



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

# Lezione R6

## Schedulabilità per RM e DM

Sistemi embedded e real-time

15 ottobre 2020

Marco Cesati

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica  
Università degli Studi di Roma Tor Vergata

# Di cosa parliamo in questa lezione?



## Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

In questa lezione continuiamo la discussione di algoritmi e criteri di schedulabilità per il modello a task periodici

- 1 Test di schedulabilità per algoritmi a priorità fissa
- 2 Test di schedulabilità generale per scadenze arbitrarie
- 3 Condizioni di schedulabilità per algoritmi a priorità fissata

# Schedulabilità con algoritmi a priorità fissa



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

- Alcuni algoritmi di schedulazione con priorità **dinamica**, ad es. **EDF**, sono ottimali:  $U_{EDF} = 1$
- Nessun algoritmo  $X$  con priorità **fissa** per i task può essere ottimale in senso assoluto:  $U_X < 1$
- L'algoritmo **RM** (**R**ate **M**onotonic) è ottimale (in senso assoluto) per i sistemi di task armonici con scadenze implicite
- L'algoritmo **DM** (**D**eadline **M**onotonic) è ottimale tra gli algoritmi a priorità **fissa**, ma non in senso assoluto
- L'algoritmo **RM** è ottimale tra gli algoritmi a priorità **fissa** per sistemi di task con scadenza proporzionale al periodo

## Problema generale

Fissato un sistema di task ed un algoritmo di schedulazione a priorità fissa (tipicamente RM), come verificare se l'algoritmo determinerà **sempre** una schedulazione fattibile?

## Istanti critici

Supponiamo che in un insieme di task in cui le fasi iniziali **non** sono pre-determinate i **tempi di risposta** siano **piccoli**: ogni job deve terminare prima che un altro job dello stesso task sia rilasciato

### Definizione di istante critico di un task

Se tutti i job di un task  $T_i$  rispettano la scadenza relativa, l'**istante critico** è un momento in cui il rilascio di un job comporta il massimo **tempo di risposta** possibile per quel job

Se almeno un job di  $T_i$  non rispetta la scadenza relativa, l'**istante critico** è un momento in cui il rilascio di un job provoca il mancato rispetto della scadenza di quel job

### Teorema (Liu, Layland 1973)

In una sistema con task a **priorità fissa** e **tempi di risposta piccoli**, l'istante in cui uno dei job di  $T_i$  viene rilasciato contemporaneamente ai job di *tutti* i task con priorità maggiore di  $T_i$  è un **istante critico** di  $T_i$



# Istanti critici per $T_1=(2, 0.6)$ , $T_2=(2.5, 0.2)$ , $T_3=(3, 1.2)$

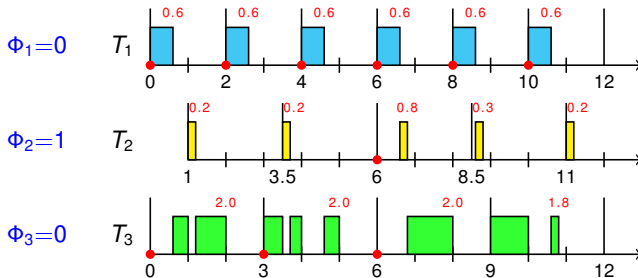
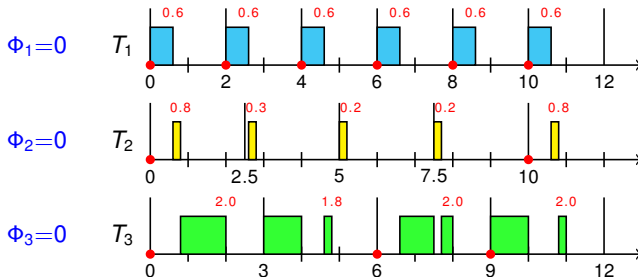


Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità



# Schedulabilità per priorità fissa e tempi di risposta piccoli

Schedulabilità per  
RM e DM

Marco Cesati

Supponiamo che in un sistema con task a priorità fissa i tempi di risposta siano piccoli

