OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 4 Febbraio 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & u \end{array} \right. \tag{1}$$

   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u_0 = -x_1 - x_2$ e la matrice

   $$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   possono essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman.

   (b) Iterare l'algoritmo fino a quando la legge di controllo $u_i = K_i x$ fornisce un costo strettamente minore di 1 a partire dallo condizione iniziale $x_0 = [1,\, 0]^\top$.

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + 2u_1(t)^2 - u_2(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (-x(t)^2 + u_2(t)^2 - 2u_1(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \qquad \dot{x} = x + 2\sqrt{2}u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Si determini un equilibrio di Nash del gioco (2).

   (b) Si determini il valore del costo del giocatore 2 all'equilibrio di Nash a partire da uno stato iniziale pari ad 1.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \qquad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2}u_2 \tag{3}$$

   Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Discutere l'equazione Differenziale di Riccati e dimostrare che la soluzione $P(t)$ esiste per ogni $t \in [0, T]$.

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare inoltre che la sequenza di soluzioni $P_T(t)$ del problema ad orizzonte finito ha un limite per $T \to +\infty$.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 9 Novembre 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & u \end{array} \right. \tag{1}$$

   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u_0 = -x_1 - x_2$ e la matrice

$$P_0 = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{array} \right]$$

   possono essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman.

   (b) Iterare l'algoritmo fino a quando la legge di controllo $u_i = K_i x$ fornisce un costo strettamente minore di 1 a partire dallo condizione iniziale $x_0 = [1,\ 0]^\top$.

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{lcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + 2u_1(t)^2 - u_2(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (-x(t)^2 + u_2(t)^2 - 2u_1(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \quad \dot{x} = x + 2\sqrt{2}u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Si determini un equilibrio di Nash del gioco (2).

   (b) Si determini il valore del costo del giocatore 2 all'equilibrio di Nash a partire da uno stato iniziale pari ad 1.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{lcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \qquad s.t. \quad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2}u_2 \tag{3}$$

   Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Discutere l'equazione Differenziale di Riccati e dimostrare che la soluzione $P(t)$ esiste per ogni $t \in [0, T]$.

5. Discutere il problema del filtraggio ottimo deterministico.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 4 Novembre 2019

1. Determinare la sequenza ottima di controlli u_k per minimizzare l'indice di costo $J(u)$ definito da

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + u_k^2), \tag{1}$$

in presenza del vincolo dinamico

$$x_{1,k+1} = x_{2,k} \,,$$
$$x_{2,k+1} = u_k \,,$$

a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1, 1)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_2(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2)dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - \frac{1}{2}(1 - x_1^2)x_2 + x_1 u \end{array} \right. \tag{2}$$

   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u = -2x_1x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (2). [3 PUNTI]

   (b) Dire se esiste un costo corrente significativo per il quale u sia la soluzione ottima. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2 \right) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 2x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

   Si determini una legge di controllo in retroazione $\bar{u}$ tale che il costo $J(\bar{u})$ sia minore di 4 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\, 1]^\top$. [6 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e derivare l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman nel caso nonlineare. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che il sistema a ciclo chiuso con la soluzione di LQR risulta asintoticamente stabile. [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 16 Settembre 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -2x_1 + u \\ \dot{x}_2 & = & ax_1 - u \end{array} \right. \tag{1}$$

   a) Determinare, se esiste, un valore di a tale che la legge di controllo $\bar{u} = x_2$ sia ottima per il problema (1), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = x_1 + x_2$. [4 PUNTI]

   b) Determinare il minimo costo ottenibile per il problema (1) a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [-1, 2]^\top$. [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   (a) Si determini una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_0 = K_0 x$ tale che gli autovalori di $S_0 = A + BK_0$ siano $\{-2, -1\}$. [3 PUNTI]

   (b) Determinare le condizioni iniziali $[x_1(0), x_2(0)]^\top$, se esistono, dalle quali il costo della legge di controllo u_0 sia esattamente pari a 3. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 u(t)^2 dt + \frac{1}{2} x_1(1)^2 + \frac{1}{2} x_2(1)^2 \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -2x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

