Teoria dei Giochi – Prova del 14 SETTEMBRE 2018
CONSEGNARE ESCLUSIVAMENTE QUESTO FOGLIO
NGR≡ Non Giustificare la Risposta

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________

Esercizio 1 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per il primo e il secondo giocatore:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii) : \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = \xi_1^3 = 0$ e $\xi_1^4 = \frac{1}{2}$; $(iii) : \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{2}$

$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = \frac{2}{9}, \xi_2^2 = \frac{3}{9}, \xi_2^3 = \frac{4}{9}, \xi_2^4 = 0$; $(jjj) : \xi_2^1 = \frac{3}{9}, \xi_2^2 = \xi_2^3 = 0$ e $\xi_2^4 = \frac{6}{9}$

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Rispettivamente: (i) $\frac{13}{4}$; (ii) 2; (iii) 5; (j) $-\frac{3}{2}$; (jj) -2; (jjj) -1.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa in strategia mista? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Il valore del gioco è 2.

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione, dove x è un numero intero (positivo o negativo):

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 8 \\ 5 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 6+x & 9+x & 3 \\ 6-2x & -5 & 3 & 7-2x \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

2.1 Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). **NGR**

Per il primo giocatore, la terza strategia è debolmente dominante per $x \leq -11$ e la quarta strategia è debolmente dominante per $x \geq 2$. Per il secondo giocatore, la quarta strategia è debolmente dominante per $x \leq -6$.

2.2 Indicare quali sono, al variare di x, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). **NGR**

L'incrocio della terza strategia del primo giocatore e della prima strategia del secondo giocatore per $x \leq -6$; l'incrocio della terza strategia del primo giocatore e della tera strategia del secondo giocatore per $x = -6$; l'incrocio della terza strategia del primo giocatore e della quarta strategia del secondo giocatore per $x \leq -6$; l'incrocio della quarta strategia del primo giocatore e della terza strategia del secondo giocatore per $x \geq 2$; l'incrocio della quarta strategia del primo giocatore e della quarta strategia del secondo giocatore per $x = 2$.

2.3 Poni $x = 0$ e considera quindi il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, fornire dei valori di a e b per i quali l'affermazione seguente è vera: il valore del gioco è certamente compreso nell'intervallo $[a,b]$. *Scegliere a e b in modo che l'ampiezza dell'intervallo* $[a,b]$ *sia la minima possibile.* **NGR**

$[3,7]$

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 8 deputati di cui 4 provengono da una regione A, 3 da una regione B e 1 da una regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore votano congiuntamente: almeno 3 deputati di A, almeno 2 deputati di B e il deputato di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato oppure spiegare perchè non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

Consideriamo un deputato della regione C. Esso è determinante solo se è in ottava o in settima posizione, oppure in sesta e nelle prime 5 posizioni ci sono 3 deputati di A e 2 di B. Quindi il suo valore è pari a:

$$\frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5! \cdot 2! + 2 \cdot 7!}{8!}.$$

Consideriamo un deputato della regione B. Esso è determinante solo se è in settima posizione e in ottava posizione c'è un altro deputato di B, oppure in sesta e nelle prime 5 posizioni ci sono 3 deputati di A, 1 di B e 1 di C. Quindi il suo valore è pari a:

$$\frac{2 \cdot 6! + \binom{4}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot 5! \cdot 2!}{8!}.$$

Il valore di un deputato A segue banalmente dall'assioma dai razionalità collettiva.

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la variante del Pollution Game in cui ogni giocatore che controlla emissioni aggiunge 3 unità al suo costo (come al solito) ma ogni giocatore che inquina aggiunge *2* unità al costo di ciascun giocatore (invece che una). Supponete che il numero di giocatori sia pari a 10. Senza giustificare la risposta, dire quali sono in questo caso gli equilibri di Nash del gioco.

L'unico equilibrio di Nash è lo stato in cui tutti inquinano.

Esercizio 4.1 Come prima ma supponete ora che ogni giocatore che inquina aggiunge *3* unità al costo di ciascun giocatore. Senza giustificare la risposta, dire quali sono in questo caso gli equilibri di Nash del gioco.

Ogni stato è equilibrio di Nash.

Esercizio 4.2 Come prima ma supponete ora che ogni giocatore che inquina aggiunge *4* unità al costo di ciascun giocatore. Senza giustificare la risposta, dire quali sono in questo caso gli equilibri di Nash del gioco.

L'unico equilibrio di Nash è lo stato in cui tutti controllano le emissioni.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri un'istanza dell'House Allocation Problem tale che ogni giocatore mette la propria casa in fondo alla propria lista (cioè all'ultimo posto). È vero che nell'allocazione stabile ogni giocatore cambia casa? (Se la affermazione è falsa, esibire un controesempio; altrimenti è sufficiente scrivere "VERO". Penalità per risposta errata.)

Falso. Si consideri l'istanza con preferenze di A,B,C,D rispettivamente: $\{B,C,D,A\}$; $\{C,D,A,B\}$; $\{A,B,D,C\}$; $\{A,B,C,D\}$.

Esercizio 5.1 Può esistere un'istanza dell'House Allocation Problem con 4 giocatori $\{A,B,C,D\}$ tale che nell'allocazione stabile ogni giocatore cambia casa, mentre nell'istanza ottenuta invertendo le prime due preferenze di A (per esempio, passando da $\{B,C,A,D\}$ a $\{C,B,A,D\}$) nessun giocatore cambia casa nell'allocazione stabile? (Se una tale istanza esiste, esibirla; altrimenti è sufficiente scrivere "FALSO". Penalità per risposta errata.)

Si. Si consideri l'istanza con preferenze di A,B,C,D rispettivamente: $\{B,A,C,D,\}$; $\{C,D,A,B\}$; $\{D,C,A,B\}$; $\{A,D,C,B\}$.

Esercizio 5.2 Può esistere un'istanza dell'House Allocation Problem con 4 giocatori $\{A,B,C,D\}$ tale che nell'allocazione stabile nessun giocatore cambia casa, mentre nell'istanza ottenuta invertendo le prime due preferenze di D (per esempio, passando da $\{C,D,A,B\}$ a $\{D,C,A,B\}$) ogni giocatore cambia casa nell'allocazione stabile? (Se una tale istanza esiste, esibirla; altrimenti è sufficiente scrivere "FALSO". Penalità per risposta errata.)

Si. Èfacile vedere che la domanda è di fatto la stessa dell'esercizio precedente.