Toeria della regolazione

Lorenzo Rossi

June 28, 2022

Nella teoria della regolazione consideriamo un sistema lineare affetto da disturbi e tale che la sua uscita deve inseguire asintoticamente un segnale di riferimento noto.

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ e = Cx + Qd \end{cases}$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, e(t) \in \mathbb{R}^p, d(t) \in \mathbb{R}^r$ e le matrici $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, P \in \mathbb{R}^{n\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times n}, Q \in \mathbb{R}^{p\times r}$ note e costanti.
In questo sistema si identifica:

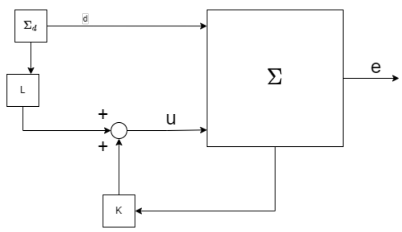
- $d(t)$ che rappresenza un segnale esogeno composto da una componente del disturbo associato al processo e una componente dei segnali di riferimento. La sua dinamica è descritta da un sistema lineare:

$$\Sigma_d = Sd \quad S \in \mathbb{R}^{r\times r}, d(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ r(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r$$

- $e(t)$ è l'errore di inseguimento del comportamento del sistema rispetto al comportamento ideale. Di norma vogliamo che si raggiunga l'obiettivo di **regolazione a zero**: l'errore deve convergere a zero tramite un controllo $u(t)$ opportuno. Inoltre, la specifica di regolazione a zero implica che i disturbi non influenzano il comportamento del sistema e l'uscita $y = Cx(t)$ insegue asintoticamente il segnale di riferimento $r(t) = -Qd(t)$

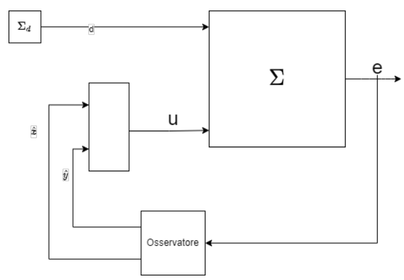
Il controllore $u(t)$ necessario per la regolazione a zero può essere ottenuto in due modi:

- **Controllore statico in feedback dallo stato** $x(t)$: Supponiamo che $x(t)$ sia lo stato e $d(t)$ sia il segnale esogeno, entrambi misurati. Allora si progetta la legge di controllo $u = Kx + Ld$



- **Controllore dinamico dall'errore** $e(t)$: questo controllore non necessita che i segnali $x(t), d(t)$ siano misurati, ma si costruisce un osservatore la cui uscita viene utilizzata per progettare un controllo $u(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\chi} = F\chi + Ge \\ u = H\chi \end{cases} \qquad F \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}, G \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}\text{note e costanti}$$



Nella teoria di regolazione ci si riferisce principalemnte a due tipi di problemi.

Definizione 1. Problema di regolazione a full information
Considerato il sistema: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ e = Cx + Qd \end{cases}$ affetto da disturbi generati dall'esosistema $\dot{d} = Sd$ interconnesso con il controllore $u = Kx + Ld$. Il **problema di regolazione a informazione completa** è quello di determinare le matrici K, L dek controllore tali che siano soddisfatte:

- ***Stabilità*** **(S)**:Il sistema $\dot{x} = (A + BK)x$ sia asintoticamente stabile;
- ***Regolazione*** **(R)**: tutte le traiettorie del sistema $\begin{cases} \dot{d} = Sd \\ \dot{x} = (A + BK)x + (BL + P)d \\ e = Cx + Qd \end{cases}$ siano tali che $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

Definizione 2. Problema di regolazione con retroazione dall'errore
Considerato il sistema: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ e = Cx + Qd \end{cases}$ affetto da disturbi generati dall'esosistema $\dot{d} = Sd$ interconnesso con il controllore $\begin{cases} \dot{\chi} = F\chi + Ge \\ u = H\chi \end{cases}$. Il **problema di regolazione in feedback dall'errore** è il problema di determinare le matrici F, G, H del controllore tali che siano soddisfatte:

