**Teoria dei Giochi 2020/21**

# Sinossi

*G. Oriolo* *Sesta Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Capitolo 3 Dispense Facchinei, seguite in modo quasi pedissequo.
- Giochi *cooperativi*. In un gioco cooperativo gruppi di giocatori possono *coalizzarsi* e garantire alla *coalizione* una certa *utilità* (n.b. per i giochi cooperativi in genere si parla di utilità e non di costo!).
- Due giocatori A e B producono guanti, e.g. lavorando a maglia. I guanti sono di misura unica. I guanti possono essere venduti solo a coppie e ogni coppia di guanti può essere venduta a 5 euro. Il giocatore A ha prodotto 3 guanti: due dx e un sx; il giocatore B ha prodotto 3 guanti: un dx e due sx. Dal punto di vista delle coalizioni la situazione può essere sintetizzata dalla seguente tabella:

| *coalizione* | *utilità* |
|---|---|
| $\emptyset$ | 0 |
| $\{A\}$ | 5 |
| $\{B\}$ | 5 |
| $\{A, B\}$ | 15 |

- Tre musicisti: cantante (1), pianista (2), batterista (3). I tre possono esibirsi in un locale e, a seconda della formazione con cui si presentano, si possono assicurare una certa utilità secondo la seguente tabella:

| *coalizione* | *utilità* |
|---|---|
| $\emptyset$ | 0 |
| $\{1\}$ | 20 |
| $\{2\}$ | 30 |
| $\{3\}$ | 0 |
| $\{1, 2\}$ | 80 |
| $\{1, 3\}$ | 50 |
| $\{2, 3\}$ | 65 |
| $\{1, 2, 3\}$ | 100 |

- Tranne poche eccezioni i giochi fin qui considerati erano non-cooperativi, o per definizione (e.g. il gioco della morra e gli altri giochi "ricreativi") o forzatamente (e.g. nel dilemma del prigioniero, abbiamo assunto che i sospetti non potessero "collaborare"). Abbiamo cioè escluso che uno o più gruppi di giocatori potessero accordarsi tra loro e formare delle coalizioni: questa restrizione viene appunto rimossa nei giochi cooperativi.

- Un gioco cooperativo, *con utilità trasferibile*, è definito da una coppia $(N, v)$. $N$ è l'insieme dei giocatori; $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è una funzione che associa ad ogni sottoinsieme $S$ di $N$ un utilità $v(S)$ ed è tale che $v(\emptyset) = 0$. Ciascun sottoinsieme di $S$ è detto *coalizione* e l'insieme $N$ di tutti i giocatori è la *grande coalizione*.

  L'utilità è trasferibile nel senso che, per ogni coalizione, l'utilità è definita in modo *cumulativo*, assumendo implicitamente che questa utilità possa essere distribuita in un qualunque modo tra i membri della coalizione. Nei giochi cooperativi con utilità *non* trasferibile, invece, per ogni coalizione, per esempio $\{1, 2\}$, viene fornito l'insieme delle possibili utilità di ciascun giocatore della coalizione, per esempio (3,4), (2, 6), (4, 2), ma non ci occupiamo di questi giochi.

- Nel seguito, gioco cooperativo $\equiv$ gioco cooperativo con utilità trasferibile.

- Storicamente, l'analisi di un gioco cooperativo si concentra, piuttosto che sul "cosa faranno i giocatori", su "quali coalizioni si formano": in particolare, noi studieremo il problema di caratterizzare i casi si può formare la grande coalizione. Questo ci porta immediatamente a definire un concetto di stabilità, ovvero a chiederci in quali case la grande coalizione è *stabile*. Diversamente dai giochi non cooperativi, qui però siamo interessati a proprietà di stabilità non solo rispetto le azioni dei singoli giocatori, ma anche rispetto le azioni di *coalizioni* di giocatori.

  Immagineremo quindi che la grande coalizione possa essere stabile ogni qualvolta esista una soluzione che ripartisca tra tutti i giocatori l'utilità $v(N)$ della grande coalizione in modo tale che nessuna coalizione sia tentata dal rompere la grande coalizione. Ovvero, ogni qualvolta esista una soluzione $\alpha \in \mathcal{R}^n$ tale che:

  - (i) $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S)$, per ogni $S \subseteq N$;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$.

  dove $\alpha_i$ è il *payoff* assegnato dalla soluzione $\alpha$ al giocatore $i$.

