FOGLIO ESERCIZI

ES 1

PER TROVARE CONVESSITÀ APPLICO:

- ALGORITMO

① APPLICO CRITERIO DEI MINORI DI NORD OVEST
- SODDISFATTO → CONVESSA
- TROVO UN DETERMINANTE < 0 → NON CONVESSA POICHÉ ≤ 0
- TROVO UN MINORE $= \emptyset$
  ↳ ② APPLICO CRITERIO MINORI PRINCIPALI

- MINORI DI NORD OVEST

ELIMINO LE ULTIME $n-k$ RIGHE E COLONNE DI UNA MATRICE E:

$Q > 0 \longleftrightarrow$ TUTTI I MINORI DI N-O DI $k=1,\dots,n$ HANNO $\det > 0$

esempio:

$$Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

per $k=1$ avremo $n-k=2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to \det = 5 > 0$$

per $k=2$ avremo $n-k=1$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to \det = 15-2 = 13 > 0$$

per $k=3$ avremo $n-k=0$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \to \det(5+48) = 53$$

TUTTI > 0 ALLORA:

$Q > 0 \to$ DEF POSITIVA

- MINORI PRINCIPALI

ELIMINO LE $n-k$ RIGHE E LE CORRISPONDENTI COLONNE ALLORA

$Q \geq 0 \longleftrightarrow$ TUTTI I MINORI PRINCIPALI HANNO $\det \geq 0$

esempio:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

per $k=1$ avremo $n-k=2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 5 \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 3 \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 2$$

per $k=2$ avremo $n-k=1$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 6 \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 6 \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \to \det = 6$$

eccetera...

ESEMPIO - PRATICO:

$$f(x) = 7x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_1 - x_2 + 2x_3$$

ALLORA CALCOLO IL GRADIENTE E L'HESSIANA:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 14x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4 \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 - 1 \\ 6x_3 + 8x_1 + 2x_2 + 2 \end{bmatrix} \quad e \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

POSSIAMO QUINDI STUDIARE IL SEGNO:

$$\begin{vmatrix} 14 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow det = 14 \qquad \begin{vmatrix} 14 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} \rightarrow det = 10 \qquad \begin{vmatrix} 14 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

ALLORA IL CRITERIO È RISPETTATO:

$Q = \nabla^2 f > 0 \longrightarrow f$ STRETTAMENTE CONVESSA

ESERCIZIO

$$\begin{cases} \min \; x_1^2 + (x_2+2)^2 \\ g_1: \; x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ g_2: \; x_2 \ge 0 \\ g_3: \; -x_1 + x_2 \le 2 \end{cases} \longrightarrow$$

① $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2(x_2+2) \end{bmatrix}$

CALCOLA:
- GRADIENTE
- HESSIANA

$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \ge 0$ • CONVESSA

②

CONTROLLI CONVESSITÀ INSIEME: CONTROLLI GRADIENTE E HESSIANA DEI VINCOLI

- g_2 e $g_3 \longrightarrow$ SONO LINEARI $\longrightarrow$ CONVESSI

PER g_1 BISOGNA CALCOLARE ∇f e $\nabla^2 f$:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \qquad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0 \rightarrow \text{CONVESSO}$$

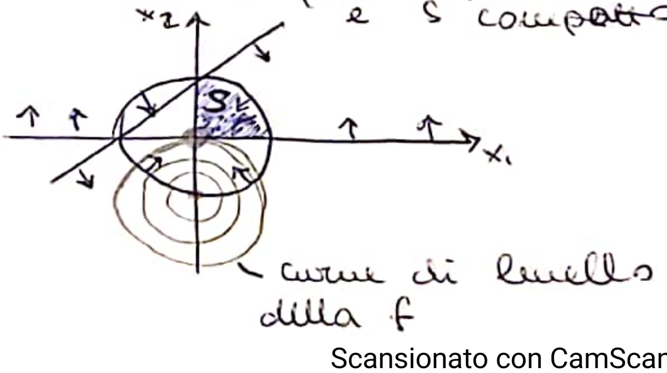
ALLORA

f CONVESSA

S CONVESSO $\longrightarrow$ PROB. CONVESSO $\longrightarrow \exists$ MINIMO GLOBALE

③

POTEVAMO ANCHE UTILIZZARE WEIERSTRASS (poiché f è ~~lineare~~ continua e S compatto) OPPURE GRAFICAMENTE:



