TRAGEDY OF THE COMMONS

- N giocatori
- $X_i = \{x_i \in \mathbb{R} : 0 \le x_i \le 1\} \quad i \in N$
- $C_i(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{j \in N} x_j \ge 1 \\ x_i\left(1 - \sum_{j \in N} x_j\right) & \text{se } \sum_{j \in N} x_j < 1 \end{cases}$

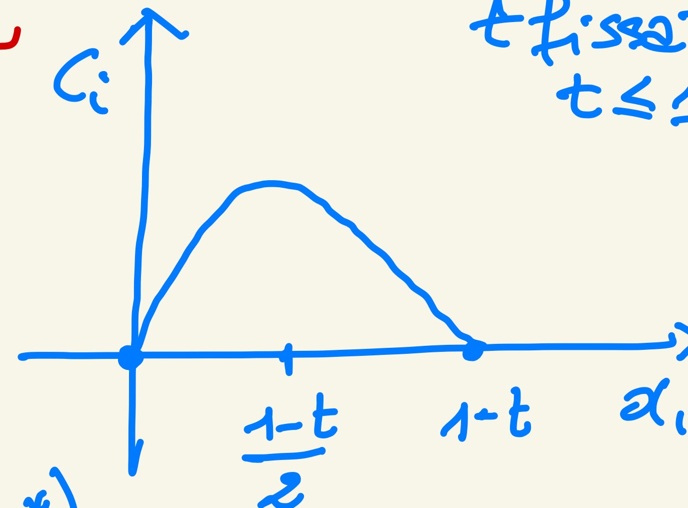
UTILITÀ

$$C_i(x) = x_i\left(1 - \sum_{j \in N} x_j\right) = x_i\left(1 - x_i - \sum_{\substack{j \in N \\ j \ne i}} x_j\right) =$$

$$C_i = x_i - x_i^2 - x_i \underbrace{\left(\sum_{j \in N,\, j \neq i} x_j \right)}_{t} = x_i - x_i^2 - x_i t =$$

t fissato
$t \leq 1$

$$= -x_i^2 + x_i(1-t)$$



- non $\nexists$ strategie dominanti

$(x_1^*, \dots, x_n^*)$ è E.N. se $x_i^* \in B_i(x_{-i}^*)\ \forall i$

$$x_i^* = \frac{1 - \sum_{j \in N,\, j \neq i} x_j^*}{2} \quad \forall i$$

$$x_i^* = \frac{1 - \sum_{j \in N, j \neq i} x_j^*}{2} \quad \forall i \in N$$

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{1 - x_2^* - x_3^* \dots - x_n^*}{2} \\ x_2^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_3^* \dots - x_n^*}{2} \\ \dots \\ x_n^* = \dfrac{1 - x_1^* - x_2^* \dots - x_{n-1}^*}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^* = \dfrac{1}{n+1} \\ \dots \\ x_n^* = \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

UNICO EQUILIBRIO
di
NASH

$$C_i\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) = x_i\left(1-\sum_{j\in N} x_j\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

payoff all'E.N.

$$C_i\left(\frac{1}{2n}, \dots, \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4n} \implies$$

E.N. NON È OTTIMO SECONDO PARETO

MATCHING PENNIES

2 giocatori

$X_1 = X_2 = \{HEAD, TAIL\}$

	HEAD	TAIL
HEAD	1, -1	-1, 1
TAIL	-1, 1	1, -1

UTILITÀ

no strategie dominanti

no equilibri di NASH

ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE

D insieme $\forall$ (finito/infinito; chiuso/aperto...)

$f: D \to \mathbb{R}$

ESTREMO SUPERIORE di f su D è il più piccolo numero U : $f(x) \leq U \quad \forall x \in D$

ESTREMO INFERIORE di f su D è il più grande numero L : $f(x) \geq L \quad \forall x \in D$

- se f è illimitata superiormente su D, $\sup_{x \in D} f(x) = \infty$
- " " inferiormente su D, $\inf_{x \in D} f(x) = -\infty$

e^x su $\overset{D}{\mathbb{R}}$ $\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^x = \infty$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0$

e^x su $[0,1]$ $\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}} e^x = e$, $\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = \underline{1}$

STRATEGIA CONSERVATIVA

$\Gamma = (N, X_i\ i\in N, C_i\ \ i\in N)$ forma costo

$\bar{x}_i \in X_i$, definiamo $\tilde{C}_i(\bar{x}_i) = \sup_{x_{-i}\in X_{-i}} C_i(\bar{x}_i, x_{-i})$

$x_i' \in X_i$ è CONSERVATIVA per il giocatore i se vale

$$\inf_{x_i\in X_i} \tilde{C}_i(x_i) = \tilde{C}_i(x')$$