## Definizione della funzione di tempo necessario

Siano dati i task  $T_1, \dots, T_i$  in fase al tempo  $t_0$  con priorità decrescenti. Il tempo necessario per eseguire tutti i job dei task  $T_1, \dots, T_i$  nell'intervallo  $[t_0, t_0 + t]$  ( $t \leq p_i$ ) è

$$w_i(t) = e_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left\lceil \frac{t}{p_k} \right\rceil \cdot e_k$$

## Test di schedulabilità (Lehoczky, Sha, Ding 1989)

Siano dati i task  $T_1, \dots, T_i$  in fase al tempo  $t_0$  con priorità decrescenti, con  $T_1, \dots, T_{i-1}$  effettivamente schedulabili. Il task  $T_i$  può essere schedulato nell'intervallo di tempo  $[t_0, t_0 + D_i]$  se esiste  $t \leq D_i$  tale che  $w_i(t) \leq t$



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

## Applicazione del test di schedulabilità



- Siano dati i task  $T_1, T_2, \dots, T_n$  con priorità decrescenti
- Si considera un task  $T_i$  alla volta, cominciando da quello con priorità maggiore ( $T_1$ )
- Si calcola il valore della **funzione di tempo necessario**  $w_i(t)$  per tutti i valori di  $t \leq D_i$  tali che  $t$  è un multiplo intero di  $p_k$ , per  $k \in \{1, 2, \dots, i\}$
- Se per almeno uno di questi valori di  $t$  vale  $w_i(t) \leq t$  allora  $T_i$  è effettivamente schedulabile
- Altrimenti il test fallisce: un job di  $T_i$  *potrebbe* mancare la propria scadenza

Esempio:  $T_1=(3, 1)$ ,  $T_2=(5, 1.5)$ ,  $T_3=(7, 1.25)$ ,  $T_4=(9, 0.5)$

$t$	3	5	6	7	9
$w_1(t)$	1.0				
$w_2(t)$	2.5	3.5			
$w_3(t)$	3.75	4.75	6.25	7.25	
$w_4(t)$	4.25	5.25	6.75	7.75	9.0

## Applicazione del test di schedulabilità (2)

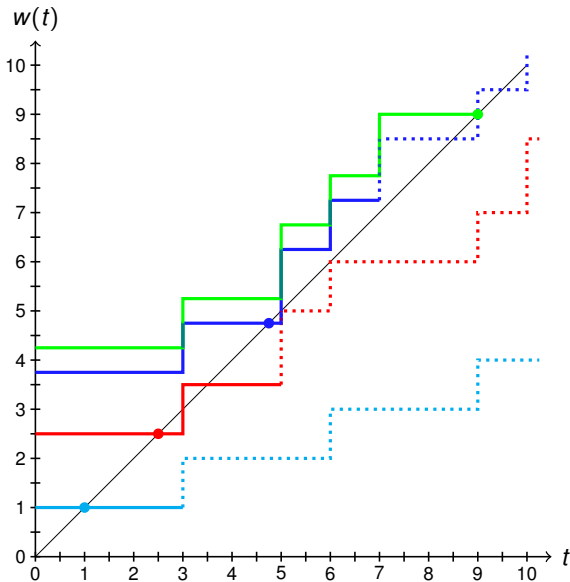


Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità





## Massimo tempo di risposta di un task

Il **massimo tempo di risposta**  $W_i$  di un task  $T_i$  in un sistema a priorità fissa con tempi di risposta piccoli è:

$$W_i = \min\{t \leq D_i : t = w_i(t)\}$$

Se l'equazione  $w_i(t) = t$  non ha soluzioni minori o uguali a  $D_i$ , allora qualche job in  $T_i$  mancherà la propria scadenza relativa

Algoritmo per il calcolo di  $W_i$  (Audsley et al., 1993):