- Per capire il senso di questa definizione, torniamo al gioco dei musicisti e supponiamo di dividere in modo uniforme tra i 3 musicisti l'utilità della grande coalizione: diamo quinfi $\frac{100}{3}$ a tutti i giocatori. Osserviamo tuttavia che questa soluzione non é stabile perché l'utilità della coalizione $\{1, 2\}$ è superiore alla somma dei payoff assegnati a ciascun giocatore della coalizione: la coalizione $\{1, 2\}$ romperà quindi la grande coalizione.

- Naturalmente, potrebbero esserci altre soluzioni, diverse dalla soluzione $(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3})$ che siano stabili: una di queste è per esempio la soluzione $(35, 45, 20)$ (verificatelo!) Questo ci porta a definire quindi il concetto di *nucleo* di un gioco cooperativo. Il *nucleo* è l'insieme dei vettori $\alpha \in \mathcal{R}_+^N$ tali che:

  - (i) $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S)$, per ogni $S \subseteq N$;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$.

  e quindi immaginiamo che la grande coalizione possa essere stabile per tutti quei giochi cooperativi che hanno nucleo non vuoto.

- La prima questione che affronteremo sarà quindi quella di caratterizzare i giochi per cui il nucleo è non vuoto. Prima di fare questo però, facciamo un'ipotesi che giustifica il nostro interesse nella grande coalizione: l'assunzione che i giocatori siano portati a scegliere la grande coalizione è fondata sulla proprietà di *super-additività*.

  Sia $N$ un insieme (per esempio, di giocatori). Indichiamo con $2^N$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di $N$. Una funzione $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è *super-additiva* se soddisfa le seguenti proprietà :

  $$\text{(i) } v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \text{ per ogni } S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$$

- Nel seguito, quando consideriamo un gioco cooperativo $(N, v)$ *assumeremo sempre che la funzione $v$ sia super-additiva*. In questo caso si dice che la funzione di utilità è una *funzione caratteristica*.

- A questo punto è lecito chiedersi se la super additività garantisce che il nucleo di un gioco sia non vuoto. Prima di vedere questo vediamo una caratterizzazione alternativa della proprietà di super-additività:

- **Lemma**. Una funzione $v : 2^N \mapsto \mathcal{R}_+$ è super-additiva se e solo se:

  - (j) $v(\emptyset) = 0$;
  - (jj) $\sum_{i=1..h} v(S_i) \leq v(Q)$ per ogni $Q \subseteq N$ e partizione di $Q$ in classi $S_1, \ldots, S_h$.

  La sufficienza è banale. Per la necessità, consideriamo $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1}$ e $T = S_h$, allora da (i) vale $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1}) + v(S_h) \leq v(Q)$. Analogamente, sempre da (i) vale: $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-2}) + v(S_{h-1}) \leq v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-1})$. Quindi $v(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{h-2}) + v(S_{h-1}) + v(S_h) \leq v(Q)$. Etc.

- Torniamo alla questione: la super additività garantisce che il nucleo di un gioco sia non vuoto?

  Consideriamo il gioco con $N = \{1, 2, 3\}$ e $v : v(\emptyset) = 0$; $v(S) = 0$, se $|S| = 1$; $v(S) = \rho$, se $|S| = 2$; $v(N) = 1$, con $0 \leq \rho \leq 1$.

Innanzitutto, è facile verificare che $v$ sia super-additiva, quindi possiamo studiare $(N, v)$ come un un gioco cooperativo. Si verifica facilmente che il nucleo è non vuoto se e solo se $0 \leq \rho \leq 2/3$. Infatti i vincoli che determinano il nucleo sono (scartiamo i vincoli banalmente soddisfatti): $x_1 + x_2 \geq \rho$; $x_2 + x_3 \geq \rho$; $x_1 + x_3 \geq \rho$; $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ora, se sommiamo i tre vincoli di disuguaglianza, otteniamo: $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3\rho$; quindi poiché $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ segue che $2 \geq 3\rho$. Quindi il nucleo è vuoto se $\rho > 2/3$. D'altro canto, se $0 \leq \rho \leq 2/3$ allora $(1/3, 1/3, 1/3)$ è sempre un'imputazione nel nucleo, che quindi è non vuoto.