- ***Stabilità*** **(S)**: Il sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax + BH\chi \\ \dot{\chi} = F\chi + GCx \end{cases}$ sia asintoticamente stabile;
- ***Regolazione*** **(R)**: tutte le traiettorie del sistema $\begin{cases} \dot{d} = Sd \\ \dot{x} = Ax + BH\chi + Pd \\ \dot{\chi} = F\chi + G(Cx + Qd) \\ e = Cx + Qd \end{cases}$ siano tali che $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

Problema di regolazione a Full Information

Per poter risolvere il problema di regolazione a full information dobbiamo definire le seguenti ipotesi strutturali:

- Sia S la matrice dell'esosistema e $\lambda \in \sigma(S)$, allora $\forall \lambda \in \sigma(S), Re(\lambda) \geq 0$: ciò implica che $\nexists d(0)$ tale che $d(t)$ converge asintoticamente a zero. Se così non fosse $d(t)$ non influisce sul comportamento asintotico del sistema e quindi basterebbe solamente stabilizzare il sistema per raggiungere l'obbiettico;
- Il sistema $\dot{d} = Sd$ con $d = 0$ è raggiungibile: ciò implica che è possibile assegnare arbitrariamente gli autovalori di $A + BK$

In maniera preliminare dimostriamo l'equazione di Sylvester.

Corollario 1. ***Equazione di Sylvester***
Sia $A \in \mathbb{C}^{n\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times n}, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, l'equazione di Sylvester è una equazione matriciale lineare nella forma $AX + XB = C$ con $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Valgono i seguenti enunciati:

- *L'equazione di Sylvester ha soluzione se e solo se A e $-B$ non hanno nessun autovalore in comune;*
- *L'equazione di Sylvester ha un'unica soluzione se A e $-B$ non hanno autovalori in comune o un'unfinità di soluzioni composte da $X = X_0 + \hat{X}$ con X_0 ottenuta da $AX + XB = 0$*

Proof. L'equazione di Sylvester è equivalente al sistema lineare $Gx = c$ in cui $x = vec(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}$ e $c = vec(X) = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \end{bmatrix}$ e $G = (I_n \bigotimes A) + (B^T \bigotimes I_n)$. In particolare $\bigotimes$ è detto **prodotto di Kronecker**:$A \bigotimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mmB} \end{bmatrix}$. Questo sistema ha una unica soluzione se e solo se G non è singolare. Per una proprietà dell'operazione del **prodotto di Kronecker**, gli autovalori di $G = (I_n \bigotimes A) + (B^T \bigotimes I_n)$ sono $\lambda_A + \lambda_B, \forall \lambda_A \in \sigma(A), \lambda_B \in \sigma(B)$. Quindi, per non essere singolare non deve esistere nessun autovalore $\lambda_G = 0$. Quindi:

$$\lambda_A + \lambda_B \neq 0 \to \lambda_A \neq -\lambda_B \to \lambda_A \neq \lambda_B \forall \lambda_A \in \sigma A, \lambda_B \in \sigma B$$

□

Teorema 1. *Considerato il problema di regolazione a full information, supponiamo che* $\forall \lambda \in \sigma(S) : Re(\lambda) \geq 0$ *e che* $\exists K, L$ *tali che il sistema* $\dot{x} = (A + BK)x$ *sia asintoticamente stabile, allora la condizione di regolazione è soddisfatta se e solo se* $\exists \Pi \in \mathbb{R}^{n \times r}$ *tali che soddisfano le equazioni*

$$\begin{cases} \Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

Proof. Consideriamo il sistema $\begin{cases} \dot{d} = Sd \\ \dot{x} = (A + BK)x + (P + BL)d \\ e = Cx + QD \end{cases}$ e il cambio di coordinate $\hat{d} = d, \hat{x} = x - \Pi d$ con Π soluzione dell'equazione di Sylvester $\begin{cases} \Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$.
Si nota che la soluzione è unica dato che:

$$\begin{cases} \lambda \in \sigma(A + BK), Re(\lambda) < 0 \\ \lambda \in \sigma(S), Re(\lambda) \geq 0 \end{cases} \to \sigma(A + BK) \cap \sigma(S) = \{\varnothing\} \Rightarrow \forall (P + BL) \exists ! \Pi$$

