# PROGETTO di RETI

#586

$$z^*_{RL} = \min \sum_{i\in F} f_i \cdot y_i + \sum_{j\in N} \sum_{i\in F} d_{ij}\, x_{ij}$$

$\alpha_j$ $\quad \sum_{i\in F} x_{ij} \geq 1 \quad \forall j\in N$

$\beta_{ij}$ $\quad y_i - x_{ij} \geq 0 \quad \forall j\in N, i\in F$

$y_i, x_{ij} \geq 0$

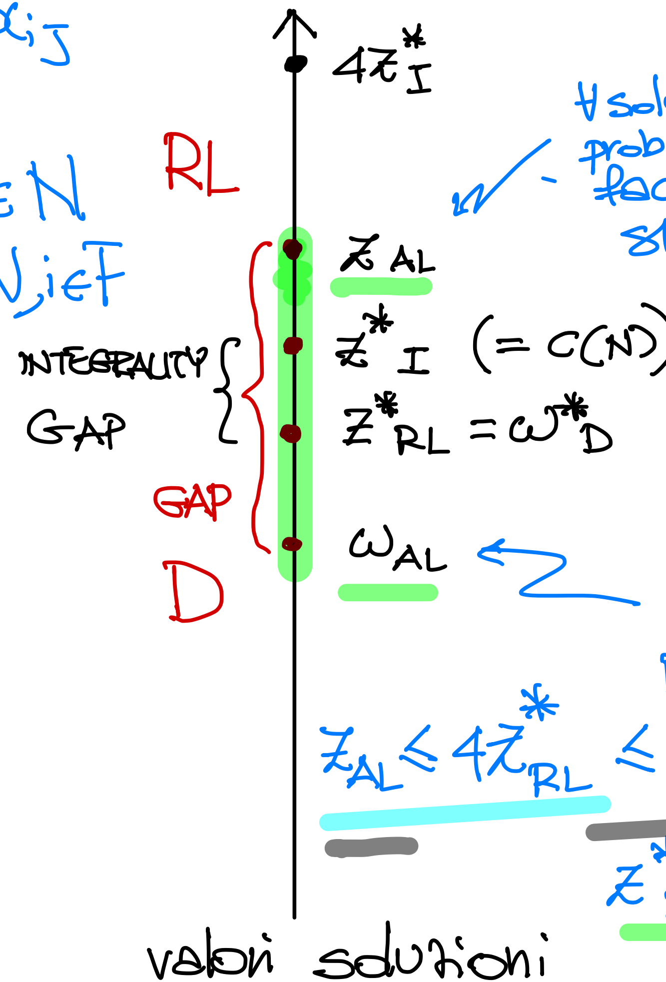
$$w^*_D = \max \sum_{j\in N} \alpha_j$$

(D)

$y_i$ $\quad \sum_{j\in N} \beta_{ij} \leq f_i \quad i\in F$

$x_{ij}$ $\quad \alpha_j \leq \beta_{ij} + d_{ij} \quad i\in F,\ j\in N$

$\alpha_j, \beta_{ij} \geq 0$




∀ soluzione problema facility slide

$z_{AL} \leq 4 z^*_I$

∀ soluzione ammis. per D

$z_{AL} \leq 4 z^*_{RL} \leq 4 z^*_I$

$z^*_{RL} \leq z^*_I$

# ALGORITMO LP ROUNDING

1. RISOLVIAMO ALL'OTTIMO RL & D → $(x^*, y^*)$, $(\alpha^*, \beta^*)$

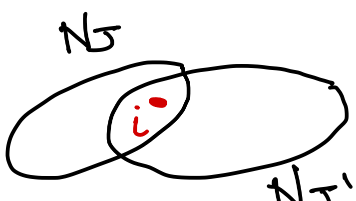
   PER OGNI $j \in N$, SIA $N_j = \{ i : x_{ij} > 0 \}$

