FEEDBACK LINEARIZZAZIONE - caso SISO

Dopo aver caratterizzato le proprietà strutturali, cominciamo a parlare della sintesi di leggi di controllo in feedback.
In particolare da qui in poi, ci concentreremo su un problema che è propedeutico a quello della sintesi di controllori

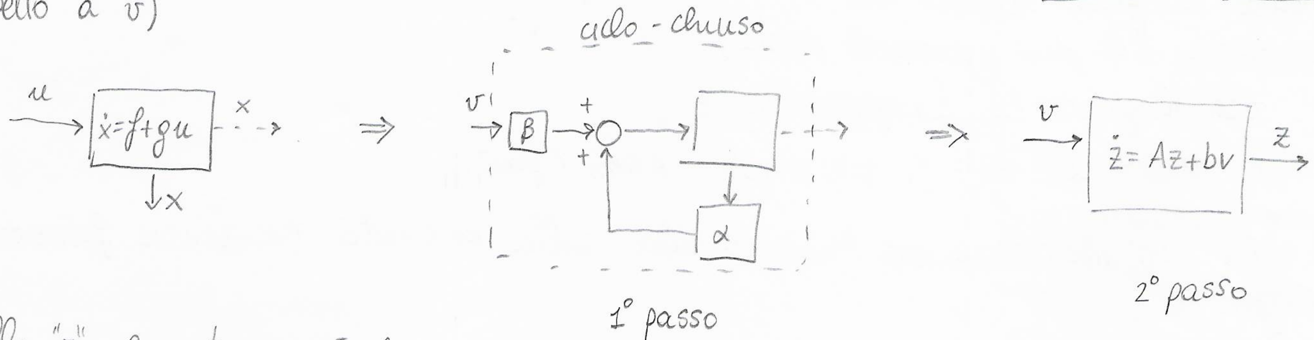
⇒ <u>linearizzazione tramite feedback</u>

Consideriamo un sistema nonlineare:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \qquad \text{(singolo ingresso)}$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}$$

Trovare $\begin{cases} u = \alpha(x) + \beta(x)v, & v \text{ segnale esterno} \\ z = T(x) \end{cases}$

tale che il sistema a ciclo-chiuso, nelle coordinate z, sia <u>lineare</u> e <u>controllabile</u> (rispetto a v)



Nelle "z" il sistema è lineare, è controllabile ⇒ lo possiamo scrivere in <u>forma canonica</u>
Quindi cercheremo una A e una b della forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a meno di ridefinire l'ingresso, possono essere tutti zero (li posso cancellare).

A questo punto qualsiasi problema di sintesi diventa <u>banale</u>

⇒ trasformiamo tutto in una **catena di integratori** ⇒ ci dimentichiamo della fisica del problema (del modello), non robusto (cancellazioni di termini nonlineari).

Lo strumento usato per risolvere questo problema è il:

• GRADO RELATIVO

Consideriamo un sistema SISO

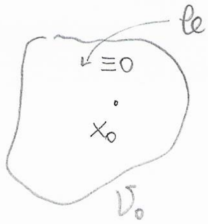
$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

e un x_0.

Il sistema Σ ha <u>grado relativo</u> $r \geq 0$ in x_0 se

i) $L_g h,\ L_g L_f h,\ L_g L_f^{r-2} h \equiv 0$, $\forall x$ intorno a x_0

ii) $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$



le prime $r-2$ derivate di L_{f} devono essere identicamente uguali a zero in tutto l'intorno.

$\Rightarrow$ da ii) per continuità avremo $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$ in un intorno di x_0

Notiamo che il grado relativo potrebbe non essere definito in un punto x_0.
Questo succede quando una funzione della sequenza ha uno zero in x_0 ma non è identicamente nulla in nessun intorno di x_0.

Consideriamo qualche esempio:

• sistema lineare:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} L_g h = Cb \\ L_g L_f h = CAb \\ \vdots \end{array} \quad \Rightarrow$$

$f(x) = Ax, \quad g(x) = b, \quad h(x) = Cx$

il sistema $\mathcal{L}$ ha grado relativo r se
- $Cb = CAb = \dots = CA^{r-2} b = 0$
- $CA^{r-1} b \neq 0$

Nel caso lineare il grado relativo ha un'interpretazione (da cui prende il nome)
$\Rightarrow$ differenza tra il grado del denominatore e numeratore di $W(s) = C(sI - A)^{-1} b$, $r = \#$ poli $- \#$ zeri (finiti).