- $t^{(1)} = e_i$  (prima approssimazione)
- $t^{(k+1)} = w_i(t^{(k)})$
- continuare a iterare finché
  - $t^{(k+1)} = t^{(k)}$  e  $t^{(k)} \leq D_i \Rightarrow W_i = t^{(k)}$
  - $t^{(k+1)} > D_i \Rightarrow$  non schedulabile



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

## Alternative al test di schedulabilità

Il test di schedulabilità assume il caso peggiore e analizza le richieste di tempo dei task

*Non sarebbe molto più semplice provare a simulare la schedulazione? **Non sempre***

Per i sistemi più semplici simulare la schedulazione è concettualmente più facile

D'altra parte per i sistemi più complicati non è sempre possibile simulare, ad esempio perché

- non è possibile determinare facilmente il caso peggiore
- il caso peggiore cambia da task a task
- è difficile integrare nella simulazione altri fattori (come job parzialmente non interrompibili) che invece possono essere considerati estendendo il test di schedulabilità

In ogni caso, sia la simulazione che il test di schedulabilità hanno complessità asintotica pari a  $O(n \cdot \frac{p_n}{p_1})$



## Task periodici con tempi di risposta arbitrari

Finora abbiamo considerato task a priorità fissa con tempi di risposta **piccoli**

Analizzare un sistema di task con tempi di risposta **arbitrari** è più difficile:

- un job non deve completare necessariamente prima che il successivo job dello stesso task sia rilasciato
- è ammissibile che  $D_i > p_i$
- vi possono essere nello stesso istante più job di uno stesso task in attesa di essere eseguiti
- un job rilasciato contemporaneamente a tutti i job dei task con priorità maggiore non ha necessariamente il massimo tempo di risposta possibile

Come sempre assumeremo che i job di uno stesso task pronti per l'esecuzione verranno eseguiti in modalità FIFO



## Intervalli totalmente occupati

Come analizzare i sistemi di task con tempi di risposta grandi?

Sia dato un insieme di task  $\mathcal{T}_i = \{T_1, \dots, T_i\}$  con valori di priorità  $\pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_i$  (valore minore = priorità maggiore)

Si definisce un *intervallo totalmente occupato* (*busy interval*) di livello  $\pi_i$  un intervallo di tempo  $(t_0, t_1]$  tale che

- 1 all'istante  $t_0$  tutti i job di  $\mathcal{T}_i$  rilasciati prima di  $t_0$  sono stati completati
- 2 all'istante  $t_0$  un job di  $\mathcal{T}_i$  è rilasciato
- 3 l'istante  $t_1$  è il primo istante in cui tutti i job di  $\mathcal{T}_i$  rilasciati a partire da  $t_0$  sono stati completati

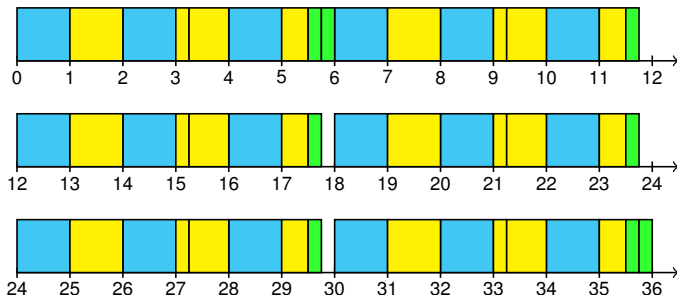
*È possibile che in un intervallo totalmente occupato il processore sia idle od esegua task non in  $\mathcal{T}_i$ ? **No!***

- Se il processore fosse idle, l'intervallo terminerebbe prima
- $\mathcal{T}_i$  contiene tutti gli  $i$  task di priorità maggiore, quindi nessun task al di fuori di  $\mathcal{T}_i$  può essere eseguito



## Esempio di intervalli totalmente occupati

Task:  $T_1=(2, 1)$ ,  $T_2=(3, 1.25)$ ,  $T_3=(5, 0.25)$



- Intervalli di livello  $\pi_1=1$ :  $(0, 1]$ ,  $(2, 3]$ ,  $(4, 5]$ , ...
- Intervalli di livello  $\pi_2=2$ :  $(0, 5.5]$ ,  $(6, 11.5]$ ,  $(12, 17.5]$ , ...
- Intervalli di livello  $\pi_3=3$ :  $(0, 6]$ ,  $(6, 11.75]$ ,  $(12, 17.75]$ , ...

