Teoria dei Giochi – Prova del 30 Novembre 2012

Cognome, Nome, Corso di Laurea, email: ________________________________

Esercizio 1. Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,3,4,6\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{2,5,36,216\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Il primo giocatore vince un euro se $x < y$ e y è una potenza di x, oppure se $x > y$ e x non è una potenza di y. (Analogamente, il secondo giocatore vince un euro se $x > y$ e x è una potenza di y, oppure se $x < y$ e y non è una potenza di x.)

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

1.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

1.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risp.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

1.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$

e la seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = \frac{1}{2}, \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

1.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

1.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

1.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Soluzione

1.1 Giocare 6 è una strategia debolmente dominante per il primo giocatore; giocare 5, 36, 216 sono strategie debolmente dominanti per il secondo giocatore.

1.2 L'incrocio di strategie debolmente dominanti restituisce equilibri di Nash, quindi $(6,5),(6,36),(6,216)$ sono equilibri di Nash. Possiamo però verificare che anche $(6,2)$ è un equilibrio di Nash.

1.3 La matrice C dei payoff per il primo giocatore (in forma di costo) è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{4} c_{ij} \xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 4$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla soluzione fornita è $z = \frac{1}{2}$. Quindi, se il primo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{4} c_{ij} \xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 4$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 4$$

$$\sum_{j=1}^{4} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza ad entrambe le soluzioni fornite è $w = -1$. Quindi, se il secondo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

1.4 - 1.6 Abbiamo visto al punto 1.1 che giocare 6 è una strategia debolmente dominante per il primo giocatore e giocare 5, 36, 216 sono strategie debolmente dominanti per il secondo giocatore. Sappiamo che una strategia debolmente dominante è anche conservativa, e che le strategie conservative pure sono (particolari) strategie conservative miste. Possiamo concludere quindi che:

- il valore del gioco, ottenuto incrociando le strategie conservative dei giocatori, è pari a -1;
- anche (1/4,1/4,1/4,1/4) e (1/2,1/2,0,0) sono strategie conservative per il secondo giocatore. Infatti, se il secondo giocatore utilizza queste strategie, paga, nel caso peggiore, (in media) proprio -1, il valore del gioco;
- poiché l'incrocio di strategie miste conservative determina equilibri di Nash, sono equilibri di Nash in strategia mista: ((0,0,0,1), (0,0,0,1)); ((0,0,0,1), (0,0,1,0)); ((0,0,0,1), (0,1,0,0)); ((0,0,0,1), (1,0,0,0)); ((0,0,0,1), (1/4,1/4,1/4,1/4)); ((0,0,0,1), (1/2,1/2,0,0));

Esercizio 2 In un parlamento siedono 6 deputati. Di questi, 4 provengono da una stessa regione A, uno proviene da una regione B e uno proviene da una regione C.

2.1 Supponete che una legge possa essere approvata se e solo se a suo favore votano: i 4 deputati di A (più eventualmente il deputato di B e/o il deputato di C); oppure sia il deputato di B che il deputato di C (più eventualmente qualche deputato di A). Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

2.2 Supponete ora che una legge possa essere approvata se e solo se a suo favore votano: i 4 deputati di A ed almeno uno tra il deputato di B e il deputato di C; oppure sia il deputato di B che il deputato di C (più eventualmente qualche deputato di A). Se è possibile formulare il processo di approvazione di una legge come un gioco cooperativo, determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificando la risposta). Se non è possibile, spiegare perché.

Soluzione 2.1 Il gioco non può' essere formulato come un gioco cooperativo, perché non vale la superadditività: esistono due coalizioni disgiunte a valore 1, quella formata dai deputati di A e quella fomata dal deputato di B e dal deputato di C.

