Teoria dei Giochi – Prova del 6 Dicembre 2016

Cognome, Nome, email: ______________________________

Consegnare esclusivamente questo foglio. NGR $\equiv$ Non è richiesto di giustificare la risposta.

Esercizio 1 Si consideri un gioco non cooperativo finito, ovvero un gioco per cui sia l'insieme dei giocatori che l'insieme delle strategie a disposizione di ciascun giocatore sono finiti. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o è falsa. **NGR**. Penalità per riposte errate.

1 Per ogni giocatore esiste almeno una strategia debolmente dominante. ☐ VERO ■ FALSO

2 Per ogni giocatore esiste almeno una strategia conservativa. ■ VERO ☐ FALSO

3 Esiste sempre almeno un equilibrio di Nash. ☐ VERO ■ FALSO

4 (*) Ogni strategia dominante per il gioco (puro) rimane tale anche in strategia mista. ■ VERO ☐ FALSO

5 Ogni strategia conservativa per il gioco (puro) rimane tale anche in strategia mista. ☐ VERO ■ FALSO

6 In strategia mista esiste sempre un equilibrio di Nash. ☐ VERO ■ FALSO

7 Se il gioco è antagonistico, in strategia mista esiste sempre un equilibrio di Nash. ■ VERO ☐ FALSO

Esercizio 2 È dato un gioco non cooperativo finito e antagonistico, una strategia mista ξ_1 per il primo giocatore e una strategia mista ξ_2 per il secondo. Siano inoltre $\tilde{C}_1(\xi_1)$ e $\tilde{C}_2(\xi_2)$ quanto paga nel caso peggiore ciascuno dei 2 giocatori se gioca la corrispondente strategia. Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o è falsa. **NGR**. Penalità per riposte errate.

1 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1)$ e $\tilde{C}_2(\xi_2)$ siano entrambi negativi. ☐ VERO ■ FALSO

3 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 4$ e $\tilde{C}_2(\xi_2) = -1$. ■ VERO ☐ FALSO

4 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 1$ e $\tilde{C}_2(\xi_2) = -4$. ☐ VERO ■ FALSO

5 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 4$, $\tilde{C}_2(\xi_2) = -1$ e che il valore del gioco sia 2. ■ VERO ☐ FALSO

6 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 1$, $\tilde{C}_2(\xi_2) = -4$ e che il valore del gioco sia 2. ☐ VERO ■ FALSO

7 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 4$, $\tilde{C}_2(\xi_2) = -1$ e che il valore del gioco sia 0. ☐ VERO ■ FALSO

8 Può capitare che $\tilde{C}_1(\xi_1) = 1$, $\tilde{C}_2(\xi_2) = -4$ e che il valore del gioco sia 0. ☐ VERO ■ FALSO

9 Se il gioco (puro) ha una matrice dei payoff antisimmetrica, allora $\tilde{C}_1(\xi_1)$ e $\tilde{C}_2(\xi_2)$ sono sempre entrambi non negativi. ■ VERO ☐ FALSO

Esercizio 3 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di minimizzazione, dove y è un qualunque numero intero (positivo o negativo):

Giocatore 2

Giocatore 1		A	B	C
	F	$0,5$	$2y+1,6$	$6-2y,4y+1$
	E	$y-2,5-2y$	$4,2$	$5,3$
	D	$1,2y+3$	$5,5$	$7-2y,6-2y$

3.1 Dire per quali valori di y esistono equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono) e quali sono. **NGR**.

(F,A) se $y \geq 2$, quindi y intero e ≥ 2; (F,C) se $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$ quindi $y = 1$; (E,A) se $\frac{3}{2} \leq y \leq 2$ quindi $y = 2$; (E,B) se $y = \frac{3}{2}$ quindi nessun y intero.

3.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di y esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono. **NGR**.

Non esistono strategie debolmente dominanti né per il primo né per il secondo giocatore

3.3 Porre adesso $y = 0$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso. **NGR**.

(F,A); (F,C); (E,A); (E,B); (D,A).

Esercizio 4 Nel consiglio di amministrazione di una società siedono 6 uomini e 2 donne. Una decisione viene assunta se e solo se a suo favore vota sia la maggioranza stretta degli uomini (cioè almeno 4 uomini) che entrambe le donne.

4.1 Se il gioco si può formulare come un gioco cooperativo, dire qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore. Illustrare la risposta sinteticamente nel seguito.

È facile vedere che si tratta di un gioco cooperativo semplice in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\#\text{permutazioni tali che : la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus \{i\} \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un consigliere donna. Le permutazioni in cui ella è determinante sono tutte quelle in cui questa si trova in sesta e nelle posizioni seguenti si trovano due uomini; in settima posizione e nella posizione seguente si trova un uomo e quando si trova in ottava posizione.

