

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 9 Novembre 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1)$$

- (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u_0 = -x_1 - x_2$ e la matrice

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

possono essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman.

- (b) Iterare l'algoritmo fino a quando la legge di controllo $u_i = K_i x$ fornisce un costo strettamente minore di 1 a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [1, 0]^T$.

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{aligned} \min_{u_1} J_1(u_1, u_2) &= \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + 2u_1(t)^2 - u_2(t)^2) dt \right\}, \\ \min_{u_2} J_2(u_1, u_2) &= \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (-x(t)^2 + u_2(t)^2 - 2u_1(t)^2) dt \right\}, \end{aligned} \quad s.t. \quad \dot{x} = x + 2\sqrt{2}u_1 - u_2 \quad (2)$$

- (a) Si determini un equilibrio di Nash del gioco (2).

- (b) Si determini il valore del costo del giocatore 2 all'equilibrio di Nash a partire da uno stato iniziale pari ad 1.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{aligned} \min_{u_1} J_1(u_1, u_2) &= \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min_{u_2} J_2(u_1, u_2) &= \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{aligned} \quad s.t. \quad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2}u_2 \quad (3)$$

Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Discutere l'equazione Differenziale di Riccati e dimostrare che la soluzione $P(t)$ esiste per ogni $t \in [0, T]$.
5. Discutere il problema del filtraggio ottimo deterministico.