Teoria dei Giochi 2020/21

Sinossi

G. Oriolo *Prima Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Il riferimento principale è il testo di Osborne [1], capitoli 1 e 2. Le definizioni però sono tratte dal capitolo 2 delle dispense di Facchinei [5] (tranne quelle di strategia debolmente e strettamente dominante, tratte dal testo di Osborne). I giochi Isp Routing Game, Pollution Game e Tragedy of the Commons sono dal testo di Nisan et al [2].

1 Giochi non-cooperativi

- Teoria dei giochi ci aiuta a intellegere quelle situazioni in cui *diversi* decisori interagiscono.
- Definizione gioco in forma normale: tripla $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{C_i\}_{i\in N}\}$: $N = \{1, \ldots, n\}$ insieme dei *giocatori*; $X_i \neq \emptyset$ insieme delle *strategie* (insieme *ammissibile*) del giocatore i; $C_i : X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \mapsto \mathcal{R}$ *payoff*, normalmente in forma di *costo* (quindi un valore negativo corrisponde a un guadagno).
- Parliamo di payoff, non di *vincitore/i* del gioco.
- Un vettore $(x_1, \ldots, x_n)$, con $x_i \in X_i$ per ogni i, è detto *stato* (ammissibile) o anche *punto* (ammissibile) del gioco.

1.1 Dilemma del prigioniero e simili

- Dilemma dei prigionieri (PD):

	Silent	*Confess*
Silent	$(2,2)$	$(5,1)$
Confess	$(1,5)$	$(4,4)$

- Osserviamo che per il primo giocatore (o per il secondo giocatore) esiste una strategia *dominante*: infatti qualunque cosa faccia l'altro giocatore, la cosa più conveniente è confessare. Tuttavia, per ciascun giocatore, il payoff nel caso in cui entrambi confessano è peggiore del payoff nel caso in cui entrambi rimangono in silenzio! Quindi la strategia dominante potrebbe non essere la strategia *migliore* per un giocatore...

- Giochi equivalenti al dilemma dei prigionieri: Isp routing game: le stategie sono Far (Silent) / Close (Confess) (n.b. il primo provider controlla la domanda $s_1 - t_1$, il secondo provider controlla $s_2 - t_2$, quindi le due strategie non sono del tutto equivalenti, perché si applicano a flussi diversi. Il payoff (costo) di ciascun giocatore è pari alla somma, presa su tutti gli archi del dominio di quel giocatore, del flusso su ciascun arco).

  Giochi con payoff artificiali: Arms Race:

	Do not arm	*Arm*
Do not arm	$(0, 0)$	$(500, -500)$
Arm	$(-500, 500)$	$(100, 100)$

  Giochi con payoff in forma di *guadagno*: Duopolio (High / Low).

	High	*Low*
High	$(1000, 1000)$	$(-200, 1200)$
Low	$(1200, -200)$	$(600, 600)$

- Assumiamo che: ogni giocatore conosca completamente le strategie e i payoff degli altri giocatori (*informazione completa*); ogni giocatore giochi la sua strategia simultaneamente (*gioco statico*); i giocatori non comunichino tra loro e scelgano la loro strategia individualmente (*gioco non cooperativo*).

- Gioco *finito* se ogni giocatore ha un numero finito di strategie.

- In questo corso assumiamo che il numero dei giocatori è finito.

- *Soluzione del gioco* Quale strategia sceglierà ciascun giocatore e quale sarà il vettore delle strategie risultante? Risposta non semplice e univoca.

1.2 Battle of sexes e simili

- Battle of the sexes (BoS):

	Football	*Exhibition*
Football	$(2, 1)$	$(0, 0)$
Exhibition	$(0, 0)$	$(1, 2)$

- Si noti come in questo gioco nessun giocatore abbia una strategia dominante!

- Giochi equivalenti a Battle of the sexes: due politici di uno stesso partito che devono prendere una posizione su un certo argomento; due aziende che si fondono e usano differenti sistemi operativi.
- Quale strategia sceglierà ciascun giocatore e quale sarà il vettore delle strategie risultante?

