OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 4 Febbraio 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (5x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dot{x}_1 & = & x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & u \end{array} \right. \tag{1}$$

   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u_0 = -x_1 - x_2$ e la matrice

   $$P_0 = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right]$$

   possono essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman.

   (b) Iterare l'algoritmo fino a quando la legge di controllo $u_i = K_i x$ fornisce un costo strettamente minore di 1 a partire dallo condizione iniziale $x_0 = [1,\ 0]^\top$.

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + 2u_1(t)^2 - u_2(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (-x(t)^2 + u_2(t)^2 - 2u_1(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \quad \dot{x} = x + 2\sqrt{2}u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Si determini un equilibrio di Nash del gioco (2).

   (b) Si determini il valore del costo del giocatore 2 all'equilibrio di Nash a partire da uno stato iniziale pari ad 1.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{lll} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \quad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2}u_2 \tag{3}$$

   Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Discutere l'equazione Differenziale di Riccati e dimostrare che la soluzione $P(t)$ esiste per ogni $t \in [0, T]$.

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare inoltre che la sequenza di soluzioni $P_T(t)$ del problema ad orizzonte finito ha un limite per $T \to +\infty$.