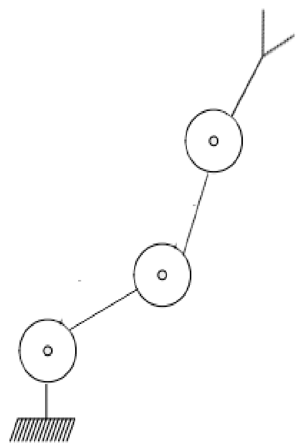
Cinematica inversa 3 DOF Planare RRR



$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{coordinate\,end-effector};\ \phi := \mathrm{orientamento}$$

$$R_{03} = R(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$d_{03} = R_{03}\begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1 + q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1)\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dato $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix}$ si determina q_1, q_2, q_3:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{123}\begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \end{pmatrix} + R_{12}\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R_1\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R(\phi)\begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1 + q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1)\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - R(\phi)\begin{pmatrix} L_3 \\ 0 \end{pmatrix} = R(q_1 + q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1)\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = R(q_1 + q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1)\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = R(q_1 + q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + R(q_1)\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $R(q_1 + q_2) = R(q_1)\,R(q_2)$, è possibile mettere in evidenza $R(q_1)$:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = R(q_1)\left\{R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

La matrice di rotazione $R(q_1)$ ha non varia la norma del vettore $\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$ e $R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quindi possiamo imporre che abbiano la stessa norma. In particolare:

$$\left|\left|\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}\right|\right|_2 = \left|\left| R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\right|_2$$

$$\begin{pmatrix} L_2 & 0 \end{pmatrix} R(q_2)^T R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} L_1 & 0 \end{pmatrix} R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}^2+\hat{y}^2 = L_2^2+L_1^2+2\,L_1\,L_2\cos(q_2)$$

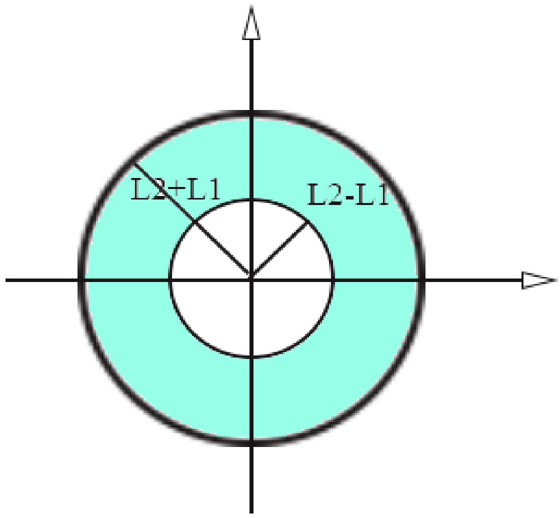
$$\cos(q_2) = \frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2}$$

Poiché $-1 \leqslant \cos(q_2) \leqslant 1$, otteniamo infine lo spazio operativo del 2DOF planare:

$$-1 \leqslant \frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2} \leqslant 1$$

$$L_2^2+L_1^2-2\,L_1\,L_2 \leqslant \hat{x}^2+\hat{y}^2 \leqslant 2\,L_1\,L_2+L_2^2+L_1^2$$

Le disequazioni delimitano due circonferenze di raggio L_2+L_1 e L_2-L_1, in cui la regione valida presa inconsiderazione è quella regione di spazio compresa tra le curve.



A questo punto è possibile determinare l'espressione della variabile di giunto q_2:

$$\cos(q_2) = \frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2}$$

$$\sin(q_2) = \pm\sqrt{1-\cos(q_2)^2} = \pm\sqrt{1-\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2}}$$

In particolare, si hanno due soluzioni generiche se $\left|\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2}\right| \neq 1$. Nel caso in cui $\left|\frac{\hat{x}^2+\hat{y}^2-L_2^2-L_1^2}{2\,L_1\,L_2}\right| = 1$, si ha una soluzione singolare.

