Teoria dei Giochi – 20 Settembre 2019

Cognome, Nome, Numero di Matricola, Email:

Non è richiesto di giustificare la risposta ≡ NGR.

Esercizio 1. (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,8,4,3\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{2,9,5,7\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Il primo giocatore vince un euro se $x < y-1$ oppure se $x = y+1$; analogamente, il secondo giocatore vince un euro se $y < x-1$ oppure se $y = x+1$. Si consideri il gioco in *strategia pura*.

1.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

SoluzioneRispettivamente: giocare 3 e giocare 2

1.2 Indicare tutte le strategie conservative per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie conservative per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Per il primo giocatore 3, per il secondo giocatore tutte.

1.3 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione (3, 2), (3, 5), (3, 7), (3, 9),

1.4 Indicare il valore del gioco, oppure spiegare perché non è possibile individuarlo.

Soluzione Valore -1

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 8 deputati. Di questi, 3 provengono da una stessa regione A, 3 provengono da una stessa regione B, uno proviene da una regione C e uno proviene da una regione D. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore votano almeno 7 deputati qualsiasi oppure a suo favore votano esattamente 6 deputati, ma in quest ultimo caso devono essere: due deputati di A, due deputati di B, il deputato di C e il deputato di D.

Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, riportando i calcoli svolti. Se non è possibile determinarlo, spiegare perché.

Soluzione Il gioco può’ essere formulato come un gioco cooperativo, perché non esistono due coalizioni disgiunte entrambe a valore 1.

Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_D(v) = \frac{\text{\# permutazioni } p \text{ tali che: la coalizione } A_p^D \text{ vince e la coalizione } A_p^D \setminus D \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato proveniente dalla regione D. Le permutazioni in cui A_p^i vince,$A_p^i \setminus i$ perde sono sono quelle in cui: il deputato si trova in sestaa posizione e nelle prime due ci sono due deputati di A, due deputati di B e un deputato di C; il deputato si trova in settima posizione.

Quindi il valore del deputato è

$$S_D(v) = S_C(v) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5! \cdot 2! + 7!}{8!}$$

.

Per quanto riguarda gli altri deputati il loro valore è:

$$S_A(v) = S_B(v) = \frac{1 - 2S_D(v)}{8}.$$

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) È dato un grafo bipartito $G(X \cup Y, E)$ con vertici $X \cup Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$ e spigoli $E = \{x_1y_1, x_1y_2, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_3\}$. Siano $e \in E$ un qualunque spigolo e $q \in X \cup Y$ un qualunque vertice: se q è un estremo di e, diciamo che *e copre q* e che *q copre e*.

Considera il gioco competitivo con 2 giocatori: il giocatore A controlla l'insieme degli spigoli E; il giocatore B, che controlla l'insieme dei vertici $X \cup Y$. Le strategie a disposizione di A sono tutti i sottoinsiemi $M \subseteq E$ di spigoli; mentre le strategie a disposizione di B sono tutti i sottoinsiemi $Q \subset X \cup Y$ con al più 3 vertici, ovvero tali che $|Q| \leq 3$.

Il payoff in forma di utilità è determinato in questo modo: sia $M \subseteq E$ una strategia scelta dal primo giocatore e sia $Q \subseteq X \cup Y$, $|Q| \leq 3$, una strategia scelta dal secondo giocatore. Indichiamo rispettivamente con $a \geq 0$ il numero di spigoli di M che non sono coperti da alcun vertice in Q e con $b \geq 0$ il numero di vertici di Q che non sono coperti da alcuno spigolo in M:

(1) se $a > b$ oppure $a = b$ e $|M| < |Q|$, il payoff di A è 1;

(2) se $a < b$ oppure $a = b$ e $|M| > |Q|$ il payoff di A è -1;

(3) se $a = b$ e $|M| = |Q|$ è il payoff di A è 0.

Si consideri il gioco in strategia pura.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Per il primo giocatore ce ne sono due: $\{x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3\}$ e $\{x_1y_1, x_2y_2, x_4y_3\}$. Per il secondo giocatore ce ne sono tre: $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_1, y_2, y_3\}$ e $\{y_1, y_2, y_3\}$

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Soluzione Gli equilibri di Nash in questo caso sono tutti e soli gli incroci delle strategie debolmente dominanti, quindi sono 6.

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo, dove y è un numero razionale qualsiasi (non necessariamente intero!):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & D & E & F \\ A & 6 & 6+4y & 8 \\ B & 8-2y & 10 & 6 \\ C & 4 & 14-2y & 2 \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

4.1 Indicare quali sono, al variare di y, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono) e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). **NGR**

Per il primo giocatore C è una strategia dominante per $y = 2$. Per il secondo giocatore E è una strategia dominante per $\frac{1}{2} \leq y \leq 5$.

4.2 Indicare quali sono, al variare di y, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). **NGR**

(A, E) per $y \in [\frac{1}{2}, 1]$; (B, E) per $y \in [1, 2]$; (C, E) per $y \in [2, 5]$.

4.3 Porre $y = 6$. Indicare quali sono, in questo caso, le strategie conservative per il primo e per il secondo giocatore (se ve ne sono). **NGR**

C per il primo giocatore che nel caso peggiore paga 4; E e F per il secondo giocatore che nel caso peggiore vince 2.

4.4 Assumere nuovamente che $y = 6$ e considerare il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, per ognuna delle affermazioni seguenti dire se essa è vera o falsa **NGR**:

1 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 1. ☐ VERO ■ FALSO

2 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 3. ■ VERO ☐ FALSO

3 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 4. ■ VERO ☐ FALSO

4 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 5. ☐ VERO ■ FALSO

5 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 8. ☐ VERO ■ FALSO

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ S1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ S2 & -9 & -8 & 0 & -9 \\ S3 & -0 & -2 & 0 & -3 \\ S4 & 9 & 5 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per $G1$ e $G2$:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii) : \xi_1^1 = \frac{1}{3}, \xi_1^2 = \frac{2}{3}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = 0$; $(iii) : \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \frac{2}{3}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{1}{3}$;

$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = \frac{1}{3}, \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = \frac{2}{3}, \xi_2^4 = 0$; $(jjj) : \xi_2^1 = \xi_2^2 = \xi_2^3 = \frac{1}{3}, \xi_2^4 = 0$.

5.1. Per ciascuna strategia, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Soluzione Rispettivamente: (i) $\frac{1}{4}$; (ii) $-\frac{2}{3}$; (iii) -3; (j) $\frac{13}{2}$; (jj) 3; (jjj) $\frac{17}{3}$.

5.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non è possibile individuarne.* **NGR**

Soluzione (iii) e (jj).

5.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

Soluzione $\{(iii), (jj)\}$.

5.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Soluzione Il valore del gioco misto è -3.