1.3 Strategie dominanti e ottimalità debole secondo Pareto

- Analizzeremo spesso il comportamento del giocatore i per una *data* scelta delle strategie degli altri giocatori. Definizione $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Per evidenziare variabile i-esima: (x_i, x_{-i}); per esempio $C_i(y_i, x_{-i}) = C_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.
- Si definisce *best response* del giocatore i e si indica $B_i(x_{-i})$ l'*insieme* delle *migliori* strategie che il giocatore i può utilizzare se gli altri giocatori utilizzano la strategia x_{-i}, cioè $B_i(x_{-i}) = \{x'_i \in X_i : C_i(x'_i, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i}), \forall x_i \in X_i\}$.
- Formalizziamo il concetto di strategia dominante. Dato un gioco Γ (in forma di costo) una strategia $x'_i \in X_i$ è *debolmente dominante per il giocatore* i se, per ogni punto ammissibile (x_i, x_{-i}), con $x_i \neq x'_i$, risulta:

  $C_i(x'_i, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i})$.

  Analogamente:

  x_i è debolmente dominante per il giocatore i se e solo se $x_i \in B_i(x_{-i})$ per ogni $x_{-i} \in X_{-i}$.
- Strategia strettamente dominante: dato un gioco Γ (in forma di costo) una strategia $x'_i \in X_i$ è *strettamente dominante per il giocatore* i se per ogni punto ammissibile (x_i, x_{-i}), $x_i \neq x'_i$, risulta:

  $C_i(x'_i, x_{-i}) < C_i(x_i, x_{-i})$.
- Ottimo secondo Pareto. Dato un gioco Γ (in forma di costo), un punto ammissibile $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è un *ottimo debole di Pareto* se $\nexists$ un punto ammissibile x' tale che $C_i(x') < C_i(x)$, per ogni $i \in N$. In modo equivalente, possiamo dire che un punto ammissibile $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *non* è un ottimo debole secondo Pareto se esiste un altro punto ammissibile $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ tale che $C_i(x') < C_i(x)$, per ogni $i \in N$.

  Quindi, se un punto x è ottimo debole secondo Pareto, vuol dire che anche se i giocatori considerassero in modo "cooperativo" altri punti, esiste sempre un giocatore che non ha interesse a spostarsi da x.

  Ogni gioco finito ha almeno un punto che è ottimo debole secondo Pareto, per esempio consideriamo uno stato che minimizza il payoff di un certo giocatore. Quali sono i punti di ottimo deboli secondo Pareto per i precedenti giochi?

- Ottimo forte secondo Pareto. Dato un gioco Γ (in forma di costo), un punto ammissibile $x = (x_1, \dots, x_n)$ è un *ottimo forte di Pareto* se $\nexists$ un punto ammissibile x' tale che $C_i(x') \leq C_i(x)$, per ogni $i \in N$ e $C_h(x') < C_h(x)$, per almeno un $h \in N$.

  Ragionandoci un po' è facile verificare che un punto di ottimo forte secondo Pareto è anche un punto di ottimo debole, ma in generale non vale il viceversa.

- In particolare se per un certo gioco ogni giocatore ha una strategia dominante e l'incrocio di queste strategie è un punto di ottimo debole secondo Pareto, allora possiamo immaginare che questa sarà la *probabile* soluzione del gioco. Il paradosso del gioco PD nasce dal fatto che il punto determinato dall'incrocio delle strategie debolmente dominanti dei giocatori *non* è un ottimo debole secondo Pareto! Che soluzione avrà questo gioco?

- E che soluzione avrà il gioco (BoS), dove i giocatori addirittura non hanno strategia dominante?

1.4 Equilibrio di Nash

- Come dicevamo prima, la risposta alle precedenti domande non è né semplice né univoca. Un concetto che ci aiuta è il seguente:

- Equilibrio di Nash: Dato un gioco Γ (in forma di costo) e un suo punto ammissibile $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$. x^* è un equilibrio di Nash per Γ se risulta, per ogni $i \in N$:

$$C_i(x_i^*, x_{-i}^*) \leq C_i(x_i, x_{-i}^*), \ \forall x_i \in X_i.$$

- È possibile caratterizzare l'equilibrio di Nash utilizzando il concetto di best response: $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ è un equilibrio di Nash se e solo se $x_i^* \in B_i(x_{-i}^*)$ per ogni i.

- Interpretazione comportamentale: se un punto è un equilibrio di Nash, nessun giocatore può migliorare il proprio payoff modificando in modo *unilaterale* la propria strategia.

- Quali sono gli equilibri di Nash per i giochi precedenti?

- Osserviamo come, banalmente, se ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante, allora il punto incrocio delle strategie debolmente dominanti è un equilibrio di Nash (come accade per PD). Però **possono esistere equilibri di Nash anche in assenza di strategie debolmente dominanti** (come accade per BS)! E naturalmente un gioco può avere più equilibri di Nash, si pensi di nuovo a BS.

