Regolatore Lineare-Quadratico su orizzonte infinito
a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Nelle lezioni precedenti

- Abbiamo visto che per risolvere un problema di controllo ottimo per sistemi lineari e con indice di costo quadratico **su orizzonte finito** è necessario determinare la soluzione di un'equazione alle derivate ordinarie

- L'equazione differenziale di Riccati consiste di $n(n+1)/2$ equazioni quadratiche da integrare all'indietro

- Abbiamo visto che l'equazione può essere scritta in maniera equivalente come un sistema di equazioni differenziali lineari

Consideriamo un problema di controllo ottimo **su orizzonte infinito** descritto da un **sistema lineare** e indice di **costo quadratico**

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt \right\}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

Prima di verificare se la soluzione del problema su orizzonte infinito esista o meno, facciamo un ragionamento sulla sua *eventuale* struttura:

- soluzione, $P(t) = [U_{21} + U_{22} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_s (T-t)}][U_{11} + U_{12} e^{-\Lambda_u (T-t)} G e^{\Lambda_s (T-t)}]^{-1}$

  $\Rightarrow$ "$\lim_{T\to\infty} P(t)$" $= U_{21} U_{11}^{-1} \triangleq \bar{P}, \qquad u = -R^{-1} B^\top \bar{P} x$

- equazione, $-\dot{P}(t) = P(t)A + A^\top P(t) - P(t) B R^{-1} B^\top P(t) + Q$

  $\Rightarrow 0 = A^\top \bar{P} + \bar{P} A + Q - \bar{P} B R^{-1} B^\top \bar{P}$

  Equazione Algebrica di Riccati (ARE)

Condizioni sufficienti di esistenza

Teorema

Consideriamo il problema LQR su orizzonte infinito, con $M = 0$, $R > 0$ e $Q = D^\top D \geq 0$. Supponiamo che la coppia (A, D) sia **osservabile** e (A, B) sia **controllabile**. Allora

- esiste un'unica soluzione definita positiva $\bar{P}$ di ARE
- il sistema a ciclo-chiuso
$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^\top \bar{P})x$$
ha un equilibrio in zero asintoticamente stabile

◇

Schema della dimostrazione:

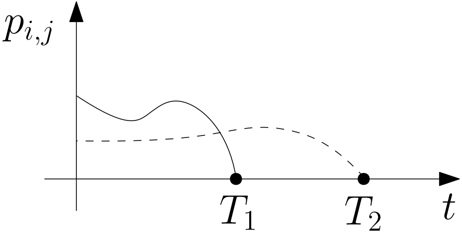
1) **esistenza** del limite della soluzione su orizzonte finito (successione monotonicamente non-decrescente + uniformemente limitata)
2) **unicità** della soluzione di ARE
3) **ottimalità** del controllo stazionario su orizzonte infinito
4) **stabilità asintotica** (teorema di Lyapunov + teorema di LaSalle)

Famiglia di LQR su orizzonte finito parametrizzati rispetto a T

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{T} (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt \right\}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

Se consideriamo due tempi terminali diversi T_1 e T_2 otteniamo due soluzioni diverse $P_{T_1}(t)$ e $P_{T_2}(t)$, dal momento che dobbiamo imporre la condizione $P(T) = 0$ $(= M)$ in due istanti diversi



$\Rightarrow$ $\{P_{T_i}(t)\}_{T_i}$, successione di soluzioni su $[0, T_i]$ al variare di i

La successione $\{P_{T_i}(t)\}_{T_i}$ ha un limite per $T \to \infty$ se (A) è monotonicamente non-decrescente e (B) ogni elemento è limitato superiormente

Per dimostrare **(A)**: consideriamo due tempi terminali T_1, T_2 tali che $T_1 < T_2$. Allora dalla definizione di funzione valore e ricordando che $R > 0$, $Q \geq 0$

$$V_1^\star(t,x) = \int_t^{T_1} \ell(x_1(\tau), u_1(\tau))d\tau \leq \int_t^{T_1} \ell(x_2(\tau), u_2(\tau))d\tau$$

$$\leq \int_t^{T_1} \ell(x_2(\tau), u_2(\tau))d\tau + \underbrace{\int_{T_1}^{T_2} \ell(x_2(\tau), u_2(\tau))d\tau}_{\geq 0} = V_2^\star(t,x)$$

dove $\ell(x,u) = 0.5(x^\top Qx + u^\top Ru)$, ovvero

$$V_1^\star(t,x) = \frac{1}{2}x^\top P_{T_1}(t)x \leq \frac{1}{2}x^\top P_{T_2}(t)x = V_2^\star(t,x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow P_{T_1}(t) \leq P_{T_2}(t)$

