**Teoria dei Giochi 2020/21**

# Compiti

*G. Oriolo* *Esercizi 5*

**Esercizio 1** Consideriamo tre aziende $A$, $B$ e $C$, uniche produttrici di un certo bene. Il guadagno che possono ottenere dalla vendita di un'unità di bene prodotto dipende dal fatto che esse si coalizzino o meno. L'utilità associata ad ogni possibile coalizione è la seguente:

$$v(\{A\}) = 2$$
$$v(\{B\}) = 1$$
$$v(\{C\}) = 1$$
$$v(\{A, B\}) = 6$$
$$v(\{A, C\}) = 6$$
$$v(\{B, C\}) = 4$$
$$v(\{A, B, C\}) = 18$$

e per definizione $v(\emptyset) = 0$.

**(i)** Verificare che la funzione di utilità data è superadditiva.

**(ii)** Individuare il nucleo del gioco.

**Esercizio 2** Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti $A$ e $B$ in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = (w_A^1, w_A^2) = (3, 2)$ (risp. $w_B = (w_B^1, w_B^2) = (1, 4)$) e di una funzione di produzione $f_1(w_A) = w_A^1 + 3w_A^2$ (risp. $f_2(w_B) = 2w_B^1 + w_B^2$).
Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene e determinare un'imputazione nel nucleo di tale gioco.

**Esercizio 3** Dato il gioco $(N, v)$ con $N = \{1, 2, 3\}$ e $v$ definita come

$$\begin{array}{ll} v(S) = \frac{\rho}{5} & \text{se } S \subset N, |S| = 1 \\ v(S) = \frac{\rho}{2} & \text{se } S \subset N, |S| = 2 \\ v(S) = 1 & \text{se } S = N \end{array}$$

dove $\rho \geq 0$ e $v(\emptyset) = 0$,

Esibire un vettore di pesi bilanciato $\lambda_S$ che dimostra che il gioco è non bilanciato per $\rho = \frac{10}{7}$.

**Esercizio 1 (i)** Sappiamo che una funzione è superadditiva se e solo se per ogni $Q \subseteq N$, $\forall$ partizione di $Q \subseteq N$ in classi $S_1, \ldots, S_h$ si ha che $v(Q) \geq \sum_{i=1}^{h} v(S_i)$: naturalmente, possiamo assumere che le classi siano almeno due e tutte non vuote. Segue che dobbiamo considerare: $Q = \{A, B, C\}$ e una sua qualunque partizione in due o tre classi (non vuote); $Q = \{A, B\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote); $Q = \{A, C\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote); $Q = \{B, C\}$ e la sua partizione in due classi (non vuote).

Sia $Q = \{A, B, C\}$. Le possibili partizioni di $Q$ sono $P_Q^1 = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}\}$, $P_Q^2 = \{\{A, B\}, \{C\}\}$, $P_Q^3 = \{\{A, C\}, \{B\}\}$, $P_Q^4 = \{\{A\}, \{B, C\}\}$. Verifichiamo quindi che

$$
\begin{array}{lll}
v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B\}) + v(\{C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 2 + 1 + 1 = 4 \\
v(Q) \geq v(\{A, B\}) + v(\{C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 6 + 1 = 7 \\
v(Q) \geq v(\{A, C\}) + v(\{B\}) & \Rightarrow & 18 \geq 6 + 1 = 7 \\
v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B, C\}) & \Rightarrow & 18 \geq 2 + 4 = 6
\end{array}
$$

Sia $Q = \{A, B\}$. L'unica partizione di $Q$ è $P_Q^1 = \{\{A\}, \{B\}\}$, verifichiamo quindi che

$$
v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{B\}) \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 2 + 1 = 3
$$

Sia $Q = \{A, C\}$. L'unica partizione di $Q$ è $P_Q^1 = \{\{A\}, \{C\}\}$, verifichiamo quindi che

$$
v(Q) \geq v(\{A\}) + v(\{C\}) \quad \Rightarrow \quad 6 \geq 2 + 1 = 3
$$

Sia $Q = \{B, C\}$. L'unica partizione di $Q$ è $P_Q^1 = \{\{B\}, \{C\}\}$, verifichiamo quindi che

$$
v(Q) \geq v(\{B\}) + v(\{C\}) \quad \Rightarrow \quad 4 \geq 1 + 1 = 2
$$

Da cui possiamo concludere che la funzione $v$ è una funzione superadditiva.

**(ii)** Sappiamo che il nucleo del gioco è rappresentato dal seguente insieme di equazioni e disequazioni:

$$
\begin{array}{l}
\alpha_1 \geq 2 \\
\alpha_2 \geq 1 \\
\alpha_3 \geq 1 \\
\alpha_1 + \alpha_2 \geq 6 \\
\alpha_1 + \alpha_3 \geq 6 \\
\alpha_2 + \alpha_3 \geq 4 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18
\end{array}
$$

**Esercizio 2** Per formalizzare la situazione descritta come un gioco cooperativo $(N, v)$ dobbiamo definire la funzione $v$. In particolare le funzioni di produzione di ciascun giocatore rappresentano rispettivamente $v(\{A\}) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 9$ e $v(\{B\}) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6$. Per determinare il valore $v(\{A, B\})$ dobbiamo risolvere il seguente problema di programmazione lineare:

$$
\max z_A^1 + 3z_A^2 + 2z_B^1 + z_B^2
$$

$$z_A^1 + z_B^1 = 4$$

$$z_A^2 + z_B^2 = 6$$

$$z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0$$

Utilizziamo le due equazioni per sostituire le quantità $z_B^1 = 4 - z_A^1$ e $z_B^2 = 6 - z_A^2$. Possiamo così ottenere il seguente problema in due sole variabili

$$\max -z_A^1 + 2z_A^2 + 14$$

$$0 \leq z_A^1 \leq 4$$

$$0 \leq z_A^2 \leq 6$$

Possiamo risolvere il PL per via geometrica; osserviamo che i vertici del poliedro dei vincoli sono i punti $(0,0)$ $(4,0)$ $(0,6)$ e $(4,6)$. Se andiamo a valutare la funzione obiettivo nei quattro vertici otteniamo che il massimo è raggiunto nel punto $(0,6)$ ed il valore ottimo è pari a 26. Ritornando quindi alla formulazione originaria del problema possiamo concludere che $v(\{A,B\}) = 26$ e la allocazione ottima delle risorse è $(z_A^1, z_A^2) = (0,6)$ e $(z_B^1, z_B^2) = (4,0)$. Per determinare un'imputazione del nucleo di questo gioco dobbiamo trovare due valori $\alpha_1$ ed $\alpha_2$ tali che:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \geq 9 \\ \alpha_2 \geq 6 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 26 \end{array}$$

Un'imputazione nel nucleo potrebbe quindi essere ad esempio $(\alpha_1, \alpha_2) = (16, 10)$.

**Esercizio 3** Ricordiamo che in questo caso $\mathcal{N}_p = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$. Per $\rho = \frac{10}{7}$ otteniamo:

$$\begin{array}{ll} v(S) = \frac{2}{7} & \text{se } |S| = 1 \\ v(S) = \frac{5}{7} & \text{se } |S| = 2 \\ v(S) = 1 & \text{se } S = N \end{array}$$

Allora se prendiamo $\lambda_S = \left[0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, otteniamo

$$\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) = \frac{1}{2}(\frac{5}{7} \cdot 3) = \frac{15}{14} > v(N) = 1$$