Pendolo Inverso

Lorenzo Rossi Matricola: 0301285

June 18, 2022

Formulazione del Sistema

Noti: $M = 1kg, L = 1m, F = 1\frac{Kg}{s}, g = 9.81\frac{m}{s^2}$

$$\begin{cases} M\ddot{s} + F\dot{s} - \mu = d_1 \\ \ddot{\phi} - \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}\ddot{s}\cos(\phi) = 0 \end{cases}$$

Esplicitando $\ddot{s}, \ddot{\phi}$ si ottiene;

$$\begin{cases} \ddot{s} = -\frac{F}{M}\dot{s} + \frac{1}{M}\mu + \frac{1}{M}d_1 \\ \ddot{\phi} = \frac{g}{L}\sin(\phi) - \frac{1}{L}\ddot{s}\cos(\phi) = \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}(\frac{F}{M}\dot{s} - \frac{1}{M}\mu - \frac{1}{M}d_1) \end{cases}$$

Sia:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & \dot{s} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mu & d_1 \end{bmatrix}^T$$

Si ottiene il sistema finale:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = \frac{g}{L}\sin(x3) + \frac{1}{L}(\frac{F}{M}x_2 - \frac{1}{M}u_1 - \frac{1}{M}u_2)\cos(x3) \end{cases}$$

A1 - Punti Equilibrio

Calcolare tutte i punti di equilibrio del sistema per $\mu = d_1(t) = 0$ Si impone $\dot{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = x_4 \\ 0 = \sin x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s : x_1 \in \mathbb{R} \\ \dot{s} : x_2 = 0 \\ \phi : x_3 = 0 \vee x_3 = \pi \\ \dot{\phi} : x_4 = 0 \end{cases}$$

In particolare, si ha un punto di equilibrio nei casi in cui:

- Le velocità del carrello e del pendolo sono nulle;
- Il pendolo è perpendicolare al piano.
- Qualisiasi posizione del piano su cui si muove il carrello è un punto di equilibrio.

A2 - Linearizzazione del sistema

Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio $\phi = s = \dot{\phi} = \dot{s} = 0$ Per ottenere la linearizzazione occorre imporre che:

$$A_{lin} = \nabla_x f(x, u)|_{x=0, u=0} \quad B_{lin} = \nabla_u f(x, u)|_{x=0, u=0}$$

Quindi, effettuando le derivate si giunge a:

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A_{lin}\tilde{x} + B_{lin}u$$

A3 - Forma standard nello spazio di stato

Scrivere il sistema lineare nella forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + PD, \quad y = Cx$$

Siano:

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) & \dot{s(t)} & \phi(t) & \dot{\phi(t)} \end{bmatrix}^T \quad u(t) = \mu(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} s(t) & \phi(t) \end{bmatrix}^T$$

Quindi:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LM} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} d_1 \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

A4 - Controllabilità

Mostra che la coppia (A, B) è controllabile A tempo continuo vale che:

$$(A, B) \text{ controllabile} \iff (A, B) \text{ raggiungibile} \iff rank(R) = n \quad n = \dim(A), \quad R = \begin{bmatrix} B & AB & \dots A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$rank(R) = rank\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & -\frac{F}{M^2} & \frac{F^2}{M^3} \\ \frac{1}{M} & -\frac{F}{M^2} & \frac{F^2}{M^3} & -\frac{F^3}{M^4} \\ 0 & -\frac{1}{LM} & \frac{F}{LM^2} & -\frac{g}{L^2M} - \frac{F^2}{LM^3} \\ -\frac{1}{LM} & \frac{F}{LM^2} & -\frac{g}{L^2M} - \frac{F^2}{LM^3} & \frac{Fg}{L^2M^2} + \frac{F^3}{LM^4} \end{bmatrix}\right) = 4$$

La coppia (A, B) è controllabile.

A5 - Problema di Regolazione

Per formulare un problema di regolazione si procede nel seguente modo:

$$\dot{d_1} = 0 \rightarrow \dot{d_1} = S_1 d_1 \text{ con} S_1 = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \iff d_1(t) = d_1(0), \forall t \geq 0$$

$$d_2 = \alpha \sin(\omega t) \rightarrow \dot{\overline{d_2}} = S_2 \overline{d_2} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \overline{d_2}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow d_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \overline{d_2}(t)$$

Con l'introduzione del segnale $d_3(t)$ è possibile esprimere i segnali esogeni tramite:

$$\dot{d} = Sd = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} d \quad d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix}, d(0) = \begin{bmatrix} const \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Infine, definendo $e(t) = x1(t) - d_(t) = s(t) - d_2(t) = s(t) - \alpha \sin(\omega t)$, si riscrive il sistema A3.