Osserviamo infine che per $\rho = 2/3$ il nucleo è costituito dall'unica soluzione $(1/3, 1/3, 1/3)$.

- Quindi l'ipotesi di superadditività non garantisce che il nucleo sia non vuoto! Come mostriamo nel seguito, la super-additività garantisce qualcosa di molto più debole, che in alcuni casi è comunque interessante. Cominciamo con il definire cosa è un'imputazione.

  Un'*imputazione* per un gioco cooperativo $(N, v)$ è un vettore $\alpha \in \mathcal{R}_+^N$ che soddisfa le seguenti proprietà:

  - (i) $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$ – *razionalità individuale*;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$ – *razionalità collettiva*

  ovvero un'imputazione è una soluzione del gioco che ripartisce tra i giocatori l'utilità della grande coalizione in modo tale che nessun giocatore *singolo* sia tentato dall'abbandonare la grande coalizione.

- Osserviamo che il lemma dimostrato in precedenza mostra che dalla proprietà di superadditività segue $v(N) \geq \sum_{i \in N} v(\{i\})$, quindi l'insieme delle imputazioni di un gioco cooperativo è sempre non vuoto (ricordiamo che assumiamo che la funzione $v$ è sempre super-additiva).

- Naturalmente, ogni soluzione nel nucleo è un'imputazione, ma come abbiamo visto non vale il viceversa. In particolare, se un'imputazione non è nel nucleo, esiste $T \subset N$: $\sum_{i \in T} \alpha_i < v(T)$. Cioè, l'utilità della coalizione $T$ è superiore alla somma dei payoff assegnati a ciascun giocatore: la coalizione $T$ romperà quindi la grande coalizione.

  Viceversa, per un'imputazione nel nucleo nessuna coalizione ha un incentivo a rompere la grande coalizione.

- Quindi il nucleo è un sottoinsieme (in generale stretto) dell'insieme delle imputazioni. Il lemma che segue ci aiuta a caratterizzare un caso in cui invece i due concetti sono equivalenti perché il nucleo si riduce a una sola imputazione: quello in cui l'ipotesi di super-additività è sostituita da quella di additività.

  **Lemma.** Sia $(N, v)$ un gioco cooperativo. Le tre affermazioni seguenti sono equivalenti e caratterizzano i giochi cosiddetti *inessenziali*:

(i) $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$ per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$ (additività).

(ii) $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.

(iii) Il nucleo è non vuoto ed è costituito dall'unica soluzione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$.

**Dim.** $(i) \rightarrow (ii)$. Applicando ricorsivamente la $(i)$, si ha che $\sum_{i=1..h} v(S_i) = v(Q)$, per ogni $Q \subseteq N$ e partizione di $Q$ in classi $S_1, \ldots, S_h$. In particolare, $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.

$(ii) \rightarrow (i)$. Innanzitutto mostriamo che $\forall S \subseteq N$ vale $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Infatti, poiché $v$ è superadditiva valgono:

$\sum_{i \in S} v(\{i\}) \leq v(S)$; $\sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) \leq v(N \setminus S)$; $v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N)$ e quindi:

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) + \sum_{i \in N \setminus S} v(\{i\}) \leq v(S) + v(N \setminus S) \leq v(N).$$

D'altro canto, poiché per ipotesi $v(N) = \sum_{i \in N} v(\{i\})$, segue che tutte le precedenti disuguaglianza valgono all'uguaglianza e, in particolare che $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$.

Ma a questo punto segue banalmente che per $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$, vale $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$.

$(ii) \rightarrow (iii)$. Abbiamo dimostrato la $(ii)$ implica che $\forall S \subseteq N$ vale $v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\})$. Allora l'imputazione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$ è nel nucleo: infatti, per ogni $S \subseteq N$, $\sum_{i \in S} \alpha_i = \sum_{i \in S} v(\{i\}) = v(S)$.

Inoltre, se esistesse una diversa soluzione $\beta$ nel nucleo, poiché $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i = v(N)$, dovrebbe esistere $j \in N$ tale che $\alpha_j > \beta_j$: ma allora $\beta_j < \alpha_j = v(\{j\})$, e quindi $\beta$ non sarebbe nel nucleo.

