

## Pendolo Inverso

Lorenzo Rossi Matricola: 0301285

July 17, 2022

A0 - Formulazione del sistema  
A1 - Punti di Equilibrio  
A2 - Linearizzazione del sistema  
A3 - Forma standard nello spazio di stato  
A4 - Controllabilità  
A5 - Problema di Regolazione  
A6 - Legge di controllo a full information  
A7 - Legge di controllo in feedback dall'errore  
B1 - Legge di controllo full information A5  
B2+B3 - Simulazioni  
B4 - Simulazioni

- 1 A0 - Formulazione del sistema
- 2 A1 - Punti di Equilibrio
- 3 A2 - Linearizzazione del sistema
- 4 A3 - Forma standard nello spazio di stato
- 5 A4 - Controllabilità

- 6 A5 - Problema di Regolazione
- 7 A6 - Legge di controllo a full information
- 8 A7 - Legge di controllo in feedback dall'errore
- 9 B1 - Legge di controllo full information A5
- 10 B2+B3 - Simulazioni
- 11 B4 - Simulazioni

## Formulazione del Sistema

Noti:  $M = 1\text{kg}$ ,  $L = 1\text{m}$ ,  $F = 1\frac{\text{Kg}}{\text{s}}$ ,  $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\begin{cases} M\ddot{s} + F\dot{s} - \mu = d_1 \\ \ddot{\phi} - \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}\dot{s}\cos(\phi) = 0 \end{cases}$$

Esplicitando  $\ddot{s}$ ,  $\ddot{\phi}$  si ottiene;

$$\begin{cases} \dot{s} = -\frac{F}{M}\dot{s} + \frac{1}{M}\mu + \frac{1}{M}d_1 \\ \ddot{\phi} = \frac{g}{L}\sin(\phi) - \frac{1}{L}\dot{s}\cos(\phi) = \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}\left(\frac{F}{M}\dot{s} - \frac{1}{M}\mu - \frac{1}{M}d_1\right) \end{cases}$$

Sia:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s & \dot{s} & \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}^T$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mu & d_1 \end{bmatrix}^T$$

Si ottiene il sistema finale:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u_1 + \frac{1}{M}u_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{L}\sin(x_3) + \frac{1}{L}\left(\frac{F}{M}x_2 - \frac{1}{M}u_1 - \frac{1}{M}u_2\right)\cos(x_3) \end{cases}$$

## A1 - Punti Equilibrio

**Calcolare tutte i punti di equilibrio del sistema per  $\mu = d_1(t) = 0$  Si impone  $\dot{x} = 0$ :**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ \dot{x}_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = x_2 \\ 0 = 0 \\ 0 = x_4 \\ 0 = \sin x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} s : x_1 \in \mathbb{R} \\ \dot{s} : x_2 = 0 \\ \phi : x_3 = 0 \vee x_3 = \pi \\ \dot{\phi} : x_4 = 0 \end{cases}$$

In particolare, si ha un punto di equilibrio nei casi in cui:

- Le velocità del carrello e del pendolo sono nulle;
- Il pendolo è perpendicolare al piano.
- Qualsiasi posizione del piano su cui si muove il carrello è un punto di equilibrio.

## A2 - Linearizzazione del sistema

**Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno al punto di equilibrio**  $\phi = s = \dot{\phi} = \dot{s} = 0$  Per ottenere la linearizzazione occorre imporre che:

$$A_{lin} = \nabla_x f(x, u)|_{x=0, u=0} \quad B_{lin} = \nabla_u f(x, u)|_{x=0, u=0}$$

Quindi, effettuando le derivate si giunge a:

$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{x}} = A_{lin}\tilde{x} + B_{lin}u$$

## A3 - Forma standard nello spazio di stato

Scrivere il sistema lineare nella forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Pd, \quad y = Cx$$