   Determinare il costo della soluzione ottima di (3) a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1, 0]^\top$. [7 PUNTI]

4. Enunciare e dimostrare il *Principio di Ottimalità*. [6 PUNTI]

5. Discutere il problema del tracking e della reiezione di disturbi noti. [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 20 Luglio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + (x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 & = & u + g(x_1, x_2) \end{array} \right. \tag{1}$$

Determinare, motivando la risposta, una funzione continua g tale che la legge di controllo $u^\star = -x_1 - x_2$ risulti la soluzione ottima di (1) [6 PUNTI]

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 \left(3x(t)^2 + \frac{1}{2} u_1(t)^2 - u_2(t)^2 \right) dt + \frac{\alpha}{2} x(2)^2 \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 \left(-3x(t)^2 + u_2(t)^2 - \frac{1}{2} u_1(t)^2 \right) dt - \frac{\alpha}{2} x(2)^2 \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = x + u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Determinare un equilibrio di Nash del gioco (2) in funzione del parametro $\alpha \geq 0$ [4 PUNTI]

   (b) Determinare, motivando la risposta, il migliore valore di $\alpha \in [0, 1]$ per il Giocatore 2 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \sqrt{2}$ [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (-x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (-3x(t)^2 + u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = 2x - \sqrt{3} u_1 + u_2 \tag{3}$$

   (a) Determinare il numero di equilibri di Nash del gioco differenziale (3) [2 PUNTI]

   (b) Scrivere la matrice M associata al gioco [1 PUNTO]

   (c) Sapendo che l'insieme degli autovalori di M contiene 2 e una coppia di autovalori complessi-coniugati, determinare il valore di tutti gli equilibri di Nash [4 PUNTI]

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di ottimalitá [6 PUNTI]

5. Discutere il problema del Filtraggio Ottimo Deterministico [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esonero 22 Giugno 2018

1. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{aligned}\min_{u_1} J_1(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (a^2x(t)^2 + u_1(t)^2 - u_2(t)^2)dt\right\},\\ \min_{u_2} J_2(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (-a^2x(t)^2 + u_2(t)^2 - u_1(t)^2)dt\right\},\end{aligned} \qquad s.t. \quad \dot{x} = ax + \sqrt{2}u_1 - u_2 \tag{1}$$

   (a) Determinare i valori del parametro $a \geq 0$ per cui esiste un equilibrio di Nash del gioco (1) [6 PUNTI]

   (b) Scrivere le strategie di equilibrio in funzione di a [3 PUNTI]

   (c) Se $a = 1$ è ammissibile, calcolare il costo del giocatore 2 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$. [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{aligned}\min_{u_1} J_1(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (-x(t)^2 + 2u_1(t)^2)dt\right\},\\ \min_{u_2} J_2(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (-2x(t)^2 + u_2(t)^2)dt\right\},\end{aligned} \qquad s.t. \quad \dot{x} = \sqrt{2}u_1 - u_2 \tag{2}$$

   (a) Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (2). [7 PUNTI]

   (b) Per ciascun equilibrio, dire se è piú conveniente per il giocatore 1 o per il giocatore 2, motivando la risposta. [3 PUNTI]

3. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo e di equilibrio di Nash su orizzonte finito. Discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash nel caso ad orizzonte finito. [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 22 Luglio 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (3x(t)^2 + 2u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \quad \dot{x} = 2x - u\,, \tag{1}$$

   a) Calcolare il costo della legge di controllo $\bar{u} = 3x$ a partire dalla condizione iniziale $x(0) = -1$. [3 PUNTI]

   b) Confrontare il costo di $\bar{u}$ con il costo della soluzione $u^\star$ del problema di controllo ottimo (1). [4 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^{2} u(t)^2 dt + \frac{1}{2} x(2)^2 \right\}, \qquad s.t. \quad \dot{x} = \alpha x + u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2) in funzione del parametro $\alpha > 0$. [4 PUNTI]

   b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(1) = 2$ per il valore $\alpha = 0.5$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 + u \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - 2x_2 \end{array} \right. \tag{3}$$

   a) Dire, motivando la risposta, se $\bar{u} = -2x_1 - x_2$ è la soluzione ottima del problema (3). [3 PUNTI]

   b) In caso contrario, dire se esiste un costo *significativo* modificato rispetto al quale $\bar{u}$ è la soluzione ottima. [3 PUNTI]