A5.1 - Problema di Regolazione

Il nuovo sistema viene descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$$

In cui:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{LM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & 0 & 0 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A6 - Legge di controllo a full information

Consideriamo il problema di regolazione A5. Mostra che il problema è risulubile tramite una legge di controllo a full information In un problema di regolazione a full information vogliamo determinare una legge di controllo $u = Kx + Ld, L = \Gamma - K\Pi$ tale che:

- **S**: Il sistema $\dot{x} = (A + BK)x$ sia asintoticamente stabile;
- **R**: Tutte le traiettorie del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + (BL + P)d \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$$

sono tali che $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

Per il teorema del problema di regolazione a full information FBI, esiste una legge di controllo a full information se e solo se $\exists \Pi, \Gamma$ tale che siano soddisfatte le equazioni:$\Pi S = A\Pi + B\Pi + P \quad 0 = C\Pi + Q$. Inoltre, dal lemma di Hautus si ha che il teorema FBI è soddisfatto $\forall P, Q$ se e solo se:

$$rank \left(\begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p \quad \forall s \in \sigma(S)$$

A6.1 - Legge di controllo a full information

Quindi:

$$rank\left(\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s+\frac{F}{M} & 0 & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{LM} & -\frac{g}{L} & s & -\frac{1}{LM} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 5, \forall s \in \sigma(S) \implies \text{Equazioni FBI rispettate}$$

A7 - Legge di controllo in feedback dall'errore

Sia $e_0 = \begin{bmatrix} e \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - d_2 \\ \phi \end{bmatrix} = Cx + Q_0 d$ con $Q_0 = \begin{bmatrix} - & Q & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Questo segnale è necessario alla realizzazione dell'osservatore che produce le stime $\zeta(t), \delta(t)$, rispettivamente di $x(t)$ e$d(t)$, necessarie alla generazione del controllo $u(t)$. Quindi il controllore dinamico risultante è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = F\chi + Ge_0 \\ u = H\chi \end{cases} \qquad \chi = \begin{bmatrix} \zeta \\ \delta \end{bmatrix}$$

Inoltre, deve essere tale che:

- **S**:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BH\chi \\ \dot{\chi} = F\chi + GCx \end{cases}$$

  asintoticamente stabile;
- **R**: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + BH\chi + Pd \\ \dot{\chi} = F\chi + G(Cx + Q_0 d) \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$ $\quad F = \begin{bmatrix} A + G_1 C + BK & P + G_1 Q_0 + BL \\ G_2 C & S + G_2 Q_0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} K & L \end{bmatrix} \quad G = -\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad L = \Gamma - K\Pi$

  con le traiettorie $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$

A7.1 - Legge di controllo in feedback dall'errore

Per la realizzazione dell'osservatore occorre verificare che la coppia $A_0, C_0 = \left(\begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C & Q_0 \end{bmatrix} \right)$. In particolare:

$$(A, C) \text{ osservabile} \iff rank(O) = n \text{ con } n = \dim(A_0) = 7, O = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso $rank(O) = 7 \Rightarrow (A_0, C_0)$ è osservabile. Inoltre, bisogna soddisfare i requisiti di regolazione. Per cui, definito $e = C_e x + Qd = s - d_2$ si ha che:

- Dal teorema FBI:$\exists F, G, H$tali che si rispettino le condizioni **S**,**R** se e solo se:

$$\exists \Gamma, \Pi : \begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Pi + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

- Dal lemma di Hautus:

$$\exists \Gamma, \Pi : \begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Pi + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases} \quad \forall P, Q \iff rank\left(\begin{bmatrix} sI - A & B \\ C_e & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p = 5 \forall s \in \sigma(S)$$

B1 - Legge di controlo full information A5

La legge di controlo full information si ottiene dalle equazioni FBI.In particolare, si ottiene che:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\frac{\omega^2}{L\omega^2+g} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^3}{L\omega^2+g} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -1 & -M\omega^2 & F\omega \end{bmatrix}$$

Inoltre, la legge di controllo $u = Kx + (\Gamma - K\Pi)d$ viene scelta con K tale che la matrice $A + BK$ abbia gli autovalori desiderati per cui si ottiene stabilità asintotica. L'assegnazione degli autovalori può essere effettuata tramite la formula di Ackermann o di Mitter.

B2+B3 - Simulazioni $\omega = 0.1$: Lineare e Non Lineare

B4 - Simulazione $\omega \in \{1, 10\}$: Lineare e Non Lineare