2.2 Adesso vale la superadditività e il gioco può essere formulato come un gioco cooperativo.

Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\#\text{ permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un deputato i proveniente dalla regione A. Le permutazioni in cui A_p^i vince, $A_p^i \setminus i$ perde sono sono quelle in cui il deputato si trova in quinta posizione e in sesta posizione c'e' il deputato di B oppure il deputato di C.

Quindi il valore del deputato è pari a $\frac{2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{15}$: quindi il potere di ciascun deputato della regione A è $\frac{1}{15}$.

Per quanto riguarda il deputato della regione B e il deputato di C, possiamo concludere che il loro valore di Shapley è:

$$S(v) = \frac{1}{2}\left(1 - 4 \cdot \frac{1}{15}\right) = \frac{11}{30}.$$

Esercizio 3 Considera il seguente gioco non cooperativo. È dato un grafo (bipartito) con vertici $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, y_4$ e spigoli $\{a_1 = x_1y_1, a_2 = x_1y_2, a_3 = x_2y_2, b_1 = x_1y_3, b_2 = x_3y_1, c_1 = x_2y_1, c_2 = x_3y_3, c_3 = x_3y_4\}$.

Ci sono 3 giocatori: il giocatore A controlla gli spigoli a_1, a_2, a_3; il giocatore B controlla gli spigoli b_1, b_2; il giocatore C controlla gli spigoli c_1, c_2, c_3. Gli spigoli controllati da ciascun giocatore sono le sue possibili strategie: quindi A ha disposizione 3 strategie, B ha disposizione 2 strategie, C ha disposizione 3 strategie. Ogni giocatore sceglie quindi uno spigolo tra quelli a sua disposizione e il payoff, in forma di utilità, è determinato in questo modo:

(1) se i 3 spigoli scelti formano un matching di cardinalità 3 (ovvero sono tre spigoli tali che nessuna coppia di spigoli ha un estremo in comune), il payoff di ogni giocatore è 1;

(2) se i 3 spigoli non formano un matching di cardinalità 3 ma contengono un matching di cardinalità 2 (ovvero esiste una coppia di spigoli, tra i 3 scelti, che non ha un estremo in comune), il payoff di ogni giocatore è 0;

(3) se i 3 spigoli non formano un matching di cardinalità 3 e non contengono un matching di cardinalità 2 (ovvero i 3 spigoli scelti hanno tutti e 3 un estremo in comune), il payoff di ogni giocatore è 0.

Per ognuna delle seguenti affermazioni dire se essa è vera o falsa. Se una affermazione è ritenuta vera, non è necessaria giustificarla. Se una affermazione è ritenuta falsa, è necessario esibire un controesempio.

3.1 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (1), allora siamo sempre su un equilibrio di Nash.

3.2 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (1), allora non siamo mai su un equilibrio di Nash.

3.3 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (2), allora siamo sempre su un equilibrio di Nash.

3.4 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (2), allora non siamo mai su un equilibrio di Nash.

3.5 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (3), allora siamo sempre su un equilibrio di Nash.

3.6 Se i tre spigoli scelti rientrano nel caso (3), allora non siamo mai su un equilibrio di Nash.

3.7 Per ciascun giocatore, una qualunque strategia è debolmente dominante.

3.8 Per ciascun giocatore, nessuna strategia è debolmente dominante.

Soluzione 3.1, 3.2 Esiste una sola scelta dei giocatori che conduce a un matching di cardinalità 3, quello formato dagli spigoli a_3, b_1, c_3. Ed è immediato verificare che è un equilibrio di Nash. Quindi 3.1 è vera e 3.2 è falsa (e il controesempio è appunto il matching $\{a_3, b_1, c_3\}$).

3.3, 3.4 Esistono diverse scelte dei giocatori che conducono a un matching di cardinalità 2. Alcune di questi matching diventerebbero di cardinalità 3 semplicemente cambiando uno spigolo (ovvero la scelta di un giocatore): questi quindi non corrispondono ad equilibri di Nash: per esempio $\{a_3, b_1, c_1\}$. Altre scelte conducono a un matching di cardinalità 2 che non potrebbe diventare di cardinalità 3 semplicemente cambiando *uno* spigolo: questi quindi corrispondono ad equilibri di Nash: per esempio $\{a_2, b_2, c_2\}$. Quindi 3.3 e 3.4 sono false (e i controesempi sono rispettivamente i due matching precedenti).