$(iii) \rightarrow (ii)$. Poiché $\alpha$ è nel nucleo, $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$, quindi $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.

- Il lemma precedente mostra come il nucleo di un gioco inessenziale è costituito dall'unica soluzione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$. Osserviamo tuttavia che ci sono dei giochi il cui nucleo è costituito da un unica soluzione *diversa* da $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$: questi giochi non sono quindi inessenziali. Per esempio, abbiamo visto che per il gioco del $\rho$ con $\rho = \frac{2}{3}$ l'unica imputazione nel nucleo è $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, e quindi il nucleo del gioco è fatto da un'unica soluzione, ma il gioco non è inessenziale (infatti non è additivo).

## 0.1 Teorema di Bondareva-Shapley

- Osserviamo che, per definizione, il nucleo di un gioco cooperativo è l'insieme di soluzioni di un sistema di $2^{|N|} - 1$ disequazioni e una equazione: ovvero un poliedro.

  Per il gioco dei guanti, si verifica facilmente che il nucleo è un segmento con vertici $(10, 5)$ e $(5, 10)$, ovvero ogni punto del tipo $(5 + \beta, 10 - \beta)$, con $0 \leq \beta \leq 5$.

  Per il gioco dei musicisti, il nucleo è un triangolo con vertici $(35, 45, 20)$ e $(35, 50, 15)$ e $(30, 50, 20)$.

- Per verificare se il nucleo di un gioco è vuoto è quindi sufficiente svolgere la fase uno del metodo del simplesso. In modo alternativo, possiamo verificare se il nucleo di un gioco è vuoto risolvendo un opportuno problema di programmazione lineare. Enunciamo quindi il seguente fatto la cui semplice dimostrazione è lasciata per esercizio. Inidchiamo con $\mathcal{N}_p$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi *propri* di $N$, ovvero i sottoinsiemi diversi da $N$ e $\emptyset$.

  **Lemma** Il nucleo è non vuoto se e solo se il seguente problema di PL ha una soluzione ottima con valore $\leq v(N)$:

  $$\min \sum \alpha_i : \quad \textstyle\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S), \text{ per ogni } S \in \mathcal{N}_p.$$

- Osserviamo che nel precedente programma i vincoli di non-negatività sulle $\alpha_i$ non sono esplicitamente riportati in quanto implicati dai vincoli $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$.

  Inoltre il problema primale è certamente ammissibile: per esempio, la soluzione $\alpha_i = v(N)$, per ogni $i \in N$, è ammissibile: infatti, dall'ipotesi di superadditività segue che $v(N) \geq V(S)$ per ogni $S \subseteq N$. Inoltre il problema non è illimitato inferiormente, per la presenza dei vincoli $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$.

  Quindi, per il teorema fondamentale della PL, il problema primale ha una soluzione ottima, sia $z^*$ il suo valore e questo sarà anche il valore della soluzione ottima del problema duale, che è il seguente:

  $\max \sum \lambda_s v(S) : \quad \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = 1$, per ogni $i \in N; \lambda \geq 0$.

  E quindi il nucleo è non vuoto se e solo se il problema duale ha soluzione ottima con valore $\leq v(N)$. Ovvero, il nucleo è non vuoto se e solo se per ogni soluzione ammissibile $\lambda$ per il problema duale vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

  Quindi per dimostrare che viceversa il nucleo di un gioco è vuoto è sempre possibile esibire una soluzione ammissibile $\lambda$ per il problema duale per cui valga $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) > v(N)$.

  Nella Teoria dei Giochi le considerazioni precedenti vengono presentate ricorrendo alla definizione di vettore bilanciato.

- Un vettore $\lambda : \mathcal{N}_p \mapsto \mathcal{R}_+$ è detto *bilanciato*, se, per ogni $i \in N$, vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = 1$. Si noti che ogni soluzione ammissibile del duale corrisponde a un vettore bilanciato.

  Un gioco è *bilanciato* se per qualunque vettore bilanciato $\lambda$ vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$. Possiamo quindi enunciare:

- **Teorema (Bondareva-Shapley)**. Un gioco cooperativo $(N, v)$ ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.

