Università di Tor Vergata
Dipartimento di Ingegneria dell'Impresa «Mario Lucertini»

CORSI DI

PROTOTIPAZIONE VIRTUALE

PROTOTIPAZIONE VIRTUALE E SIMULAZIONE DEI SISTEMI MECCANICI

T3: Elementi di geometria differenziale di curve e superfici

Pier Paolo Valentini @ 2015

Curve parametriche e lunghezze di arco

☑ Sia data una curva $p(u)$ parametrizzata in *u*. Definiamo la parametrizzazione REGOLARE se $\dot{p}(u) \neq 0$

$$p(u) = \begin{Bmatrix} p_x(u) \\ p_y(u) \\ p_z(u) \end{Bmatrix} \qquad \dot{p}(u) = \begin{Bmatrix} \dot{p}_x(u) \\ \dot{p}_y(u) \\ \dot{p}_z(u) \end{Bmatrix}$$

☑ Definiamo lunghezza d'arco $s(u)$ tra due valori *a* e *b* del parametro *u* come:

$$s(u) = \int_a^b \left\| \dot{p}(u) \right\| du$$

Lunghezza d'arco

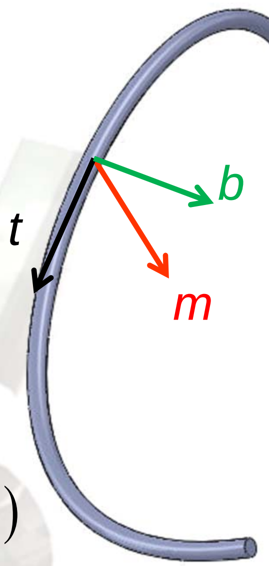
☑ Definiamo ascissa curvilinea:

$$s(u) = \int_0^b \left\| \dot{p}(u) \right\| du$$

Ascissa curvilinea

La terna di FRENET

☑ La terna di Frenet è un utile sistema di coordinate locali sulla curva. Per ogni punto della curva è possibile definire una terna di Frenet:



☑ ***t*** è il vettore tangente
$$t(u)=\frac{\dot{p}(u)}{\left\|\dot{p}(u)\right\|}$$

☑ ***m*** è il vettore normale
$$m(u)=b(u)\times t(u)$$

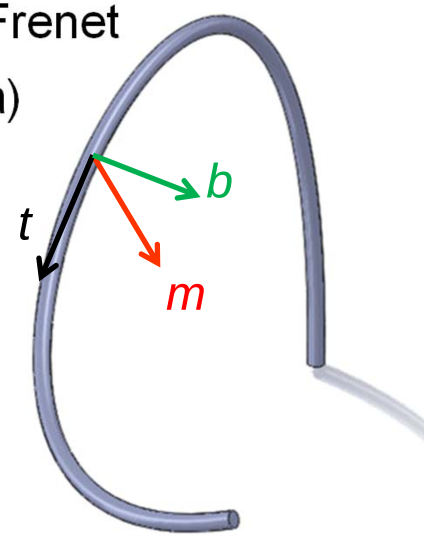
☑ ***b*** è il vettore binormale
$$b(u)=\frac{\dot{p}(u)\times\ddot{p}(u)}{\left\|\dot{p}(u)\times\ddot{p}(u)\right\|}$$

$$\dot{p}(u)=\frac{\partial p(u)}{\partial u} \qquad \ddot{p}(u)=\frac{\partial^2 p(u)}{\partial u^2}$$

$\times$ è il prodotto vettoriale

Curvatura e torsione

- E' utile valutare le variazioni dei vettori della terna di Frenet spostandosi sulla curva (al variare della coordinata curvilinea)



$$t'(u)=\frac{\partial t(u)}{\partial s}=\kappa m(u)$$

$$m'(u)=\frac{\partial m(u)}{\partial s}=-\kappa t(u)+\tau b(u)$$

$$b'(u)=\frac{\partial b(u)}{\partial s}=-\tau m(u)$$

- $\boldsymbol{\kappa}$ è lo scalare curvatura

$$\kappa(u)=\frac{\left\|\dot{p}(u)\times\ddot{p}(u)\right\|}{\left\|\dot{p}(u)\right\|^{3}} \qquad \kappa(s)=\left\|p''(s)\right\|=\frac{\partial^{2}p(s)}{\partial s^{2}}$$