4. Dare la definizione di *Value iteration* in un problema di reinforcement learning. Eseguire un passo di value iteration per il problema rappresentato in figura (pagina seguente) con $\gamma = 0.5$ e partendo dalla stima iniziale della funzione valore data da $v_0 = [1, -1, 2, 1]^\top$, descrivendo brevemente i passi eseguiti. [6 PUNTI]

5. Descrivere brevemente l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman. Dimostrare che l'equazione HJB fornisce condizioni sufficienti di ottimalità. [6 PUNTI]

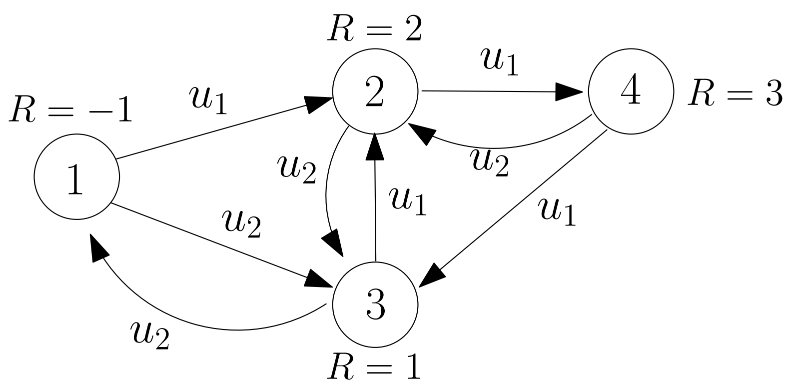


Figure 1: figura Domanda 4.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 24 Gennaio 2020

1. Determinare la sequenza ottima di stati x_k ottenuta minimizzando l'indice di costo $J(u)$ definito da

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{1,k}^2 + u_k^2) + x_{2,3}^2, \tag{1}$$

in presenza del vincolo dinamico

$$x_{1,k+1} = x_{2,k}\,,$$

$$x_{2,k+1} = u_k\,,$$

a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1,\,1)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 (3x(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \quad \dot{x} = -x + u\,, \tag{2}$$

a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 2$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2 \right) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 2x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

Si determini una legge di controllo in retroazione $\bar{u}$ tale che il costo $J(\bar{u})$ sia minore di 4 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\,1]^\top$. [6 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e dimostrare che l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di ottimalità. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che la sequenza di soluzioni del problema su orizzonte finito ammette un limite per T che tende all'infinito. [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 25 Febbraio 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(3x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 6x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + bx_2 + u \end{array} \right. \tag{1}$$

   i) Determinare valori dei parametri a e b tali che le matrici $K_0 = [-3 \;\; -2]$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato.

   ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -3x_1 - 2x_2$ abbia costo pari a 1.

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - \frac{1}{2}(1 - g(x_1, x_2))x_2 + x_1 u \end{array} \right. \tag{2}$$

   Conoscendo la funzione valore associata, ovvero $V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$, determinare la soluzione ottima di (2) e la funzione continua g, motivando la risposta.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2} u_2 \tag{3}$$

   Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie e sufficienti di *ottimalità*.

5. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo e di equilibrio di Nash, e discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 25 Febbraio 2020

1. Determinare il costo della soluzione ottima del seguente problema

$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{2,k}^2 + u_k^2) + x_{1,3}^2, \tag{1}$$

in presenza del vincolo dinamico

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + x_{2,k}\,,$$
$$x_{2,k+1} = x_{1,k} + u_k\,,$$

a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1, 0)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^2 (x(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \dot{x} = x + u\,, \tag{2}$$

a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(1) = 2$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(2x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 4x_2(t)^2 + u(t)^2\right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 + bx_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

i) Determinare valori dei parametri a e b tali che le matrici $K_0 = [-2 \;\; -1]$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato. [4 PUNTI]

ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -2x_1 - x_2$ abbia costo pari a 1. [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e dimostrare che l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie di ottimalità. [6 PUNTI]

