Teoria dei Giochi 2020/21	
Compiti	
G. Oriolo	*Esercizi 4*

Esercizio 1. (Il gioco del pari o dispari.) Due giocatori, P e D, annunciamo simultaneamente la loro giocata, che può essere un intero tra 1 e 5, (1 e 5 compresi). Il giocatore P vince un euro se la somma delle giocate è pari e perde un euro se la somma delle giocate è dispari. La cosa opposta avviene per il giocatore D.

Considerate l'estensione in strategia mista di questo gioco. Formulate con la programmazione lineare il problema di individuare una strategia minmax per il giocatore P. Dite quindi se la strategia in cui entrambi i giocatori utilizzano una distribuzione di probabilità uniforme (cioe' giocano 1, 2, 3, 4 o 5 con la stessa probabilità) conduce a un equilibrio di Nash, giustificando la risposta.

Soluzione. (Attenzione : nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.)

La matrice A dei payoff del primo giocatore (in forma di costo) è una matrice 5×5 tale che $a_{ij} = -1$ se $i + j$ è pari, 0 altrimenti.

Per verificare se le distribuzioni uniformi $\bar{x} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ del giocatore P e $\bar{y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ del giocatore D determinano un equilibrio di Nash possiamo, in questo caso, procedere in due modi. Potremmo calcolare $\tilde{C}_1(\bar{x})$ e $\tilde{C}_2(\bar{y})$ e verificare che $\tilde{C}_1(\bar{x}) = -\tilde{C}_2(\bar{y})$ (si noti che a differenza del gioco precedente questo gioco non è simmetrico, quindi non è detto sia a valore 0!). Oppure potremmo utilizzare la funzione best response e verichare che $\bar{y}$ (risp $\bar{x}$) sia per il secondo giocatore (risp. il primo giocatore) una migliore risposta quando il primo giocatore (risp. il secondo giocatore) gioca $\bar{x}$ (risp $\bar{y}$). Procederemo in questo secondo modo.

Se il primo giocatore (P) gioca la strategia uniforme $\bar{x} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$, è facile vedere che giocare la strategia pura $[0, 1, 0, 0, 0]$ oppure $[0, 0, 0, 1, 0]$ è per il secondo giocatore una migliore risposta.

D'altro canto, se il secondo giocatore (D) risponde con la strategia $\bar{y} = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right]$ alla strategia $\bar{x}$ del primo giocatore, allora il payoff atteso per ogni iterazione del gioco è pari a $\sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} \bar{x}_i a_{ij} \bar{y}_j = -\frac{1}{25}$, e quindi la strategia $\bar{y}$ non è per il secondo giocatore una risposta migliore quando il primo giocatore utilizza la distribuzione $\bar{x}$. La distribuzioni uniformi non determinano quindi un equilibrio di Nash, e quindi *almeno una delle due* non è una strategia conservativa. Per adesso non possiamo dire nulla di più ! (Ma come vedremo nel seguito, in realtà , nessuna delle due stategie è conservativa.)

Anche se non era richiesto dal testo, calcoliamo gli equilibri di Nash per il gioco. La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5$$

$$z \geq x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

La soluzione del precedente PL è un pò laboriosa. Consideriamo quindi la seguente *riformulazione* del gioco. Osserviamo che per ciascun giocatore la scelta da effettuare è semplicemente quella di decidere se giocare un numero pari o un numero dispari. In questo senso, il gioco è quindi descritto dalla seguente matrice di payoff (in forma di costo):

Giocatore D

Giocatore P		P	D
	P	-1	1
	D	1	-1

La formulazione di PL per trovare la strategia minmax per il giocatore P è la seguente.

$$\min z$$

$$z \geq -x_1 + x_2$$

$$z \geq x_1 - x_2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $z = 0$. Il gioco quindi è fair. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il primo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

La formulazione di PL per trovare la strategia conservativa per il giocatore D è la seguente.

$$\max w$$

$$w \leq -y_1 + y_2$$

$$w \leq y_1 - y_2$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

La risoluzione di questo programma restituisce $(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $w = 0$. Si osservi che per implementare la sua strategia conservativa, che richiede di giocare numeri pari e dispari nella stessa misura, il secondo giocatore può per esempio giocare il 50% delle volte 1 e il 50% delle volte 2; oppure giocare il 50% delle volte 3 e il 50% delle volte 4; oppure giocare il 20% delle volte 1, il 20% delle volte 3, il 10% delle volte 5, il 25% delle volte 2 e il 25% delle volte 4 ...

Esercizio 2 Considera il seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$. Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario: se $x \geq y$ o $x = \frac{y}{2}$ vinci 1 euro, in tutti gli altri casi perdi un euro.

2.1 Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*, individuando le strategie conservative di ciascun giocatore e, se esistono gli equilibri di Nash e il valore del gioco.
.

