1 Sola Pagina a gp.oriolo@gmail.com - NGR $\equiv$ Non Giustificare la Risposta - COMPITO A

Esercizio 1 Si consideri la matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 0 & 0 & .0 & -3 \\ s2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ s3 & -3 & .0 & 0 & \frac{3}{2} \\ s4 & \frac{1}{2} & .-\frac{1}{2} & .-1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii) : \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{4}, \xi_1^4 = \frac{3}{4}$; $(iii) : \xi_1^1 = \frac{1}{2}$, $\xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$;
$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = \frac{1}{8}, \xi_2^2 = \frac{7}{8}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = 0$; $(jjj) : \xi_2^1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2^2 = \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{2}{3}$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**.

Rispettivamente: (i) 0; (ii) $-\frac{3}{8}$; (iii) 0; (j) $\frac{3}{4}$; (jj) $\frac{3}{8}$; (jjj) 2.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare quali, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**.

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare equilibri di Nash? *Indicare quali, oppure scrivere che non si può individuarnli.* **NGR**.

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**.

Il valore del gioco è $-\frac{3}{8}$.

Esercizio 2 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = (w_A^1, w_A^2) = (4,3)$ (risp. $w_B = (w_B^1, w_B^2) = (2,5)$) e di una funzione di produzione $f^1(w_A) = 2w_A^1 + 4w_A^2$ (risp. $f^2(w_B) = 3w_B^1 + 2w_B^2$). Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene e determinare un'imputazione nel nucleo di tale gioco. *Giustificare la risposta illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

Calcoliamo innanzitutto l'utilità delle coalizioni. Banalmente si ottiene: $v(\{A\}) = 20$ e $v(\{B\}) = 16$. Per calcolare $v(\{A,B\})$ dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$v(\{A,B\}) = \max 2z_A^1 + 4z_A^2 + 3z_B^1 + 2z_B^2$ s.t. $z_A^1 + z_B^1 = 6$; $z_A^2 + z_B^2 = 8, z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$, ovvero:
$v(\{A,B\}) = \max -z_A^1 + 2z_A^2 + 34$ s.t. $0 \leq z_A^1 \leq 6; 0 \leq z_A^2 \leq 8$.

Calcolando il valore di $-z_A^1 + 2z_A^2 + 34$ sui 4 vertici della regione ammissibile (0,0), (6,0), (0,8), (6,8) si osserva che il punto di massimo è nel punto (0,8) per un valore di 50.

Quindi il nucleo del gioco è il seguente: $\{\alpha \in \mathcal{R}^2 : \alpha(1) \geq 20; \alpha(2) \geq 16; \alpha(1) + \alpha(2) = 50\}$. Un punto nel nucleo è per esempio (27, 23).

Esercizio 3 In un parlamento siedono 13 deputati. Sei di questi deputati provengono dalla regione A, cinque dalla regione B e due dalla regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno cinque deputati di A, almeno quattro deputati di B e almeno un deputato di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley di un deputato del partito C è pari a:

$$S_A(v) = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 9! \cdot 3! + 5 \cdot (2+5) \cdot 10! \cdot 2! + 5 \cdot 11!}{13!}$$

$$S_B(v) = \frac{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 9! \cdot 3! + 4 \cdot (2+6) \cdot 10! \cdot 2! + 4 \cdot 11!}{13!}$$

Naturalmente vale $S_C(v) = \frac{1 - 6 \cdot S_A(v) - 5 \cdot S_B(v)}{2}$. In alternativa, si poteva calcolare direttamente il valore di $S_C(v)$:

$$S_B(v) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 9! \cdot 3! + (5+6) \cdot 10! \cdot 2! + 11!}{13!}$$

e poi naturalmente $S_A(v) = S_B(v) = \frac{1-S_C(v)}{6}$.

Esercizio 4 Considera il seguente gioco non cooperativo con 2 giocatori, il bar A e il bar B. I due bar trattano un unico, identico prodotto: la birra alla spina nel formato 0.25 lt. Ciascuno dei due bar può scegliere di vendere la singola birra a tre prezzi diversi: 2, 2+α, 5 euro, dove α è un numero razionale tale che $0 < \alpha < 3$ (è possibile che i giocatori scelgano lo stesso prezzo). Si prevede che ogni mese ci sarà una domanda di 6000 birre da parte di turisti, che si dividono equamente tra il bar A e il bar B senza guardare il prezzo, e una domanda di 4000 birre da parte di persone del luogo, che scelgono il bar che vende la birra al prezzo minore e si dividono equamente tra i due bar nel caso essi scelgano lo stesso prezzo.

Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

La matrice dei payoff in forma di utilità per i due giocatori è la seguente (tutti i termini andrebbero in realtà moltiplicati per 1000):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & 2 & 2+\alpha & 5 \\ 2 & 10,10 & 14,6+3\alpha & 14,15 \\ 2+\alpha & 6+3\alpha,14 & 10+5\alpha,10+5\alpha & 14+7\alpha,15 \\ 5 & 15,14 & 15,14+7\alpha & 25,25 \end{pmatrix}$$

A questo punto analizziamo questa matrice al variare del parametro α procedendo come al solito (ricordiamo tuttavia che $0 < \alpha < 3$. Otteniamo che: 1) per entrambi i giocatori 5 è una strategia dominante per $\alpha \leq 1$; 2) lo stato $(2+\alpha, 2+\alpha)$ è un equilibrio di Nash per $\alpha \geq 1$; 3) lo stato $(5,5)$ è un equilibrio di Nash per $\alpha \leq \frac{11}{7}$ ed in tale intervallo è anche ottimo secondo Pareto.