Siano:

$$x(t) = \begin{bmatrix} s(t) & \dot{s}(t) & \phi(t) & \dot{\phi}(t) \end{bmatrix}^T \quad u(t) = \mu(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} s(t) & \phi(t) \end{bmatrix}^T$$

Quindi:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LM} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix} d_1 \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

## A4 - Controllabilità

**Mostra che la coppia  $(A, B)$  è controllabile** A tempo continuo vale che:

$$(A, B) \text{ controllabile} \iff (A, B) \text{ raggiungibile} \iff \text{rank}(R) = n \quad n = \dim(A), \quad R = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]$$

$$\text{rank}(R) = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & -\frac{F}{M^2} & \frac{F^2}{M^3} \\ \frac{1}{M} & -\frac{F}{M^2} & \frac{F^2}{M^3} & -\frac{F^3}{M^4} \\ 0 & -\frac{1}{LM} & \frac{F}{LM^2} & -\frac{g}{L^2M} - \frac{F^2}{LM^3} \\ -\frac{1}{LM} & \frac{F}{LM^2} & -\frac{g}{L^2M} - \frac{F^2}{LM^3} & \frac{Fg}{L^2M^2} + \frac{LM^3}{LM^4} \end{bmatrix} \right) = 4$$

La coppia  $(A, B)$  è controllabile.

## A5 - Problema di Regolazione

Per formulare un problema di regolazione si procede nel seguente modo:

$$\dot{d}_1 = 0 \rightarrow \dot{d}_1 = S_1 d_1 \text{ con } S_1 = [0] \iff d_1(t) = d_1(0), \forall t \geq 0$$

$$d_2 = \alpha \sin(\omega t) \rightarrow \dot{\overline{d}}_2 = S_2 \overline{d}_2 \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \overline{d}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow d_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \overline{d}_2(t)$$

Con l'introduzione del segnale  $d_3(t)$  è possibile esprimere i segnali esogeni tramite:

$$\dot{d} = Sd = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix} d \quad d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix}, d(0) = \begin{bmatrix} const \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Infine, definendo  $e(t) = x_1(t) - d_1(t) = s(t) - d_2(t) = s(t) - \alpha \sin(\omega t)$ , si riscrive il sistema A3.



## A5.1 - Problema di Regolazione

Il nuovo sistema viene descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Pd \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$$

In cui:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{LM} & \frac{g}{L} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{LM} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{LM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{LM} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_e = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## A6 - Legge di controllo a full information

**Consideriamo il problema di regolazione A5. Mostra che il problema è risolubile tramite una legge di controllo a full information** In un problema di regolazione a full information vogliamo determinare una legge di controllo  $u = Kx + Ld$ ,  $L = \Gamma - K\Pi$  tale che:

- **S:** Il sistema  $\dot{x} = (A + BK)x$  sia asintoticamente stabile;
- **R:** Tutte le traiettorie del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + BK)x + (BL + P)d \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$$

sono tali che  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

Per il teorema del problema di regolazione a full information FBI, esiste una legge di controllo a full information se e solo se  $\exists \Pi, \Gamma$  tale che siano soddisfatte le equazioni:  $\Pi S = A\Pi + B\Pi + P \quad 0 = C\Pi + Q$ . Inoltre, dal lemma di Hautus si ha che il teorema FBI è soddisfatto  $\forall P, Q$  se e solo se:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p \quad \forall s \in \sigma(S)$$

## A6.1 - Legge di controllo a full information

Quindi:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{F}{M} & 0 & 0 & \frac{1}{M} \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{F}{LM} & -\frac{g}{L} & s & -\frac{1}{LM} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} = 5, \forall s \in \sigma(S) \implies \text{Equazioni FBI rispettate}$$