2.2 D'ora in poi considera l'*estensione in strategia mista* del gioco. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{7}\ \forall i = 1, \ldots, 7$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{7}\ \forall j = 1, \ldots, 7$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^7)$ il vettore stocastico associato alle 7 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

2.3 Qualcuna delle strategie indicate al punto 2.2 è conservativa? (Giustifica brevemente la risposta).

2.4 Quali sono gli equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarli, spiega perché non è possibile).

2.5 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiega perché non è possibile).

Soluzione

2.1 Giocare 64 e giocare 128 sono due strategie conservtive per il primo giocatore, mentre ogni strategia è una strategia conservativa per il secondo giocatore. Si osservi che tutti gli incroci delle strategie conservative determinano equilibri di Nash, quindi il gioco in strategie pura ha 14 equilibri di Nash e il valore del gioco è -1.

2.2 La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{7} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{i=1}^{7} \xi_1^i = 1$$

- il valore di questo programma, in corrispondenza alla soluzione $\xi_1^i = \frac{1}{7}\ \forall i = 1, \ldots, 7$ è $z = \frac{3}{7}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, (in media) $\frac{3}{7}$ di euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{7} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 7$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 7$$

$$\sum_{j=1}^{7} \xi_2^j = 1$$

- il valore di questo programma, in corrispondenza alla soluzione $\xi_2^j = \frac{1}{7}\ \forall j = 1, \ldots, 7$ è -1. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1 euro per ogni round del gioco.

2.3 Gli equilibri di Nash in strategia pura sono (particolari) equilibri di Nash in strategia mista. Segue dal punto 1.1 che il valore del gioco è -1, quindi la strategia proposta per il tuo avversario è conservativa.

2.4 Gli equilibri di Nash in strategia mista, oltre a quelli indicati al punto 1.1, sono quelli in cui il primo giocatore gioca 64 o 128 e il secondo giocatore gioca la strategia proposta al punto 1.2. (Ci sono anche altri equilibri di Nash, quelli indicati erano quelli più facilmente deducibili dallo svolgimento dell'esercizio).

2.5 Come osservato precedentemente il valore del gioco è -1.

3. Nella descrizione del gioco della morra abbiamo assunto, implicitamente, che i giocatori comunichino la loro congettura ("guess") sul numero nascosto dall'avversario simultaneamente. Considera quindi la variazione del gioco in cui uno dei due giocatori, sia A, accetti di comunicare sempre per primo la propria congettura: questo darà al giocatore B la possibilità di decidere la sua congettura dopo aver ascoltato la congettura di A.

A questo punto è lecito chiedersi se il gioco è ancora a valore zero, oppure se esso si è sbilanciato. Per rispondere a questa domanda, Formula il problema di programmazione lineare che consente di calcolare il valore del nuovo gioco. Non è richiesto di risolvere il programma (Suggerimento. Le strategie pure per A non cambiano. Per quanto riguarda B, egli può sempre decidere di ignorare la comunicazione di A, e quindi utilizzare le solite 4 strategie, oppure ....)

Soluzione Nel nuovo scenario B può utilizzare una delle seguenti 12 strategie:

1. Nascondi 1; congettura 1.
2. Nascondi 1; congettura 2.
3. Nascondi 2; congettura 1.
4. Nascondi 2; congettura 2.
1bis. Nascondi 1; congettura 1 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
5. Nascondi 1; congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
6. Nascondi 1; congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
2bis. Nascondi 1; congettura 2 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
3bis. Nascondi 2; congettura 1 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
7. Nascondi 2; congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
8. Nascondi 2; congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
4bis. Nascondi 2; congettura 2 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2

È immediato osservare che le strategie i e $ibis$ coincidono. Per cui, in pratica, B può utilizzare una delle seguenti 8 strategie:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.
4. Nascondi 2, congettura 2.
5. Nascondi 1, congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
6. Nascondi 1, congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2
7. Nascondi 2, congettura 1 se A congettura 1, congettura 2 se A congettura 2
8. Nascondi 2, congettura 2 se A congettura 1, congettura 1 se A congettura 2

ovvero:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.
4. Nascondi 2, congettura 2.
5. Nascondi 1, fai la stessa congettura di A.

6. Nascondi 1, fai una congettura differente da A.
7. Nascondi 2, fai la stessa congettura di A.
8. Nascondi 2, fai una congettura differente da A.

Per quanto riguarda A, le sue strategie non cambiano:

1. Nascondi 1, congettura 1.
2. Nascondi 1, congettura 2.
3. Nascondi 2, congettura 1.
4. Nascondi 2, congettura 2.

La matrice che descrive il gioco è la seguente matrice 4×8:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Il problema di PL associato alla scelta della migliore strategia per A è quindi il seguente:

$$\max z$$

$$z - \sum_{i=1}^{4} f_{ij} x_i \leq 0 \quad j = 1..8$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0$$