OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 28 Giugno 2019

1. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione dinamica:

$$\min_u J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_k^2 + u_k^2), \qquad s.t. \qquad x_{k+1} \;=\; x_k + u_k \tag{1}$$

   (a) Determinare il costo della legge di controllo $\bar{u}_k = 1$, $k = 0, 1, 2$, dalla condizione iniziale $x_0 = -1$. [3 PUNTI]

   (b) Confrontare il costo di $\bar{u}$ con il costo della soluzione ottima a partire dalla stessa condizione iniziale. [4 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2) dt + x(T)^2 \right\}, \qquad s.t. \quad \dot{x} = x + \sqrt{3} u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

   b) Determinare un valore del tempo terminale T, se esiste, tale che il costo della soluzione ottima a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ sia pari a $2/3$. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 4x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + u \\ \dot{x}_2 & = & a x_1 - u \end{array} \right. \tag{3}$$

   a) Determinare un valore di a, se esiste, tale che la legge di controllo $\bar{u} = -x_1 + 2x_2$ sia ottima per il problema (3), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2$. [3 PUNTI]

   b) Determinare il valore del costo di $\bar{u}$ dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\, -1]^\top$.
   [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di stato in un problema di reinforcement learning. Eseguire un passo di policy improvement per il problema rappresentato in figura (pagina seguente) con $\gamma = 0.5$ e partendo dalla policy $\pi_0 = [u_1, u_1, u_1, \star]$ descrivendo brevemente i passi eseguiti. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che il sistema a ciclo chiuso con la soluzione di LQR risulta asintoticamente stabile. [6 PUNTI]

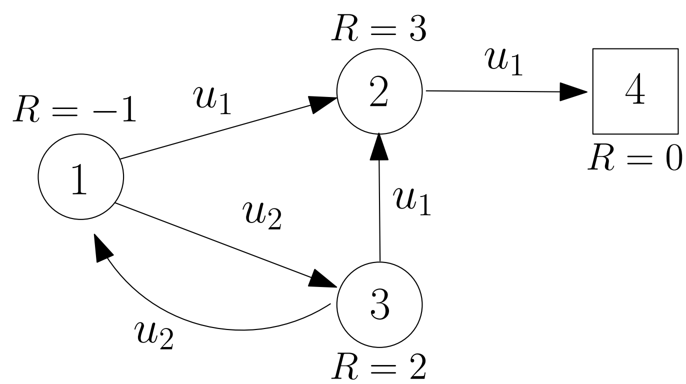

Figure 1: figura Domanda 4.

OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 28 Giugno 2019

1. Si consideri il seguente problema di ottimizzazione dinamica:

$$\min_u J(u) = \sum_{k=0}^{2}(x_k^2 + u_k^2), \qquad s.t. \qquad x_{k+1} \;=\; x_k + u_k \tag{1}$$

   (a) Determinare il costo della legge di controllo $\bar{u}_k = 1$, $k = 0, 1, 2$, dalla condizione iniziale $x_0 = -2$. [3 PUNTI]

   (b) Confrontare il costo di $\bar{u}$ con il costo della soluzione ottima a partire dalla stessa condizione iniziale. [4 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt + \frac{3}{2}x(T)^2 \right\}, \qquad s.t. \quad \dot{x} = x - \sqrt{2}u\,, \tag{2}$$

   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]

   b) Determinare un valore del tempo terminale T, se esiste, tale che il costo della soluzione ottima a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ sia pari a 4/3. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2}\int_0^\infty (3x_1(t)^2 - 2x_1(t)x_2(t) + 2x_2(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= ax_1 - u \end{cases} \tag{3}$$

   a) Determinare un valore di a, se esiste, tale che la legge di controllo $\bar{u} = -x_1 + 2x_2$ sia ottima per il problema (3), sapendo che la funzione valore associata $\bar{V}$ soddisfa $\frac{\partial \bar{V}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2$. [3 PUNTI]

   b) Determinare il valore del costo di $\bar{u}$ dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\ -1]^\top$.
   [2 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di stato/azione in un problema di reinforcement learning. Eseguire un passo di policy improvement per il problema rappresentato in figura (pagina seguente) con $\gamma = 0.5$ e partendo dalla policy $\pi_0 = [u_1, u_1, u_1, \star]$ descrivendo brevemente i passi eseguiti. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che la sequenza di soluzioni ottime su orizzonte finito ammette un limite per T che tende ad infinito. [6 PUNTI]

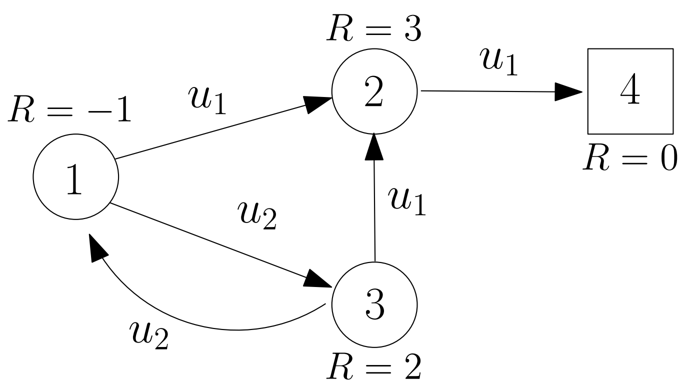

Figure 1: figura Domanda 4.