2. SCEGLIAMO $j \in N$ con il minimo $\alpha_j$
   - APRIAMO LA FACILITY di costo minore in $N_j$
   - ASSEGNIAMO AD i il cliente j e tutti i clienti $j' \in N$:

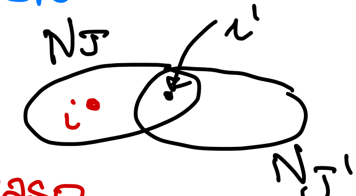
$$N_j \cap N_{j'} \neq \emptyset$$

$$\alpha_j = d_{ij} + \beta_{ij}$$

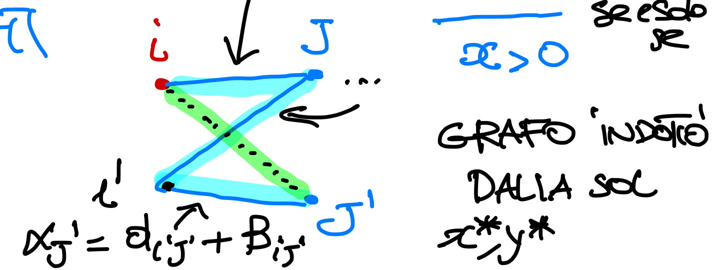
3. RIPETI PASSI PRECEDENTI FINO A CHE TUTTI I CLIENTI SONO ASSEGNATI



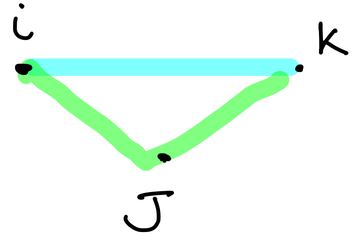

1 caso

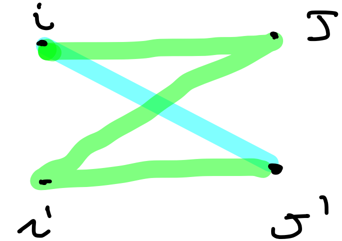



2 caso




GRAFO 'INDOTTO' DALLA SOL $x^*, y^*$




$$d_{ik} \le d_{ij} + d_{jk}$$

$$d_{ij'} \le d_{ij} + d_{ji'} + d_{i'j'}$$

HYP METRICA

- l'algoritmo svolge $h \ge 1$ iterazioni e ad ogni iterazione seleziona un cliente $j_h$ al passo 2

Per costruzione $N_{j_1} \cap N_{j_2} = \emptyset$ ... $N_{j_l} \cap N_{j_m} = \emptyset$

$\forall\, 1 \le j_l, j_m \le h,\ j_l \ne j_m$

• generica iterazione

passo 2) scelto $J \in N$ e aperto $i \in N_J$ con costo $f_{MIN}$

$$f_{MIN} \le f_{MIN} \cdot \sum_{i \in N_J} x^*_{iJ} \le f_{min} \cdot \sum_{i \in N_J} y^*_i = \sum_{i \in N_J} f_{min} y^*_i \le \sum_{i \in N_J} f_i y^*_i$$

• $f_{i_1}$ $\quad J_1 \quad i_1 \in N_{J_1} \rightarrow f_{i_1} \le \sum_{i \in N_{J_1}} f_i y^*_i$

• $f_{i_2}$ $\quad J_2 \quad i_2 \in N_{J_2} \rightarrow f_{i_2} \le \sum_{i \in N_{J_2}} f_i y^*_i$

$N_{J_1}, N_{J_2}, \dots, N_{J_n}$ sono disgiunti

• $f_{i_n}$ $\quad J_n \quad i_n \in N_{J_n} \rightarrow f_{i_n} \le \sum_{i \in N_{J_n}} f_i y^*_i$

$$f_{i_1} + f_{i_2} + \dots f_{i_n} \le \sum_{i \in F} f_i y^*_i$$

COSTO SOLUZIONE PRODOTTA DALL'ALGORITMO $\leq 4 Z^*_{RL}$

COSTO SETUP FACILITY + COSTO CONNESSIONE

COSTO SET UP FACILITY $\leq \sum_{i \in F} f_i \, y_i^* \leq \sum_{i \in F} f_i \, y_i^* + \sum_{i \in F} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^* = Z^*_{RL}$