CONDIZIONI DI OTTIMO

ES. 2

$$\begin{cases} \min f(x) \\ Ax \leq b \end{cases} \rightarrow d \text{ AMMISSIBILI: } d \in \mathbb{R}^n \rightarrow a_i d \leq 0, \forall i \in I(\bar{x})$$

dove $I(x^*) = \{i=1,\dots,m : a_i^T \bar{x} = b_i\}$

SE INVECE IL VINCOLO E' DI UGUAGLIANZA:

$u_i^T x = c_i \quad$ per $i = 1, \dots, p$

E QUINDI d SARA' AMMISSIBILE SE:

$u_i^T d = 0$

- VINCOLI DI BOX

$$\begin{cases} \min f(x) \\ l_i \leq x_i \leq u_i \end{cases}$$

DOVE:

$f \in C^1$ e x^* MINIMO LOCALE $\xrightarrow{d \text{ AMMISSIBILE}}$ $\dfrac{\partial f(x^*)}{\partial x_i} = \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x^* = l_i \\ = 0 & \text{se } l_i \leq x^* \leq u_i \\ \leq 0 & \text{se } x^* = u_i \end{cases}$

ESERCIZIO $\longrightarrow$ OTTIMO

$$\begin{cases} \min (x_1-1)^2 + x_2 \\ (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 \geq 0 \rightarrow -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ INSIEME CHIUSO E COMPATTO $\rightarrow$ $\exists!$ SOL. WEIERSTRASS

POSSIAMO UTILIZZARE LE CONDIZIONI KKT IN MODO TALE DA OTTENERE TUTTI I CANDIDATI ALL'OTTIMO:

① LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L}(x,\lambda,\mu) = (x_1-1)^2 + x_2 + \mu\left[(x_1-1)^2 + x_2^2 - 1\right] - \lambda x_1$$

② ANNULLAMENTO LAGRANGIANA:

$$\nabla_{x_1}\mathcal{L}(\dots) = 2(x_1-1) + 2\mu(x_1-1) - \lambda = 0$$

$$\nabla_{x_2}\mathcal{L}(\dots) = 1 + 2\mu x_2$$

③ IMPONIAMO LA COMPLEMENTARIETA': $(\lambda_i g_i(x) = 0)$

$$\lambda x_1 = 0 < \begin{matrix} \lambda = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

④ ALLORA IMPONIAMO $\lambda \geq 0$ e $x_1 = 0$

⑤ ALL'AMMISSIBILITA' POI: $(g(x) \leq 0 \quad h(x) = 0)$

$x_1 \geq 0$

$(x_1-1)^2 + x_2^2 = 1$

⑥ SOSTITUIAMO $\lambda \geq 0$ e $x_1 = 0$:

$\cancel{1} + x_2^2 = \cancel{1} \rightarrow x_2 = 0$

E QUINDI:

$x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ CHE SOSTITUITO $\nabla \mathcal{L} = 0 \longrightarrow \begin{matrix} -2 - 2\mu - \lambda = 0 \\ 1 = 0 \rightarrow \underline{\text{IMP!}} \end{matrix}$

QUINDI NON RIESCO A SODDISFARE LE KKT.

ALLORA CONTROLLIAMO LA REGOLARITA' PER POTER UTILIZZARE LICQ?

$$\nabla h = \begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2x \end{bmatrix} \rightarrow \nabla h\binom{0}{0} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \nabla g = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ALLORA LE AFFIANCO:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow rk = 1 \rightarrow \text{NO LINEARMENTE INDIPENDENTI}$$

QUINDI NON SODDISFO LE LICQ.
UTILIZZIAMO ALLORA LE CONDIZIONI DI FRITZ-JOHN.
IMPONIAMO SUBITO $\lambda_0 = 0$ (perchè $\lambda_0 = 1$ già visto) ALLORA:

- $\nabla \mathcal{L}_{x_1} = \lambda_0 2(x_1-1) + 2\mu(x_1-1) - \lambda = 0$
- $\nabla \mathcal{L}_{x_2} = \lambda_0 + 2\mu x_2 = 0$
- $\lambda \cdot x_1 = 0 < \begin{matrix} \lambda = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$
- $\lambda, \lambda_0 \geq 0$
- $(x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \quad , \quad x_1 \geq 0$

ALLORA VERIFICHIAMO SE IMPONENDO $\lambda_0 = 0$ e $x = \binom{0}{0}$ TROVO λ E μ, ALLORA:

$$\begin{matrix} -2\mu - \lambda = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \rightarrow \lambda = -2\mu \geq 0 \rightarrow \begin{matrix} \lambda > 0 \\ \mu \neq 0 \end{matrix}$$

TROVANDO COSÌ I MOLTIPLICATORI $\rightarrow \binom{0}{0}$ VERIFICA FJ.

