Teoria dei Giochi – 9 Settembre 2019

Cognome, Nome, Numero di Matricola, Email:

Non è richiesto di giustificare la risposta $\equiv$ NGR.

Esercizio 1. (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,8,5,3\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{2,9,4,7\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Il primo giocatore vince un euro se $x > y+1$ oppure se $x = y-1$; analogamente, il secondo giocatore vince un euro se $y > x+1$ oppure se $y = x-1$. Si consideri il gioco in *strategia pura*.

1.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Rispettivamente: giocare 8 e giocare 7

1.2 Indicare tutte le strategie conservative per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie conservative per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Per il primo giocatore tutte, per il secondo giocatore 7.

1.3 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione (1, 7), (3, 7), (5, 7), (8, 7),

1.4 Indicare il valore del gioco, oppure spiegare perché non è possibile individuarlo.

Soluzione Valore 1 (in forma di costo per il primo giocatore)

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 10 deputati. Di questi, 3 provengono da una stessa regione A, 3 provengono da una stessa regione B, 3 provengono da una stessa regione C e uno proviene da una regione D. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore votano almeno 8 deputati qualsiasi oppure a suo favore votano esattamente 7 deputati, ma in quest ultimo caso devono essere: due deputati di A,due deputati di B, due deputati di C e il deputato di D.

Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, riportando i calcoli svolti. Se non è possibile determinarlo, spiegare perché.

Soluzione Il gioco può' essere formulato come un gioco cooperativo, perché non esistono due coalizioni disgiunte entrambe a valore 1.

Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\#\text{ permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato proveniente dalla regione D. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono sono quelle in cui: il deputato si trova in settima posizione e nelle prime due ci sono due deputati di A, due deputati di B e due deputati di C; il deputato si trova in ottava posizione.

Quindi il valore del deputato è

$$S(D) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 6!\cdot 3! + 9!}{10!}$$

.

Per quanto riguarda gli altri deputati il loro valore è:

$$S(v) = \frac{1-S(D)}{9}.$$

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) È dato un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$ con vertici $X \cup Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$ e spigoli $E = \{x_1y_1, x_2y_1, x_2y_2, x_3y_2, x_3y_3, x_4y_3\}$. Siano $e \in E$ un qualunque spigolo e $y \in Y$ un qualunque vertice di Y: se y è un estremo di e, diciamo che *e copre y* e che *y copre e*.

Considera il gioco competitivo con 2 giocatori: il giocatore A, che controlla l'insieme degli spigoli E e il giocatore B che controlla l'insieme dei vertici $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ (i vertici di X non sono controllati da nessuno). Le strategie a disposizione di A sono i sottoinsiemi di E; mentre le strategie a disposizione di B sono i sottoinsiemi di Y.

Il payoff in forma di utilità è determinato in questo modo: sia $\overline{E} \subseteq E$ una strategia scelta dal primo giocatore, e $\overline{Y} \subseteq Y$ una strategia scelta dal secondo giocatore. Indichiamo rispettivamente con $a \geq 0$ il numero di spigoli di $\overline{E}$ che non sono coperti da alcun vertice in $\overline{Y}$ e con $b \geq 0$ il numero di vertici di $\overline{Y}$ che non sono coperti da alcuno spigolo in $\overline{E}$:

(1) se $a > b$ oppure $a = b$ e $|\overline{E}| < |\overline{X}|$, il payoff di A è 1;

(2) se $a < b$ oppure $a = b$ e $|\overline{E}| > |\overline{X}|$ il payoff di A è -1;

(3) se $a = b$ e $|\overline{E}| = |\overline{X}|$ è il payoff di A è 0.

Si consideri il gioco in strategia pura.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Per il primo giocatore ce ne sono due: $\{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3\}$ e $\{x_2y_1, x_3y_2, x_4y_3\}$. Per il secondo giocatore solo una: $\{y_1, y_2, y_3\}$.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Ci sono due equilibri di Nash: $(\{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\})$ e $(\{x_2y_1, x_3y_2, x_4y_3\}, \{y_1, y_2, y_3\})$.

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) Si consideri un'istanza dello Stable Marriage Problem con 4 uomini $\{1,2,3,4\}$ e 4 donne $\{A,B,C,D\}$. Sapete solo cha nella graduatoria di 4 la donna A è al primo posto, mentre nella graduatoria di A l'uomo 4 è all'ultimo posto.

4.1 È possibile che nell'algoritmo di Gale Shapley, svolto a partire dagli uomini, la donna A e l'uomo 4 siano alla fine sposati, ma A accetti l'offerta di 4 solo alla terza iterazione? Se la risposta è affermativa esibire delle graduatorie per cui questo accade, se la risposta è negativa non è necessario giustificare la risposta.

Soluzione Si è possibile: $U_1 : B,A,C,D$; $U_2 : B,C,D,A$; $U_3 : C,D,A,B$; $U_4 : A,B,C,D$; $D_A : 2,1,3,4$; $D_B : 1,2,3,4$; $D_C : 2,3,1,4$; $D_D : 3,2,4,1$.

4.2 È possibile che nell'algoritmo di Gale Shapley, svolto a partire dagli uomini, la donna A e l'uomo 4 siano alla fine sposati, ma A accetti l'offerta di 4 solo alla quarta iterazione? Se la risposta è affermativa esibire delle graduatorie per cui questo accade, se la risposta è negativa non è necessario giustificare la risposta.

Soluzione Si è possibile: $U_1 : B,A,C,D$; $U_2 : B,C,A,D$; $U_3 : C,B,D,A$; $U_4 : A,C,B,D$; $D_A : 1,2,3,4$; $D_B : 1,2,3,4$; $D_C : 2,3,1,4$; $D_D : 3,1,2,4$.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ S1 & 1 & 8 & -1 & 0 \\ S2 & -1 & -1 & 0 & -6 \\ S3 & -9 & -2 & 9 & -1 \\ S4 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per $G1$ e $G2$:

$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\ldots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \frac{1}{3}, \xi_1^2 = \frac{2}{3}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = 0$; $(iii): \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$;

$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\ldots,4$; $(jj): \xi_2^1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2^2 = \frac{2}{3}$, $\xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{3}$, $\xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = \frac{2}{3}, \xi_2^4 = 0$.

5.1. Per ciascuna strategia, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Soluzione Rispettivamente: (i) $\frac{9}{4}$; (ii) 2; (iii) $\frac{9}{2}$; (j) 2; (jj) $\frac{13}{3}$; (jjj) $\frac{1}{3}$.

5.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non è possibile individuarne.* **NGR**

Soluzione Non è possibile individuarne.

5.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

Soluzione Non è possibile individuarne.

5.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Soluzione Non è possibile individuarlo, sappiamo solo che è compreso nell'intervallo [-1/3, 2].