Tutti gli intervalli di livello 1 e 2 hanno lunghezza massima perché *in fase*: i primi job di tutti i task sono rilasciati all'inizio



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

## Test di schedulabilità generale

Il **test di schedulabilità generale** per tempi di risposta arbitrari (Lehoczky 1990) è ancora basato sull'analisi del caso peggiore (task in fase)

La differenza rispetto al test per tempi di risposta piccoli è che il primo job rilasciato contemporaneamente agli altri potrebbe non avere il massimo tempo di risposta

Idea: per ogni task  $T_i$ , analizzare *tutti* i job di  $T_i$  eseguiti nel primo intervallo totalmente occupato di livello  $\pi_i$

*Come determinare l'intervallo totalmente occupato?*

- Inizio determinato dal rilascio dei primi job (in fase!) dei task in  $\mathcal{T}_i = \{T_1, \dots, T_i\}$
- Lunghezza massima calcolata risolvendo iterativamente

$$t = \sum_{k=1}^i \left\lceil \frac{t}{p_k} \right\rceil e_k$$

(la prima approssimazione può essere  $\sum_{k=1}^i e_k$ )



## Test di schedulabilità generale (2)



- Siano dati i task in  $\{T_1, \dots, T_n\}$  con priorità  $\pi_1 < \dots < \pi_n$ ; si considera un task  $T_i$  alla volta, cominciando dal task di massima priorità  $T_1$
- Caso peggiore per la schedulabilità di  $T_i$ : assumere che i task in  $\mathcal{T}_i = \{T_1, \dots, T_i\}$  sono in fase
- Se il primo job di *tutti* i task in  $\mathcal{T}_i$  termina entro il primo periodo del task: decidere se  $T_i$  è schedulabile controllando se  $J_{i,1}$  termina entro la scadenza tramite la funzione di tempo richiesto  $w_{i,1}(t) := w_i(t)$
- Altrimenti almeno un primo job di  $\mathcal{T}_i$  termina dopo il periodo del task; calcolare la lunghezza  $t^L$  dell'intervallo totalmente occupato di livello  $\pi_i$  che inizia da  $t = 0$
- Calcolare i tempi di risposta massimi di tutti i  $\lceil t^L/p_i \rceil$  job di  $T_i$  nell'intervallo
- Decidere se  $T_i$  è schedulabile controllando se tutti i tempi di risposta rispettano la scadenza

## Test di schedulabilità generale (3)

Come calcolare i tempi di risposta di tutti i job di  $T_i$  nell'intervallo totalmente occupato di livello  $\pi_i$ ?

### Lemma

Il tempo di risposta massimo  $W_{i,j}$  del  $j$ -esimo job di  $T_i$  in un intervallo totalmente occupato di livello  $\pi_i$  in fase è uguale al minimo valore di  $t$  che soddisfa l'equazione:

$$t = w_{i,j}(t + (j-1)p_i) - (j-1)p_i$$

$$\text{con } w_{i,j}(t) = j e_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left\lceil \frac{t}{p_k} \right\rceil e_k$$

In pratica per controllare se il  $j$ -esimo job di  $T_i$  rispetta la scadenza relativa è sufficiente verificare se la diseuguaglianza  $w_{i,j}(t) \leq t$  è soddisfatta per qualche  $t \in [(j-1)p_i, (j-1)p_i + D_i]$



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità



## Esempio di test di schedulabilità generale

Task:  $T_1=(\Phi_1, 2, 1, 1)$ ,  $T_2=(\Phi_2, 3, 1.25, 4)$ ,  $T_3=(\Phi_3, 5, 0.25, 7)$   
(le fasi iniziali non sono note)

