Riepilogo di Teoria dei Sistemi
a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Sistema Lineare a Tempo Continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$ stato, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ controllo, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ uscita
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, matrice dinamica, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, matrice d'ingresso
$C \in \mathbb{R}^{q\times n}$, matrice d'uscita, $D \in \mathbb{R}^{q\times p}$ legame diretto ingresso/uscita

$\Rightarrow$ La soluzione **esiste** sempre ed è **unica**

$$x(t) = \overbrace{e^{At}x_0}^{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\text{evoluzione forzata}}$$

Verifichiamo che $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ è la soluzione facendone la derivata rispetto al tempo[1]

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ae^{At}x_0 + Bu(t) + \int_0^t Ae^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\
&= A\underbrace{\left(e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right)}_{=x(t)} + Bu(t) \\
&= Ax(t) + Bu(t)
\end{aligned}$$

Inoltre, sostituendo $t = 0$

$$x(0) = e^{A0}x_0 + \int_0^0 e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = x_0$$

[1] Ricordiamo che

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t,s)ds\right) = g(t,t) + \int_0^t \frac{d}{dt}g(t,s)ds$$

e che

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$$

Proprietà di Stabilità (con $u = 0$)

Stato di Equilibrio: uno stato $x_e \in \mathbb{R}^n$ nel quale il sistema rimane *indefinitamente* in assenza di perturbazioni (lo studio della stabilità si occupa proprio di studiare cosa succede in presenza di perturbazioni...)

$$x(0) = x_e \Rightarrow x(t) = x_e, \forall t \text{ (derivata nulla, } Ax_e = 0 \text{ ovvero } x_e \in \ker(A))$$

Stabilità di x_e: piccoli scostamenti da x_e comportano solo piccoli moti intorno all'equilibrio, e *tanto più piccoli quanto più è piccolo lo scostamento iniziale*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Instabilità di x_e:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta_\varepsilon > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_\varepsilon \not\Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

Attrattività di x_e: i moti del sistema riportano lo stato nella configurazione di equilibrio

$$\exists \delta_a > 0 : \|x_0 - x_e\| < \delta_a \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$$

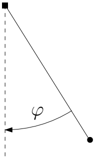
Stabilità + Attrattività → **Stabilità Asintotica**

La teoria di Lyapunov ci permette di concludere circa le proprietà di stabilità di x_e senza dover calcolare tutti i moti "perturbati"

Origine della teoria: **Analisi di Sistemi Meccanici**

pendolo con attrito:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -g sin(x_1) - b x_2$$



$x_1 = \varphi$ (posizione angolare), $x_2 = \dot{\varphi}$ (velocità angolare), g gravità, b coefficiente di attrito

Definiamo **energia totale** $E(x)$ = energia potenziale + energia cinetica

$$E(x) = \underbrace{g(1 - cos(x_1))}_{\text{energia potenziale}} + \overbrace{\frac{1}{2}x_2^2}^{\text{energia cinetica}} \geq 0$$

Si nota che $E(x(t)) \to 0$ per $t \to \infty$ lungo le traiettorie del sistema

L'energia E **converge ad un minimo** $\Rightarrow$ L'equilibrio $x_e = (0,0)$ è **asintoticamente stabile**

Metodo diretto di Lyapunov

Per uno stato di equilibrio x_e cerchiamo di trovare una *opportuna* funzione ("di energia") $V(x)$ che assume il valore minimo in x_e e che venga dissipata lungo il moto del sistema

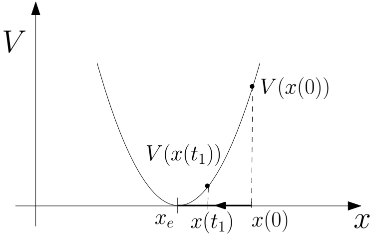
Intuitivamente, significa *valutare la funzione V lungo le traiettorie del sistema e vedere che decresca sempre*

Energia converge ad un minimo $\Rightarrow x(t)$ converge a x_e (punto di minimo)!

Due aspetti da spiegare:

1) Cosa significa "valutare V lungo le traiettorie del sistema"? $\rightarrow$ **calcolare** $V(x(t))$

$$\dot{x} = -(x - x_e), \; V(x) = (x - x_e)^2$$



Teoria di Lyapunov (2/2)

Metodo diretto di Lyapunov

Per uno stato di equilibrio x_e cerchiamo di trovare una *opportuna* funzione ("di energia") $V(x)$ che assume il valore minimo in x_e e che venga dissipata lungo il moto del sistema

Intuitivamente, significa *valutare la funzione V lungo le traiettorie del sistema e vedere che decresca sempre*

Energia converge ad un minimo $\Rightarrow$ $x(t)$ converge a x_e (punto di minimo)!

