Cinematica nel piano

Rappresentare la cinematica diretta completa dei robot nel piano.

Calcolare la cinematica diretta significa esprimere le coordinate del punto terminale (end-effector) del robot in funzione delle variabili di giunto che sono tante quante sono le variabili di libertà. In particolare se un robot possiede n gradi di libertà, occorre definire n+1 sistemi di riferimento e la notazione utilizzata è la seguente:

$$n\,\mathrm{DOF} \Longleftrightarrow n+1\,\text{sistemi di riferimento}\,R_0, R_1, \ldots, R_n$$

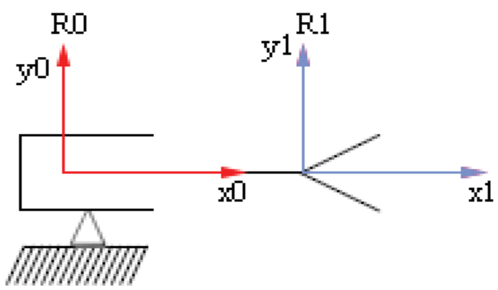
ove R_0 è il sistema di riferimento inerziale e i restanti sistemi di riferimento $R_1, \ldots, R_n$ sono sistemi di riferimento solidali al link, ma non interziali.

L'idea che occorre seguire per calcolare la cinematica diretta di un robot consiste, dopo aver fissato correttamente i sistemi di riferimento, nel sovrapporre i sistemi di riferimento tramite rotazioni e traslazioni. La matrice risultante da una rotazione e una traslazione viene detta matrice di trasformazione.

N.B.:*in caso di variabili di giunto (rotoidali(R),prismatici(P)) il simbolo utilizzato è q_i. *Inoltre, indichiamo con Q(R,0) la matrice di rotazione e R(I,d) la matrice di traslazione.

Solo nel caso planare effettuare una rotazione e poi una traslazione è equivalente ad effettuare una rotazione e poi una traslazione.

1 DOF P - 1 gradi di libertà prismatico



$$T_{01} := \text{matrice di trasformazione da}\,R_o \to R_1$$

$$T_{01}(q_1) = \begin{pmatrix} \text{rotazione} & \text{traslazione} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(0) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & q1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & q_1\,e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare, il blocco 2x2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di rotazione in cui gli assi sono paralleli alla base e il vettore $\begin{pmatrix} q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di posizione con q_1, ascissa, e 0 ordinata.

La funzione rotTrasl(a,q1,k) restituisce la matrice di rotazione Q(R,0) con parametri rotTrasl(r,q1,0) e la matrice di traslazione R(I,d) con parametri rotTrasl(d,0,q1).

(%i1) rotTrasl(a,q1,k):=block([res],
```
rotTrasl(a,q1,k):=block([res],
                        zero:ident(3),
                        zero[3][1]:0,
                        zero[3][2]:0,
                        zero[3][3]:1,
                        if a= r then(
                             zero[1][1]:cos(q1),
                             zero[1][2]:-sin(q1),
                             zero[2][1]:sin(q1),
                             zero[2][2]:cos(q1),
                             res:zero)
                        elseif a = d then(
                           zero[1][3]:k[1],
                           zero[2][3]:k[2],
                           res:zero)
                        else
                          res:"Not rotation or traslation selected"
                        )
```

(%o1) rotTrasl(a, $q1$, k) := **block** ([res], zero: ident(3), $(\mathrm{zero}_3)_1$: 0, $(\mathrm{zero}_3)_2$: 0, $(\mathrm{zero}_3)_3$: 1, **if** a = r **then** ($(\mathrm{zero}_1)_1$: cos ($q1$), $(\mathrm{zero}_1)_2$: $-$sin ($q1$), $(\mathrm{zero}_2)_1$: sin ($q1$), $(\mathrm{zero}_2)_2$: cos ($q1$), res: zero) **elseif** $a = d$ **then** ($(\mathrm{zero}_1)_3$: k_1, $(\mathrm{zero}_2)_3$: k_2, res: zero) **else** res: Not rotation or traslation selected)

Matrice di rotazione $Q(0,0)$ in quanto non si necessità una rotazione per far coincidere gli assi del sitema di riferimento R_0 con quelli del sistema di riferimento R_1.