$$\tau(u)=\frac{\det\left[\dot{p}(u)\quad \ddot{p}(u)\quad \dddot{p}(u)\right]}{\left\|\dot{p}(u)\times\ddot{p}(u)\right\|^{2}} \qquad \tau(u)=\frac{\left(p'(u)\times p''(u)\right)\cdot p'''(u)}{\left\|p'(u)\times p''(u)\right\|^{2}}$$

- $\boldsymbol{\tau}$ è lo scalare torsione

$$\tau(s)=\frac{\det\left[p'(s)\quad p''(s)\quad p'''(s)\right]}{\kappa^{2}}$$

Continuità parametrica C^n

- ☑ **Continuità C^0: le curve hanno un punto in comune**

$$p(u_0) = q(u_0)$$

- ☑ **Continuità C^1: le curve sono C^0 + hanno la derivata prima rispetto alla variabile di parametrizzazione uguale**

$$\dot{p}(u_0) = \left.\frac{\partial p}{\partial u}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial q}{\partial u}\right|_{u=u_0} = \dot{q}(u_0)$$

- ☑ **Continuità C^2: le curve sono C^1 + hanno la derivata seconda rispetto alla variabile di parametrizzazione uguale**

$$\ddot{p}(u_0) = \left.\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}\right|_{u=u_0} = \ddot{q}(u_0)$$

- ☑ **Continuità C^n: le curve hanno continuità fino alla derivata *n*-esima**

$$\left.\frac{\partial^n p}{\partial u^n}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial^n q}{\partial u^n}\right|_{u=u_0}$$

Continuità geometrica G^n

La continuità geometrica è legata alla CONTINUITÀ DELLE DERIVATE RISPETTO ALL'ASCISSA CURVILINEA. E' un concetto più generale di continuità ed è legato alla forma (geometrica, appunto) piuttosto che alla matematica descrittiva.

$$p(u_0) = q(u_0)$$

$$p'(u_0) = \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{u=u_0} = \left.\dot{p}(u)\cdot\frac{1}{\left\|\dot{p}(u)\right\|}\right|_{u=u_0}$$

G1 → stesso versore tangente

G2 → G1+ stessa curvatura

G3 → G2 + stessa torsione → continuità della terna di Frenet

$$C^n \rightarrow G^n \qquad G^n \not\rightarrow C^n$$

$$q(u) = \begin{bmatrix} 2u \\ u \end{bmatrix}, \qquad u \in [0;1]$$

$$r(t) = \begin{bmatrix} 4t+2 \\ 2t+1 \end{bmatrix}, \qquad t \in [0;\tfrac{1}{2}]$$

⇒

$$q(1) = r(0)$$

$$\dot{q}(1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \dot{r}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{q}(1) \parallel \dot{r}(0)$$

⇒

Le curve sono G^1 ma non C^1

Stesso versore t di Frenet, ma diversa derivata prima

Calcolo delle derivate geometriche

La continuità geometrica è legata alla CONTINUITÀ DELLE DERIVATE RISPETTO ALL'ASCISSA CURVILINEA. E' un concetto più generale di continuità ed è legato alla forma (geometrica, appunto) piuttosto che alla matematica descrittiva.

$$p(u_0) = q(u_0)$$

$$p'(u_0) = \left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{u=u_0} = \left.\dot{p}(u)\cdot\frac{1}{\left\|\dot{p}(u)\right\|}\right|_{u=u_0}$$

$$p''(u_0) = \left.\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right|_{u=u_0} = \left.\frac{\partial^2 p}{\partial u^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right|_{u=u_0} = \left.\ddot{p}(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \dot{p}(u)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right|_{u=u_0}$$

$$p'''(u_0) = \left.\frac{\partial^3 p}{\partial s^3}\right|_{u=u_0} = \left.\dddot{p}(u)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^3 + 3\ddot{p}(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \dot{p}(u)\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}\right|_{u=u_0}$$