Cerchiamo di dare un'interpretazione non basata sulla linearità (esistenza **funzione di trasferimento**).
Assumiamo che $x(0) = x_0$, il sistema si trovi in x_0 per $t = 0$.
calcoliamo l'uscita e le sue derivate a $t = 0$.

$$y(0) = h(x(0)) = h(x_0)$$

$$y^{(1)}(t) = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x(t)) + \frac{\partial h}{\partial x} g(x(t)) u(t) = L_f h(x(t)) + L_g h(x(t)) u$$

se il grado relativo è maggiore di $1 \Rightarrow L_g h(x(t)) = 0$, per ogni t vicino a 0.
($x(t)$ vicino a x_0)

e
$$\begin{cases} y^{(1)}(t) = L_f h(x(t)) \\ y^{(2)}(t) = L_f^2 h(x(t)) \\ \vdots \\ y^{(r)}(0) = L_f^r h(x_0) + \underbrace{L_g L_f^{r-1} h(x_0)}_{\neq 0} u(0) \end{cases} \Rightarrow$$

il grado relativo r è uguale al numero di derivate rispetto al tempo dell'uscita y prima che compaia un **legame diretto** con la $u(0)$.

questi calcoli dimostrano che le funzioni $h(x), L_f h(x), \dots, L_f^{r-1} h(x)$ debbono avere un ruolo importante.

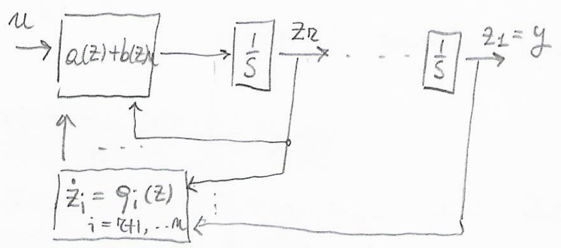
Lemma: i vettori riga $dh(x_0), dL_f h(x_0), \dots dL_f^{r-1} h(x_0)$ sono linearmente indipendenti. □

Supponiamo che il sistema abbia grado relativo r.

Vediamo ora il caso $r < n$

per quanto riguarda le prime r componenti otteniamo esattamente la stessa forma:

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot z_{r-1} = z_r \\ \dot z_r = a(z) + b(z)u \\ \dot z_{r+1} = \frac{\partial \phi_{r+1}}{\partial x}\left(f(x)+g(x)u\right) = L_f \phi_{r+1}(x) + \overbrace{L_g \phi_{r+1}(x)}^{=0 \text{ (per costruzione)}} u = q_{r+1}(z) \triangleq L_f \phi_{r+1}(x)\Big|_{x=\phi^{-1}(z)} \\ \vdots \\ \dot z_n = q_n(z). \\ y = z_1 \end{cases}$$



Il nostro obiettivo originale era quello di **feedback linearizzare** (ancora non ci siamo) abbiamo sfruttato solo il cambio di coordinate ma non un feedback!

Consideriamo il caso $r = n$

$$\begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot z_{n-1} = z_n \\ \dot z_n = a(z) + b(z)u \end{cases}$$

Valido intorno a $z_0 = \Phi(x_0)$

Applichiamo il feedback $u = \frac{1}{b(z)}\left(-a(z) + v\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot z_1 = z_2 \\ \vdots \\ \dot z_{n-1} = z_n \\ \dot z_n = v \end{cases}$$

lineare e controllabile.

$\Downarrow$

catena di n integratori.

$W(s) = \frac{1}{s^n}$

nelle coordinate originali il feedback è
$$u = -\frac{L_f^n h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} \cdot v$$

ma non ha senso senza il cambio di coordinate $z = \phi(x)$. (l'ordine non conta...)