(%i2) `Q:rotTrasl(r,0,[0,0])`

(%o2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice di traslazione $R(I,q_1)$ in quanto occorre traslare di q1, variabile di giunto prismatico, per far coincidere le origini del sistema di riferimento R_0 con R_1.

(%i3) `R:rotTrasl(d,0,[q[1],0])`

(%o3) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

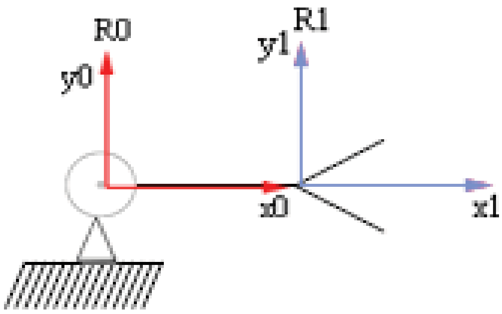
La matrice di trasformazione risultante, che rappresenta la cinematica diretta del robot 1 DOF prismatico T_{01}, risulterà uguale a: $T_{01} = Q(0,0)\,R(I,q_1)$

(%i4) `TP[01]:Q.R`

(%o4) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i5)

1 DOF R - 1 grado di libertà rotoidale



$$T_{01} := \text{matrice di trasformazione da } R_o \rightarrow R_1$$

$$T_{01}(q_1) = \begin{pmatrix} \text{rotazione} & \text{traslazione} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(q_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & L_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(q_1) & L_1\, e_x\, R(q_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & L_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & L_1\, s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 := \text{distanza che congiunge } R_0 \text{ e } R_1$$

N.B.: $\boldsymbol{c_1 \longrightarrow \cos(q_1); s_1 \longrightarrow \sin(q_1);}$

La matrice di rotazione $Q(q_1,\, 0)$ permette di orientare il sistema di riferimento R_0 come il sistema di riferimento $\text{dell}'\text{end} - \text{effector}\ R_1$. Poiché il giunto è rotoidale, dovremo ruotare R_0 di un angolo pari alla variabile di giunto q_1.

```
(%i5) Q:rotTrasl(r,q[1],0);
```

(%o5) $\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di traslazione $R(I, L_1)$ permette di far coincidere le origini del sistema di riferimento R_0 e R_1 tramite una traslazione L_1, coincidente con la distanza tra il sistema di riferimento R_0 e R_1.

```
(%i6) R:rotTrasl(d,0,[L[1],0]);
```

(%o6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di trasformazione risultante, che rappresenta la cinematica diretta del robot 1 DOF rotoidale T_{01}, risulterà uguale a: $T_{01} = Q(0,0)\, R(I, q_1)$

```
(%i7) TR[01]:Q.R;
```

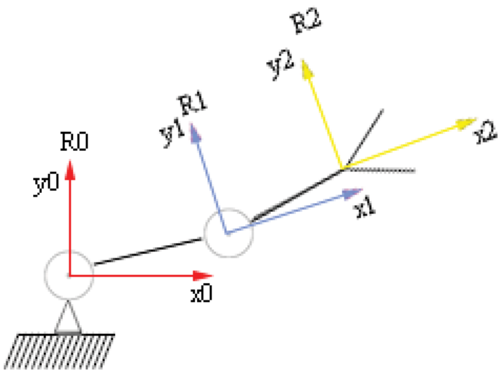
(%o7) $\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & L_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & L_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i8)
```

-I termini $\begin{pmatrix} L_1\cos(q_1) \\ L_1\sin(q_1) \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} \cos(q1) & -\sin(q1) \\ \sin(q1) & \cos(q1) \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.

2 DOF RR - 2 gradi di libertà entrambi rotoidali



$$T_{02} := \text{matrice di trasformazione da } R_o \rightarrow R_2$$

La matrice di trasformazione T_{01} corrisponde alla matrice di un robot planare 1 DOF R, mentre la matrice T_{12} corrisponde alla matrice di trasformazione tra la il sistema di riferimento R_1 e R_2:

$$T_{01}(q_1) = \begin{pmatrix} R(q_1) & L_1 R(q_1)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12}(q_2) = \begin{pmatrix} R(q_2) & L_2\, R(q_2)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{02} = T_{01}\, T_{12} = \begin{pmatrix} R(q_1) & L_1 R(q_1)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(q_2) & L_2\, R(q_2)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{12} & L_2 R_{12} e_x + L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $R_{12} = R(q_1 + q_2) = R(q_1)\, R(q_2) = R_1\, R_2$

$$T_{02} = \begin{pmatrix} c_{12} & -s_{12} & L_2\, c_{12} + L_1\, c_1 \\ s_{12} & c_{12} & L_2\, s_{12} + L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $L_1 := \text{distanza che congiunge } R_0 \text{ e } R_1$

$L_2 := \text{distanza che congiunge } R_1 \text{ e } R_2$

N.B.: $\boldsymbol{c_{12} \longrightarrow \cos(q_1 + q_2); s_{12} \longrightarrow \sin(q_1 + q_2);}$

Matrice di trasformazione T_{01} analoga al robot planare 1 DOF R

