Nome e Cognome

Scrivere le risposte sul retro di questo foglio e non consegnare altro. NGR $\equiv$ Non Giustificare la Risposta

Esercizio 1 Si consideri la matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ s2 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ s3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ s4 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:

$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \frac{1}{3}, \xi_1^2 = \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{2}{3}$; $(iii): \xi_1^1 = \frac{2}{3}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{6}, \xi_1^4 = \frac{1}{6}$;

$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj): \xi_2^1 = \frac{2}{3}, \xi_2^2 = \frac{1}{3}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = 0$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{3}, \xi_2^2 = \frac{1}{6}, \xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = 0$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**.

Rispettivamente: $(i)\ \frac{3}{2}$; $(ii)\ \frac{2}{3}$; $(iii)\ \frac{3}{2}$; $(j)\ 0$; $(jj)\ \frac{4}{3}$; $(jjj)\ -\frac{2}{3}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare quali, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**.

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jjj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare equilibri di Nash? *Indicare quali, oppure scrivere che non si può individuarli.* **NGR**.

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**.

Il valore del gioco è $\frac{2}{3}$.

Esercizio 2 Nel consiglio di amministrazione di una società siedono 11 membri. Tre di questi membri rappresentano i grandi investitori, quattro i lavoratori e quattro i piccoli investitori. Una decisione viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno un rappresentante dei grandi investitori, almeno due rappresentanti dei lavoratori e almeno due rappresentanti dei piccoli investitori. Determinare il valore di Shapley di ciascun membro, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

Non è possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. In particolare, esistono due coalizioni disgiunte entrambe in grado di far approvare una decisione. Ognuna di queste due coalizioni contiene esattamente un rappresentante dei grandi investitori, due rappresentanti dei lavoratori e due rappresentanti dei piccoli investitori.

Esercizio 2bis Svolgere nuovamente l'esercizio precedente ma nell'ipotesi che una decisione venga approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno due rappresentanti dei grandi investitori, almeno due rappresentanti dei lavoratori e almeno due rappresentanti dei piccoli investitori. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

In questo caso è invece possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley di un rappresentante dei lavoratori o dei piccoli investitori è pari a:

$$S_L(v) = S_{PI}(v) =$$

$$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 5!\cdot 5! + \binom{3}{1}\cdot(\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\cdot\binom{3}{3})\cdot 6!\cdot 4! + \binom{3}{1}\cdot(\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{2} + \binom{4}{3}\cdot\binom{3}{3})\cdot 7!\cdot 3! + \binom{3}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{3}\cdot 8!\cdot 2!}{11!}$$

e il valore di un rappresentante dei grandi investitori è quindi $S_{GI}(v) = \frac{1-8\cdot S_L(v)}{3}$.

In alternativa, si poteva calcolare direttamente il valore di $S_{GI}(v)$:

$$S_{GI}(v) =$$

$$\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 5!\cdot 5! + \binom{2}{1}\cdot(\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{2} + \binom{4}{2}\cdot\binom{4}{3})\cdot 6!\cdot 4! + \binom{2}{1}\cdot(\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{2} + \binom{4}{3}\cdot\binom{4}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{4}{4})\cdot 7!\cdot 3! + \binom{2}{1}\cdot(\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{3} + (\binom{4}{3}\cdot\binom{4}{4})\cdot 8!\cdot 2! + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{4}{4}\cdot 9!\cdot 1!}{11!}$$

e poi naturalmente $S_L(v) = S_{PI}(v) = \frac{1-3\cdot S_{GI}(v)}{8}$.

Esercizio 3 Due aziende concorrenti A e B decidono di offrire sul mercato un nuovo servizio. Il nuovo servizio offerto dalle due aziende è identico e 15000 consumatori decideranno se rivolgersi ad A o B come segue:

- 2000 consumatori sono fedeli a A e acquisteranno il servizio da A qualunque sia il prezzo che A decide;
- 3000 consumatori sono fedeli a B e acquisteranno il servizio da B qualunque sia il prezzo che B decide;
- 4000 consumatori vogliono acquistare il servizio in ogni caso e lo acquisteranno dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore: questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo;
- 6000 consumatori vorrebbero acquistare il servizio ma non sono disposti a spendere più di 100 euro: questi consumatori quindi acquisteranno il servizio dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore, ma solo se questo prezzo è non superiore a 100 euro. Di nuovo, questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo non superiore a 100 euro.

Ciascuna delle due aziende può decidere di offrire il servizio a tre prezzi diversi: 80 euro, 80+α euro, 120 euro, dove α è un parametro razionale tale che $0 < \alpha < 20$. È possibile che i giocatori scelgano lo stesso prezzo.

Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

La matrice dei payoff in forma di utilità per i due giocatori è la seguente (tutti i termini andrebbero in realtà moltiplicati per 1000):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & 80 & 80+\alpha & 120 \\ 80 & 560,640 & 960,240+3\alpha & 960,360 \\ 80+\alpha & 160+2\alpha,1040 & 560+7\alpha,640+8\alpha & 960+12\alpha,360 \\ 120 & 240,1040 & 240,1040+13\alpha & 480,600 \end{pmatrix}$$

A questo punto analizziamo questa matrice al variare del parametro α procedendo come al solito (ricordiamo che $0 < \alpha < 20$). Otteniamo che: 1) per entrambi i giocatori non esistono strategie dominanti; 2) lo stato $(80,80)$ è l'unico equilibrio di Nash ma non è mai ottimo secondo Pareto in quanto dominato strettamente dallo stato $(80+\alpha, 80+\alpha)$.

Esercizio 3bis Svolgere nuovamente l'esercizio precedente ma nell'ipotesi che $0 < \alpha < 20$.

Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati. Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

La matrice dei payoff in forma di utilità per i due giocatori è la seguente (tutti i termini andrebbero in realtà moltiplicati per 1000):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & 80 & 80+\alpha & 120 \\ 80 & 560,640 & 960,240+3\alpha & 960,360 \\ 80+\alpha & 160+2\alpha,1040 & 320+4\alpha,400+5\alpha & 320+4\alpha,360 \\ 120 & 240,1040 & 240,400+5\alpha & 480,600 \end{pmatrix}$$

A questo punto analizziamo questa matrice al variare del parametro α procedendo come al solito (ricordiamo che $20 < \alpha < 40$). Otteniamo che: 1) per entrambi i giocatori la prima strategia è dominante; 2) lo stato $(80,80)$ è l'unico equilibrio di Nash ed è ottimo secondo Pareto.