Per dimostrare **(B)**: per l'ipotesi di controllabilità di (A, B), esiste una matrice K tale che $A + BK$ ha tutti autovalori a parte reale negativa, ovvero $\sigma(A + BK) \subset \mathbb{C}^-$
Il sistema a ciclo chiuso con $u = Kx$ diventa $\dot{x} = (A + BK)x \Rightarrow x(t) = e^{(A+BK)t}x_0$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T (x(\tau)^\top Qx(\tau) + u(\tau)^\top Ru(\tau))d\tau = \frac{1}{2}\int_0^T x(\tau)^\top (Q + K^\top RK)x(\tau)d\tau$$
$$= \frac{1}{2}x_0^\top \underbrace{\left(\int_0^T e^{(A+BK)^\top\tau}(Q + K^\top RK)e^{(A+BK)\tau}d\tau\right)}_{\text{limite finito per T} \to \infty,\ \hat{\mathrm{P}}} x_0$$

Quindi, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{\frac{1}{2}x_0^\top P_T(0)x_0}_{\text{costo ottimo su [0,T]}} \leq \frac{1}{2}x_0^\top \left(\int_0^T e^{(A+BK)^\top\tau}(Q + K^\top RK)e^{(A+BK)\tau}d\tau\right)x_0$$

$$\leq \frac{1}{2}x_0^\top \left(\int_0^\infty e^{(A+BK)^\top\tau}(Q + K^\top RK)e^{(A+BK)\tau}d\tau\right)x_0 = \frac{1}{2}x_0^\top \hat{P}x_0 \quad \Rightarrow \quad P_T(0) \leq \hat{P}$$

$\Rightarrow$ stesso ragionamento per un generico tempo iniziale t, $P_T(t) \leq \hat{P}$

Unicità della soluzione (stabilizzante) di ARE

Supponiamo che esistano due matrici $\bar{P}_1$ e $\bar{P}_2$ che soddisfano

$$0 = \bar{P}_1 A + A^\top \bar{P}_1 + Q - \bar{P}_1 B R^{-1} B^\top \bar{P}_1, \quad A_{cl,1} = A - BR^{-1}B^\top \bar{P}_1, \quad \sigma(A_{cl,1}) \subset \mathbb{C}^-$$

$$0 = \bar{P}_2 A + A^\top \bar{P}_2 + Q - \bar{P}_2 B R^{-1} B^\top \bar{P}_2, \quad A_{cl,2} = A - BR^{-1}B^\top \bar{P}_2, \quad \sigma(A_{cl,2}) \subset \mathbb{C}^-$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima e sommando e sottraendo $\bar{P}_2 B R^{-1} B^\top \bar{P}_1$, otteniamo

$$0 = (\bar{P}_1 - \bar{P}_2) A_{cl,1} + A_{cl,2}^\top (\bar{P}_1 - \bar{P}_2)$$

$\Rightarrow$ si tratta di un'**equazione di Sylvester**

Equazioni di Sylvester

Un'equazione di Sylvester è un'equazione matriciale lineare nell'incognita X della forma

$$XA + BX = C$$

A, B, C matrici note di coefficienti. Quale che sia C, L'equazione ammette un'**unica** soluzione se e solo se $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$

$\Rightarrow$ nel nostro caso, l'unica soluzione è dunque $(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = 0$, ovvero $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$

Dopo aver dimostrato che il limite esiste ed è unico, consideriamo i limiti di **Funzione Valore** $V(x_0) = (1/2)x_0^\top \bar{P} x_0$ e **controllo** $u^\star = -R^{-1}B^\top \bar{P} x$

$\Rightarrow$ ora dobbiamo verificare che **effettivamente** $u^\star$ sia la soluzione ottima per il problema LQR su $[0, \infty)$

