Principio di Ottimalità e Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Consideriamo un sistema non-lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)\,, \qquad x(t_0) = x_0\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \qquad f(0,0,t) = 0, \forall t$$

Supponiamo che f sia *localmente Lipschitz*[1] rispetto a x e *continua* rispetto ad u e t

$\Rightarrow$ esistenza ed unicità (locale, in t) della soluzione $x(t)$

L'obiettivo è *controllare* il sistema in un intervallo di tempo $[t_0, T]$ fissato a priori, ovvero determinare una funzione $u^\star(t)$, $t \in [t_0, T]$, tale che la corrispondente soluzione $x^\star(t)$ minimizzi l'**indice di costo**

$$J(u) = \underbrace{\int_{t_0}^{T} \ell(x(t), u(t), t)dt}_{\text{termine di Lagrange}} + \overbrace{m(x(T))}^{\text{termine di Mayer}} \qquad \text{Problema di Bolza}$$

- **costo corrente** $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\ell(0,0,t) = 0$, $\forall t$
- **costo terminale** $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $m(0) = 0$

[1] Una funzione $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è localmente Lipschitz se per ogni x esiste un *intorno* U di x e una costante L tale che $\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\|$, per ogni $y \in U$.

Definizione di Problema di Controllo Ottimo

Consideriamo un sistema non-lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f(0, 0, t) = 0, \forall t$$

Supponiamo che f sia *localmente Lipschitz* rispetto a x e *continua* rispetto ad u e t
$\Rightarrow$ esistenza ed unicità (locale, in t) della soluzione $x(t)$

L'obiettivo è *controllare* il sistema in un intervallo di tempo $[t_0, T]$ fissato a priori, ovvero determinare una funzione $u^\star(t)$, $t \in [t_0, T]$, tale che la corrispondente soluzione $x^\star(t)$ minimizzi l'**indice di costo**

$$J(u) = \underbrace{\int_{t_0}^{T} \ell(x(t), u(t), t) dt}_{\text{termine di Lagrange}} + \overbrace{m(x(T))}^{\text{termine di Mayer}} \qquad \text{Problema di Bolza}$$

Limitiamo la scelta dei controlli ammissibili a **retro-azioni** dallo stato x al tempo t

$$u = \phi(x, t)$$

$\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$

Principio di Ottimalità

Consideriamo un Problema di Bolza. Se $u^\star$ è ottima sull'intervallo $[t, T]$ a partire dallo stato $x(t)$, allora $u^\star(\tau)$, $\tau \in [t+\Delta t, T]$, è necessariamente ottima per un Problema di Bolza *ristretto* all'intervallo $[t+\Delta t, T]$ a partire da $x^\star(t+\Delta t)$ per ogni Δt tale che $0 < \Delta t \leq T - t$ ◇

Dimostrazione. (per *contraddizione*)

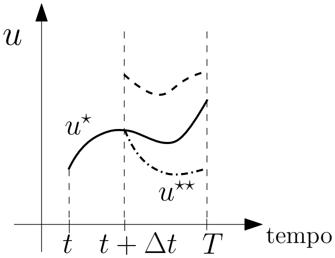
Supponiamo **per assurdo** che esista $u^{\star\star}$ che fornisce un valore minore dell'indice di costo (ristretto)

$$\tilde{J}(u) = \int_{t+\Delta t}^{T} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T))$$

rispetto a $u^\star$ in $[t+\Delta t, T]$ ($\tilde{J}(u^{\star\star}) < \tilde{J}(u^\star)$)

Definiamo un nuovo controllo $\hat{u}$

$$\hat{u}(\tau) = \begin{cases} u^\star(\tau), & \text{se} \quad t \leq \tau \leq t+\Delta t \\ u^{\star\star}(\tau), & \text{se} \quad t+\Delta t \leq \tau \leq T \end{cases}$$



Principio di Ottimalità

Consideriamo un Problema di Bolza. Se $u^\star$ è ottima sull'intervallo $[t, T]$ a partire dallo stato $x(t)$, allora $u^\star(\tau)$, $\tau \in [t + \Delta t, T]$, è necessariamente ottima per un Problema di Bolza *ristretto* all'intervallo $[t + \Delta t, T]$ a partire da $x^\star(t + \Delta t)$ per ogni Δt tale che $0 < \Delta t \leq T - t$ ⋄

Dimostrazione. (per *contraddizione*)

Allora, sull'intero intervallo $[t, T]$ abbiamo

$$J(\hat{u}) = \int_t^T \ell(\hat{x}(s), \hat{u}(s), s)ds + m(\hat{x}(T))$$

$$= \int_t^{t+\Delta t} \ell(x^\star(s), u^\star(s), s)ds + \overbrace{\int_{t+\Delta t}^T \ell(x^{\star\star}(s), u^{\star\star}(s), s)ds + m(x^{\star\star}(T))}^{\tilde{J}(u^{\star\star})}$$

$$< \int_t^{t+\Delta t} \ell(x^\star(s), u^\star(s), s)ds + \underbrace{\int_{t+\Delta t}^T \ell(x^\star(s), u^\star(s), s)ds + m(x^\star(T))}_{\tilde{J}(u^\star)} = J(u^\star)$$

contraddicendo l'ipotesi che $u^\star$ sia la soluzione ottima su $[t, T]$ □

Commenti sul Principio di Ottimalità

Analisi di una soluzione ottima (che abbiamo già calcolato in qualche modo...):

per ogni istante intermedio $\bar{t} \in [t, T]$, se $x^\star(\bar{t})$ è lo stato raggiunto dalla traiettoria ottima, allora le decisioni rimanenti da $\bar{t}$ a T devono rappresentare una strategia ottima a partire da $x^\star(\bar{t})$

Sintesi?