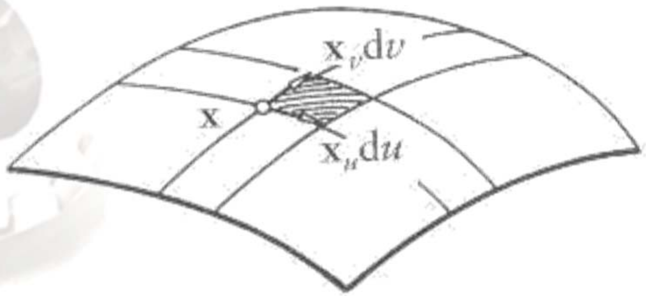
Superfici parametriche e area infinitesima

☑ Sia data una superficie $s(u,v)$ parametrizzata in *u* e *v*. Definiamo la parametrizzazione REGOLARE se $s_u \times s_v \neq 0$

$$s(u,v) = \begin{Bmatrix} s_x(u,v) \\ s_y(u,v) \\ s_z(u,v) \end{Bmatrix} \qquad s_u(u,v) = \frac{\partial s(u,v)}{\partial u} \qquad s_v(u,v) = \frac{\partial s(u,v)}{\partial v}$$

☑ Definiamo l'area infinitesima $dA(u,v)$ come:

$$dA = \left\| s_u du \times s_v dv \right\| = \left\| s_u \times s_v \right\| dudv$$



☑ La generica porzione di area finita si può calcolare come:

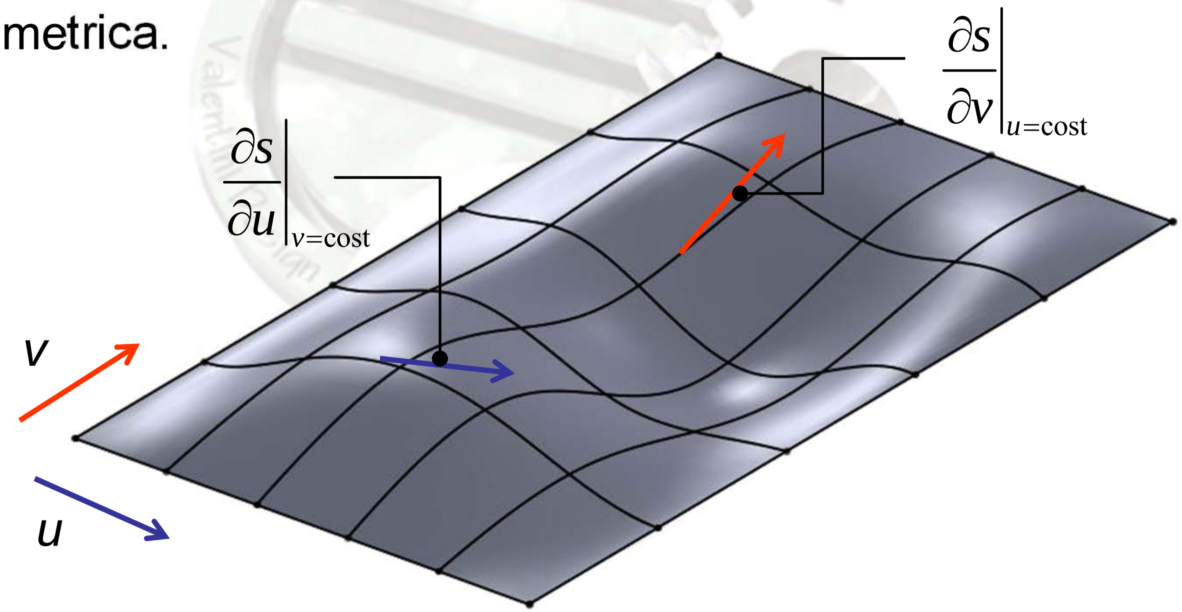
$$A = \int_u \int_v \left\| s_u \times s_v \right\| dudv$$

Derivate di una superficie in forma param.