Due aspetti da spiegare:

1) Cosa significa "valutare V lungo le traiettorie del sistema"? $\rightarrow$ **calcolare** $V(x(t))$

2) come vedere se "decresce"? $\rightarrow$ **calcolare derivata**[2] $\dot{V}(x(t))$

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x}Ax < 0$$

[2] $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivata totale df/dx, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, derivata parziale $\partial f/\partial x$

Funzione di Lyapunov

Supponiamo $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ e $V \in \mathcal{C}^1$ (derivabile con continuità), allora

- $\dot{V} < 0$, per ogni $x \neq 0$, implica $x = 0$ è asintoticamente stabile (AS)
- $\dot{V} \leq 0$, per ogni $x \neq 0$, implica $x = 0$ è stabile

Proviamo ad "indovinare" la struttura della funzione di Lyapunov, $V = x^\top P x$, $P = P^\top > 0$

$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} = 2x^\top P(Ax) = x^\top (PA + A^\top P)x$$

Quindi, $x = 0$ è AS se (e solo se) per ogni $Q = Q^\top > 0$ esiste una P tale che

$$PA + A^\top P = -Q, \qquad \text{Equazione di Lyapunov} \qquad (\Rightarrow \dot{V} < 0, \forall x)$$

Inoltre, l'Equazione di Lyapunov ammette una soluzione P quale che sia Q se e solo se tutti gli **autovalori** di A sono a parte reale negativa

Proprietà di raggiungbilità e controllabilità

Vista l'importanza della stabilità, ci chiediamo se sia possibile imporre la proprietà di stabilità applicando al sistema un controllo $u = Fx$

Raggiungibilità: uno stato $\bar{x}$ si dice *raggiungibile* se esistono un istante finito $\bar{t} > 0$ e una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tali che

$$\bar{x} = \int_0^{\bar{t}} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$(x(0) = 0 \rightarrow x(\bar{t}) = \bar{x})$

$\Rightarrow$ Il sistema si dice raggiungibile se tutti gli stati sono raggiungibili

Controllabilità: uno stato $\bar{x}$ si dice *controllabile* se esistono un istante finito $\bar{t} > 0$ e una funzione di ingresso $u(\cdot)$ tali che

$$0 = e^{A\bar{t}}\bar{x} + \int_0^{\bar{t}} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$

$(x(0) = \bar{x} \rightarrow x(\bar{t}) = 0)$

$\Rightarrow$ Il sistema si dice controllabile se tutti gli stati sono controllabili

Insieme degli stati raggiungibili

Consideriamo il sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ e definiamo la **matrice Gramiana di raggiungibilità** $G(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$G(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^\top e^{A^\top \tau} d\tau$$

Inoltre definiamo la **matrice di raggiungibilità** $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n \times (np)}$

$$\mathcal{P} = [B \;\; AB \;\; A^2 B \;\; \dots \;\; A^{n-1} B]$$

$\Rightarrow$ per ogni[3] $t \neq 0$, $\mathrm{im}(G(t)) = \mathrm{im}(\mathcal{P})$

Stati Raggiungibili

L'insieme $\mathcal{X}_r$ degli stati raggiungibili, che coincide con quello degli stati controllabili per sistemi a tempo continuo, è il sottospazio di $\mathbb{R}^n$ definito come $\mathcal{X}_r = \mathrm{im}(G(t)) = \mathrm{im}(\mathcal{P})$. Quindi il sistema è raggiungibile/controllabile se e solo se[a] $\mathrm{rank}(G(t)) = \mathrm{rank}(\mathcal{P}) = n$

[a] il rango, *rank*, è il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti

[3] matrice $M = [m_1, m_2, \dots, m_p]$, $\mathrm{im}(M) = \mathrm{span}\{m_1, m_2, \dots, m_p\}$, ovvero i vettori $v = \alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_p m_p$ ottenuti al variare di α_1, …, α_p

Abbiamo visto che per il sistema (*autonomo*, ovvero con $u = 0$) $\dot{x} = Ax$ la stabilità è legata agli autovalori di A

Se applichiamo al sistema controllato $\dot{x} = Ax + Bu$ il feedback $u = Fx(+v)$ otteniamo il *sistema a ciclo-chiuso*

$$\dot{x} = (A + BF)x(+Bv)$$

$\Rightarrow$ **cosa possiamo dire degli autovalori di $A + BF$?**

Assegnazione arbitraria degli autovalori

Gli autovalori di $A + BF$ possono essere assegnati *arbitrariamente* tramite F se e solo se il sistema è controllabile/raggiungibile

Ipotesi semplificative

- supponiamo che la matrice A possieda tutti autovalori distinti
- vogliamo spostare l'autovalore reale λ_a di A nell'autovalore reale γ_a di $A + BF$