```
(%i8) TR[01];
```

(%o8) $\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & L_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & L_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di rotazione $Q2(q_2,\ 0)$ permette di orientare il sistema di riferimento R_1 come il sistema di riferimento dell'end − effector R_2. Poiché il giunto è rotoidale, dovremo ruotare R_1 di un angolo pari alla variabile di giunto q_2.

```
(%i9) Q2:rotTrasl(r,q[2],0);
```

(%o9) $\begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di traslazione $R(I, L_2)$ permette di far coincidere le origini del sistema di riferimento R_1 e R_2 tramite una traslazione L_2, coincidente con la distanza tra il sistema di riferimento R_1 e R_2.

```
(%i10) R2:rotTrasl(d,0,[L[2],0]);
```

$$(\%o10)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & L_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) T[12]:Q2.R2;
```

$$(\%o11)\quad \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & L_2\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & L_2\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i12) TRR[02]:trigreduce(TR[01].T[12])
```

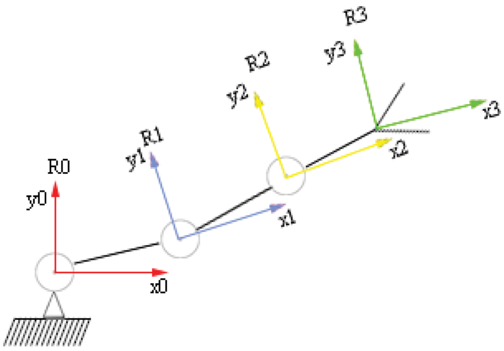
$$(\%o12)\quad \begin{pmatrix} \cos(q_2+q_1) & -\sin(q_2+q_1) & L_2\cos(q_2+q_1)+L_1\cos(q_1) \\ \sin(q_2+q_1) & \cos(q_2+q_1) & L_2\sin(q_2+q_1)+L_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i13)
```

-I termini $\begin{pmatrix} L_2\cos(q_2+q_1)+L_1\cos(q_1) \\ L_2\sin(q_2+q_1)+L_1\sin(q_1) \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} \cos(q_2+q_1) & -\sin(q_2+q_1) \\ \sin(q_2+q_1) & \cos(q_2+q_1) \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.

3 DOF RRR - 3 gradi di libertà rotoidali



$$T_{03} := \text{matrice di trasformazione da } R_0 \rightarrow R_3$$

$$T_{01}(q_1) = \begin{pmatrix} R(q_1) & L_1 R(q_1)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12}(q_2) = \begin{pmatrix} R(q_2) & L_2\, R(q_2)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{23}(q_3) = \begin{pmatrix} R(q_3) & L_3\, R(q_3)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{03} = T_{01}\, T_{12}\, T_{23} = \begin{pmatrix} R(q_1) & L_1 R(q_1)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(q_2) & L_2\, R(q_2)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(q_3) & L_3\, R(q_3)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R_{12} & L_2 R_{12} e_x + L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(q_3) & L_3\, R(q_3)\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} R_1 R_2 R_3 & L_3 R_1 R_2 R_3 e_x + L_2 R_{12} e_x + L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $R_{12} = R(q_1 + q_2) = R(q_1)\, R(q_2) = R_1\, R_2$,

$L_1 :=$ distanza che congiunge R_0 e R_1

$L_2 :=$ distanza che congiunge R_1 e R_2

$L_3 :=$ distanza che congiunge R_2 e R_3

La matrice di trasformazione T_{02} è identica alla matrice di un robot planare 2 DOF RR

```
(%i13) TRR[02];
```