Essendo la superficie una funzione di due variabili, è corretto parlare di derivate parziali effettuate rispetto a ciascuna variabile parametrica:

$$\frac{\partial s(u,v)}{\partial u} \qquad \frac{\partial s(u,v)}{\partial v}$$

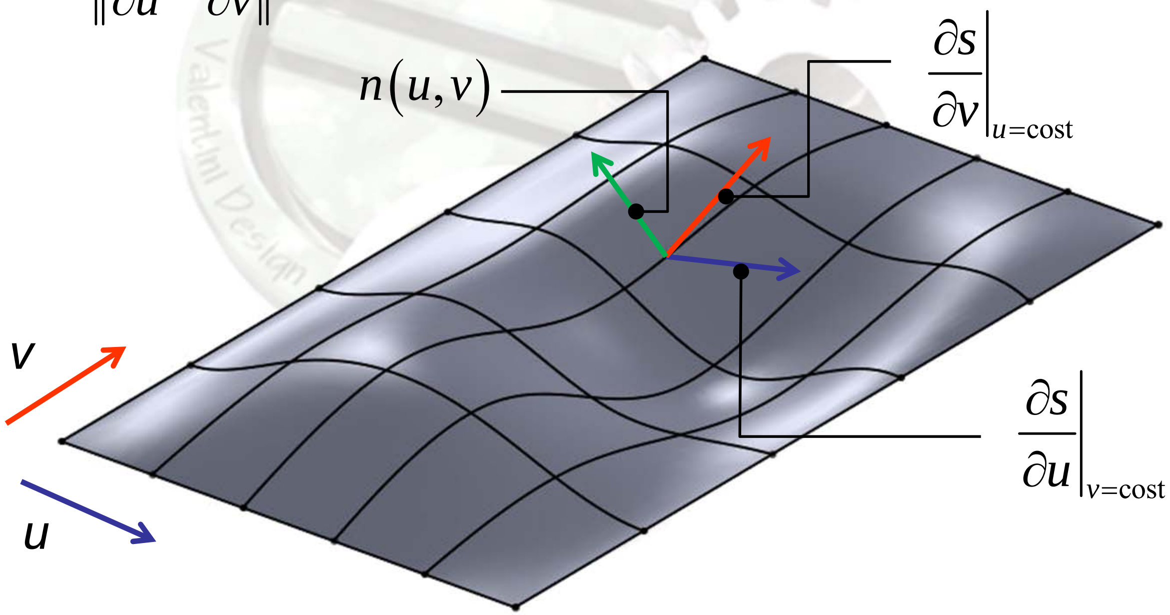
Ciascuna derivata parziale rappresenta il vettore tangente di una curva isoparametrica.



Normale ad una superficie

Le normali ad una superficie possono essere calcolate a partire dalle derivate parziali rispetto alle variabili di parametrizzazione

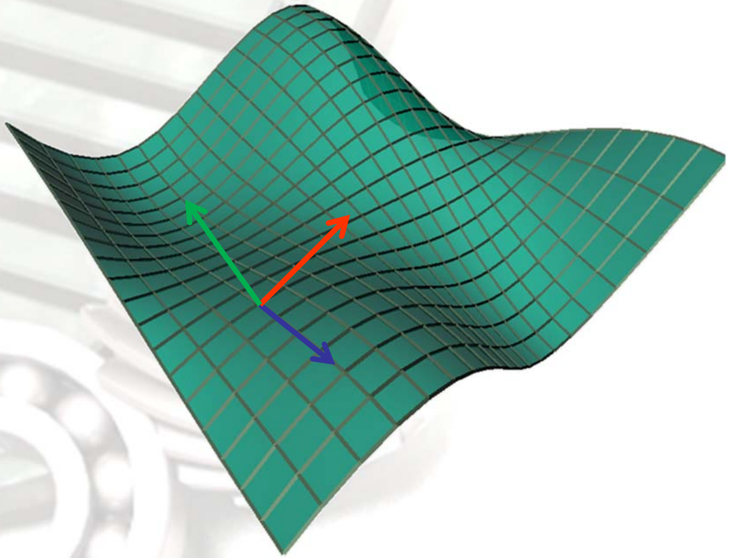
$$n(u,v) = \frac{\dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial s}{\partial u} \times \dfrac{\partial s}{\partial v} \right\|}$$