COSTO CONNESSIONE $\leq 3 \sum_{j \in N} \alpha_j^* = 3 \omega_D^* = 3 Z^*_{RL}$

---

VARIAZIONE

COSTO SET UP $\leq \sum_{i \in F} f_i y_i^*$ $\Rightarrow$ COSTO SET UP + COSTO CONNES. $\leq 2 \omega_D^* + Z^*_{RL} = 3 Z^*_{RL}$

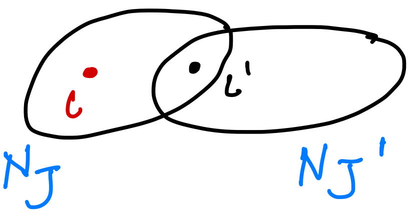
COSTO CONNESSIONE $\leq 2 \sum_{j \in N} \alpha_j^* + \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^*$

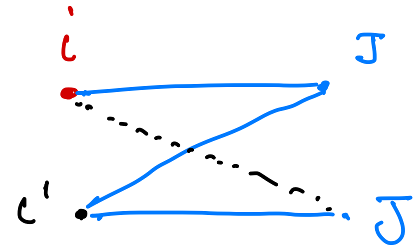
cliente $j'$, supponiamo sia assegnato a $i \in F$

- $x^*_{ij'} > 0 \implies$ (condiz. complem.) $\alpha^*_{j'} = \beta^*_{ij'} + d_{ij'} \Rightarrow \alpha^*_{j'} \geq d_{ij'}$

$$\implies 3\alpha^*_{j'} \geq d_{ij'}$$

- $x^*_{ij'} = 0$



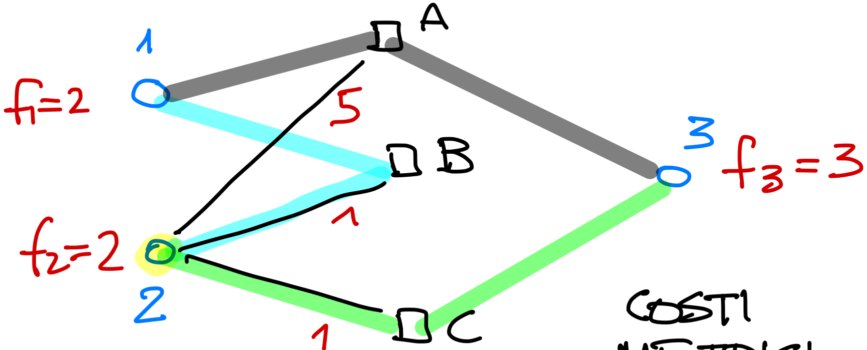




$$d_{ij'} \leq d_{ij} + d_{i'j} + d_{i'j'} \leq \alpha^*_j + \alpha^*_j + \alpha^*_{j'} \leq \alpha^*_{j'} + \alpha^*_{j'} + \alpha^*_{j'} = 3\alpha^*_{j'}$$

$\alpha^*_j \geq d_{ij} \Leftarrow \alpha^*_j = \beta^*_{ij} + d_{ij}$

$\alpha^*_j \geq d_{i'j} \Leftarrow \alpha^*_j = \beta^*_{i'j} + d_{i'j}$

$\alpha^*_{j'} \geq d_{i'j'} \Leftarrow \alpha^*_{j'} = \beta^*_{i'j'} + d_{i'j'}$