5. Descrivere l'equazione differenziale di Riccati per un problema di controllo ottimo su orizzonte finito. Dimostrare che l'equazione ammette una soluzione nell'intervallo $[0, T]$ [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 30 Agosto 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + 2u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 & = & u \end{array} \right. \tag{1}$$

   a) Determinare una funzione continua g tale che $\bar{u} = -x_1 - \sqrt{3}x_2$ sia la soluzione ottima di (1) con funzione valore associata $\bar{V}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2$. [4 PUNTI]
   b) Determinare, motivando la risposta, tutte le condizioni iniziali $x(0)$ tali che il costo di $\bar{u}$ sia pari a zero. [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 5x(t)^2 + u(t)^2 dt \right\}, \quad s.t. \quad \dot{x} = 2x + u \, , \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]
   b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 2$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il problema di Reinforcement Learning stocastico rappresentato graficamente nella pagina seguente. Supponendo che la policy π è tale che $v_\pi(x^1) = 2$, $v_\pi(x^2) = 1$ e $v_\pi(x^3) = 2.5$ e che $\pi(u_1|x) = 0.2$, $\pi(u_2|x) = 0.7$, $\pi(u_3|x) = 0.1$, calcolare $v_\pi(x)$ [4 PUNTI] e $q_\pi(x, u)$ [3 PUNTI] con $\gamma = 1$.

4. Descrivere brevemente l'equazione differenziale di Riccati. Dimostrare l'esistenza globale (nell'intervallo $[0, T]$) della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati. [6 PUNTI]

5. Descrivere brevemente l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman. Dimostrare che l'equazione HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità. [6 PUNTI]

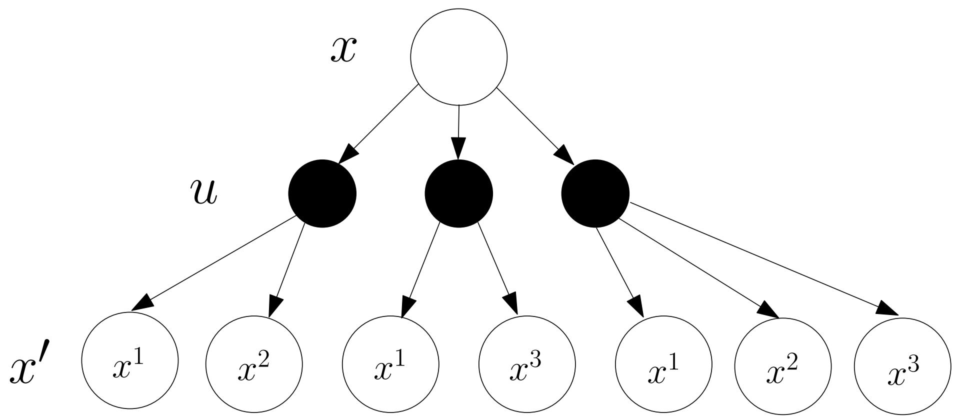


Figure 1: figura Domanda 3.

Funzione di massa di probabilità

Dati x e u_1

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 0.5) & \text{prob} = 0.4 \\ (x^2, 0.5) & \text{prob} = 0.6 \end{cases}$$

Dati x e u_2

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 1) & \text{prob} = 0.8 \\ (x^3, 4) & \text{prob} = 0.2 \end{cases}$$

Dati x e u_2

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 0.5) & \text{prob} = 0.6 \\ (x^2, 4) & \text{prob} = 0.1 \\ (x^3, 1) & \text{prob} = 0.3 \end{cases}$$

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 7 Settembre 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + 2x_1x_2 \\ \dot{x}_2 & = & u + g(x_1, x_2) \end{array} \right. \tag{1}$$

   i) Determinare, motivando la risposta, una funzione continua g tale che la legge di controllo $u^\star = -x_2$ risulti la soluzione ottima di (1) [4 PUNTI]

   ii) Sostituendo la funzione g trovata in precedenza, determinare il costo della legge di controllo $u^\star$ a partire da $x(0) = [1, -1]^\top$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 u(t)^2 dt + \frac{1}{2} x_1(2)^2 \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -2x_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   Determinare il costo della soluzione ottima $u^\star$ di (2) a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1\,1]^\top$. [7 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(2x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 4x_2(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + cx_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$

   i) Determinare valori dei parametri a, b e c tali che le matrici $K_0 = [-2 \quad -1]$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato. [4 PUNTI]

   ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -2x_1 - x_2$ abbia costo pari a 1. [2 PUNTI]

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie di ottimalitá [6 PUNTI]

5. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo a somma-zero e di equilibrio di Nash. Discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash. [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 21 Settembre 2018

1. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{aligned} \min_{u_1} J_1(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty ((\alpha+1)x(t)^2 + u_1(t)^2 - 2u_2(t)^2)dt\right\}, \\ \min_{u_2} J_2(u_1,u_2) &= \left\{\tfrac{1}{2}\int_0^\infty (-(\alpha+1)x(t)^2 + 2u_2(t)^2 - u_1(t)^2)dt\right\}, \end{aligned} \qquad s.t. \quad \dot{x} = x+\sqrt{2}u_1+2u_2 \tag{1}$$

   (a) Determinare i valori del parametro α per cui esiste un equilibrio di Nash del gioco (1) [3 PUNTI]

   (b) Scrivere le strategie di equilibrio in funzione di α [2 PUNTI]

   (c) Se $\alpha = 1$ *è* ammissibile, calcolare il costo del giocatore 2 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$. [1 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty (6x_1(t)^2 + 10x_1(t)x_2(t) + 5x_2(t)^2 + u(t)^2)dt\right\}, \quad s.t. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& -2x_1+u \\ \dot{x}_2 &=& -x_1+ax_2-u \end{array}\right. \tag{2}$$

   Determinare un valore di a, se esiste, tale che la legge di controllo $\bar{u} = x_2$ sia ottima per il problema (2), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = x_1 + x_2$. [7 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2)dt\right\}, \quad s.t. \quad \left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& x_2+u \\ \dot{x}_2 &=& u \end{array}\right. \tag{3}$$

   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u_0 = -x_1 - x_2$ e la matrice

$$P_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   possono essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman. [3 PUNTI]

   (b) Iterare l'algoritmo fino a quando la legge di controllo $u_i = K_i x$ fornisce un costo strettamente minore di 1 a partire dallo condizione iniziale $x_0 = [1,\ 0]^\top$. [3 PUNTI]

4. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare inoltre che la sequenza di soluzioni $P_T(t)$ del problema ad orizzonte finito ha un limite per $T \to \infty$. [6 PUNTI]

5. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo e di equilibrio di Nash su orizzonte infinito. Discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash nel caso ad orizzonte infinito. [6 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 28 Giugno 2019

1. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione dinamica:

$$\min_u J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_k^2 + u_k^2), \qquad s.t. \qquad x_{k+1} = x_k + u_k \tag{1}$$

   (a) Determinare il costo della legge di controllo $\bar{u}_k = 1$, $k = 0, 1, 2$, dalla condizione iniziale $x_0 = -1$. [3 PUNTI]

   (b) Confrontare il costo di $\bar{u}$ con il costo della soluzione ottima a partire dalla stessa condizione iniziale. [4 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2) dt + x(T)^2 \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = x + \sqrt{3}u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

   b) Determinare un valore del tempo terminale T, se esiste, tale che il costo della soluzione ottima a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ sia pari a $2/3$. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & a x_1 - u \end{array} \right. \tag{3}$$

   a) Determinare un valore di a, se esiste, tale che la legge di controllo $\bar{u} = -x_1 + 2x_2$ sia ottima per il problema (3), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2$. [3 PUNTI]

   b) Determinare il valore del costo di $\bar{u}$ dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\ -1]^\top$.
   [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di stato in un problema di reinforcement learning. Eseguire un passo di policy improvement per il problema rappresentato in figura (pagina seguente) con $\gamma = 0.5$ e partendo dalla policy $\pi_0 = [u_1, u_1, u_1, \star]$ descrivendo brevemente i passi eseguiti. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che il sistema a ciclo chiuso con la soluzione di LQR risulta asintoticamente stabile. [6 PUNTI]