Terna locale

Come per le curve si era introdotta una terna locale (terna di Frenet) anche per le curve è possibile introdurne una. Al contrario della terna di Frenet questa terna locale è dipendente dalla parametrizzazione della superficie

$$\begin{cases} \dfrac{s_u}{\left\| s_u \right\|} \\ \dfrac{s_v}{\left\| s_v \right\|} \\ n = \dfrac{s_u \times s_v}{\left\| s_u \times s_v \right\|} \end{cases}$$



Curvatura normale di superfici

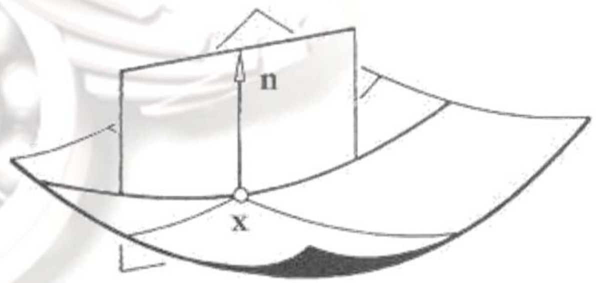
Nel caso di una superficie non è possibile dedurre un'unica espressione per il calcolo della curvatura.

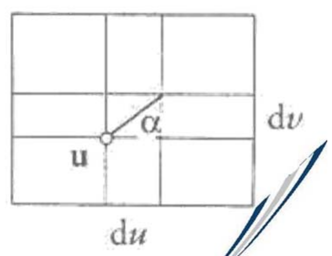
Per ciascuna curva sulla superficie è, infatti, possibile derivare una curvatura specifica. Nel caso, però, in cui si consideri una curva con la normale coincidente con la normale alla superficie **m=n** (il piano osculatore delle curva è perpendicolare al piano tangente alla superficie) è possibile definire una specifica curvatura chiamata CURVATURA NORMALE:

$$\kappa_0 = \frac{-s_u n_u du - \left(s_u n_v + s_v n_u\right) du dv - s_v n_v dv^2}{s_u s_u du^2 + 2 s_u s_v du dv + s_v s_v dv^2} = \frac{-s_u n_u - \left(s_u n_v + s_v n_u\right)\lambda - s_v n_v \lambda^2}{s_u s_u + 2 s_u s_v \lambda + s_v s_v \lambda^2} \qquad \lambda = \frac{dv}{du}$$

Ovvero la curvatura normale è dipendente dalla direzione del piano osculatore

I valori di λ per cui si ha il massimo e il minimo valore della curvatura normale identificano le direzioni principali che si dimostrano essere ortogonali. I valori di curvatura corrispondenti, prendono il nome di curvature principali





Curvatura Media e Gaussiana

κ_1, κ_2 Curvature principali

$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ Curvature Gaussiana

$H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ Curvatura Media

$$\begin{cases} K > 0 & \text{Punto ellittico} \\ K < 0 & \text{Punto iperbolico} \\ K = 0 & \text{Punto parabolico} \\ K = 0 \quad H = 0 & \text{Punto piano} \end{cases}$$

$$K = \frac{s_u n_u s_v n_v - \frac{1}{4}\left(s_u n_v + s_v n_u\right)^2}{s_u s_u s_v s_v - \left(s_u s_v\right)^2}$$