Le permutazioni in cui si trova in sesta posizione e nelle posizioni seguenti si trovano esattamente due uomini sono $2 \cdot 5! \cdot \binom{6}{2}$. Le permutazioni in cui si trova in settima posizione e nella posizione seguente si trova esattamente un uomo sono $6! \cdot \binom{6}{1}$. Infine le permutazioni in cui si trova in ottava posizione sono 7! Il valore di Shapley di ciascun consigliere donna è quindi $\frac{(2\cdot 5!\cdot \binom{6}{2}+6!\cdot\binom{6}{1}+7!)}{8!} = \frac{9}{28}$. Il valore di Shapley di ciascun consigliere uomo è quindi $\frac{1-2\cdot\frac{9}{28}}{6} = \frac{5}{84}$.

4.2 Dire se il vettore dei valori di Shapley indicati al punto 4.2 è nel nucleo: se lo è, è sufficiente rispondere "SI"; se non lo è, esibire una coalizione per cui il vettore non è stabile.

Questa soluzione non è nel nucleo. Infatti, una qualunque coalizione diversa dalla grande coalizione e che sia in grado di far approvare una legge (per esempio, 4 consiglieri uomini e 2 donne) ha valore 1, ma la somma dei payoff dei suoi membri è strettamente minore di 1.

Esercizio 5 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono tre: A, B, C e ciascun giocatore deve scegliere un numero intero compreso tra 1 e 100. La regola per determinare il payoff dei giocatori è la seguente:

- se tutti e tre i giocatori hanno scelto un numero diverso, vince il gioco il giocatore che ha scelto il numero più basso, che riceve un euro da entrambi gli altri due giocatori;
- se due giocatori hanno scelto uno stesso numero e il terzo giocatore ha scelto un numero diverso, vince il gioco quest'ultimo che riceve un euro da entrambi gli altri due giocatori;
- se tutti e tre i giocatori hanno scelto lo stesso numero il payoff è 0 per tutti e tre i giocatori.

5.1 Indica le strategie debolmente dominanti di ciascun giocatore, se esistono. Illustrare la risposta sinteticamente nel seguito.

Nessun giocatore ha strategie debolmente dominanti: per vedere questo consideriamo due casi in cui l'insieme delle best response sono disgiunti. Come primo caso consideriamo quello in cui due giocatori giocano i numeri 3 e 2: la migliore risposta del terzo giocatore è giocare 1. Come secondo caso consideriamo quello in cui i due giocatori giocano entrambi 1: la migliore risposta del terzo giocatore è giocare un qualunque numero diverso da 1.

5.2 Indica gli equilibri di Nash del gioco, se esistono. Illustrare la risposta sinteticamente nel seguito.

Siano x, y, z i numeri scelti, rispetivamente dal primo, secondo e terzo giocatore:

- Consideriamo innanziutto un qualunque stato del gioco in cui nessun giocatore ha scelto 1. Se i tre giocatori, hanno scelto lo stesso numero, allora il payoff di ciascun giocatore è 0, e poiché qualunque giocatore vincerebbe il gioco se potesse modificare la sua strategia e giocare 1, non siamo in un equilibrio di Nash. Se invece i tre giocatori non hanno scelto lo stesso numero, uno di loro ha vinto e gli altri due hanno perso: di nuovo uno qualunque di questi ultimi vincerebbe il gioco se potesse modificare la sua strategia e giocare 1: di nuovo non ci troviamo un equilibrio di Nash.

D'ora in poi assumiamo che almeno un giocatore abbia scelto 1. Siano quindi x, y e z i numeri scelti dai 3 giocatori e supponiamo che $x = 1$.

- Se y e z sono entrambi diversi da 1, ci troviamo in un equilibrio di Nash: il giocatore che ha giocato $x = 1$ sta vincendo e non ha interesse a cambiare la propria strategia; gli altri due giocatori stanno perdendo e continuerebbero a perdere anche se modificassero unilateralmente la propria strategia.

- Supponiamo ora che $x = y = 1$ e $z \neq 1$ è un equilibrio di Nash: il giocatore che sta giocando z sta vincendo e non ha interesse a modificare la sua strategia; gli altri due giocatori stanno perdendo, ma modificando unilateralmente la loro strategia continuerebbero a perdere.

- Infine, lo stato del gioco in cui $x = y = z = 1$ non è un equilibrio di Nash: il payoff di ciascun giocatore è 0, ma qualunque giocatore vincerebbe il gioco se potesse modificare unilateralmente la sua strategia.