Nome e Cognome

Scrivere le risposte sul retro di questo foglio e non consegnare altro. NGR $\equiv$ Non Giustificare la Risposta

Esercizio 1 Si consideri la matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 3 & 0 & -2 & -1 \\ s2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ s3 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ s4 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii) : \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{4}$; $(iii) : \xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{3}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{1}{3}$;

$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = \frac{2}{9}, \xi_2^2 = \frac{4}{9}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{1}{3}$; $(jjj) : \xi_2^1 = 0,\ \xi_2^2 = \frac{5}{9}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{4}{9}$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**.

Rispettivamente: (i) $\frac{3}{4}$; (ii) $\frac{3}{4}$; (iii) $\frac{1}{3}$; (j) $\frac{1}{2}$; (jj) $-\frac{1}{3}$; (jjj) $\frac{4}{9}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare quali, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**.

Per il primo giocatore la strategia (iii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare equilibri di Nash? *Indicare quali, oppure scrivere che non si può individuarli.* **NGR**.

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**.

Il valore del gioco è $\frac{1}{3}$.

Esercizio 2 In un parlamento siedono 11 deputati: 3 di questi deputati sono del partito A, 2 del partito B, 2 del partito C, 2 del partito D, 2 del partito E. (N.B. nel seguito indichiamo con A, B, ... sia il partito che l'*insieme* dei deputati di quel partito). Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno 2 deputati di A, almeno 3 deputati di $B \cup E$, almeno 1 deputato di D e un qualunque numero (anche 0) di deputati di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun membro, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Ci sono due osservazioni da fare: 1) i deputati di C sono dummy player e quindi il loro valore di Shapley è 0; i deputati dei partiti B ed E possono essere riuniti in un unico partito $B \cup E$ con 4 deputati e una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno 2 deputati di A, almeno 3 deputati di $B \cup E$, almeno 1 deputato di D (e un qualunque numero di deputati di C). I calcoli erano un po' lunghi, a titolo di esempio mostriamo il valore di A:

$$S_A(v) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot 5!\cdot 5! + \left(\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}\right)\cdot 6!\cdot 4!}{11!} +$$

$$\frac{\left(\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 7!\cdot 3!}{11!} +$$

$$\frac{\left(\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2} + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 8!\cdot 2!}{11!} +$$

$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{2}\cdot 9!}{11!}$$

procedendo in modo simile si poteva calcolare il valore di $B \cup E$ e poi utilizzando l'assioma della razionalità collettiva il valore di D.

Esercizio 3 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = (w_A^1, w_A^2) = (2,6)$ (risp. $w_B = (w_B^1, w_B^2) = (5,3)$) e di una funzione di produzione $f^1(w_A) = 4w_A^1 + 4w_A^2$ (risp. $f^2(w_B) = 3w_B^1 + 4w_B^2$). Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene e determinare un'imputazione nel nucleo di tale gioco. *Giustificare la risposta illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

Calcoliamo innanzitutto l'utilità delle coalizioni. Banalmente si ottiene: $v(\{A\}) = 32$ e $v(\{B\}) = 27$. Per calcolare $v(\{A,B\})$ dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$v(\{A,B\}) = \max 4z_A^1 + 4z_A^2 + 3z_B^1 + 4z_B^2$ s.t. $z_A^1 + z_B^1 = 7$; $z_A^2 + z_B^2 = 9, z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$, ovvero:
$v(\{A,B\}) = \max 64 - z_B^1$ s.t. $0 \leq z_B^1 \leq 7; 0 \leq z_B^2 \leq 9$.

Calcolando il valore di $64 - z_B^1$ sui 4 vertici della regione ammissibile $(z_A^1, z_B^1) = (0,0)$, $(7,0)$, $(0,9)$, $(7,9)$ si osserva che i punti di massimo sono (0,0) e (7,0) per un valore della funzione obiettivo di 64.

Quindi il nucleo del gioco è il seguente: $\{\alpha \in \mathcal{R}^2 : \alpha(1) \geq 32; \alpha(2) \geq 27; \alpha(1) + \alpha(2) = 64\}$. Un punto nel nucleo è per esempio (34, 30).

Esercizio 4 Due aziende concorrenti A e B decidono di offrire sul mercato un nuovo servizio. Il nuovo servizio offerto dalle due aziende è identico e 19000 consumatori decideranno se rivolgersi ad A o B come segue:

- 2000 consumatori sono fedeli a A e acquisteranno il servizio da A qualunque sia il prezzo che A decide;
- 5000 consumatori sono fedeli a B e acquisteranno il servizio da B qualunque sia il prezzo che B decide;
- 5000 consumatori vogliono acquistare il servizio in ogni caso e lo acquisteranno dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore: questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo;
- 4000 consumatori vorrebbero acquistare il servizio ma non sono disposti a spendere più di 40 euro: questi consumatori quindi acquisteranno il servizio dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore, ma solo se questo prezzo è non superiore a 40 euro. Di nuovo, questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo non superiore a 40 euro;
- 3000 consumatori vogliono acquistare il servizio in ogni caso e tendenzialmente preferiscono A: quindi acquisteranno il servizio da A almeno che il prezzo praticato di B non sia inferiore di almeno 10 euro (quindi inferiore di 10 euro o di più di 10 euro) al prezzo praticato da A: in questo caso lo acquisterebbero da B.

Ciascuna delle due aziende può decidere di offrire il servizio a tre prezzi diversi: 40 euro, 40+α euro, 60 euro, dove α è un parametro razionale tale che $0 < \alpha < 10$ (fate attenzione al minore stretto $<$). È possibile che i giocatori scelgano lo stesso prezzo.

Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

La matrice dei payoff in forma di utilità per i due giocatori è la seguente (tutti i termini andrebbero in realtà moltiplicati per 1000):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & 40 & 40+\alpha & 60 \\ 40 & 380,380 & 560,200+5\alpha & 560,300 \\ 40+\alpha & 200+5\alpha,560 & 300+7.5\alpha,300+7.5\alpha & 400+10\alpha,300 \\ 60 & 120,680 & 120,520+13\alpha & 450,450 \end{pmatrix}$$

A questo punto analizziamo questa matrice al variare del parametro α procedendo come al solito (ricordiamo che $0 < \alpha < 10$). Otteniamo che: 1) per entrambi i giocatori giocare 40 è una strategia dominante; 2) lo stato $(40,40)$ è un equilibrio di Nash per tutti i valori ammissibili di α ($0 < \alpha < 10$) ed è l'unico; 3) l'equilibrio di Nash $(40,40)$ non è ottimo secondo Pareto perché dominato dallo stato $(60,60)$.