Riscrivendo il sistema nelle nuove coordinate:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} - \Pi\dot{\hat{d}} = (A + BK)\hat{x} + (A + BK)\Pi\hat{d} + (BL + P)\hat{d} \\ \hat{e} = C\hat{x} + C\Pi\hat{d} + Q\hat{d} \\ \dot{\hat{d}} = S\hat{d} \end{cases} \to^{Dalteorema} \begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK)\hat{x} \\ e = C\hat{x} + (C\Pi + Q)\hat{d} \\ \dot{\hat{d}} = S\hat{d} \end{cases}$$

Dalla stabilità sappiamo che $\lim_{t\to\infty} \hat{x}(t) = 0$ e dalla regolazione $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \leftrightarrow C\Pi + Q = 0$. Ciò implica che anche per osillazioni di d, x, si regolarizza la soluzione vincolandola sulla bisettrice del piano x, d. □

Per fornire condizioni neessarie e sufficienti per la osluzione del problema di regolazione a full information occorre enunciare il seguente teorema.

Teorema 2. ***Toerema FBI*** *Considerato il problrma di regolazione a full information, supponiamo che la matrice* S *dell'esosistema abbia autovalori a parte reale positiva e il sistema* $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ e = Cx + Qd \end{cases}$ *con* $d = 0$ *sia raggiungibile. Allora esiste una legge di controllo a full information* $u = Kx + Ld$ *che risolve il problema di regolazione se e solo se:*

$$\exists \Pi, \Gamma : \begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

Proof. $\Rightarrow$ Supponiamo di aver soddisfatto il problema di regolazione cioè che $\exists \Pi, \Gamma$ tali che siano soddisfatte i requisiti di stabilità e di regolazione. Allora per il lemma si ha che:

$$\exists \Pi \text{ tale che: } \begin{cases} (A + BK)\Pi + (P + BL) = A\Pi + B(K\Pi + L) + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

Quindi, noto Π, si definisce $\Gamma = K\Pi + L$.
$\Leftarrow$Supponiamo che $\exists \Pi, \Gamma$ che risolvono $\begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$, dobbiamo dimostrare che sono soddisfatte le ipotesi di stabilità e regolazione:

- **Stabilità:**K deve garantire stabilità asintotica per $A + BK$ e in particolare K esiste sempre dato che abbiamo supposto che il sistema con $d = 0$ è raggiungibile;
- Sia $L = \Gamma - K\Pi$, allora la coppia (K, L) soddisfa il requisito di regolazione poiché:

$$\begin{cases} \Pi S = (A + BK)\Pi + (P + BL) = A\Pi + B\Gamma + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

$\square$

Il teorema appena enunciato implica che il controllo sia nella forma $u = Kx + (\Gamma - K\Pi)d$ cioè composto da una parte di stabilizzazione e una di regolazione. Tuttavia, la matrice K esiste sempre, quindi la condizione di risolubilità del problema di regolazione a full information risiede nell'esistenza e nella risoluzione dell'equazione FBI in Π, Γ. La condizione per cui il problema è risolubile è quindi fornita dal **lemma di Hautus**.

Corollario 2. ***Lemma di Hautus*** *L'equazioni FBI nelle incognite* Π, Γ *sono risolubili* $\forall P, Q \Leftrightarrow rank\left(\begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = n + p \forall s \in \sigma(S)$

Nel caso SISO, si ha che $m = p = 1$, si ha che $rank\left(\begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\right) = n + 1 \forall s$zero per $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ e = Cx \end{cases}$ Ovvero gli zeri di $W(s) = C(sI - A)^{-1}B$
Ne deriva che il problrema della regolazione a full information per sistemi SISO è risolubile se e solo se gli autovalori del sistema esogne non sono zero di $W(s)$ con ingresso u uscita e e segnale esogeno $d = 0$.