3.5, 3.6 Esiste una sola scelta dei giocatori che conduce a un matching di cardinalità 3, quello formato dagli spigoli a_1, b_2, c_1. Ed è immediato verificare che è un equilibrio di Nash. Quindi 3.5 è vera e 3.6 è falsa (e il controesempio è appunto il matching $\{a_1, b_2, c_1\}$).

3.7, 3.8 In generale, qualunque cosa facciano gli altri giocatori, un giocatore può giocare una qualunque delle sue strategie e il payoff sarà 0, perché non si formerà un matching di cardinalità 3. C'è una sola eccezione per ogni giocatore: se B gioca b_1 e C gioca c_3, la migliore risposta per A è giocare a_3; se A gioca a_3 e C gioca c_3, la migliore risposta per B è giocare b_1; se B gioca b_1 e A gioca a_3, la migliore risposta per C è giocare c_3. Quindi giocare a_3 è una strategia debolmente dominante per A; giocare b_1 è una strategia debolmente dominante per B; giocare c_3 è una strategia debolmente dominante per C; e nessuna altra strategia è debolmente dominante per i giocatori. Quindi 3.7 e 3.8 sono false.

Esercizio 4 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti ordini totali rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna:

- Uomo 1: $\{C,B,A,D\}$; Uomo 2: $\{D,C,A,B\}$; Uomo 3: $\{D,A,B,C\}$; Uomo 4: $\{A,D,C,B\}$.
- Donna A: $\{2,1,3,4\}$; Donna B: $\{4,3,1,2\}$; Donna C: $\{4,3,2,1\}$; Donna D: $\{2,3,4,1\}$.

4.1 Il matching $M = \{(1,B),(2,A),(3,D),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

4.2 Esiste un matching M che non sia stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{1,B\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{3,B\}$? (In caso affermativo, esibire tale matching; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

4.3 Esiste un matching M che non sia stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{2,A\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{4,C\}$? (In caso affermativo, esibire tale matching; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

4.4 Si considerino ora le seguenti graduatorie di preferenza *parziali*:

- Uomo 1: $\{D,?,?,?\}$; Uomo 2: $\{A,?,?,B\}$; Uomo 3: $\{D,?,?,B\}$; Uomo 4: $\{?,?,?,?\}$.
- Donna A: $\{4,?,?,1\}$; Donna B: $\{1,2,3,4\}$; Donna C: $\{?,?,3,4\}$; Donna D: $\{2,?,1,?\}$.

È possibile completare le graduatorie in modo tale che il matching $M = \{(1,D),(2,C),(3,A),(4,B)\}$ risulti stabile? (In caso affermativo, esibire un tale completamento; in caso negativo, non è invece necessario giustificare la risposta).

Soluzione:

4.1 M non è stabile. Non è stabile rispetto alla coalizione $S = \{2,D\}$.

4.2 $M = \{(1,A),(2,B),(3,C),(4,D)\}$

4.3 Un matching M non stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{2,A\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{4,C\}$ dovrebbe assegnare la donna B sia all'uomo 2 che al 4, quindi è impossibile che esista.

4.4 Un possibile completamento:

- Uomo 1: $\{D,A,B,C\}$;
- Uomo 2: $\{A,C,D,B\}$;
- Uomo 3: $\{D,A,C,B\}$;
- Uomo 4: $\{B,A,C,D\}$.
- Donna A: $\{4,3,2,1\}$;
- Donna B: $\{1,2,3,4\}$;
- Donna C: $\{2,1,3,4\}$;
- Donna D: $\{2,4,1,3\}$.