COSTI METRICI

- SCEGLIAMO C
  - APRIRE FACILITY COSTO MINORE IN $N_C \Rightarrow$ APRIAMO 2
  - ASSEGNIAMO C A 2 E INOLTRE ASSEGNIAMO A 2 TUTTI i $j \in N$: $N_j \cap N_C \neq \emptyset \Rightarrow$ ASSEGNIAMO A, B A 2

$\Downarrow$

COSTO SOLUZIONE 9

$$y^*_1 = y^*_2 = y^*_3 = 1/2$$

$$x^*_{1A} = x^*_{3A} = x^*_{1B} = x^*_{2B} = x^*_{2C} = x^*_{3C} = 1/2$$

$$\alpha^*_A = 3.5$$
$$\alpha^*_B = 2.5$$
$$\alpha^*_C = 1.5$$

$$N_A = \{1, 3\}$$
$$N_B = \{1, 2\}$$
$$N_C = \{2, 3\}$$

FATTORE APPROSSIM. VALUTATO A POSTERIORI

$$\frac{9}{7.5} = \frac{6}{5} \quad \Longleftarrow \quad 9 \le 4 \cdot 7.5 \ \checkmark$$

# ALGORITMO LP ROUNDING RANDOMIZZATO

1• RISOLVIAMO ALL'OTTIMO RL & D $\rightarrow (x^*, y^*), (\alpha^*, \beta^*)$

PER OGNI $j \in N$, SIA $N_j = \{ i : x^*_{ij} > 0 \}$

2• SCEGLIAMO $j \in N$ con il minimo $\alpha^*_j + D_j$

$\Rightarrow$

- APRIAMO LA FACILITY $i \in N_j$ CON PROBABILITÀ $x^*_{ij}$
- ASSEGNIAMO AD $i$ il cliente $j$ e tutti i clienti $j' \in N$:

$$N_j \cap N_{j'} \neq \emptyset$$

3• RIPETI PASSI PRECEDENTI FINO A CHE TUTTI I CLIENTI SONO ASSEGNATI

$$D_j = \sum_{i \in F} d_{ij} x^*_{ij}$$

N.B. ALL'OTTIMO $\sum_{i \in F} x^*_{ij} = \sum_{i \in N_j} x^*_{ij} = 1$

qual è il costo atteso di set up della facility che apro quando seleziono cliente J

$$\sum_{i \in N_J} f_i \, x_{iJ}^* \leq \sum_{i \in N_J} f_i \cdot y_i^* \quad \checkmark$$

COSTO CONNESSIONE ATTESO

$$\leq 2\sum_{j\in N}\alpha_j^* + \sum_{j\in N} d_{ij}x_{ij}^* \leq 2\sum_{j\in N}\alpha_j^* + D_j =$$

$$= \sum_{j\in N} 2\alpha_j^* + D_j$$

$$\sum_{i\in N_j} d_{ij'} \cdot x_{ij}^* \leq \sum_{i\in N_j}(d_{ij}+d_{i'j}+d_{i'j'})x_{ij}^* = \sum_{i\in N_j} d_{ij}x_{ij}^* + \sum_{i\in N_j} d_{i'j}x_{ij}^* + \sum_{i\in N_j} d_{i'j'}x_{ij}^* =$$

$$= \sum_{i\in N_j} d_{ij}\cdot x_{ij}^* + d_{i'j}\sum_{i\in N_j} x_{ij}^* + d_{i'j'}\sum_{i\in N_j} x_{ij}^* =$$

$$= D_j + d_{i'j} + d_{i'j'} \leq D_j + \alpha_j + \alpha_{j'} \leq$$

$$\leq D_{j'} + \alpha_{j'} + \alpha_{j'}$$

COSTO CONNESSIONE ATTESO CLIENTE J' CHE VIENE ASSEGNATO NELLA ITERAZIONE IN CUI SELEZIONO J CHE MINIMIZZA $\alpha_j + D_j$ (possibilmente $j = j'$)