Algoritmo di Kleinman
a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Nelle lezioni precedenti

- Abbiamo visto che per risolvere un problema di controllo ottimo per sistemi lineari e con indice di costo quadratico **su orizzonte infinito** è necessario determinare la soluzione di un'equazione algebrica matrice (Equazione Algebrica di Riccati)
- La ARE consiste di $n(n+1)/2$ equazioni quadratiche accoppiate
- Alternativamente potremmo scrivere la matrice Hamiltoniana associata, calcolare autovalori/autovettori e ricavare la soluzione $\bar{P}$

Data l'equazione di HJB su orizzonte infinito (nel caso generale)

$$0 = \min_u \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u) + \ell(x,u) \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{lineare in } \frac{\partial V}{\partial x}$$

abbiamo visto che i passi *algoritmici* per risolverla in modo *esatto* sono:

- determinare $u^\star$ come $\arg\min$ $\quad \Rightarrow \quad u^\star = \psi\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right)$
- sostituire $u^\star$ nell'equazione
- risolvere in $\frac{\partial V}{\partial x}$ l'equazione

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} f\left(x, \psi\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right) + \ell\left(x, \psi\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{non lineare in } \frac{\partial V}{\partial x}$$

Che succede se proviamo ad invertire l'ordine logico dei passi precedenti?

Approccio alternativo all'equazione di HJB

Data l'equazione di HJB su orizzonte infinito (nel caso generale)

$$0 = \min_u \left\{ \frac{\partial V}{\partial x} f(x,u) + \ell(x,u) \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{lineare in } \frac{\partial V}{\partial x}$$

proviamo a:

- fissare un *qualsiasi* controllo (stabilizzante) $u_1(x)$
- risolvere in $\frac{\partial V}{\partial x}$ l'equazione

$$0 = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u_1(x)) + \ell(x, u_1(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{lineare in } \frac{\partial V}{\partial x}$$

Ovviamente la soluzione V non è la Funzione Valore (ottima), perchè u_1 non è *arg min*!

Possiamo però sfruttare V per costruire una legge di controllo $u_2(x)$ e continuare ad iterare...

Algoritmo di Kleinman (1/2)

Nel caso Lineare-Quadratico su orizzonte infinito, abbiamo visto che la soluzione ottima è

$$u = -R^{-1}B^\top \bar{P}x \triangleq Kx$$

dove $\bar{P} = \bar{P}^\top > 0$ risolve l'equazione

$$0 = A^\top \bar{P} + \bar{P}A + Q - \bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P}$$

⇒ Invece di risolvere la ARE (quadratica in $\bar{P}$), vogliamo provare ad **approssimare iterativamente la soluzione $\bar{P}$ risolvendo una sequenza di equazioni lineari**

Notiamo che

$$\begin{aligned}
0 &= A^\top \bar{P} + \bar{P}A + Q - \bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P} \\
&= A^\top \bar{P} + \bar{P}A + Q - \bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P} + \overbrace{\bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P} - \bar{P}BR^{-1}B^\top \bar{P}}^{=0} \\
&= A^\top \bar{P} + \bar{P}A + Q + K^\top B^\top \bar{P} + K^\top RK + \bar{P}BK \\
&= (A + BK)^\top \bar{P} + \bar{P}(A + BK) + Q + K^\top RK
\end{aligned}$$

Algoritmo di Kleinman (2/2)

Definendo $A_{cl} = A + BK$, otteniamo

$$A_{cl}^\top \bar{P} + \bar{P} A_{cl} = -Q - K^\top R K \tag{1}$$

sembra un'equazione lineare (**Lyapunov**) per il sistema a ciclo chiuso con $u = Kx$

$\Rightarrow$ rispetto alla ARE il termine quadratico in $\bar{P}$ è *nascosto* in $K = -R^{-1}B^\top \bar{P}$!

... e se fissiamo una qualsiasi $K \neq -R^{-1}B^\top \bar{P}$ e risolviamo l'equazione (1)?

$\Rightarrow$ la funzione $V(x) = \frac{1}{2}x^\top \bar{P} x$ con la corrispondente soluzione non è in generale la Funzione Valore ottima, ma è la funzione valore (costo) di $u = Kx$...