- Se il gioco ha più equilibri di Nash, a volte si preferisce utilizzare definizioni differenti di equilibrio che possono condurre a individuare un unico punto di equilibrio. Noi però non ce ne occupiamo in questo corso.

- Si osservi anche che se ogni giocatore ha una strategia *strettamente* dominante allora il punto di incrocio di queste strategie è *l'unico* equilibrio di Nash del gioco.

- Quali dei giochi precedenti ha equilibri di Nash che sono ottimi deboli secondo Pareto? Osserviamo che il concetto di ottimo debole non è legato al concetto di equilibrio: per esempio, in PD l'equilibrio di Nash è l'unico punto che non è ottimo secondo Pareto!

- Interpretazione comportamentale: se un equilibrio di Nash è anche un ottimo debole di Pareto, esiste almeno un giocatore che non ha interesse a spostarsi dal punto anche *agendo in modo non unilaterale*, quindi la soluzione è abbastanza "stabile".

1.5 Altri Giochi

- Estensione del dilemma dei prigionieri a *molti giocatori*: Pollution game: (Controllo Emissioni/ Inquinamento). Se il giocatore i controlla emissioni aggiunge 3 unità al suo costo; se il giocatore i inquina aggiunge una unità di costo al payoff di *ciascun giocatore*.

  Consideriamo un qualunque stato in cui almeno un giocatore controlla le emissioni. Qual è il payoff di questo giocatore se k (naturalmente, $k < n$) giocatori inquinano? Un tale stato può essere un equilibrio di Nash?

  Evidenziamo come in questo caso lo spazio dei punti ammissibili possa essere messo in corrispondenza 1-1 con i vertici del ipercubo n-dimensionale, se si assume: $x_i = 1$ se il giocatore i controlla le emissioni, $x_i = 0$ se il giocatore i inquina. Allora il payoff del giocatore i è pari a $C_i(x_1, \ldots, x_n) = 3x_i + \sum_{j=1..n}(1 - x_j)$.

  Osserviamo come $C_i(x_i, x_{-i}) = 2x_i + n - t$, dove $t = \sum_{j \neq i} x_j$. Segue facilmente che l'unico equilibrio di Nash del gioco è $(0, \ldots, 0)$. Osservare come l'equilibrio di Nash costi a ogni giocatore $n/3$ più di quanto costa la soluzione $(1, \ldots, 1)$ in cui nessuno inquina, che però non è stabile!

  Osserviamo anche come la scelta di inquinare è dominante per ciascun giocatore (il che dimostra di nuovo che $(0, \ldots, 0)$ è un equilibrio di Nash).

- Osserviamo come fino al pollution game abbiamo *rappresentato* i giochi elencando *tutte* le possibili strategie e, per ogni strategia, il payoff di ciascun giocatore (ovvero utilizzando delle matrici). Si osservi tuttavia che mentre per definire una singola istanza del pollution game bastano 3 numeri (numero di giocatori, costo dell'inquinamento, costo del controllo), il numero di strategie è pari a 2^n, e quindi una tale rappresentazione sarebbe esponenziale nel numero dei giocatori. La stessa cosa si applica a fortiori ai giochi infiniti, per cui una tale rappresentazione esplicita non può esistere. Questi argomenti diventano naturalmente cruciali per considerazioni di tipo algoritmico ...

- Un gioco non finito: Tragedy of the commons.

  Evidenziare come in questo caso lo spazio dei punti ammissibili possa essere messo in corrispondenza 1-1 con i punti del poliedro $\{x \in \mathcal{R}^n_+ : x_j \leq 1, \forall j\}$. Allora il payoff del giocatore i è pari a $C_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i(1 - \sum_{j \in N} x_j)$ se $\sum_{j \in N} x_j \leq 1$, 0 altrimenti.

  Osservare come $C_i(x_i, x_{-i}) = x_i(1 - x_i - t)$, dove $t = \sum_{j \neq i} x_j$. Un punto ammissibile x^* è un equilibrio di Nash se e solo se x_i^* è la best response a x_{-i}^* per ogni i, ovvero se per ogni i x_i^* è un punto di massimo per $C_i(x_i, x_{-i}^*)$. Studiando $C_i(x_i, x_{-i}^*)$, si vede facilmente che x^* è un punto di massimo se e solo se $x_i^* = \frac{1 - \sum_{j \neq i} x_j^*}{2}$. L'unica soluzione del sistema $x_i^* = \frac{1 - \sum_{j \neq i} x_j^*}{2}$ è $(1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ per ogni i, quindi $x_i^* = (1/(n+1), \ldots, 1/(n+1))$ per ogni i è l'unico equilibrio di Nash. Osservare come l'equilibrio di Nash garantisca a ogni giocatore un utilità di circa $n/4$ minore di quella garantita dalla soluzione $(1/2n, \ldots, 1/2n)$, che però non è stabile!