(7) IMPONIAMO $\lambda = 0$ E $x_1 > 0$ ALLORA APPLICHIAMO KKT:

- $\nabla \mathcal{L}_{x_1} = 2(x_1-1) + 2\mu(x_1-1) = 0$ *
- $\nabla \mathcal{L}_{x_2} = 1 + 2\mu x_2 = 0$
- $(x_1-1)^2 + x_2^2 = 1 \quad , \quad x_1 \geq 0$

POSSIAMO RICAVARE:

$(x_1-1)^2 = 1 - x_2^2$

ALLORA DA * POSSO SCRIVERE:

$$(x_1-1)(2+2\mu) = 0 < \begin{matrix} x_1 = 1 \\ \mu = -1 \end{matrix}$$

SE $x_1 = 1$ ALLORA:

$$x_2^2 = 1 < \begin{matrix} x_2 = +1 \rightarrow \binom{1}{1} \rightarrow 1 + 2\mu = 0 \rightarrow \mu = -\frac{1}{2} \quad \text{OK} \\ x_2 = -1 \rightarrow \binom{1}{-1} \rightarrow 1 - 2\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{1}{2} \quad \text{OK} \end{matrix}$$

OTTENENDO COSÌ ALLE SOLUZIONI (in realtà manca un pezzo) E PER SCEGLIERE L'OTTIMA BASTERÀ SOSTITUIRE E GUARDARE AL VALORE OTTENUTO.

ESEMPIO: IPERPIANO AMMISSIBILE

ES. 3

DATO IL TS:

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, -1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, -1 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, -1 \right) \right\}$$

QUINDI I DUE INSIEMI SARANNO:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} \quad e \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

E DATA L'EQUAZIONE DI UN IPERPIANO:

$$\hat{w}^T x + \hat{b} = 2x_1 + x_2 - 10$$

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \|\hat{w}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

POSSIAMO SCRIVERE QUINDI, PER A:

$$d\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{|\hat{w}^T x + b|}{\|\hat{w}\|} = \frac{|10+5-10|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

$$d\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{|14+4-10|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$d\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{|10+7 \;\; 10|}{\sqrt{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

$$\hat{x}_i = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \hat{d}_i = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

PER B, INVECE:

$$d\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$d\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$d\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\hat{x}_j = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{d}_j = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

DI CONSEGUENZA SCRIVEREMO:

$$P(\hat{w}, \hat{b}) = \min\{d_i, d_j\} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

POSSIAMO QUINDI CALCOLARE α E β:

$$\begin{cases} \alpha \hat{w}^T x_i + \beta = 1 \\ \alpha \hat{w}^T x_j + \beta = -1 \end{cases} \longrightarrow \alpha \hat{w} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

QUINDI AVREMO:

$$\alpha \hat{w}^T \hat{x}_i + \beta = (2\alpha \quad \alpha) \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta = 1 \rightarrow 10\alpha + 5\alpha + \beta = 1 \rightarrow 15\alpha + \beta = 1$$

E ANCORA:

$$\alpha \hat{w}^T \hat{x}_j + \beta = (2\alpha \quad \alpha) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta = -1 \rightarrow 9\alpha + \beta = -1$$

CHE POSSO METTERE A SISTEMA:

$$\begin{cases} 15\alpha + \beta = 1 \\ 9\alpha + \beta = -1 \end{cases} \rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \quad \text{che è} < 1$$

MENTRE:

$$\beta = 1 - 15\alpha = -4$$

ALLORA AVREMO:

$$\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{EQUAZIONE IPERPIANO: } \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 4 = 0$$

DOVE IL MARGINE SARÀ:

$$P(\overline{\omega}, \overline{b}) = \frac{1}{\|\overline{\omega}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{\hat{d}_i + \hat{d}_j}{2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\|\overline{\omega}\| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ESERCIZIO: IPERPIANO OTTIMO

DATO UN TS DEL TIPO:

$$TS = \left\{\left(\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, 1\right), \dots, \left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, -1\right)\right\}$$

$A = \left\{\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, \text{tutti quelli con } 1\right\}$

$B = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \text{tutti quelli con } -1\right\}$