(%o13) $$\begin{pmatrix} \cos(q_2+q_1) & -\sin(q_2+q_1) & L_2\cos(q_2+q_1) + L_1\cos(q_1) \\ \sin(q_2+q_1) & \cos(q_2+q_1) & L_2\sin(q_2+q_1) + L_1\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di rotazione $Q_3(q_3,\ 0)$ permette di orientare il sistema di riferimento R_2 come il sistema di riferimento dell$'$end $-$ effector R_3. Poiché il giunto è rotoidale, dovremo ruotare R_1 di un angolo pari alla variabile di giunto q_3.

```
(%i14) Q3:rotTrasl(r,q[3],0);
```

(%o14) $$\begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & 0 \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di traslazione $R(I, L_3)$ permette di far coincidere le origini del sistema di riferimento R_2 e R_3 tramite una traslazione L_3, coincidente con la distanza tra il sistema di riferimento R_2 e R_3.

```
(%i15) R3:rotTrasl(d,0,[L[3],0]);
```

(%o15) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i16) TRR[23]:Q3.R3;
```

(%o16) $$\begin{pmatrix} \cos(q_3) & -\sin(q_3) & L_3\cos(q_3) \\ \sin(q_3) & \cos(q_3) & L_3\sin(q_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i17) TRRR[03]:trigreduce(TRR[02].TRR[23])
```

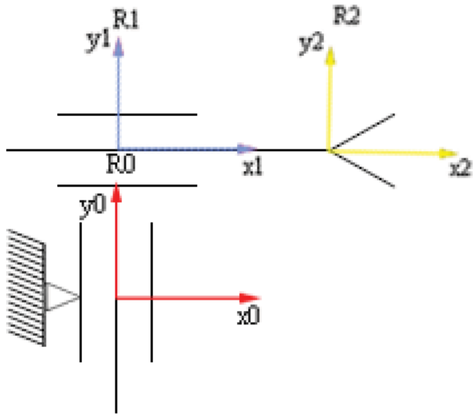
(%o17) $(\cos(q_3+q_2+q_1), -\sin(q_3+q_2+q_1), L_3\cos(q_3+q_2+q_1) + L_2\cos(q_2+q_1) + L_1\cos(q_1);$ $\sin(q_3+q_2+q_1), \cos(q_3+q_2+q_1), L_3\sin(q_3+q_2+q_1) + L_2\sin(q_2+q_1) + L_1\sin(q_1); 0, 0, 1)$

```
(%i18)
```

-I termini $\begin{pmatrix} L_3\cos(q_3+q_2+q_1) + L_2\cos(q_2+q_1) + L_1\cos(q_1) \\ L_3\sin(q_3+q_2+q_1) + L_2\sin(q_2+q_1) + L_1\sin(q_1) \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale;

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} \cos(q_3+q_2+q_1) & -\sin(q_3+q_2+q_1) \\ \sin(q_3+q_2+q_1) & \cos(q_3+q_2+q_1) \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.

Robot cartesiano 2 DOF PP - 2 gradi di libertà prismatici



$$T_{02} := \text{matrice di trasformazione da } R_o \rightarrow R_2$$

$$T_{01}(q_1) = \begin{pmatrix} I & q_1\, e_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12}(q_1) = \begin{pmatrix} I & q_2\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{02} = T_{01}\, T_{12} = \begin{pmatrix} I & q_1\, e_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & q_2\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & q_2\, e_x + q_1 e_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice di trasformazione T_{01} è composta dalla matrice di rotazione $Q(0,0)$ e matrice di traslazione $R(I, q_1 e_y)$ e fa coincidere il sistema di riferimento R_0 con il sistema di riferimento R_1.

```
(%i18) TPP[01]:rotTrasl(r,0,0).rotTrasl(d,0,[0,q[1]]);
```

(%o18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice di trasformazione T_{12} è composta dalla matrice di rotazione $Q(0,0)$ e matrice di traslazione $R(I, q_2 e_x)$ e fa coincidere il sistema di riferimento R_1 con il sistema di riferimento R_2.

```
(%i19) TPP[12]:rotTrasl(r,0,0).rotTrasl(d,0,[q[2],0]);
```

