OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 7 Settembre 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 & = & u + g(x_1, x_2) \end{array} \right. \tag{1}$$

   i) Determinare, motivando la risposta, una funzione continua g tale che la legge di controllo $u^\star = -x_2$ risulti la soluzione ottima di (1) [4 PUNTI]

   ii) Sostituendo la funzione g trovata in precedenza, determinare il costo della legge di controllo $u^\star$ a partire da $x(0) = [1, -1]^\top$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u(t)^2 dt + \frac{1}{2} x_1(2)^2 \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -2x_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   Determinare il costo della soluzione ottima $u^\star$ di (2) a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1\,1]^\top$. [7 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(2x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 4x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + cx_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

   i) Determinare valori dei parametri a, b e c tali che le matrici $K_0 = [-2 \ \ -1]$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato. [4 PUNTI]

   ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -2x_1 - x_2$ abbia costo pari a 1. [2 PUNTI]

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie di ottimalitá [6 PUNTI]

5. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo a somma-zero e di equilibrio di Nash. Discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash. [6 PUNTI]