- Dividiamo l'intervallo $[t, T]$ nei due sotto-intervalli $[t, t + \Delta t]$ e $[t + \Delta t, T]$
- Supponiamo di avere uno *strumento* che ci restituisce il costo ottimo (e la strategia corrispondente) da tutti i possibili stati raggiunti all'istante $t + \Delta t$
- Grazie al Principio di Ottimalità possiamo preoccuparci solo della prima parte del problema perchè lo *strumento* ci fornirà le rimanenti decisioni ottime che devono necessariamente coincidere con quelle che avrei ottenuto minimizzando direttamente sull'intero intervallo

Abbiamo visto che questo *strumento* è la **Funzione Valore**!

Funzione Valore $V^\star(x,t)$, $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Consideriamo un Problema di Bolza

$$\begin{cases} \min\limits_u \{J(u)\} = & \min\limits_u \left\{ \int_{t_0}^{T} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)) \right\} \\ \dot{x} = & f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Data la condizione iniziale x_0 e il tempo iniziale t_0, la Funzione Valore restituisce il minimo valore dell'indice di costo, ovvero

$$V^\star(x_0, t_0) \triangleq \min_u \left\{ \int_{t_0}^{T} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)) \right\}$$

Vogliamo scrivere un'equazione che *caratterizzi* la funzione $V^\star$...

Cerchiamo di derivare un'equazione per $V^\star$:

$$
\begin{aligned}
V^\star(x(t),t) &= \min_{u(\tau),\tau\in[t,T]} \left\{ \int_t^T \ell(x(s),u(s),s)ds + m(x(T)) \right\} \\
&= \min_{u(\tau),\tau\in[t,T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \ell(x(s),u(s),s)ds + \int_{t+\Delta t}^T \ell(x(s),u(s),s)ds + m(x(T)) \right\} \\
&= \min_{u(\tau),\tau\in[t,t+\Delta t]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} \ell(x(s),u(s),s)ds + V^\star(x(t+\Delta t),t+\Delta t) \right\}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

In teoria, abbiamo già ottenuto un'equazione (*integrale*) per $V^\star$, che però non sembra di facile risoluzione

$\Rightarrow$ Vorremmo ottenere un'equazione *differenziale* (considerando il limite per Δt che tende a zero...)

Breve riepilogo su espansione in serie di Taylor

Consideriamo una funzione *derivabile con continuità* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Espansione in serie di Taylor al primo ordine intorno al punto $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=a}(x-a) + o(x-a)$$

dove $o(x-a)$ è un *infinitesimo* di ordine superiore a $x-a$, ovvero $\lim_{x\to a} \frac{o(x-a)}{\|x-a\|} = 0$

Consideriamo le seguenti espansioni al primo ordine:

- $x(t+\Delta t)$ intorno a t

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \overbrace{\dot{x}(t)}^{f(x(t),u(t),t)} \Delta t + o(\Delta t)$$

- $V^\star(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ intorno a $(x(t), t)$

$$V^\star(x(t+\Delta t), t+\Delta t) = V^\star(x(t),t) + \frac{\partial V^\star}{\partial x}(x(t),t)\, \underbrace{[x(t+\Delta t) - x(t)]}_{f(x(t),u(t),t)\Delta t + o(\Delta t)} + \frac{\partial V^\star}{\partial t}(x(t),t)\Delta t$$

- $\int_t^{t+\Delta t} \ell(x(s), u(s), s) ds$ intorno a t

$$\int_t^{t+\Delta t} \ell(x(s),u(s),s)ds = \cancel{\int_t^t \ell(x(s),u(s),s)ds} + \ell(x(t),u(t),t)\Delta t + o(\Delta t)$$

Sostituiamo le tre precedenti espansioni nell'equazione (1)

$$\cancel{V^\star(x(t),t)} = \min_{u(\tau),\tau\in[t,t+\Delta t]} \Big\{ \ell(x(t),u(t),t)\Delta t + \cancel{V^\star(x(t),t)} + \frac{\partial V^\star}{\partial t}(x(t),t)\Delta t + \frac{\partial V^\star}{\partial x}(x(t),t) f(x(t),u(t),t)\Delta t + o(\Delta t) \Big\}$$

dividiamo per Δt e facciamo il limite per Δt che tende a 0^+

$$0 = \min_{\mathbf{u(t)}} \left\{ \ell(x(t),u(t),t) + \frac{\partial V^\star}{\partial t}(x(t),t) + \frac{\partial V^\star}{\partial x}(x(t),t) f(x(t),u(t),t) \right\}$$

dal momento che dobbiamo determinare la soluzione per ogni t e per ogni $x(t)$ (indipendenti) $\Rightarrow$ **Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman**:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V^\star}{\partial t}(x,t) & = \min\limits_{u} \left\{ \ell(x,u,t) + \dfrac{\partial V^\star}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) \right\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [t_0, T] \\ V^\star(x,T) & = m(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo per sistemi a tempo continuo

Prossimi passi:

- Dimostriamo che l'equazione HJB fornisce anche condizioni sufficienti di ottimalità
- Studiamo problemi di controllo ottimo in cui l'equazione di HJB si semplifica e può essere risolta in forma chiusa
- Consideriamo problemi di controllo ottimo a tempo continuo con sistemi lineari e indice di costo quadratico