(%o19) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i20) TPP[02]:TPP[01].TPP[12];
```

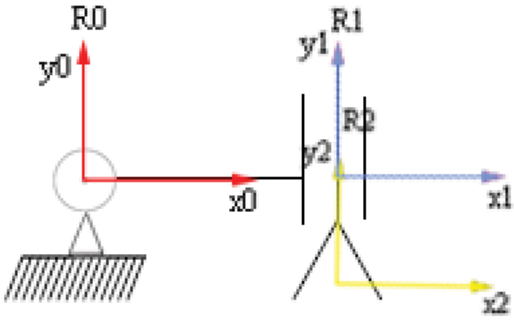
(%o20) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i21)
```

-I termini $\begin{pmatrix} q_2 \\ q_1 \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.

2 DOF RP - 2 gradi di libertà: il primo rotoidale, il secondo prismatico



Per questioni di leggibilità il sistema di riferimento R_2 (in giallo) è stato posto in basso e non al centro dell'end-effector.

$$T_{01} = \begin{pmatrix} R_1 & L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} I & q_2 e_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{02} = T_{01} T_{12} = \begin{pmatrix} R_1 & L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & q_2 e_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 & R_1 q_2 e_y + L_1 R_1 e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & -q_2 s_1 + L_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & q_2 c_1 + L_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i21) `TRP[01]:rotTrasl(r,q[1],[0,0]).rotTrasl(d,0,[L[1],0]);`

(%o21) $$\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & L_1 \cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & L_1 \sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i22) `TRP[12]:rotTrasl(r,0,[0,0]).rotTrasl(d,0,[0,q[2]]);`

(%o22) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i23) `TRP[02](q1,q2):=TRP[01].TRP[12];`

(%o23) $\mathrm{TRP}_2(q1, q2) := \mathrm{TRP}_1 \cdot \mathrm{TRP}_{12}$

(%i24) `TRP[02](q1,q2);`

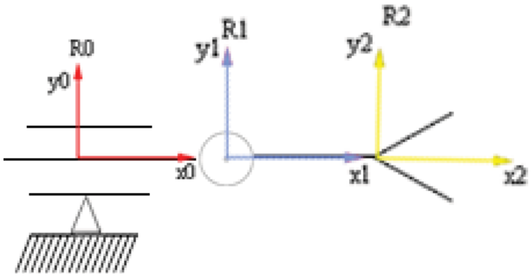
(%o24) $$\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & L_1 \cos(q_1) - q_2 \sin(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & L_1 \sin(q_1) + q_2 \cos(q_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i25)

-I termini $\begin{pmatrix} L_1 \cos(q_1) - q_2 \sin(q_1) \\ L_1 \sin(q_1) + q_2 \cos(q_1) \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.

2 DOF PR - 2 gradi di libertà: prismatico e rotoidale



$$T_{02} := \text{matrice di trasformazione da } R_o \rightarrow R_2$$

$$T_{01} = \begin{pmatrix} I & q_1\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} R_2 & L_2\, R_1\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{02} = T_{01}\, T_{12} = \begin{pmatrix} I & q_1\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_2 & L_2\, R_1\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_2 & q_1\, e_x + L_2\, R_2\, e_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & -q_1 + L_2\, c_2 \\ s_2 & c_2 & L_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i25) TPR[01]:rotTrasl(r,0,[0,0]).rotTrasl(d,0,[q[1],0]);
```

(%o25) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i26) TPR[12]:rotTrasl(r,q[2],[0,0]).rotTrasl(d,0,[L[2],0]);
```

(%o26) $\begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & L_2 \cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & L_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
(%i27) TPR[02]:TPR[01].TPR[12];
```

(%o27) $\begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & L_2 \cos(q_2) + q_1 \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & L_2 \sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%i28)

-I termini $\begin{pmatrix} L_2 \cos(q_2) + q_1 \\ L_2 \sin(q_2) \end{pmatrix}$ rappresentano la cinematica di posizione in termini di coordinate dell'end-effector nel sistema di riferimento inerziale;

-Il blocco 2x2 $\begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) \end{pmatrix}$ rappresenta la cinematica di orientamento del sistema di riferimento inerziale con lo stesso orientamento dell'end-effector.