POSSIAMO QUINDI RISOLVERE:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 \\ \omega_1 \cdot 5 + \omega_2 \cdot 5 + b \geq 1 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_1 \cdot 3 + \omega_2 \cdot 3 + b \leq -1 & \lambda_6 \end{cases} *$$

APPLICHIAMO ALLORA LE KKT (necessarie e sufficienti):

$$\mathcal{L}(\omega_1, \omega_2, \lambda_1, \dots, \lambda_6) = \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{1}{2}\omega_2^2 - \lambda_1(\omega_1 \cdot 5 + \omega_2 \cdot 5 + b - 1) - \dots$$

$$\dots + \lambda_6(3\omega_1 + 3\omega_2 + b + 1)$$

ALLORA POSSIAMO SCRIVERE:

1. ANNULLAMENTO $\nabla \mathcal{L} = 0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_1}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_2}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b}\right)$
2. COMPLEMENTARIETÀ (VINCOLI $= 0$)
3. NON NEGATIVITÀ ($\lambda_1, \dots, \lambda_6 \geq 0$)
4. AMMISSIBILITÀ (VINCOLI NORMALI GIÀ DATI/FATTI) *

ESEMPIO: DUALE

DATO IL SEGUENTE $TS = \left\{\left(\begin{bmatrix}4.231\\4.750\end{bmatrix}, 1\right), \dots, \left(\begin{bmatrix}6.593\\-2.824\end{bmatrix}, 1\right)\right\}$

• DOMANDA 1

SCRIVI IL DUALE (con $C = 1$):

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{17}\sum_{j=1}^{17} \lambda_i \lambda_j y_i y_j x_i^T x_j - \sum_{i=1}^{17} \lambda_i \\ \sum_{i=1}^{17} \lambda_i y_i = 0 \\ 0 \leq \lambda_i \leq C = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \dots = 0 \end{cases}$$

• DOMANDA 2

SAPENDO LA SOLUZIONE DEL DUALE $\lambda^T = [0.422 \ \dots \ 1]$ INDIVIDUA I VETTORI DI SUPPORTO E CALCOLA L'IPERPIANO OTTIMO.

$$\omega^* = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i^* y_i x_i = -0.422\begin{pmatrix}4.231\\4.750\end{pmatrix} + \dots = \begin{pmatrix}-0.216\\-3.468\end{pmatrix}$$

MENTRE b^* SARÀ:

$$\lambda_i = 0.422 \in (0,1) \rightarrow \lambda_i^*(y(\omega^{*T}x_i + b^*) - 1) = 0$$

$$b^* = \frac{1}{y_i} - \sum \lambda_i^* y_i (x_i)^T x + b^* \Rightarrow -1\left((-0.216 \ \ -3.468)\begin{pmatrix}4.231\\4.750\end{pmatrix} b^* = 0\right.$$

ALLORA L'IPERPIANO SARÀ: $b^* = 16.387$

$$-0.216x_1 - 3.468x_2 + 16.387 = 0 \longrightarrow y(x) = (\text{''})$$

ES. 4

DOMANDA 3

DIRE QUALI ξ POSSONO ESSERE DETERMINATI?

DALLA COMPLEMENTARIETÀ:

$$\mu_i \xi_i^* = 0 = (C - \lambda_i^*)\xi_i \longrightarrow \xi_i = 0 \text{ se } \lambda_i < C$$

ALLORA:

$\xi_i^* =$ tutti quelli con $\lambda < C = \xi_{16}^* = 0 \rightarrow$ BEN CLASSIFICATI

PER QUELLI $\xi = C$ NON SO.

DOMANDA 4

DATO IL PUNTO $x^T = (3\ 7)$ COME CLASSIFICA LA MIA SVM?

$$y\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = \text{sign}(4) = -1 \longrightarrow x^T = (3\ 7) \in B$$

ESERCIZIO: KERNEL LINEARE

DATO UN TRAINING SET:

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, 1 \right), \dots, \left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, -1 \right) \right\}$$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} \right\}$$

ALLORA IL PRIMALE RISULTA:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{2}w_2^2 + C\xi_1 + \dots + C\xi_6 \\ w_1 \cdot 5 + w_2 \cdot 5 + b \geq 1 - \xi_1 \longrightarrow \alpha_1 \\ \vdots \\ w_1 \cdot 3 + w_2 \cdot 3 + b \leq -1 - \xi_6 \longrightarrow \alpha_6 \\ \xi_i \geq 0 \end{cases}$$