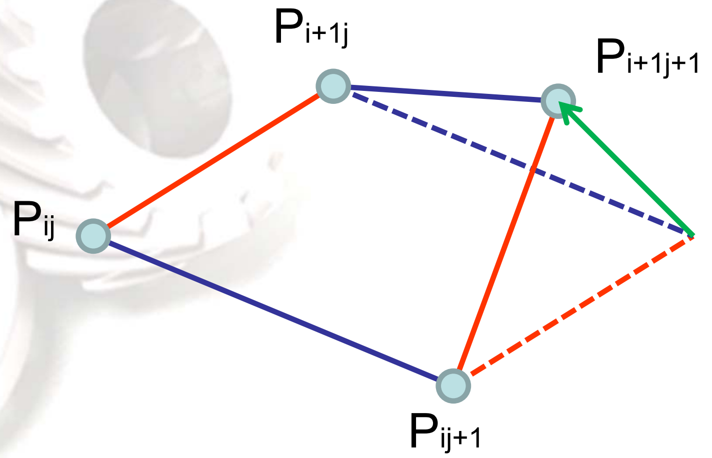
$$H = \frac{-s_v n_u s_u n_u + \left(s_u n_v + s_v n_u\right)\left(s_u s_v\right) - s_u n_u s_v s_v}{s_u s_u s_v s_v - \left(s_u s_v\right)^2}$$

Torsione di una superficie

La torsione di una superficie può essere calcolata come derivata parziale mista del secondo ordine:

$$torsione(u,v) = \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial v}$$

La torsione ha l'interpretazione fisica di **misurare la deviazione di un quadrilatero del reticolo di controllo rispetto ad un parallelogramma**



Classi di superfici

Nella pratica di modellazione, è compito dell'utente scegliere la giusta scomposizione dell'intera geometria in porzioni di superfici (patch) a seconda della complessità e delle particolarità da descrivere.

Ogni superficie può essere modellata come una superficie di interpolazione rispettando opportuni parametri di continuità geometrica

Nell'implementazione geometrica le condizioni di continuità sono soddisfatte a meno di una tolleranza numerica

Le Classi di superfici si differenziano circa i valori di tali tolleranze e quindi sono indicatrici della qualità della continuità tra varie patch di una superficie

Tolleranze e classi di superfici

Superfici di Classe A – (più accurate)

Requisiti di Continuità G0 – coincidenza tra i bordi: t_{max} 0.01 mm

Requisiti di Continuità G1 – coincidenza tangenti: t_{max} 0.1° (6')

Requisiti di continuità G2 – coincidenza della curvatura almeno ogni 100 mm di bordo

Requisiti di forma – la superficie fisica deve discostarsi da quella modellata per meno di 0.5 mm (grandi superfici) / 0.2 mm (piccole superfici)

Superfici di Classe B

Requisiti di Continuità G0 – coincidenza tra i bordi: t_{max} 0.02 mm

Requisiti di Continuità G1 – coincidenza tangenti: t_{max} 0.2° (12')

Requisiti di continuità G2 – nessuno

Requisiti di forma – la superficie fisica deve discostarsi da quella modellata per meno di 1.0 mm (grandi superfici) / 0.5 mm (piccolo superfici)

Superfici di Classe C

Requisiti di Continuità G0 – coincidenza tra i bordi: t_{max} 0.05 mm

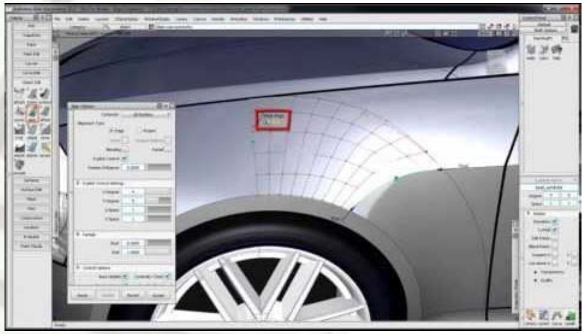
Requisiti di Continuità G1 – coincidenza tangenti: t_{max} 0.5° (30')

Requisiti di continuità G2 – nessuno

Requisiti di forma – nessuno

Esempi di classi di superfici

Le superfici di Classe A vengono comunemente impiegate per modellare le carrozzerie delle vetture e comunque tutte le superfici esterne con caratteristiche estetiche



Non tutti i modellatori sono in grado di assicurare superfici di Classe A: (occorre poter costruire polinomi di grado elevato (anche 6°) e avere degli algoritmi di soluzione capaci di raggiungere le tolleranze richieste.

La qualità delle superfici può essere meglio valutata con le «strisce zebra», ovvero delle linee che descrivono come delle ripetizioni a barre si riflettono sulla superficie e esaltano le irregolarità