### Verifica di $T_1$

$$w_1(t) = w_{1,1}(t) = e_1 = 1 = D_1 \Rightarrow T_1 \text{ OK!}$$

### Verifica di $T_2$

$$\begin{aligned} w_{2,1}(2) &= e_2 + e_1 = 2.25 > 2 && \Rightarrow \text{no} \\ w_{2,1}(3) &= e_2 + 2e_1 = 1.25 + 2 = 3.25 > 3 && \Rightarrow \text{no} \\ w_{2,1}(4) &= e_2 + 2e_1 = 1.25 + 2 = 3.25 \leq 4 \leq D_2 && \Rightarrow J_{2,1} \text{ ok} \end{aligned}$$

### Lunghezza del busy interval di livello 2

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= e_1 + e_2 = 2.25, & t^{(2)} &= 2e_1 + e_2 = 3.25 \\ t^{(3)} &= 2e_1 + 2e_2 = 4.5, & t^{(4)} &= 3e_1 + 2e_2 = 5.5 \\ t^{(5)} &= 3e_1 + 2e_2 = 5.5 = t^{(4)} = t^L \end{aligned}$$

$$\# \text{ job di } T_2 \text{ in } (0, 5.5]: \lceil t^L / p_2 \rceil = 2$$

$$\begin{aligned} w_{2,2}(3) &= 2e_2 + 2e_1 = 4.5 > 3 && \Rightarrow \text{no} \\ w_{2,2}(4) &= 2e_2 + 2e_1 = 4.5 > 4 && \Rightarrow \text{no} \\ w_{2,2}(6) &= 2e_2 + 3e_1 = 5.5 \leq 6 \leq p_2 + D_2 = 7 && \Rightarrow J_{2,2} \text{ ok} \\ &&& \Rightarrow T_2 \text{ OK!} \end{aligned}$$



## Esempio di test di schedulabilità generale (2)

### Verifica di $T_3$

#### Lunghezza del busy interval di livello 3

$$\begin{aligned}t^{(1)} &= e_1 + e_2 + e_3 = 2.5, & t^{(2)} &= 2e_1 + e_2 + e_3 = 3.5 \\t^{(3)} &= 2e_1 + 2e_2 + e_3 = 4.75, & t^{(4)} &= 3e_1 + 2e_2 + e_3 = 5.75 \\t^{(5)} &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 6, & t^{(6)} &= 3e_1 + 2e_2 + 2e_3 = 6 = t^L\end{aligned}$$

$$\# \text{ job di } T_3 \text{ in } (0, 6]: \lceil t^L / p_3 \rceil = 2$$

$$\begin{aligned}w_{3,1}(2) &= e_3 + e_1 + e_2 = 2.5 > 2 && \Rightarrow \text{no} \\w_{3,1}(3) &= e_3 + 2e_1 + e_2 = 3.5 > 3 && \Rightarrow \text{no} \\w_{3,1}(4) &= e_3 + 2e_1 + 2e_2 = 4.75 > 4 && \Rightarrow \text{no} \\w_{3,1}(5) &= e_3 + 3e_1 + 2e_2 = 5.75 > 5 && \Rightarrow \text{no} \\w_{3,1}(6) &= e_3 + 3e_1 + 2e_2 = 5.75 \leq 6 \leq D_3 = 7 && \Rightarrow J_{3,1} \text{ ok} \\w_{3,2}(5) &= 2e_3 + 3e_1 + 2e_2 = 6 > 5 && \Rightarrow \text{no} \\w_{3,2}(6) &= 2e_3 + 3e_1 + 2e_2 = 6 \leq 6 \leq p_3 + D_3 = 12 && \Rightarrow J_{3,2} \text{ ok} \\&&& \Rightarrow T_3 \text{ OK!}\end{aligned}$$

Risultato: il sistema  $\{T_1, T_2, T_3\}$  è schedulabile qualunque siano le fasi dei task



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

## Condizioni di schedulabilità

Il test di schedulabilità generale determina se un insieme di task con fasi sconosciute può essere effettivamente schedulato

