Teoria dei Giochi 11/02/2021

Esercizio 1 Si consideri la matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ s2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ s3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ s4 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:

$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = \frac{1}{2}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = 0$; $(iii): \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$;

$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj): \xi_2^1 = \frac{1}{2}, \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{1}{2}$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{3}, \xi_2^2 = \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{2}{3}$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**.
Rispettivamente: (i) 1; (ii) $\frac{1}{2}$; (iii) 0; (j) $\frac{1}{2}$; (jj) 0; (jjj) $\frac{1}{3}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare quali, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**.
Per il primo giocatore la strategia (iii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare equilibri di Nash? *Indicare quali, oppure scrivere che non si può individuarli.* **NGR**.
L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**.
Il valore del gioco è 0.

Esercizio 2 Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco in forma di costo, dove y è un numero razionale qualsiasi (positivo o negativo):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & D & E & F \\ A & -4,10 & 6+2y, 12+4y & 5+2y, 8 \\ B & 10,12 & 5, 8-4y & 6+2y, 12+4y \\ C & 8+8y, 6+2y & 7, -2y & 4,2 \end{pmatrix}$$

Si consideri il gioco in sola *strategia pura*.

2.1 Indicare quali sono, al variare di y, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). *Giustificare la risposta illustrando i calcoli effettuati.*

Per il primo giocatore A è una strategia debolmente dominante per $-\frac{3}{2} \le y \le -\frac{1}{2}$. Per il secondo giocatore F è una strategia debolmente dominante per $y = 1$.

2.2 Indicare quali sono, al variare di y, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). *Giustificare la risposta illustrando i calcoli effettuati.*

(A,E) per $y \le -1$; (A,F) per $-1 \le y \le -\frac{1}{2}$; (B,E) per $y \ge -\frac{1}{2}$; (C,D) per $y \le -2$.

2.3 Porre $y = 0$. Indicare quali sono i punti di ottimo debole secondo Pareto (se ve ne sono). *Non giustificare risposta.*

$(A,D), (C,E), (C,F)$.

Esercizio 3 Si consideri la seguente variazione del gioco ρ. I giocatori sono 4 e il valore di ogni coalizione con due o meno giocatori è 0; il valore di ogni coalizione con 3 giocatori è 2ρ e il valore della grande coalizione è 1. Esistono valori di ρ per cui il nucleo del gioco è non vuoto? *Se la risposta è no, è sufficiente scrivere no; se la risposta è si, è sufficiente indicare quali sono i valori di ρ e una soluzione nel nucleo per ognuno di tali valori.*

Il nucleo del gioco è non vuoto per $\rho \le \frac{3}{8}$ e una soluzione nel nucleo è $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

Esercizio 4 In un parlamento siedono 9 deputati. Quattro di questi deputati provengono dalla regione A, quattro dalla regione B e uno dalla regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno due deputati di A, almeno due deputati di B e il deputato di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley di un deputato del partito A o del partito B è pari a:

$$S_A(v) = \frac{3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! \cdot 4! + 3 \cdot \binom{4}{3} \cdot 5! \cdot 3! + 3 \cdot 6! \cdot 2!}{9!}$$

Naturalmente vale $S_C(v) = 1 - 8 \cdot S_A(v)$. In alternativa, si poteva calcolare direttamente il valore di $S_C(v)$:

$$S_C(v) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! \cdot 4! + 2 \cdot \binom{4}{2}\binom{4}{3} \cdot 5! \cdot 3! + [2 \cdot \binom{4}{2} + \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{3}] \cdot 6! \cdot 2! + 2 \cdot \binom{4}{3} \cdot 7! + 8!}{9!}$$

e poi naturalmente $S_A(v) = S_B(v) = \frac{1 - S_C(v)}{8}$.

Esercizio 5 Considera il seguente gioco non cooperativo con 3 giocatori $N = \{A, B, C\}$. I tre giocatori hanno a disposizione una scacchiera $n \times n$ tale che in ogni riquadro della scacchiera è collocato un euro: in totale quindi sulla scacchiera ci sono n^2 euro. Per giocare, ogni giocatore deve scegliere un riquadro, quindi ognuno ha n^2 strategie a disposizione ed è possibile che tutti e 3 i giocatori scelgano lo stesso riquadro.

Indichiamo con (x, y), $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il riquadro individuato dalla riga x e dalla colonna y della scacchiera. La *distanza* tra il riquadro (x_1, y_1) e il riquadro (x_2, y_2) è pari alla distanza di Manhattan tra il punto (x_1, y_1) e il punto (x_2, y_2) nel piano, ovvero $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Per determinare il payoff dei giocatori si considera un riquadro (x, y) per volta e si procede come segue:

• se esiste un giocatore $i \in N$ che è più vicino di *entrambi* gli altri due al riquadro (x, y), l'euro presente su (x, y) viene assegnato al giocatore i;

• in tutte le altre situazioni l'euro non viene assegnato a nessun giocatore.

Si consideri il gioco in sola *strategia pura*. Per $n = 2$ e $n = 3$, indica le strategie dominanti, se esistono, e gli equilibri di Nash, se esistono. **NGR**

Osserviamo che, qualunque sia n, se i tre giocatori scelgono lo stessa riquadro il payoff dei giocatori è zero mentre se un giocatore occupa un qualsiasi riquadro da solo il suo payoff è sempre almeno 1. Da questo segue che per nessun valore di n esistono strategie dominanti.

Per quanto riguarda gli equilibri di Nash, nel caso $n = 2$ sono tutti gli stati in cui i giocatori scelgono tre riquadri diversi. Nel caso $n = 5$ sono tutti gli stati in cui i tre giocatori occupano tutti e tre i riquadri della riga centrale oppure occupano tutti e tre i riquadri della colonna centrale.