Procedura 4

Dimostrare che:

$$(1)\ R_z(\gamma) = R_x\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) R_y(\gamma)\, R_x\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) \quad \forall\gamma$$

Occorre dimostrare che tramite la rappresentazione delle rotazioni nello spazio tramite angoli di Eulero è possibile ottentere un qualsiasi orientamento arbitrario.

Ricordiamo, inoltre, che le rotazioni effettuate tramite angoli di Eulero prendono in considerazione solamente rotazioni attorno all'asse x e y.

Quindi il problema si riconduce a quello di dimostrare che è possibile ottenere un qualsiasi orientamento dell'asse z tramite rotazioni dei restanti due assi. A tale scopo, procediamo con il determinare la matrice di rotazione $R_z(\gamma)$, $R_x\left(+\frac{\pi}{2}\right) R_y(\gamma)\, R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$,$R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y(\gamma)\, R_x\left(+\frac{\pi}{2}\right)$. Le ultime due matrici sottratte alla matrice $R_z(\gamma)$ devono avere come risultato la matrice nulla. Data l'arbitrarietà dell'angolo γ, la (1) è dimostrata.

R(k,theta) è una funzione per il calcolo delle matrici $R_z(\gamma), R_x\left(\pm\frac{\pi}{2}\right), R_y(\gamma), R_x\left(\mp\frac{\pi}{2}\right)$

```
(%i1) R(k,theta):= block([res],
                   if k = x
                       then res:matrix([1,0,0],
                      [0,cos(theta),-sin(theta)],
                      [0,sin(theta), cos(theta)])
                   elseif k = y
                       then res:matrix([cos(theta),0,sin(theta)],
                      [0,1,0],
                      [-sin(theta),0, cos(theta)])
                   elseif k = z
                       then res:matrix([cos(theta),-sin(theta),0],
                      [sin(theta),cos(theta),0],
                      [0,0, 1])
                    else
                      res:"Incorrect axis of rotation"
                    )
```

(%o1) $R(k,\vartheta) := \mathbf{block}\left([\mathrm{res}], \mathbf{if}\ k = x\ \mathbf{then}\ \mathrm{res}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathbf{elseif}\ k = y\ \mathbf{then}\ \mathrm{res}: \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \mathbf{elseif}\ k = z\ \mathbf{then}\ \mathrm{res}: \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{else}\ \mathrm{res}: \text{Incorrect axis of rotation}\right)$

Matrice $R_z(\gamma)$

```
(%i2) R[z]:R(z, gamma);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice $R_x\left(\frac{\pi}{2}\right)$

```
(%i3) R[x]:R(x,%pi/2);
```

(%o3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice $R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

```
(%i4) R1[x]:R(x, -(%pi)/2);
```

(%o4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Matrice $R_y(\gamma)$

```
(%i5) R[y]:R(y,gamma);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & \sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$

Procedura per la verifica di $R_z(\gamma) - R_x\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) R_y(\gamma) R_x\left(\mp\frac{\pi}{2}\right) \equiv 0$

```
(%i6) proc(z,x,y,x1):=block([res],
                            m: z-x.y.x1,
                            nullMat: matrix([0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]),
                            if(m = nullMat)
                                then res:"La proprietà è verificata"
                            else
                               res:"La proprietà non è verificata"
                               )
```

(%o6) $\mathrm{proc}(z,x,y,x1) := \mathbf{block}\left([\mathrm{res}], m{:}\, z - x\cdot y\cdot x1, \mathrm{nullMat}{:} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{if}\ m = \mathrm{nullMat}\ \mathbf{then}\ \mathrm{res}{:}\ \text{La proprietà è verificata}\ \ \mathbf{else}\ \mathrm{res}{:}\ \text{La proprietà non è verificata}\right)$

Verifica di $R_z(\gamma) - R_x\left(+\frac{\pi}{2}\right) R_y(\gamma) R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) \equiv 0 \quad \forall\gamma$

```
(%i7) proc(R[z],R[x],R[y],R1[x]);
```

(%o7) La proprietà è verificata

Matrice $R_y(-\gamma)$

```
(%i8) R1[y]:R(y,-gamma);
```

(%o8) $\begin{pmatrix} \cos(\gamma) & 0 & -\sin(\gamma) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\gamma) & 0 & \cos(\gamma) \end{pmatrix}$

Verifica di $R_z(\gamma) + R_x\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y(-\gamma) R_x\left(+\frac{\pi}{2}\right) \equiv 0 \quad \forall\gamma$

```
(%i9) proc(R[z],R1[x],R1[y],R[x]);
```

(%o9) La proprietà è verificata

```
(%i13) R(x,alpha).R(y,beta).R(x,gamma)
```

(%o13) $(\cos(\beta), \sin(\beta)\sin(\gamma), \sin(\beta)\cos(\gamma); \sin(\alpha)\sin(\beta), \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma), -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma); -\cos(\alpha)\sin(\beta), \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\alpha)\cos(\gamma), \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma))$

(%i14)

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta)\sin(\gamma) & \sin(\beta)\cos(\gamma) \\ \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) & -\cos(\alpha)\sin(\gamma) - \sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) \\ -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\sin(\gamma) + \sin(\alpha)\cos(\gamma) & \cos(\alpha)\cos(\beta)\cos(\gamma) - \sin(\alpha)\sin(\gamma) \end{pmatrix}$$