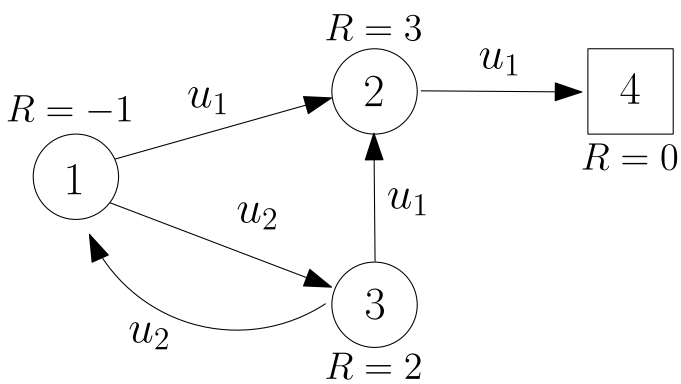


Figure 1: figura Domanda 4.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 28 Giugno 2019

1. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione dinamica:

$$\min_u J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_k^2 + u_k^2), \qquad s.t. \qquad x_{k+1} \;=\; x_k + u_k \tag{1}$$

   (a) Determinare il costo della legge di controllo $\bar{u}_k = 1$, $k = 0, 1, 2$, dalla condizione iniziale $x_0 = -2$. [3 PUNTI]

   (b) Confrontare il costo di $\bar{u}$ con il costo della soluzione ottima a partire dalla stessa condizione iniziale. [4 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2) dt + \frac{3}{2} x(T)^2 \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = x - \sqrt{2} u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

   b) Determinare un valore del tempo terminale T, se esiste, tale che il costo della soluzione ottima a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ sia pari a 4/3. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 - 2x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= a x_1 - u \end{cases} \tag{3}$$

   a) Determinare un valore di a, se esiste, tale che la legge di controllo $\bar{u} = -x_1 + 2x_2$ sia ottima per il problema (3), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2$. [3 PUNTI]

   b) Determinare il valore del costo di $\bar{u}$ dalla condizione iniziale $x(0) = [1, \,-1]^\top$. [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di stato/azione in un problema di reinforcement learning. Eseguire un passo di policy improvement per il problema rappresentato in figura (pagina seguente) con $\gamma = 0.5$ e partendo dalla policy $\pi_0 = [u_1, u_1, u_1, \star]$ descrivendo brevemente i passi eseguiti. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che la sequenza di soluzioni ottime su orizzonte finito ammette un limite per T che tende ad infinito. [6 PUNTI]

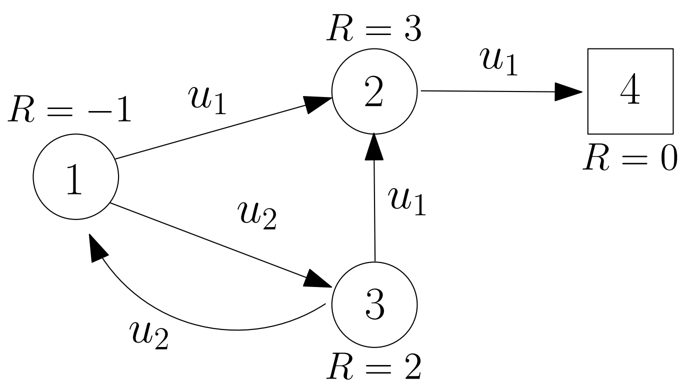


Figure 1: figura Domanda 4.

1) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 - 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = 2(x_1 - x_2) + u \end{cases} \tag{1}$$

a) Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = x_1 - x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (1). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

b) Ripetere il punto a) per la legge di controllo $u = 2x_1 - x_2$.

c) Ripetere il punto a) per la legge di controllo $u = 4x_1 - x_2$.

2) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \frac{1}{2}(1 - x_2^2)x_1 + x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \tag{2}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = -2x_1x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (2). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

3) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t))dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (u_1, u_2)$. Le matrici A, B, Q, R sono definite come

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = (u_1, u_2) = (-x_1, -x_2)$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (3). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

4) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (z_1(t)^2 - 2z_1(t)z_2(t) + z_2(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 = -\frac{3}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_1^2 z_2 - \frac{1}{2}z_1^3 + z_1 u \end{cases} \tag{5}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = z_1^2 - z_1 z_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (5). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

Trovare la soluzione dei seguenti problemi di controllo ottimo:

1)

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^1 2(x(t)^2 + u(t)^2)dt + x(1)^2 \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = 2(x+u) \tag{1}$$

2)

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = 2\sqrt{2}x + u \tag{2}$$

3)

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_2(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases} \tag{3}$$

$E1)$ Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{cases} \tag{1}$$

1. Si determini una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_0 = K_0 x$ tale che la matrice $S_0 = A + BK_0$ abbia tutti gli autovalori in -1.

2. Si determini la legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1 = K_1 x$ ottenuta eseguendo un passo dell'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [1 \;\; 0]^\top$.

$E2)$ Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (4x_1(t)^2 + 6x_2(t)^2 - 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= -2x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{2}$$

1. Si determini una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_0 = K_0 x$ tale che la matrice $S_0 = A + BK_0$ abbia tutti autovalori con parte reale negativa.

2. Si determini la legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1 = K_1 x$ ottenuta eseguendo un passo dell'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [0 \;\; 1]^\top$.

$E3)$ Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \tag{3}$$

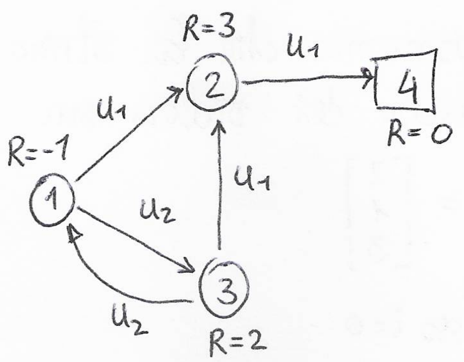
Siano date $u_0 = K_0 x$, con $K_0 = [-2 \;\; -3]$, e

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

tali che $P_0(A + BK_0) + (A + BK_0)^\top P_0 = -Q - K_0^\top K_0$. Si determini K_1 e P_1 mediante l'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [1 \;\; 2]^\top$.

$\gamma = 0.5$

POLICY IMPROVEMENT



$$\pi_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \\ - \end{bmatrix}, \quad X = \{1,2,3,4\}$$

$m = 4$

passo 1: calcolare il valore di π_0: $\quad (v_\pi(x) = R_{k+1} + \gamma v_\pi(x'), \ \forall x \in X)$

$$\begin{cases} v_{\pi_0}(1) = -1 + \frac{1}{2} v_{\pi_0}(2) \\ v_{\pi_0}(2) = 3 + \frac{1}{2} v_{\pi_0}(4) \\ v_{\pi_0}(3) = 2 + \frac{1}{2} v_{\pi_0}(2) \\ v_{\pi_0}(4) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

da $v_{\pi_0}(4) = 0$, abbiamo $v_{\pi_0}(2) = 3$

dunque $v_{\pi_0}(1) = -1 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 0.5$

$v_{\pi_0}(3) = 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{7}{2} = 3.5$

$$v_{\pi_0} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 3 \\ 3.5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

passo 2: eseguire policy improvement, calcolando la funzione $q_{\pi_0}(x,u)$

$$q_{\pi_0}(x,u) = R_{k+1} + \gamma \underbrace{v_{\pi_0}(x')}_{\text{calcolato in precedenza}}$$

$\leftarrow x'$, funzione della scelta di u

in questo caso:

$q_{\pi_0}(x, u_1) = v_{\pi_0}(x)$ (perché π_0 sceglie sempre u_1)

calcolare dunque $q_{\pi_0}(x, u_2)$

$q_{\pi_0}(1, u_2) = -1 + \frac{1}{2} v_{\pi_0}(3) = -1 + 1.75 = 0.75$

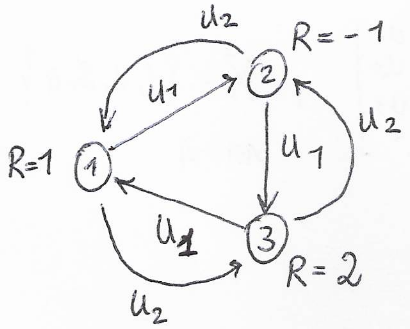
$q_{\pi_0}(2, u_2) = *$ (non si può scegliere u_2 nello stato 2)