- Riconsideriamo il gioco con il fattore $\rho$. Innanzitutto mostriamo alcuni esempi di di vettori bilanciati. Per $N = \{1, 2, 3\}$: 1) $\lambda_S = 0$, se $|S| = 2$; $\lambda_S = 1$, se $|S| = 1$. 2)

$\lambda_S = 0$, se $|S| = 1$; $\lambda_S = 1/2$, se $|S| = 2$. 3) $\lambda_{\{1\}} = \lambda_{\{2\}} = 1/4, \lambda_{\{3\}} = 1/2, \lambda_{\{1,3\}} = \lambda_{\{2,3\}} = 1/4, \lambda_{\{1,2\}} = 1/2$.

Inoltre osserviamo che il vettore bilanciato $(0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ certifica che il nucleo deo gioco è vuoto non appena $\rho > 2/3$.

## 0.2 Mercati a utilità trasferibile

- Illustriamo un'applicazione del Teorema di Bondareva-Shapley per i *mercati a utilità trasferibile*.

- Ricordiamo innanzitutto che una funzione $f : \mathcal{R}^n \mapsto \mathcal{R}$ è concava se, per ogni intero non negativo $h$, ogni $x(1), \ldots, x(h) \in \mathcal{R}^n$ e ogni vettore $\mu = (\mu(1), \ldots, \mu(h)) \in \mathcal{R}^h_+$ : $\sum_{i=1..h} \mu(i) = 1$, vale $f(\sum_{j=1..h} \mu(j)x(j)) \geq \sum_{j=1..h} \mu(j)f(x(j))$.

- Ci sono $n$ agenti ognuno in grado di produrre un certo bene. Per produrre questo bene, ogni agente dispone di (cioè è dato) un insieme di $l$ risorse (denaro, macchinari, manodopera) che può utilizzare per produrre il bene e ha una propria funzione di produzione che restituisce la quantità di bene che l'agente è in grado di produrre a partire dal vettore di risorse $w_i$.

  Formalmente, ogni agente dispone di un vettore di risorse: $w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^l) \in \mathcal{R}^l_+$ e ha una *sua* funzione di produzione $f_i : \mathcal{R}^l_+ \mapsto R$ che associa al suo input $w_i$ una quantità prodotta $f_i(w_i)$ del bene. Per semplicità assumiamo che sia la produzione che il vettore di risorse possano assumere valori continui. Assumiamo che ogni funzione di produzione sia concava: è un'ipotesi assolutamente realistica che rappresenta, per esempio, il fatto che all'aumentare delle risorse la capacità di produzione di un impianto tende a saturarsi.

  In questo mercato gli agenti possono essere interessati a cooperare: se i vettori di risorse sono complementari, può essere utile scambiarsi delle risorse. A parte questo, ogni agente è interessato a massimizzare l'utilità che trarrà dalla produzione del bene.

- Possiamo modellare questo mercato come gioco cooperativo. L'insieme dei giocatori coincide con quello degli agenti. Definiamo l'utilità della coalizione $S \subseteq N$ come segue. Supponiamo che la coalizione $S$ possa allocare (i.e. partizionare) in *qualunque modo* tra gli agenti in $S$ le risorse complessivamente disponibili, ovvero il vettore $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ (si noti che $w(S) \in \mathcal{R}^l_+$).

- Qual è , dal punto di vista della coalizione (siamo in hyp di utilità trasferibile) il modo migliore di allocare le risorse tra i diversi agenti?

  Per rispondere a questa domanda, formuliamo un problema di ottimizzazione, indicando con $z_i \in \mathcal{R}^l_+$ il vettore di risorse assegnato all'agente $i$: naturalmente deve valere: $\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i$ (chiamiamo questa una *allocazione ammissibile per* $S$).

A fronte di un allocazione ammissibile $z_i$, $i \in S$, il giocatore $i$ contribuirà alla coalizione con una produzione $f_i(z_i)$. Il valore $v(S)$ della coalizione $S$ è dunque pari alla quantità complessivamente prodotta dai gocatori della coalizione, nell'ipotesi che ciascun giocatore possa disporre di un vettore di risorse $z_i$, ovvero $\sum_{i \in S} f_i(z_i)$.