A questo punto la quantità $R(q_2)\begin{pmatrix} L_2 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è nota:

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_2\cos(q_2)+L_1 \\ \sin(q_2)\,L_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{pmatrix}=\frac{1}{(L_2\cos(q_2)+L_1)^2+L_2^2\sin(q_2)^2}\begin{pmatrix} L_2\cos(q_2)+L_1 & \sin(q_2)\,L_2 \\ -\sin(q_2)\,L_2 & L_2\cos(q_2)+L_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{L_2^2\cos(q_2)^2+L_1^2+2\,L_2L_1\cos(q_2)+L_1+L_2^2\sin(q_2)^2}\begin{pmatrix} (L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{x}+\sin(q_2)\,L_2\,\hat{y} \\ -\sin(q_2)\,L_2\,\hat{x}+(L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{y} \end{pmatrix}$$

Da cui si ottiene la variabile di giunto q_1;

$$q_1=\operatorname{atan2}\left(\frac{-\sin(q_2)\,L_2\,\hat{x}+(L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{y}}{L_2^2\cos(q_2)^2+L_1^2+L_2^2\sin(q_2)^2},\frac{(L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{x}+\sin(q_2)\,L_2\,\hat{y}}{L_2^2\cos(q_2)^2+L_1^2+L_2^2\sin(q_2)^2}\right)$$

Poiché la quantità $L_2^2\cos(q_2)^2+L_1^2+L_2^2\sin(q_2)^2>0$ è possibile semplificara all'interno della funzione atan2:

$$q_1=\operatorname{atan2}(\sin(q_2)\,L_2\,\hat{x}-(L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{y},(L_2\cos(q_2)+L_1)\,\hat{x}+\sin(q_2)\,L_2\,\hat{y})$$

Infine:

$$q_3=\phi-(q_1+q_2)$$

```
Maxima 5.44.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 2.0.0
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) calculate(x,y,L1,L2):=block([q2plus,q2minus,q1,res],
                                  c2:(x^(2)+y^(2)-L1^(2)-L2^(2))/(2*L1*L2),
                                  s2:sqrt(1-c2^2),

                                  c1Num:combine(expand((L2*c2+L1)*x+s2*L2*y)),
                                  s1Num:combine(expand(-s2*L2*x+(L2*c2+L1)*y)),

      q1Den:L2^(2)*c2^(2)+L1^(2)+L2^(2)*s2^(2)+2*L1*L2*c2,
                              if abs(c2)=1 then print("La soluzione è singolare")
                                  elseif q1Den>0 then(
                                      print("La soluzione non è singolare"),
                                      q1:atan2(s1Num,c1Num),
                                      q2alto:atan2(s2,c2),
                                      q2basso:atan2(-s2,c2),
                                      res:[[q2alto,q1],[q2basso,q1]])
                                  else (
                                      q1:atan2(s1Num/q1Den,c1Num/q1Den),
                                      q2alto:atan2(s2,c2),
                                      q2basso:atan2(-s2,c2),
                                      res:[[q2alto,q1],[q2basso,q1]])




                                  )
```

(%o1) $\mathrm{calculate}(x,y,L1,L2):=\mathbf{block}\left([q2\mathrm{plus},q2\mathrm{minus},q1,\mathrm{res}],c2:\frac{x^2+y^2-L1^2-L2^2}{2\,L1\,L2},s2:\right.$