  Osservare come nel gioco Tragedy of the commons non c'è una strategia debolmente dominante per ciascun giocatore. Infatti, fissata la strategia x_{-i} degli altri giocatori, la strategia migliore per il giocatore i è : $x_i = \frac{1 - \sum_{j \neq i} x_j}{2}$.

- Il modello di Hotelling [3]

  Consideriamo il seguente gioco ispirato al modello di Hotelling. Una spiaggia è lunga 1 km e i bagnanti sono distribuiti su tutta la sua lunghezza in modo uniforme. Una barlady A e ua barman B possono entrambi aprire un proprio chiosco sulla spiaggia e possono entrambi scegliere dove posizionare il chiosco (eventualmente anche nello stesso punto, cioè uno affianco all'altro). I due chioschi sono comunque non distinguibili e ogni bagnante si recherà semplicemente al chiosco più vicino, e naturalmente sia A che B vogliono massimizzare il numero di bagnanti serviti presso il proprio chiosco.

  Possiamo formalizzare questo modello come un gioco cooperativo con due giocatori in cui l'insieme delle strategie di ogni giocatore è l'intervallo $[0, 1]$. Il payoff di ciascun giocatore è pari alla frazione di spiaggia che rientra nel suo "controllo". Più precisamente, se indichiamo con x la posizione (strategia) del primo giocatore e con y la posizione (strategia) del secondo giocatore, e assumendo senza perdita di generalità $x \leq y$, vale: $C_1(x, y) = \frac{x+y}{2}$; $C_2(x, y) = 1 - C_1(x, y)$.

  - Esistono per A e B strategie debolmente dominanti, e in caso quali sono?

    No, fissata una qualunque posizione (strategia) di un giocatore, la migliore risposta dell'altro giocatore è quella di sempre mettersi subito a sinistra o subito a destra.

  - Esistono equilibri di Nash e in caso quali sono?

    Si, quello in cui entrambi i giocatori si mettono al centro della spiaggia, ovvero $x = y = \frac{1}{2}$.

- Supponete ora di essere voi i gestori della spiaggia e di poter decidere dove posizionare i chioschi. Volete minimizzare la distanza (attesa) che un bagnante deve percorrere per raggiungere il chiosco più vicino: dove posizionereste i due chioschi?

  La cosa migliore sarebbe posizionare i chioschi a $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ della spiaggia: in questo modo, ogni bagnante deve percorrere, in media, 125 metri per raggiungere un chiosco (e il payoff di ciascun giocatore sarebbe comunque $\frac{1}{2}$, come per l'equilibrio di Nash). Si noti che invece all'equilibrio di Nash ogni bagnante deve percorrere, in media, 250 metri per raggiungere un chiosco! Ancora una volta la teoria dei giochi ci mostra che perseguire (apparentemente) il benessere individuale possa portarci in stati molto lontani dal benessere collettivo.

- Il paradosso di Braess [4]

  Consideriamo il seguente gioco ispirato al paradosso di Braess. In una rete stradale G, rappresentata dal grafo orientato con nodi $\{S, A, B, T\}$ e archi $\{(S, A), (S, B), (A, T), (B, T)\}$, 4000 vetture devono viaggiare da S a T. Il tempo di viaggio da S a A e da B a T è pari, in minuti, al numero di vetture diviso 100, mentre il tempo di viaggio da A a T e da S a B è costante e pari a 45 minuti. Vogliamo analizzare questo modello cone un gioco non-cooperativo.

  Consideriamo dunque un gioco con $|N| = 4000$, in cui ogni vettura è un giocatore. Ogni giocatore ha a disposizione due strategie: il percorso $S - A - T$ e il percorso $S - B - T$. Il payoff di ogni giocatore è pari al tempo che impiega per andare da S a T sul percorso scelto.

  - Esistono strategie debolmente dominanti, e in caso quali sono?