$q_{\pi_0}(3, u_2) = 2 + \gamma v_{\pi_0}(1) = 2 + 0.25 = 2.25$

$q_{\pi_0}(4, u_2) = *$

quindi $\Rightarrow$
$$q_{\pi_0}(x,u) = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \hline 0.5 & 0.75 \\ 3 & * \\ 3.5 & 2.25 \\ * & * \end{array} \Rightarrow q_{\pi_0}(1,u_2) > v_{\pi_0}(1) \Rightarrow \pi_1 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_1 \\ * \end{bmatrix}$$

VALUE ITERATION



$\gamma = 1$

supponiamo che la stima iniziale dei valori sia

$$v_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

stima al passo $i=0$

eseguire un passo di "value iteration" $\quad v_{i+1}(x) = \max\limits_{u} \{ R_{k+1} + \gamma v_i(x') \} \quad \forall x$

$$v_1(1) = \max_u \{ \underset{R}{1} + \underset{\gamma}{1} \cdot v_0(x') \} = \max \{ 1+1, \; 1+3 \} = 4$$

stima aggiornata al passo $i=1$

con u_1, lo stato successivo è $x'=2$ e $v_0(2)=1$

con u_2, $x'=3$ e $v_0(3)=3$

$$v_1(2) = \max \{ -1+3, \; -1+2 \} = 2$$

$$v_1(3) = \max \{ 2+2, \; 2+1 \} = 4$$

Quindi

$$v_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^T \left(2x(t)^2 + 2u(t)^2\right) dt + \frac{1}{2} x(T)^2 \right\} \qquad (1)$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{x} = x - \sqrt{2}u, \quad x(1) = \sqrt{2}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]

   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 2 [3 PUNTI]

   iii) Assumendo $T = 4$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(1)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 + u \end{array} \right. \qquad (2)$$

   a) Supponendo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, verificare se $\bar{u} = -x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]

   b) Supponendo $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{11}{4}$ e $c = -\frac{13}{4}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad V_2(x) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad V_3(x) = 3x_1x_2 + 2x_2^2,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare inoltre che la sequenza di soluzioni $P_T(t)$ del problema ad orizzonte finito ha un limite per $T \to \infty$ [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO B

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} &\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_2^T \left(x(t)^2 + 2u(t)^2 \right) dt + \frac{1}{2} x(T)^2 \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = x - 2u, \quad x(2) = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 1.2 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 4$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(2)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 - 2x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 - u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$, verificare se $\bar{u} = 2x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{7}{6}$ e $c = -\frac{1}{3}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2\,, \quad V_2(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\,, \quad V_3(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\,,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e derivare l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO C

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$
\begin{aligned}
&\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_2^T \left(x(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \\
&\text{s.t.} \quad \dot{x} = \sqrt{3}x - 2u, \quad x(2) = \sqrt{2}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 2 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 3$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(2)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$
\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 - u \end{array} \right. \tag{2}
$$

   a) Supponendo $a = -\frac{3}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{4}{3}$, verificare se $\bar{u} = 3x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -1$, $b = -\frac{11}{2}$ e $c = -\frac{1}{2}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$
V_1(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 \,, \quad V_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \,, \quad V_3(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2 \,,
$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di *ottimalità* [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO D

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} &\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^T \left(3x(t)^2 + u(t)^2\right) dt \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = \sqrt{2}x + u, \quad x(1) = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 1.5 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 3$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(1)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -\dfrac{3}{2}$, $b = -1$, $c = -1$, verificare se $\bar{u} = -x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{13}{6}$ e $c = -\dfrac{5}{6}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = \frac{1}{4}x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2\,, \quad V_2(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\,, \quad V_3(x) = -3x_1x_2 + 2x_2^2\,,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dare la definizione di problema di controllo ottimo lineare-quadratico ad orizzonte finito e derivare l'equazione differenziale di Riccati a partire dall'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman [10 PUNTI]