Per qualsiasi T vale

$$\frac{1}{2}x_0^\top \bar{P} x_0 - \frac{1}{2}x^\star(T)\bar{P}x^\star(T) = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x^\star(t)^\top Q x^\star(t) + u^\star(t)^\top R u^\star(t)\right) dt$$

Infatti

$$\frac{1}{2}x_0^\top \bar{P} x_0 - \frac{1}{2}x^\star(T)\bar{P}x^\star(T) = -\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[x^\star(t)^\top \bar{P} x^\star(t)]dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^T [(Ax^\star(t) + Bu^\star(t))^\top \bar{P} x^\star(t) + x^\star(t)^\top \bar{P} \underbrace{(Ax^\star(t) + Bu^\star(t))}_{\dot{x}^\star(t)}]dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T x^\star(t)^\top (Q + \bar{P}BR^{-1}RR^{-1}B^\top \bar{P}) x^\star(t) dt = J_T(u^\star)$$

$\Rightarrow$ $J_T(u^\star)$, costo di $u^\star$ su $[0, T]$

Ottimalità della soluzione di ARE (2/2)

Dato che $\bar{P} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad J_T(u^\star) \leq \frac{1}{2} x_0^\top \bar{P} x_0$, per ogni $T \quad \Rightarrow \quad J(u^\star) \leq \frac{1}{2} x_0^\top \bar{P} x_0$

Inoltre, scegliendo un qualsiasi altro controllo u abbiamo

$$\underbrace{\frac{1}{2} x_0^\top P_T(0) x_0}_{\text{costo ottimo su [0,T]}} \leq \overbrace{\frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt}^{\text{costo di u su [0,T]}}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt}_{\text{dato che R>0 e Q}\geq 0} = J(u)$$

per ogni T, e facendo il limite per T che tende ad infinito $\frac{1}{2} x_0^T \bar{P} x_0 \leq J(u)$

Quindi $J(u^\star) \leq J(u)$ per ogni $u \quad \Rightarrow \quad u^\star$ controllo ottimo su $[0, \infty)$

Infine, scegliendo proprio $u = u^\star \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} x_0^T \bar{P} x_0 \leq J(u^\star) \quad \Rightarrow \quad V(x_0) = \frac{1}{2} x_0^T \bar{P} x_0 = J(u^\star)$

Stabilità del sistema a ciclo chiuso (1/4)

Dimostriamo la stabilità asintotica utilizzando la funzione valore $V(x) = \frac{1}{2}x^\top \bar{P}x$ come funzione di Lyapunov. Dobbiamo quindi dimostrare che (C) la matrice $\bar{P}$ è definita positiva e (in teoria) (D) la derivata $\dot{V}$ è definita negativa

Per dimostrare **(C)**: supponiamo per assurdo che $\bar{P}$ sia *solo* semi-definita positiva

$\Rightarrow$ esiste una condizione iniziale $x_0 \neq 0$ tale che

$$\bar{P}x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0^\top \bar{P}x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^\infty \Big(x(t)^\top \underbrace{D^\top D}_{Q} x(t) + u(t)^\top R u(t) \Big) dt = 0$$

Dato che $R > 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = 0, \ \forall t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x_0$

Quindi

$$\int_0^\infty x(t)^\top D^\top D x(t) dt = x_0^\top \underbrace{\Big(\int_0^\infty e^{A^\top t} D^\top D e^{At} dt \Big)}_{\text{Gramiana di osservabilità}} x_0 = 0$$

Tuttavia la coppia (A, D) è osservabile per ipotesi, dunque la matrice Gramiana di Osservabilità è definita positiva e l'unica condizione x_0 compatibile sarebbe $x_0 = 0$

$\Rightarrow$ **contraddizione!**

Per dimostrare **(D)**: consideriamo la derivata della funzione valore lungo le traiettorie del sistema a ciclo chiuso

$$\dot{V} = x^\top \bar{P}(A - BR^{-1}B^\top \bar{P})x = \frac{1}{2}x^\top(\bar{P}A + A^\top \bar{P} - 2\bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P})x = -\frac{1}{2}x^\top Qx - \frac{1}{2}x^\top \bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P}x$$

Per ottenere $\dot{V} < 0, \forall x$, dovremmo avere

- $Q > 0$, **ma** per ipotesi $Q \geq 0$

  oppure

- $\bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P} > 0$, **ma**[1] $BR^{-1}B^\top$ ha rango pieno (n) solo se $m = n$ (tanti ingressi quanti stati, succede solo raramente...)