Per calcolare il modo migliore di allocare le risorse tra i diversi agenti della coalizione $S$, e quindi il valore della coalizione $S$ dobbiamo quindi risolvere il seguente problema:

$v(S) = \max \sum_{i \in S} f_i(z_i) \qquad \text{subject to } \sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i; z_i \geq 0.$

Per il teorema di Weierstrass, questo problema di massimizzazione ha sempre una soluzione ottima, perché la funzione obiettivo è continua e l'insieme ammissibile è chiuso e limitato.

- La funzione di utilità cosi definita è una funzione superadditiva. Infatti, supponiamo che l'utilità $v(S)$ della coalizione $S$ sia raggiunta in corrispondenza a una allocazione ammissibile $z_i^*(S), i \in S$.

  Siano $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$. Osserviamo che l'allocazione $z_i^*(S), i \in S$, $z_i^*(T), i \in T$ è una allocazione ammissibile per la coalizione $S \cup T$: segue che $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$.

  Inoltre, si noti che per definizione $v(\emptyset) = 0$. Infine, dall'ipotesi che ciascuna $f_i$ è a valori non-negativi segue che $v(S) \geq 0$ per ogni $S \subseteq N$: possiamo dunque formulare il gioco cooperativo $(N, v)$.

- Abbiamo già visto un'istanza *molto* semplice di questo mercato. Torniamo al problema dei guanti e rimuoviamo l'ipotesi che i guanti possano essere usati sia per la mano destra che per la mano sinistra. Supponiamo che A abbia 2 guanti sx e un guanto dx, mentre B abbia 2 guanti dx e un guanto sx. Ovvero $w_1 = (2, 1)$ e $w_2 = (1, 2)$. La funzione di produzione $f_i$ poi è semplicemente il numero di *coppie* di guanti (uno sx, uno dx) che ogni giocatore è in grado di trarre da un input $(w^1, w^2)$: è uguale per entrambi i giocatori ed è $f_1 = f_2 = f(w^1, w^2) = \min(w^1, w^2)$: si noti che in questo caso i giocatori hanno la *stessa* funzione di produzione. È inoltre facile verificare che questa funzione di produzione è concava. Possiamo quindi formulare un gioco cooperativo. In particolare, è facile verificare quindi che il valore $v(S)$ di ciascuna coalizione $S$ è quindi pari a $\min(\sum_{i \in S} w_i^1, \sum_{i \in S} w_i^2)$.

  Siamo sicuri che il nucleo di questo gioco è non vuoto e i due giocatori troveranno un accordo?

- **Teorema**. Ogni mercato con utilità trasferibile ha un nucleo non vuoto.

  Per dimostrare il teorema utilizziamo il th di Bondareva-Shapley e dimostriamo che il gioco è bilanciato. Ovvero, per ogni vettore bilanciato di pesi $\lambda$ vale: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$.

  Nel seguito, per ogni coalizione $S$, indichiamo con $z_i^*(S)$ l'allocazione "ottima" per il giocatore $i \in S$, ovvero l'allocazione tale che $\sum_{i \in S} f_i(z_i^*(S)) = v(S)$.

Inoltre osserviamo il seguente fatto: sia $x_S$ una quantità che dipende dalla coalizione $S$, $y_i^S$ una quantità che dipende dalla coalizione $S$ e dal giocatore $i \in S$ allora: $\sum_{S \in \mathcal{N}_p} x_S \sum_{i \in S} y_i^S = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} x_S y_i^S$.

*Claim.* Sia $\lambda$ un qualunque vettore bilanciato. Allora l'allocazione $z_i = \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S)$ è una allocazione ammissibile per la grande coalizione.

Dimostrazione del claim: $\sum_{i \in N} z_i = \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} z_i^*(S) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} w_i = \sum_{i \in N} w_i \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S = \sum_{i \in N} w_i$.

Allora dal claim segue che $v(N) \geq \sum_{i \in N} f_i(z_i) = \sum_{i \in N} f_i(\sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S z_i^*(S)) \geq$

$\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \in \mathcal{N}_p : i \in S} \lambda_S f_i(z_i^*(S)) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S \sum_{i \in S} f_i(z_i^*(S)) = \sum_{S \in \mathcal{N}_p} \lambda_S v(S)$.