*Quali sono i suoi limiti?*

- Non può essere applicato se non sono noti periodi, scadenze e tempi di esecuzione dei task
- Il risultato ottenuto non è più valido se un task varia periodo, scadenza o tempo d'esecuzione
- È computazionalmente costoso  $\Rightarrow$  poco adatto per scheduling on-line

Una **condizione di schedulabilità** è una condizione sufficiente per la schedulabilità di un sistema di task calcolabile velocemente ed applicabile anche quando alcuni parametri temporali dei task non sono noti

Ad esempio, il fattore di utilizzazione dell'algoritmo **EDF** fornisce una condizione di schedulabilità:  $U_T \leq U_{EDF} = 1$



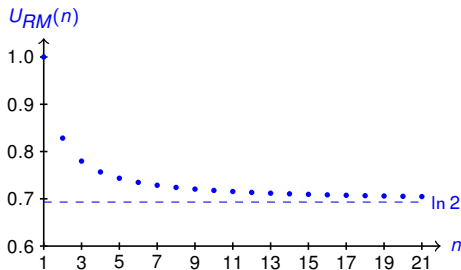
## Condizione di schedulabilità di RM

### Condizione di Liu-Layland (1973)

Un sistema  $\mathcal{T}$  di  $n$  task indipendenti ed interrompibili con scadenze relative uguali ai rispettivi periodi ( $D_i = p_i$ ) può essere effettivamente schedulato su un processore in accordo all'algoritmo RM se il suo fattore di utilizzazione  $U_{\mathcal{T}}$  è minore od uguale a

$$U_{RM}(n) = n \left( 2^{1/n} - 1 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{RM}(n) = \\ = \ln 2 = 0.693$$



Nota: nelle condizioni del teorema, **RM**  $\equiv$  **DM**



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

## Esempi di applicazione di $U_{RM}(n)$

Il sistema  $T_1=(1, 0.25)$ ,  $T_2=(1.25, 0.1)$ ,  $T_3=(1.5, 0.3)$ ,  $T_4=(1.75, 0.07)$ ,  $T_5=(2, 0.1)$  ha fattore di utilizzazione

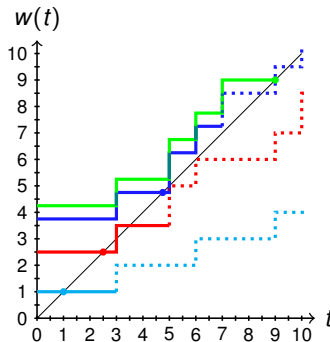
$$U_T = 0.62 \leq 0.743 = U_{RM}(5) \Rightarrow \text{è schedulabile con RM}$$

Il sistema  $T_1=(3, 1)$ ,  $T_2=(5, 1.5)$ ,  $T_3=(7, 1.25)$ ,  $T_4=(9, 0.5)$  ha fattore di utilizzazione

$$U_T = 0.867 > 0.757 = U_{RM}(4) \Rightarrow \text{forse non schedulabile}$$

In realtà è schedulabile!

$t$	3	5	6	7	9
$w_1(t)$	1.0				
$w_2(t)$	2.5	3.5			
$w_3(t)$	3.75	4.75	6.25	7.25	
$w_4(t)$	4.25	5.25	6.75	7.75	9.0



### Test iperbolico (Bini, Buttazzo, Buttazzo 2001)

Un sistema  $\mathcal{T}$  di  $n$  task indipendenti ed interrompibili con scadenze relative uguali ai rispettivi periodi ( $D_i = p_i$ ) può essere effettivamente schedulato su un processore con RM se

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{e_k}{p_k} \right) \leq 2$$

Si applica conoscendo solo il fattore di utilizzazione  $u_k$  dei task

*Come sono correlati test iperbolico e condizione di Liu-Layland?*

Assumendo per ogni task  $u_k = U_{\mathcal{T}}/n$ :

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{U_{\mathcal{T}}}{n} \right) \leq 2 \iff U_{\mathcal{T}} \leq n(2^{1/n} - 1)$$