## A7 - Legge di controllo in feedback dall'errore

Sia  $e_0 = \begin{bmatrix} e \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s - d_2 \\ \phi \end{bmatrix} = Cx + Q_0 d$  con  $Q_0 = \begin{bmatrix} - & Q & - \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Questo segnale è necessario alla realizzazione dell'osservatore che produce le stime  $\zeta(t), \delta(t)$ , rispettivamente di  $x(t)$  ed  $t$ , necessarie alla generazione del controllo  $u(t)$ . Quindi il controllore dinamico risultante è del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\chi} = F\chi + Ge_0 \\ u = H\chi \end{cases} \quad \chi = \begin{bmatrix} \zeta \\ \delta \end{bmatrix}$$

Inoltre, deve essere tale che:

• **S:**

$$\begin{cases} \dot{\chi} = A\chi + BH\chi \\ \dot{\chi} = F\chi + GCx \end{cases}$$

asintoticamente stabile;

• **R:** 
$$\begin{cases} \dot{\chi} = A\chi + BH\chi + Pd \\ \dot{\chi} = F\chi + G(Cx + Q_0 d) \\ y = Cx \\ e = C_e x + Qd \\ \dot{d} = Sd \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} A + G_1 C + BK & P + G_1 Q_0 + BL \\ G_2 C & S + G_2 Q_0 \end{bmatrix} \quad H = [K \quad L] \quad G = - \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix} \quad L = \Gamma - K\Pi$$

con le traiettorie  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$

## A7.1 - Legge di controllo in feedback dall'errore

Per la realizzazione dell'osservatore occorre verificare che la coppia  $A_0, C_0 = \left( \begin{bmatrix} A & P \\ 0 & S \end{bmatrix}, [C \quad Q_0] \right)$ . In particolare:

$$(A, C) \text{ osservabile} \iff \text{rank}(O) = n \text{ con } n = \dim(A_0) = 7, O = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

Nel nostro caso  $\text{rank}(O) = 7 \Rightarrow (A_0, C_0)$  è osservabile. Inoltre, bisogna soddisfare i requisiti di regolazione. Per cui, definito  $e = C_e x + Qd = s - d_2$  si ha che:

- Dal teorema FBI:  $\exists F, G, H$  tali che si rispettino le condizioni **S, R** se e solo se:

$$\exists \Gamma, \Pi : \begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Pi + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases}$$

- Dal lemma di Hautus:

$$\exists \Gamma, \Pi : \begin{cases} \Pi S = A\Pi + B\Pi + P \\ 0 = C\Pi + Q \end{cases} \quad \forall P, Q \iff \text{rank} \left( \begin{bmatrix} sI - A & B \\ C_e & 0 \end{bmatrix} \right) = n + p = 5 \quad \forall s \in \sigma(S)$$

## B1 - Legge di controllo full information A5

La legge di controllo full information si ottiene dalle equazioni FBI. In particolare, si ottiene che:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & -\frac{\omega^2}{L\omega^2+g} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\omega^3}{L\omega^2+g} \end{bmatrix} \quad \Gamma = \begin{bmatrix} -1 & -M\omega^2 & F\omega \end{bmatrix}$$

Inoltre, la legge di controllo  $u = Kx + (\Gamma - K\Pi)d$  viene scelta con  $K$  tale che la matrice  $A + BK$  abbia gli autovalori desiderati per cui si ottiene stabilità asintotica. L'assegnazione degli autovalori può essere effettuata tramite la formula di Ackermann o di Mitter.