POSSIAMO CALCOLARE LA Q COME:

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 55 & \dots \\ 55 & 65 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

dove ij calcolati: $x_i^T \cdot x_j$

$$x_1^T \cdot x_1 = (5\ \ 5)\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = 25 + 25 = 50$$

CHE AVRÀ AUTOVALORI:

$(0, \dots, 217.5983)$

POSSIAMO QUINDI PASSARE A RISOLVERE:

$$\begin{cases} \min \sum_1^6 \sum_1^6 Q_{ij} \cdot \alpha_i \cdot \alpha_j - \sum_1^6 \alpha_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C = 1 \end{cases}$$

$\alpha < C$

POSSIAMO SCRIVERE/IPOTIZZARE:

$\alpha_K = (\frac{1}{2}\ \ 1\ \ 0\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 0)^T \rightarrow$ AMMISSIBILE E

$W = \{1, 4\}$

$\overline{W} = \{2, 3, 5, 6\}$

QUINDI IL SOTTOPROBLEMA DIVENTA:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}(\alpha_1\ \ 1\ \ 0\ \ \alpha_4\ \ 1\ \ 0)\, Q \cdot \alpha_K + (-\alpha_1 - 1 - \alpha_4 - 1) = \\ = \dots = 25\alpha_1^2 + \frac{5}{2}\alpha_4^2 - 15\alpha_1\alpha_4 + 29\alpha_1 - 7\alpha_4 \\ \alpha_1 + 1 + 0 \cdot 1 - \alpha_4 - 1 - 1 \cdot 0 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_4 \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \\ 0 \leq \alpha_4 \leq 1 \end{cases}$$

OVVERO

$$\begin{cases} \min \ 12.5\alpha_1^2 + 22\alpha_1 \\ 0 \le \alpha_1 \le 1 \\ \alpha_1 \ge 0 \\ \alpha_1 \le 1 \end{cases}$$

DERIVIAMO RISPETTO AD α:

$25\alpha_1 + 22 = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\frac{22}{25} \rightarrow \alpha^* = 0$

$\mathcal{L}(\alpha, \xi_1, \xi_2) = 12{,}5\alpha_1^2 + 22\alpha_1 - \xi_1\alpha_1 + \xi_2(\alpha_1 - 1)$

QUINDI:

$$\begin{cases} 25\alpha_1 + 22 - \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \xi_1\alpha_1 = 0 \longrightarrow \xi_1 \ge 0 \\ \xi_2(\alpha_1 - 1) = 0 \longrightarrow \xi_2 = 0 \\ 0 \le \alpha_1 \le 1 \\ \xi_{1,2} \ge 0 \end{cases}$$

DI CONSEGUENZA AVREMO $\alpha_1 = 0$ e $\xi_1 = 22$. QUINDI $\alpha_1 = 0$ E' OTTIMO E LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA RISULTA ESSERE:

$$\alpha_1^* = \alpha_4^* = 0 \longrightarrow \alpha_k = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ESEMPIO: α OTTIMO

RIPRENDENDO L'ESEMPIO ↗, POSSIAMO SCRIVERE:

$\alpha = \left(\frac{1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right)^T$

$y = (1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1)^T$

$\nabla f(\alpha) = (46.5 \quad 61 \quad 49.5 \quad -12 \quad -13 \quad -29.5)$

$y = 1 \qquad y = -1$

POSSIAMO SCRIVERE QUINDI:

$L(\alpha) = \{3, 6\}$ dove $\alpha = 0$, dove $L^+ = \{3\}$, $L^- = \{6\}$

$U(\alpha) = \{2, 5\}$ dove $\alpha = 1$, dove $U^+ = \{2\}$, $U^- = \{5\}$

SICCOME POI:

$S(\alpha), R(\alpha) \neq 0 \longrightarrow \max\left\{-\frac{\nabla f(\alpha)}{y_i}\right\} \le \min\left\{-\frac{\nabla_i f(\alpha)}{y_i}\right\}$

OVVERO:

$-\frac{\nabla f(\alpha)}{y_i} = (-46.5 \ \ldots \ -29.5)^T$

ALLORA:

$\max_{i \in R}\left\{-\frac{\nabla_i f}{y_i}\right\} = -12$

$\longrightarrow -12 \not\le -61$ CONDIZIONE OTTIMO VIOLATA

$\min_{i \in S}\left\{-\frac{\nabla_i f}{y_i}\right\} = -61$