    No, se supponiamo che una maggioranza degli altri giocatori abbia scelto il percorso $S - A - T$, allora la risposta migliore per un giocatore è il percorso $S-B-T$; se viceversa una maggioranza degli altri giocatori ha scelto il percorso $S - B - T$, allora la risposta migliore è il percorso $S - A - T$. Quindi non esiste un percorso che è sempre una migliore risposta e quindi non esiste una strategia dominante.

  - Esistono equilibri di Nash e in caso quali sono?

    Abbiamo un equilibrio di Nash in tutti gli stati in cui 2000 vetture viaggiano sul percorso $S-A-T$ e 2000 vetture viaggiano sul percorso $S-B-T$. In questi stati, ogni vettura impiega 65 minuti per andare da S a T e se un qualunque giocatore modificasse unilateralmente la propria strategia cambiando percorso peggiorerebbe il suo payoff, perché impiegherebbe un tempo pari a $65.01 > 65$.

    Analizziamo ora l'esistenza di altri equilibri di Nash. Indichiamo con n_1 (risp. n_2) il numero di vetture che sceglie il percorso $S - A - T$ (risp. $S - B - T$). Il tempo di viaggio t_1 (risp. t_2) sul primo (risp. secondo) percorso è pari a $\frac{n_1}{100} + 45$ (risp. $\frac{n_2}{100} + 45$). È immediato verificare che, se $n_1 \neq n_2$, e.g. $n_1 > n_2$, ogni giocatore che sceglie il primo percorso ha convenienza a commutare sul secondo: quindi l'unico equilibrio di Nash è proprio quello individuato in precedenza in cui 2000 vetture scelgono il percorso superiore e 2000 vetture scelgono il percorso inferiore.

Supponiamo ora che per migliorare la rete il suo gestore aggiunga un collegamento super-veloce da A a B: nel nostro grafo G aggiungiamo quindi un arco (A, B) con tempo di viaggio 0. Vogliamo analizzare il nuovo gioco: si noti che ora i giocatori hanno una terza strategia: il percorso $S - A - B - T$.

- Esistono strategie debolmente dominanti, e in caso quali sono?

  Si, $S - A - B - T$ è una strategia dominante. È sufficiente osservare che qualunque cosa facciano le altre 3999 vetture, per un giocatore il percorso $S - A - B$ è più veloce del percorso $S - B$ e il percorso $A - B - T$ è più veloce del percorso $A - T$: segue che $S - A - B - T$ è sempre una migliore risposta ed è quindi una strategia dominante (ed è facile verificare che è l'unica).

- Esistono equilibri di Nash e in caso quali sono?

  Naturalmente lo stato in cui tutti i giocatori scelgono il percorso $S-A-B-T$ è un equilibrio di Nash. Verifichiamo ora se ce ne sono altri. Siano n_1 e n_2 rispettivamente il numero di vetture che transitano sul tratto $S-A$ e sul tratto $B-T$. Allora, il tempo di percorrenza sul percorso $S-A-T$ è pari a $45+\frac{n_1}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso $S - A - B - T$ è pari a $\frac{n_1}{100} + \frac{n_2}{100}$; il tempo di percorrenza sul percorso $S-B-T$ è pari a $45+\frac{n_2}{100}$. Si osservi che poiché n_1 e n_2 sono entrambi ≤ 4000, abbiamo che il tempo di percorrenza del percorso $S-A-B-T$ è sempre minore dei tempi di percorrenza dei percorsi $S-A-T$ e $S-B-T$. Segue che l'unico equilibrio di Nash è quello in cui tutte le vetture scelgono il precorso $S - A - B - T$, impiegando quindi 80 minuti.

  Osserviamo infine che il tempo di percorrenza sul precorso $S-A-B-T$ è pari a 80 minuti. Quindo equilibrio di Nash non è ottimo debole secondo Pareto, infatti esiste una vettore di strategie in cui tutti le vetture impiegano meno di 80 minuti per andare da S a T. Questo vettore di strategie è quello corrispondente alla situazione in cui 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, A, T) e 2000 vetture viaggiano sul percorso (S, B, T). Aver aggiunto il collegamento super-veloce ha peggiorato la rete!

- Matching Pennies:

	Testa	*Croce*
Testa	$(1, -1)$	$(-1, 1)$
Croce	$(-1, 1)$	$(1, -1)$

Il gioco non ha equilibri di Nash. È inoltre un gioco che normalmente si gioca iterativamente: in questo caso la "strategia" più ragionevole per ogni giocatore è *randomizzare*. Torneremo poi su giochi di questo tipo.