$\sqrt{1-c2^2}$, $c1\mathrm{Num}$: combine(expand($(L2\,c2+L1)\,x+s2\,L2\,y$)), $s1\mathrm{Num}$: combine(expand($((-s2)\ L2\ x+(L2\ c2+L1)\ y)$)), $q1\mathrm{Den}$: $L2^2\ c2^2+L1^2+L2^2\ s2^2+2\ L1\ L2\ c2$, **if** $|c2|=1$ **then** print(La soluzione è singolare) **elseif** $q1\mathrm{Den}>0$ **then** (print(La soluzione non è singolare), $q1$: atan2($s1\mathrm{Num}$, $c1\mathrm{Num}$), $q2\mathrm{alto}$: atan2($s2$, $c2$), $q2\mathrm{basso}$: atan2($-s2$, $c2$), res: [[$q2\mathrm{alto}$, $q1$], [$q2\mathrm{basso}$, $q1$]]) **else** $\left(q1\text{: atan2}\left(\frac{s1\mathrm{Num}}{q1\mathrm{Den}}, \frac{c1\mathrm{Num}}{q1\mathrm{Den}}\right), q2\mathrm{alto}\text{: atan2}(s2, c2), q2\mathrm{basso}\text{: atan2}(-s2,\right.$ $\left.\left. c2), \mathrm{res}\text{: }[[q2\mathrm{alto}, q1], [q2\mathrm{basso}, q1]]\right)\right)$

(%i56)
```
inv2DOF(x,y,phi,link1,link2,link3):=block([R,circeInt,circleEst,res,q3,
pos],
                              R:matrix([cos(phi),-sin(phi)],
                                       [sin(phi), cos(phi)]),
                              coord:R.matrix([link3],[0]),
                              xcap:x-coord[1],
                              ycap:y-coord[2],

                              circleInt:link1^2+link2^2-2*link1*link2,
                              circleEst:link1^2+link2^2+2*link1*link2,
                            if (xcap[1]^2+ycap[1]^2>= circleInt and
xcap[1]^2+ycap[1]^2<= circleEst )then
                              (
                               print("Il punto x,y è nello spazio di lavoro"),
                               pos:calculate(xcap[1],ycap[1],link1,link2),
                               res:[[pos[1][2],pos[1][1],phi-
(pos[1][2]+pos[1][1])],[pos[2][2],pos[2][1],phi-(pos[2][1]+pos[2][2]) ]]

                               )
                               else res:"Punto x,y non è ammissibile"
                             )
```

(%o56) inv2DOF(x, y, φ, link1, link2, link3) := **block** $\Bigg($[R, circeInt, circleEst, res, $q3$, pos], R: $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$, coord: $R\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{link3}\\0\end{pmatrix}$, xcap: $x-\mathrm{coord}_1$, ycap: $y-\mathrm{coord}_2$, circleInt: $\mathrm{link1}^2+\mathrm{link2}^2+(-2)\ \mathrm{link1}\ \mathrm{link2}$, circleEst: $\mathrm{link1}^2+\mathrm{link2}^2+2\ \mathrm{link1}\ \mathrm{link2}$, **if** $\mathrm{xcap}_1^2+\mathrm{ycap}_1^2\geq \mathrm{circleInt}\wedge \mathrm{xcap}_1^2+\mathrm{ycap}_1^2\leq \mathrm{circleEst}$ **then** (print(Il punto x,y è nello spazio di lavoro), pos: calculate(xcap_1, ycap_1, link1, link2), print(pos1 , $(\mathrm{pos}_1)_2$, pos2: , $(\mathrm{pos}_1)_1$), print(POS= , $(\mathrm{pos}_1)_2+(\mathrm{pos}_1)_2$), res: [[$(\mathrm{pos}_1)_2$, $(\mathrm{pos}_1)_1$, $\varphi-((\mathrm{pos}_1)_2+(\mathrm{pos}_1)_1)$], [$(\mathrm{pos}_2)_2$, $(\mathrm{pos}_2)_1$, $\varphi-((\mathrm{pos}_2)_1+(\mathrm{pos}_2)_2)$]]) **else** res: Punto x,y non è ammissibile $\Bigg)$

(%i57)
```
inv2DOF(1,2,%pi/2,1,1,1);
```

Il punto x,y è nello spazio di lavoro

La soluzione non è singolare
pos1 0 pos2: $\frac{\pi}{2}$

POS= 0

(%o57) $\left[\left[0,\frac{\pi}{2},0\right],\left[0,-\frac{\pi}{2},\pi\right]\right]$

(%i58)