

DOMANDE TEORIA OSC I

Question Descrivere brevemente l'equazione di Hamilton-Jacobi Bellman. Dimostrare che HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità.

Answer L'equazione di Hamilton Jacobi Bellman è:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} \\ V^*(x, T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$

Permette di rappresentare la funzione valore ottima di un problema di controllo ottimo di Bolza:

$$\begin{cases} \min_u J(u) = \min_u \left\{ \int_{t_0}^T l(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)) \right\} \\ \dot{x} = f(x, u, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Generalmente questa equazione non è lineare e la sua soluzione è proprio la funzione valore ottima che rispetta l'equazione di Hellman del problema dato e, quindi, rappresentante le decisioni ottime da effettuare partendo da un determinato stato e tempo iniziale. In particolare, l'equazione HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità. A tale scopo definiamo la funzione valore per il problema di Bolza:

$$\begin{aligned} V^*(x(t), t) &= \min_{u(\tau), \tau \in [t, T]} \left\{ \int_t^T l(x(s), u(s), s) ds + m(x(T)) \right\} \\ &= \min_{u(\tau), \tau \in [t, T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(s), u(s), s) ds + \int_{t+\Delta t}^T l(x(s), u(s), s) ds + m(x(T)) \right\} \\ &= \min_{u(\tau), \tau \in [t, T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(s), u(s), s) ds + V^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \end{aligned}$$

Da questa espressione ricaviamo la sua corrispondente espressione differenziale sviluppando al primo ordine la funzione valore:

$$\begin{cases} 0 = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t), u(t), t) + -\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) + \frac{\partial V^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} \\ V^*(x, T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$

Dato che dobbiamo determinare la soluzione per ogni istante di tempo e per ogni stato, si ottiene l'equazione HJB:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V^*}{\partial t}(x(t), t) = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V^*}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \right\} \\ V^*(x, T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$