Algoritmo di Kleinman

Consideriamo un problema LQR su orizzonte infinito con (A, B) controllabile e (A, D) osservabile. Sia $u_0 = K_0 x$ un qualsiasi controllo che stabilizza il sistema, ovvero $\sigma(A + BK_0) \subset \mathbb{C}^-$. Definiamo $S_i \triangleq A + BK_i$ e risolviamo l'equazione lineare di Lyapunov

$$S_i^\top \bar{P}_i + \bar{P}_i S_i = -Q - K_i^\top R K_i$$

nell'incognita $\bar{P}_i$ e aggiorniamo $K_{i+1} = -R^{-1}B^\top \bar{P}_i$. Allora

$$\lim_{i\to\infty} \bar{P}_i = \bar{P}, \qquad \text{e} \qquad V^\star \leq V_{k+1} \leq V_k \leq \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, \text{ con } V_i(x) = (1/2)x^\top \bar{P}_i x$$

Sappiamo che K_0 è tale che $\sigma(A + BK_0) \subset \mathbb{C}^-$, quindi

$$V_0(x) = \frac{1}{2}x^\top \bar{P}_0 x = \frac{1}{2}x^\top \left(\int_0^\infty e^{S_0^\top t}(Q + K_0^\top RK_0)e^{S_0 t}dt \right) x < \infty$$

Consideriamo orizzonte finito T (arbitrario) e siano $P_{0,T}$, $P_{1,T}$ le soluzione di

$$-\dot{P}_{i,T} = S_i^\top P_{i,T} + P_{i,T}S_i + Q + K_i^\top RK_i, \quad P_{i,T}(T) = 0, \quad i = 0, 1$$

Vogliamo confrontare i costi di $u_0 = K_0 x$ e $u_1 = K_1 x$ per un generico T:

$$J_T(u_0) - J_T(u_1) = \frac{1}{2}x^\top (P_{0,T}(0) - P_{1,T}(0))x$$

Definiamo $\delta P(t) = P_{0,T}(t) - P_{1,T}(t)$ e studiamo la sua evoluzione nel tempo[1]

$$\delta\dot{P} = -S_1^\top \delta P - \delta P S_1 + \underbrace{-(K_0 - K_1)^\top (B^\top P_{0,T} + RK_1) - (B^\top P_{0,T} + RK_1)^\top (K_0 - K_1) - (K_0 - K_1)^\top R(K_0 - K_1)}_{=\bar{Q}}$$

$\Rightarrow$ Conosciamo $\delta P(T) = 0$ e vogliamo conoscere $\delta P(0)$!

[1] Abbiamo sfruttato il fatto che $S_0 = A + BK_0 = A + BK_0 + BK_1 - BK_1 = S_1 + B(K_0 - K_1)$

Dimostrazione di Algoritmo di Kleinman (2/2)

Utilizzando la legge di aggiornamento dell'algoritmo $K_1 = -R^{-1}B^\top P_{0,T}$

$\Rightarrow \bar{Q} = -(K_0 - K_1)^\top R(K_0 - K_1) \quad \Rightarrow \quad \delta\dot{P} = -S_1^\top \delta P - \delta P S_1 + \bar{Q}, \quad \delta P(T) = 0$

Equazione matriciale lineare della forma

$$\dot{X} = A^\top X + XA + Y, X(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(t) = \int_t^T -e^{A^\top(t-\tau)} Y e^{A(t-\tau)} d\tau$$

Nel nostro caso

$$\delta P(0) = \int_0^T -e^{S_1^\top \tau} \bar{Q} e^{S_1 \tau} d\tau$$

e dunque

$$J_T(u_0) - J_T(u_1) = \frac{1}{2} x^\top \delta P(0) x = \frac{1}{2} x^\top \left(\int_0^T e^{S_1^\top \tau} (K_0 - K_1)^\top R (K_0 - K_1) e^{S_1 \tau} d\tau \right) x \geq 0$$

ovvero $P_{0,T}(0) \geq P_{1,T}(0)$, per ogni $T \quad \Rightarrow \quad$ (al limite) $\bar{P}_0 \geq \bar{P}_1$

Infine, $V_1(x) = \frac{1}{2} x^\top \bar{P}_1 x < \infty \Leftrightarrow \sigma(A + BK_1) \subset \mathbb{C}^-$, possiamo iterare il ragionamento!

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo LQ su orizzonte finito

Prossimi passi:

- Consideriamo problemi di LQR in cui lo *stato desiderato* è diverso da $x = 0$