colonna sono rispettivamente uguali a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ poiché il piano che ruota è xy e la coordinata che rimane sempre inviariata è la z.

Sussistono le seguenti relazioni:

$$z = \hat{z}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Dai cui:

$$z = \hat{z}$$
$$x = \cos(\theta)\,\hat{x} - \sin(\theta)\,\hat{y}$$
$$y = \sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\,\hat{y}$$

```
(%i5) R[z](theta) := matrix([cos(theta),-sin(theta),0],
                            [sin(theta),cos(theta),0],
                            [0,0, 1]);
```

(%o5) $R_z(\vartheta) := \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i6) R[z](theta[z])
```

(%o6) $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta_z) & -\sin(\vartheta_z) & 0 \\ \sin(\vartheta_z) & \cos(\vartheta_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i7)