OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned}&\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^T \left(2x(t)^2 + 2u(t)^2\right) dt + \frac{1}{2} x(T)^2 \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = x - \sqrt{2}u, \quad x(1) = \sqrt{2}\end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 2 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 4$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(1)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &=& cx_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, verificare se $\bar{u} = -x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{11}{4}$ e $c = -\frac{13}{4}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad V_2(x) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad V_3(x) = 3x_1x_2 + 2x_2^2,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare inoltre che la sequenza di soluzioni $P_T(t)$ del problema ad orizzonte finito ha un limite per $T \to \infty$ [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO B

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} &\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_2^T \left(x(t)^2 + 2u(t)^2 \right) dt + \frac{1}{2} x(T)^2 \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = x - 2u, \quad x(2) = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 1.2 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 4$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(2)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x_1(t)^2 - 2x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 - u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$, verificare se $\bar{u} = 2x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{7}{6}$ e $c = -\frac{1}{3}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = 4x_1^2 + 2x_1x_2\,, \quad V_2(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\,, \quad V_3(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\,,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e derivare l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO C

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} &\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_2^T \left(x(t)^2 + u(t)^2 \right) dt \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = \sqrt{3}x - 2u, \quad x(2) = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]

   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 2 [3 PUNTI]

   iii) Assumendo $T = 3$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(2)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 & = & cx_2 - u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -\frac{3}{2}$, $b = -1$, $c = \frac{4}{3}$, verificare se $\bar{u} = 3x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]

   b) Supponendo $a = -1$, $b = -\frac{11}{2}$ e $c = -\frac{1}{2}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

   $$V_1(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2\,, \quad V_2(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2\,, \quad V_3(x) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 + \frac{3}{2}x_2^2\,,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di *ottimalità* [10 PUNTI]

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO D

Esonero 9 Maggio 2018

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{aligned} &\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_1^T \left(3x(t)^2 + u(t)^2\right) dt \right\} \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x} = \sqrt{2}x + u, \quad x(1) = \sqrt{2} \end{aligned} \tag{1}$$

   i) Determinare la legge di controllo $u^\star(t)$ che minimizza l'indice di costo J [6 PUNTI]
   ii) Calcolare il valore del tempo terminale T per il quale il costo della soluzione ottima sia pari a 1.5 [3 PUNTI]
   iii) Assumendo $T = 3$, calcolare il valore della legge di controllo ottima all'istante iniziale $u^\star(1)$ [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (3x_1(t)^2 + 2x_1(t)x_2(t) + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &=& cx_2 + u \end{array} \right. \tag{2}$$

   a) Supponendo $a = -\frac{3}{2}$, $b = -1$, $c = -1$, verificare se $\bar{u} = -x_2$ sia ottima per il problema (2), altrimenti determinare un costo corrente significativo rispetto al quale $\bar{u}$ sia ottima [6 PUNTI]
   b) Supponendo $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{13}{6}$ e $c = -\frac{5}{6}$, indicare, motivando la risposta, quale tra le seguenti funzioni

$$V_1(x) = \frac{1}{4}x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2\,, \quad V_2(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\,, \quad V_3(x) = -3x_1x_2 + 2x_2^2\,,$$

   sia la funzione valore del problema (2) [4 PUNTI]

3. Dare la definizione di problema di controllo ottimo lineare-quadratico ad orizzonte finito e derivare l'equazione differenziale di Riccati a partire dall'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman [10 PUNTI]