$\Rightarrow$ **in generale** possiamo concludere (per il momento) solo che $\dot{V} \leq 0$ (**stabilità semplice**)

e la stabilità asintotica? $\Rightarrow$ **Teorema di LaSalle**

[1] Ricordiamo che $rango(AB) \leq \min\{rango(A), rango(B)\}$ e che $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Teorema di LaSalle

Consideriamo un sistema autonomo[a] $\dot{x} = Ax$.

- Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto[b] *positivamente invariante*[c] per il sistema
- Sia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ tale che $\dot{V} \leq 0$ in Ω
- Sia E insieme dei punti in Ω tale che $\dot{V} = 0$
- Sia M il più grande insieme invariante contenuto in E

Allora, ogni soluzione converge ad M per $t \to \infty$

[a] senza nessun controllo u

[b] chiuso e limitato

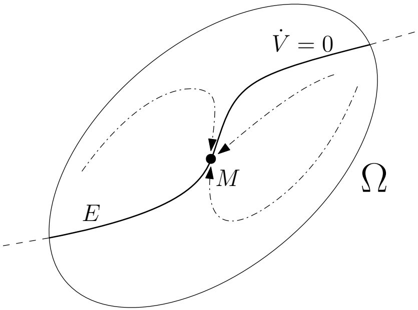
[c] se $x_0 \in \Omega$, allora $x(t) \in \Omega$ per ogni $t \geq 0$, dove $x(t)$ è la soluzione del sistema da x_0, $x(t) = e^{At}x_0$

Teorema di LaSalle

Consideriamo un sistema autonomo $\dot{x} = Ax$.

- Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme compatto *positivamente invariante* per il sistema
- Sia $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{C}^1$ tale che $\dot{V} \leq 0$ in Ω
- Sia E insieme dei punti in Ω tale che $\dot{V} = 0$
- Sia M il più grande insieme invariante contenuto in E

Allora, ogni soluzione converge ad M per $t \to \infty$



Applicazione del Teorema di LaSalle

Sappiamo che

- $V(x)$, V funzione quadratica, fissato un valore per la costante c gli insiemi di livello

$$\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$$

  sono ellissoidi (compatti)

- $\dot{V} = -\frac{1}{2}x^\top D^\top Dx - \frac{1}{2}u^\top Ru \leq 0$, $\forall x$, dunque

$$V(x(t)) \leq V(x(0)), \forall t \geq 0$$

Dunque, possiamo scegliere

$$\Omega \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq V(x_0)\}$$

$\Rightarrow$ compatto ed invariante!

Stabilità del sistema a ciclo chiuso (4/4)

Cerchiamo ora di caratterizzare l'insieme $E = \{x : \dot{V} = 0\}$, con $\dot{V} = -\frac{1}{2}x^\top D^\top Dx - \frac{1}{2}u^\top Ru$

Dato che R è definita positiva u deve essere nulla ($\Rightarrow \dot{x} = Ax$), quindi

$$\dot{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t)^\top D^\top Dx(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad Dx(t) = 0, \forall t$$

Dunque

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : De^{At}x = 0, \forall t\}$$

Ricordiamo che per l'ipotesi di osservabilità della coppia (A, D) dobbiamo poter distinguere le uscite di due qualsiasi condizioni iniziali x_1, x_2 ovvero

$$\exists t : De^{At}x_1 \neq De^{At}x_2, \forall x_1, x_2$$

Infine

- la condizione iniziale $x_0 = 0$ fornisce $De^{At}x_0 = 0$ per ogni t
- è l'unico stato con tale proprietà per l'osservabilità

$\Rightarrow$ $E = \{0\}$, $M = \{0\}$

Per il Teorema di LaSalle dimostriamo **attrattività** (tutte le soluzione convergono ad $M = \{0\}$), avevamo già dimostrato la **stabilità** $\Rightarrow$ **stabilità asintotica!**

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo LQ su orizzonte infinito

Prossimi passi:

- Studiamo tecniche che permettano di ottenere iterativamente la soluzione della ARE
- Consideriamo problemi di LQR in cui lo *stato desiderato* è diverso da $x = 0$