Teoria dei Giochi – Prova del 24 Gennaio 2017

Cognome, Nome, email: ______________________________

NGR $\equiv$ Non è richiesto di giustificare la risposta.

Esercizio 1 Si consideri il seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{3,5,6,10\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{10,12,18,40\}$. Se il numero scelto dal tuo avversario è un multiplo del numero che hai scelto, perdi un euro; se il numero scelto dal tuo avversario non è un multiplo del numero che hai scelto, vinci un euro.

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

1.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

1.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

1.3 Si consideri ora la sua *estensione in strategia mista*. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \frac{1}{2}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{1}{2}$
- $\xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{1}{2}$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^1 = \frac{1}{2}, \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = 0$
- $\xi_2^1 = 0, \xi_2^2 = \frac{1}{2}, \xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = 0$
- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,2,3,4$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore).

1.3 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

1.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

1.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

1.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Soluzione: È facile vedere che per il primo giocatore, giocare 3 o 6 è indifferente (il payoff che ottiene giocando 3 è sempre uguale al payoff che ottiene giocando 6, qualunque sia la scelta del secondo giocatore), così come è indifferente giocare 5 o 10. Analogamente, per il secondo giocatore, giocare 10 o 40 è indifferente, così come è indifferente giocare 12 o 18.

Senza perdita di generalità possiamo ridurci al caso in cui: il primo giocatore può giocare 2 strategie, 3 (o in modo equivalente 6) oppure 5 (o in modo equivalente 10); il secondo giocatore può giocare 2 strategie, 12 (o in modo equivalente 18) oppure 10 (o in modo equivalente 40). Considerando la matrice 2×2 dei payoff è facile quindi vedere che questo gioco altro non è che Matching Pennies. Pertanto in strategia pura non esistone né strategie dominanti né equilibri di Nash.

Consideriamo ora l' *estensione in strategia mista* del gioco: per ciascun giocatore la strategia conservativa corrisponderà a giocare la metà delle volte una strategia e la metà delle volte l'altra. Segue che la seconda strategia proposta per il giocatore 1 e la prima strategia proposta per il giocatore 2 sono conservative, e che il loro incrocio restituisce un equilibrio di Nash. Il valore del gioco è 0.

Esercizio 2 Si svolga nuovamente l'esercizio del punto precedente (per intero, ovvero tutti e 6 i quesiti), ma assumendo questa volta si assuma che il secondo giocatore possa scegliere un numero dall'insieme $\{7, 12, 15, 60\}$ (mentre le strategie a disposizione del primo giocatore rimangono invariate).

Soluzione:
1.1 Giocare 10 è una strategia debolmente dominante per il primo giocatore, mentre giocare 60 è una strategia debolmente dominante per il secondo giocatore.
1.2 $(3,60)$, $(5,60)$,$(6,60)$,$(10,60)$ sono tutti gli equilibri di Nash del gioco in strategia pura. Poiché il gioco è antagonistico, il valore dei payoff nei punti di equilibrio di Nash deve essere lo stesso ed è pari al valore del gioco, che in questo caso risulta pari a 1.
1.3 La matrice C dei payoff per il primo giocatore in forma di costo è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e alla colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che si deve risolvere per individuare la strategia conservativa del primo giocatore è il seguente:

$$\begin{array}{llcll} min & z & & & \\ s.t. & z & \geq & \sum_{i=1}^{4} c_{ij}\xi_1^i & \forall \quad j = 1,...,4 \\ & \xi_1^i & \geq & 0 & \forall \quad i = 1,...,4 \\ & \sum_{i=1}^{4} \xi_1^i & = & 1 & \end{array}$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla strategia $\xi_1^i = (0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ è $z = 1$. Quindi se il primo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla strategia $\xi_1^i = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ è $z = 1$. Quindi se il primo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che si deve risolvere per individuare la strategia conservativa del secondo giocatore è il seguente:

$$\begin{array}{llcll} max & w & & & \\ s.t. & z & \leq & \sum_{j=1}^{4} c_{ij}\xi_2^j & \forall \quad i = 1,...,4 \\ & \xi_2^j & \geq & 0 & \forall \quad j = 1,...,4 \\ & \sum_{j=1}^{4} \xi_2^j & = & 1 & \end{array}$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla strategia $\xi_2 = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ è $w = -1$. Quindi se il secondo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla strategia $\xi_2 = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ è $w = -1$. Quindi se il secondo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) 1 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza alla strategia $\xi_2^j = \frac{1}{4} \forall \quad j = 1, \ldots, 4$ è $w = -\frac{1}{2}$. Quindi se il secondo giocatore utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.

1.4 Dal punto 1.2 sappiamo che il valore del gioco è pari ad 1 pertanto entrambe le strategie proposte per il primo giocatore sono conservative, mentre nessuna delle strategie proposte per il giocatore due è conservativa.
1.5 Poiché un equilibrio di Nash puro è anche un equilibrio di Nash misto, tutti gli equilibri di Nash individuati nel punto 1.2 sono equilibri di Nash per il gioco in strategia mista (naturalmente dovremmo esprimerli come vettori di probabilità). Inoltre, poiché in ogni caso l'incrocio di strategie conservative determina sempre un equilibrio di Nash, segue che per il gioco in strategia mista sono equilibri di Nash anche i punti $((0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, 0, 0, 1))$ e $((\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}), (0, 0, 0, 1))$
1.6 Come osservato precedentemente il valore del gioco è 1.