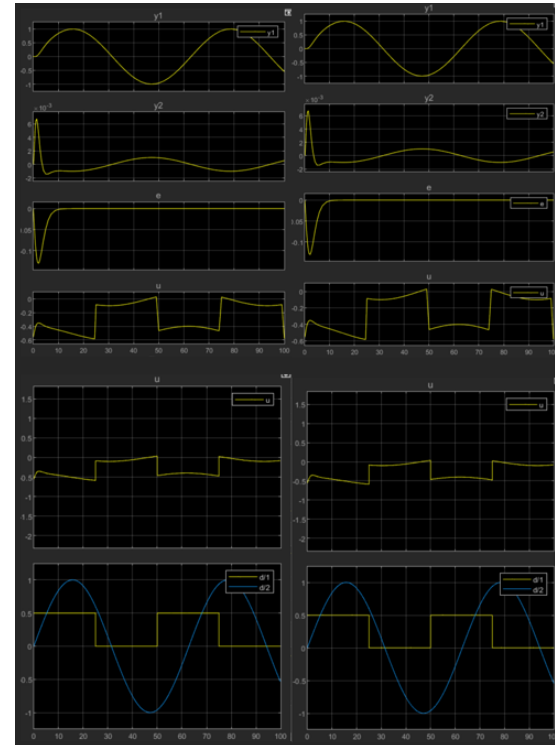
## B2+B3 - Simulazioni $\omega = 0.1$ : Lineare e Non Lineare

$$\sigma(A + BK) = (-1.5, -1.2, -1, -0.8)$$

Nel caso del modello linearizzato, l'obiettivo di regolazione è perfettamente raggiunto:

- $d_1$  non influisce su  $y$  poiché bilanciata dal controllo  $u$ ;
- Il controllo  $u$  è composto da:
  - Contributo per la regolazione di  $e$ ;
  - Contributo che contrasta il disturbo  $d_1$ ;

Applicando lo stesso controllo al modello non lineare, si raggiunge l'obiettivo di regolazione in maniera approssimata. Sono presenti a regime delle oscillazioni contenute coerenti al disturbo  $d_2$ . Il disturbo  $d_1$  non influisce su  $y$  e viene bilanciato dal controllo  $u$ .

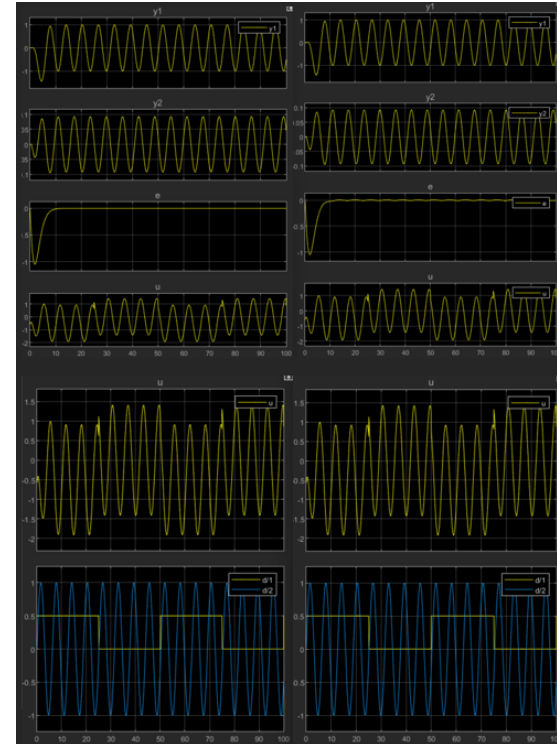


## B4 - Simulazione $\omega = 1$ : Lineare e Non Lineare

$$\sigma(A + BK) = (-1.5, -1.2, -1, -0.8)$$

L'aumentare del disturbo comporta un allontanamento dal punto di equilibrio  $x = 0$  poiché la regolazione avviene rispetto ad un segnale che varia più velocemente. Questo comporta che il modello linearizzato approssima in maniera meno accurata il modello non lineare con un controllo meno efficace.

A regime è possibile notare che l'andamento dell'errore presenta oscillazioni più elevate.





## B4 - Simulazione $\omega = 10$ : Lineare e Non lineare

$$\sigma(A + BK) = (-1.5, -1.2, -1, -0.8)$$

In questo caso, non si raggiunge l'obiettivo di regolazione. Il controllore diventa quindi inadeguato ed il sistema complessivo risulta instabile causando la divergenza dell'errore di inseguimento.

Inoltre, rimangono inalterate le prestazioni del modello linearizzato ma che non rispetta il comportamento del sistema reale.