Esistono casi in cui il **test iperbolico** è soddisfatto ma la condizione di Liu-Layland non lo è



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

### Condizione di Kuo-Mok (1991)

Se un sistema  $\mathcal{T}$  di task periodici, indipendenti ed interrompibili con  $p_i = D_i$  può essere partizionato in  $n_h$  sottoinsiemi disgiunti  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{n_h}$ , ciascuno dei quali contiene task semplicemente periodici, allora il sistema è schedulabile con RM se

$$\sum_{k=1}^{n_h} U_{\mathcal{Z}_k} \leq U_{RM}(n_h) \quad \text{oppure se} \quad \prod_{k=1}^{n_h} (1 + U_{\mathcal{Z}_k}) \leq 2$$

Se un sistema ha poche applicazioni molto complesse, è possibile migliorare la schedulabilità rendendo i task di ciascuna applicazione semplicemente periodici

Esempio: dati 9 task con periodi 4, 7, 8, 14, 16, 28, 32, 56, 64, il fattore di utilizzazione di Liu-Layland è  $U_{RM}(9)=0.720$

Partizionando in due sottoinsiemi (potenze di 2 e multipli di 7):  
 $U_{\mathcal{Z}_1} + U_{\mathcal{Z}_2} \leq U_{RM}(2) = 0.828$



Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generaleCondizioni di  
schedulabilità

## Test per task quasi armonici

Il fattore di utilizzazione di **RM** è in generale  $U_{RM}(n)$ , ma diventa uguale a **1** per task semplicemente periodici

È possibile migliorare  $U_{RM}(n)$  considerando quanto i periodi dei task sono vicini ad essere armonici?

Sia  $X_i = \log_2 p_i - \lfloor \log_2 p_i \rfloor$  e  $\zeta = \max_{1 \leq i \leq n} X_i - \min_{1 \leq i \leq n} X_i$

### Teorema (Burchard, Liebeherr, Oh, Son 1996)

Nelle ipotesi della condizione di Liu-Layland, il fattore di utilizzazione di **RM** dipende dal numero di task  $n$  e da  $\zeta$  è:

$$U_{RM}(n, \zeta) = \begin{cases} (n-1)(2^{\zeta/(n-1)} - 1) + 2^{1-\zeta} - 1 & \text{se } \zeta < 1 - 1/n \\ U_{RM}(n) & \text{se } \zeta \geq 1 - 1/n \end{cases}$$

*Quando si verifica il caso  $\zeta = 0$ ?*

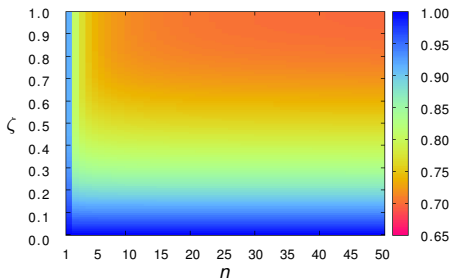
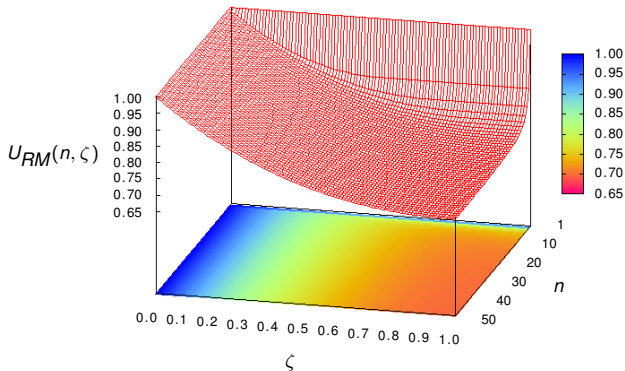
Quando  $p_i = K \cdot 2^{x_i}$  (quindi i task sono armonici)