Esercizio 3 È dato un gioco non cooperativo finito e antagonistico. Al solito, indichiamo con x_1 la generica strategia pura del primo giocatore e con ξ_1 la sua generica strategia mista. Inoltre indichiamo con $\tilde{C}_1(x_1)$ (risp. $\tilde{C}_1(\xi_1)$) quanto paga nel caso peggiore il giocatore se gioca la strategia x_1 (risp ξ_1). Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera o è falsa. **NGR**. Penalità per riposte errate.

1 Esiste sempre una strategia pura dominante per il gioco puro. ☐ VERO ■ FALSO

2 Esiste sempre una strategia mista dominante per il gioco misto. ☐ VERO ■ FALSO

3 Se x_1 è dominante per il gioco puro, x_1 è sempre conservativa per il gioco puro. ■ VERO ☐ FALSO

4 Se x_1 è dominante per il gioco puro, x_1 è sempre dominante per il gioco misto. ■ VERO ☐ FALSO

5 Se x_1 è dominante per il gioco puro, x_1 è sempre conservativa per il gioco misto. ■ VERO ☐ FALSO

6 Se ξ_1 è dominante per il gioco misto, ξ_1 è sempre conservativa per il gioco misto. ■ VERO ☐ FALSO

7 Se x_1 è dominante per il gioco puro, allora il valore del gioco misto è sempre $\tilde{C}_1(x_1)$. ■ VERO ☐ FALSO

8 Se ξ_1 è dominante per il gioco misto, allora il valore del gioco misto è sempre $\tilde{C}_1(\xi_1)$. ■ VERO ☐ FALSO

Esercizio 4 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di costo, dove b è un qualunque numero (positivo o negativo):

Giocatore 2

Giocatore 1		A	B	C
	D	$5, 2b$	$9, 3$	$6-2b, 4$
	E	$2b+3, 2b$	$7, 6$	$1, 4b-2$
	F	$3, 4$	$5, 6$	$8, 4$

4.1 Dire per quali valori di b esistono equilibri di Nash del gioco (se ne esistono) e quali sono. **NGR**.
Il punto (F, A) è un equilibrio di Nash per $b \geq 0$. Il punto (E, C) è un equilibrio di Nash per $b \leq 1$.

4.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di b esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono. **NGR**.

Per il primo giocatore giocare non ha strategie debolmente dominanti. Mentre, per il secondo giocatore, giocare A è una strategia debolmente dominante per $1 \leq b \leq \frac{3}{2}$.

4.3 Porre adesso $b = 3$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso. **NGR**.

Per $b = 3$, gli ottimi deboli secondo Pareto sono: $(D, B), (D, C), (F, A), (F, C)$.

Esercizio 5 Nel consiglio di amministrazione di una società siedono 6 uomini e 2 donne. Una decisione viene assunta se e solo se a suo favore votano tutti gli uomini (e eventualmente qualche donna) o tutte

le donne (e eventualmente qualche uomo). Se il gioco si può formulare come un gioco cooperativo, dire qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore. Giustificare brevemente la risposta.
Soluzione: Il gioco non può essere formulato come un gioco cooperativo in quanto non è garantita la superadditività. Infatti, esistono due coalizioni disgiunte in grado di assumere una decisione (i.e., la coalizione formata da tutti gli uomini e quella formata da tutte le donne).

5.1 Si consideri adesso la situazione in cui una decisione viene assunta se e solo se a suo favore votano tutti gli uomini e *almeno una* donna o tutte le donne e *almeno un* uomo. Se il gioco si può formulare come un gioco cooperativo, dire qual è il valore di Shapley di ciascun giocatore. Giustificare brevemente la risposta.

È facile vedere che si tratta di un gioco cooperativo semplice in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\#\text{permutazioni tali che : la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus \{i\} \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione un consigliere uomo i. Le permutazioni in cui egli è determinante sono tutte quelle in cui si trova in settima posizione e in ottava posizione c'è un consigliere donna e quelle in cui egli si trova in terza posizione e le prime due posizioni sono occupate dalle due donne. Il numero di permutazioni in cui si trova in settima posizione e nella posizioni seguente si trova una donna sono $2 \cdot 6!$. Le permutazioni in cui si trova in terza posizione e le prime due posizioni sono occupate dalle due donne sono $2 \cdot 5!$. Il valore di Shapley di ciascun consigliere uomo è quindi $\frac{(2 \cdot 6! + 2 \cdot 5!)}{8!} = \frac{1}{24}$. Il valore di Shapley di ciascun consigliere donna è quindi $\frac{1}{2}(1 - 6 \cdot \frac{1}{24}) = \frac{3}{8}$.