Algoritmo

1) calcoliamo un autovettore *sinistro* v_a di A relativo a λ_a, ovvero

$$v_a \neq 0, \qquad v_a^\top A = \lambda_a v_a^\top$$

2) per la controllabilità, $v_a^\top B \neq 0$

3) introduciamo l'incognita $f_a \in \mathbb{R}^p$ (p numero di colonne di B) e risolviamo

$$v_a^\top B f_a = \gamma_a - \lambda_a$$

4) poniamo $u = F_a x + v$, con $F_a = f_a v_a^\top$

Verifica

$v_a^\top (A + BF_a) = v_a^\top A + v_a^\top B f_a v_a^\top = \lambda_a v_a^\top + (\gamma_a - \lambda_a) v_a^\top = \gamma_a v_a^\top$ (per l'autovalore considerato..)

$(A + BF_a) w_i = A w_i + B f_a \underbrace{v_a^\top w_i}_{=0} = \lambda_i w_i$ (per tutti gli altri autovalori λ_i di A...)

Algoritmo di Mitter - Esempio (1/3)

Consideriamo le matrici

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

verifichiamo se la stabilizzazione sia già risolta con $u = 0$, calcolando gli autovalori di A

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) =& \det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -8-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)\det\left(\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -8-\lambda \end{bmatrix}\right) \\ =&(2-\lambda)(-1-\lambda)(-8-\lambda) \qquad \Rightarrow \qquad \text{autovalori} := \{2, -1, -8\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dobbiamo spostare l'autovalore $\lambda_a = 2$ in, ad esempio, $\gamma_a = -6$

verifichiamo se il sistema è controllabile

$\Rightarrow$ dobbiamo costruire la matrice $\mathcal{P} = [B \quad AB \quad A^2B]$ e verificare che abbia rango pari a 3 costruiamo la matrice $\mathcal{P}$ per passi (aggiungendo colonne) e verifichiamo il rango via via:

$$\mathcal{P}_1 = B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \text{ può avere rango 3?}$$

$$\mathcal{P}_2 = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \text{ scegliamo le prime 3 colonne...}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] = \underbrace{4+0+0}_{\text{diagonali}} - \overbrace{(0+0-1)}^{\text{antidiagonali}} = 5 \neq 0$$

(applicando la regola di Sarrus...)

$\Rightarrow$ Il sistema è controllabile!

Calcoliamo un autovettore sinistro di A relativo a $\lambda_a = 2$, incognita $v_a^\top = [a, b, c]$

$$[a,b,c]\begin{bmatrix} -1-2 & 0 & 1 \\ 1 & -8-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3a+b & = & 0 \\ -10b & = & 0 \\ a & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow \quad v_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Verifichiamo che $v_a^\top B = [1, 0] \neq 0$

Introduciamo l'incognita $f_a = [f_1, f_2]^\top$ e risolviamo

$$[1,0]\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = -6-2 = -8 \quad \Rightarrow \quad \text{ad esempio } f_a = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Selezioniamo $F = f_a v_a^\top$

$$\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}[0,0,1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ calcolare autovalori di $A + BF$...

Proprietà di osservabilità

Un sistema si dice osservabile dall'uscita y se esiste un intervallo finito di tempo $[0, \bar{t}]$ tale che, conoscendo senza errori $y(t)$ e $u(t)$ per $t \in [0, \bar{t}]$ e le matrici A, B, C e D, risulti possibile in ogni caso individuare **univocamente** il valore dello stato all'inizio di tale intervallo, ovvero $x(0)$

Matrice Gramiana di osservabilità/ Matrice di osservabilità

$$L(t) = \int_0^t e^{A^\top \tau} C^\top C e^{A\tau} dd\tau \qquad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Stati Inosservabili[1]

L'insieme $\mathcal{X}_i$ degli stati inosservabili è $\mathcal{X}_i = \ker(L(t)) = \ker(\mathcal{O})$. Quindi il sistema è osservabile se e solo se $\mathrm{rank}(L(t)) = \mathrm{rank}(\mathcal{O}) = n$

[1] Due stati iniziali x_a e x_b sono inosservabili se le corrispondenti uscite $y_a(t)$ e $y_b(t)$ coincidono per ogni t, ovvero (con $u = 0$ per semplicità) $y_a(t) = Ce^{At}x_a = y_b(t) = Ce^{At}x_b$, $\forall t \geq 0$

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo per sistemi a tempo continuo

Prossimi passi:

- Forniamo la definizione generale di un problema di controllo ottimo a tempo continuo
- Formalizziamo e dimostriamo il Principio di Ottimalità di Bellman
- Dimostriamo che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) fornisce condizioni necessarie e sufficienti di ottimalità