Non è vero il contrario: ad es., periodi 3, 6, 9  $\Rightarrow \zeta = 0.415$





# La funzione $U_{RM}(n, \zeta)$





Schema della lezione

Test di schedulabilità

Test di schedulabilità  
generale

Condizioni di  
schedulabilità

*Se per qualche task  $D_i < p_i$ , il limite  $U_{RM}(n)$  è valido? **No!***

La formula non è valida perché assume che la scadenza di ciascun job sia l'inizio del periodo successivo

*Se per qualche task  $D_i > p_i$ , il limite  $U_{RM}(n)$  è valido? **Sì!***

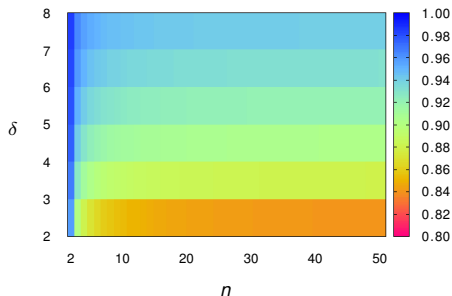
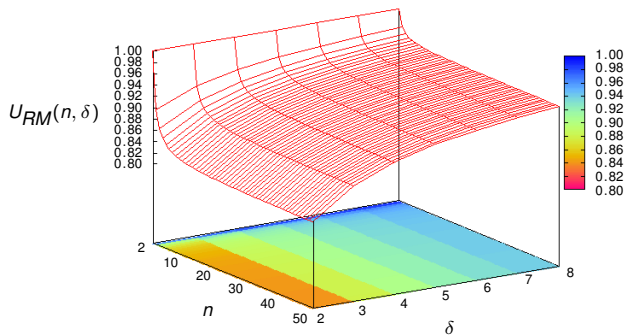
Però la formula è “pessimista”: forse è possibile trovare valori di soglia superiori a  $U_{RM}(n)$

### Teorema (Lehoczky, Sha, Strosnider, Tokuda 1986, 1990, 1991)

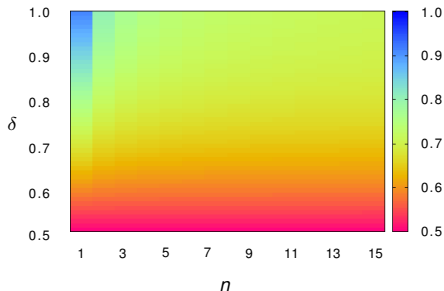
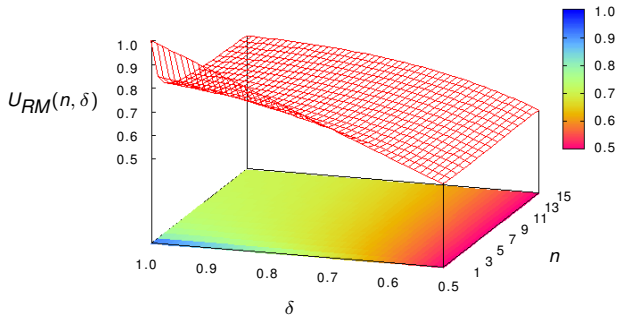
Un sistema  $\mathcal{T}$  di  $n$  task indipendenti, interrompibili e con  $D_i = \delta \cdot p_i$  è schedulabile con **RM** se  $U_{\mathcal{T}}$  è minore o uguale a

$$U_{RM}(n, \delta) = \begin{cases} \delta(n-1) \left[ \left( \frac{\delta+1}{\delta} \right)^{1/(n-1)} - 1 \right] & \text{per } \delta = 2, 3, \dots \\ n((2\delta)^{1/n} - 1) + 1 - \delta & \text{per } 0.5 \leq \delta \leq 1 \\ \delta & \text{per } 0 \leq \delta \leq 0.5 \end{cases}$$

# La funzione $U_{RM}(n, \delta)$ per $\delta \in \{2, 3, \dots\}$



## La funzione $U_{RM}(n, \delta)$ per $\delta \in [0.5, 1]$



[Schema della lezione](#)

[Test di schedulabilità](#)

[Test di schedulabilità  
generale](#)

[Condizioni di  
schedulabilità](#)