1.6 Estremo superiore ed estremo inferiore

- Dato un insieme qualsiasi D (finito, infinito, chiuso etc.) e una funzione $f : D \mapsto R$, l'*estremo superiore* di f su D, $sup_{x \in D} f(x)$ è il più piccolo tra i numeri U: $f(x) \leq U, \forall x \in D$ (la f è illimitata superiormente su D, e convenzionalmente scriviamo $sup_{x \in D} f(x) = \infty$, se non esiste nessun U per cui la precedente vale). x^* è un *punto di massimo* per f su D se $f(x^*) = sup_{x \in D} f(x)$. Esempio e^x su $\mathcal{R}$ e $1 - e^{-x}$ su $[0, 1]$ e su $[0, \infty]$.

- Analogamente, l'*estremo inferiore* di f su D, $inf_{x \in D} f(x)$ è il più grande tra i numeri L: $f(x) \geq L, \forall x \in D$ (la f è illimitata inferiormente su D, e convenzionalmente scriviamo $inf_{x \in D} f(x) = -\infty$, se non esiste nessun L per cui la precedente vale). x^* è un *punto di minimo* per f su D se $f(x^*) = inf_{x \in D} f(x)$.

1.7 Strategia conservativa

- Quale strategia alternativa potrebbe mettere in campo un giocatore che non ha (o anche che ha) una strategia dominante?

- Definizione di strategia minmax. Dato un gioco Γ (in forma di costo), un giocatore $i \in N$ e $x_i \in X_i$, definiamo $\tilde{C}_i(x_i) = \sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i, x_{-i})$, ovvero $\tilde{C}_i(x_i)$ è l'estremo superiore di quello che il giocatore i può trovarsi a dover pagare se gioca la strategia x_i. Una strategia $\bar{x}_i \in X_i$ è detta *strategia minmax o conservativa* per il giocatore i se risulta $\tilde{C}_i(\bar{x}_i) = \min_{x_i \in X_i} \tilde{C}_i(x_i)$. Scegliere $\bar{x}_i$ equivale a minimizzare quello che si dovrà pagare nel caso peggiore.

- Osservare che *per giochi finiti* la strategia conservativa esiste sempre e quindi naturalmente l'incrocio delle strategie conservative non corrisponde in generale a un equilibrio di Nash (infatti sappiamo che esistono giochi finiti che non hanno equilibri di Nash). Analizzare le strategie conservative dei giochi precedenti. In particolare, per giochi tipo PD, la strategia minmax porta in un equilibrio di Nash; per giochi tipo tragedy of commons e BoS ogni strategia è conservativa.

1.8 Relazione tra le varie definizioni

- Abbiamo introdotto tre importanti definizioni: strategia (debolmente) dominante; strategie conservativa; equilibrio di Nash. Analizziamo le relazioni tra queste definizioni

- Abbiamo già visto che se ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante, allora il punto incrocio delle strategie debolmente dominanti è un equilibrio di Nash. Inoltre non vale il viceversa: giochi senza strategie dominanti possono avere equilibri di Nash: BoS e simili.

- L'incrocio di strategie conservative (quando esistono) non determina un equilibrio di Nash: consideriamo MP per cui ogni strategia è conservativa ma non ci sono EN.
- Una strategia conservativa non è necessariamente dominante dominante: in BoS ogni strategia è conservativa, ma non esistono strategie debolmente dominanti. Vale invece:

  Lemma. Dato un gioco Γ (qualsiasi), se per un giocatore i esiste una strategia debolmente dominante $x_i \in X_i$, allora x_i è anche una strategia conservativa per il giocatore i.

  Supponiamo infatti, per assurdo, che x_i' sia una strategia debolmente dominante per il giocatore i ma non conservativa. Allora esiste una strategia x_i'' tale che $\sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i'', x_{-i}) < \sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i', x_{-i})$. D'altro canto, poiché x_i' è una strategia debolmente dominante, allora per ogni $x_{-i} \in X_{-i}$, vale $C_i(x_i', x_{-i}) \leq C_i(x_i'', x_{-i})$, quindi da questo segue, facilmente, che $\sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i'', x_{-i}) \geq \sup_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i', x_{-i})$, una contraddizione.

References

[1] https://www.economics.utoronto.ca/osborne/igt/

[2] http://algo.cs.uni-frankfurt.de/lehre/agt/material/Algorithmic_Game_Theory.pdf

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hotelling%27s_law

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Braess%27s_paradox

[5] http://www.dis.uniroma1.it/ facchinei/didattica/giochi/dispenseprovtutte.pdf