> Ogni sistema nonlineare con grado $r = n$ in x_0 può essere trasformato, in un intorno del punto $z_0 = \phi(x_0)$, in un sistema lineare e controllabile

A questo punto, se volessimo stabilizzare il sistema nelle z a $z = 0$ (possiamo sempre fare in modo che $\phi(x_0) = 0$) $v = Kz$ con $K = (c_0, \dots c_{n-1})$ che assegnano autovalori AS.

$$\Rightarrow u = \frac{-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i L_f^i h(x)}{L_g L_f^{n-1} h(x)}$$

$L_f^i h(x)$ sono le z_i nelle coordinate x

con h fissata:
- se $r = n$ feedback linearizzabile
- se $r < n$? $\Rightarrow$ **forma normale**..
- non definito. non possiamo fare nulla

, se la h la dobbiamo trovare $\Rightarrow$ sistema di PDE!

Tra le altre cose, una conseguenza del lemma è che $r \leq n$ (intuitivo).

$\Rightarrow$ Le funzioni $h(x), L_f h(x), \ldots L_f^{r-1} h(x)$ si qualificano come un cambio di coordinate (possibilmente, eventualmente, **parziale**, dipende dal valore di r).

Se il grado relativo è pari ad n posso prendere le funzioni

$h(x), \ldots, L_f^{n-1} h(x)$ come cambio di coordinate $\quad z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{bmatrix}$

se $r < n$: Lemma:

è sempre possibile completare le funzioni $h(x), \ldots, L_f^{r-1} h(x)$ con delle funzioni $(n-r)$, $\Phi_{r+1}(x), \ldots \Phi_n(x)$ tali che

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_f^{r-1} h(x) \\ \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix}$$ è un cambio di coordinate intorno a x_0.

$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} g = 0\right)$ $n-1$ soluzioni indipendenti

Inoltre è sempre possibile scegliere $\phi_{r+1}(x), \ldots \phi_n(x)$ tali che $L_g \phi_i(x) = 0$, $r+1 \leq i \leq n$ $\forall x$ intorno a x_0.

non è così sorprendente dal momento che g è una distrib. regolare e involutiva

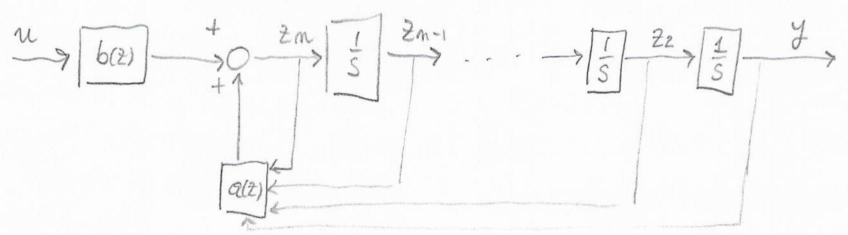
Cerchiamo di scrivere il sistema nelle **nuove coordinate** prima nel caso più semplice $r = n$.

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \frac{\partial h}{\partial x} \dot{x} = L_f h + \overset{=0}{L_g h}\, u = L_f h(x) = z_2 \\ \dot{z}_2 = \dot{L_f h} = L_f^2 h(x) + L_g L_f h\, u = L_f^2 h(x) = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = \dot{L_f^{n-2} h} = L_f^{n-1} h(x) + L_g L_f^{n-2} h(x) u = z_n \\ \dot{z}_n = L_f^n h(x) + \underbrace{L_g L_f^{n-1} h(x)}_{\neq 0 \text{ in } x_0 \text{ (e quindi in un intorno)}} u \end{cases}$$

$= a(z) + b(z) u \quad$ con $\quad b(z_0) \neq 0$, $\begin{cases} a(z) = L_f^n h(x) \big|_{x = \phi^{-1}(z)} \\ b(z) = L_g L_f^{n-1} h(x) \big|_{x = \phi^{-1}(z)} \end{cases}$

$y = z_1$

$\Downarrow$



Sistemi triangolari

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1)\\
\dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(x_1,x_2)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n &= u + \varphi_n(x_1,\dots,x_n)\\
y &= x_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ globalmente F.L.
(back-stepping con Daniele per stabilizzazione globale).

calcoliamo le derivate dell'uscita:

$$\begin{aligned}
y &= x_1\\
\dot{y} &= x_2 + \varphi_1(x_1)\\
\ddot{y} &= x_3 + \bar{\varphi}_2(x_1,x_2) = x_3 + NL_2(x_1,x_2)\\
&\vdots\\
y^{(n)} &= u + NL_n(x_1,\dots x_n)
\end{aligned}$$

parte lineare, più parte nonlineare

$\Rightarrow$ grado relativo n $\Rightarrow$ F.L.