Progetto di Reti

#4

$$\min \sum_{i\in F} f_i \cdot y_i + \sum_{j\in N}\sum_{i\in F} d_{ij} x_{ij}$$

z_{RL}

$$\sum_{i\in F} x_{ij} \geq 1 \quad \forall j\in N$$

$$y_i - x_{ij} \geq 0 \quad \forall j\in N, i\in F$$

$$y_i, x_{ij} \geq 0$$

ω_D

$$\max \sum_{j\in N} \alpha_j \quad \equiv$$

(D)

$$\sum_{j\in N} \beta_{ij} \leq f_i \quad i\in F$$

$$\alpha_j \leq \beta_{ij} + d_{ij} \quad \begin{matrix} i\in F \\ j\in N \end{matrix}$$

$$\alpha_j, \beta_{ij} \geq 0$$

$$c(N) = z_I \geq z_{RL} = \omega_D$$

$$\gamma^* = \frac{z_{RL}}{z_I} = \frac{\omega_D}{z_I} = \frac{\omega_Q}{z_I}$$

ω_Q

(Q)

$$\max \sum_{j\in N} \alpha_j$$

$$\sum_{j\in S} \alpha_j \leq c(S) \quad \forall S\subseteq N$$

$$\alpha_j \geq 0 \quad j\in N$$

- se (α,β) soluzione ammissibile x D $\rightarrow$ α è soluzione ammissibile x Q
- se α è ammis. x Q $\rightarrow \exists \beta : (\alpha,\beta)$ ammis x D

$$\gamma^* = \text{INTEGRALITY GAP } \frac{z_{RL}}{z_I}$$

(α, β) soluzione ammissibile per (D)

- $i \in F$ e $S_i \subseteq N$

$$\sum_{j \in N} \beta_{ij} \le f_i$$

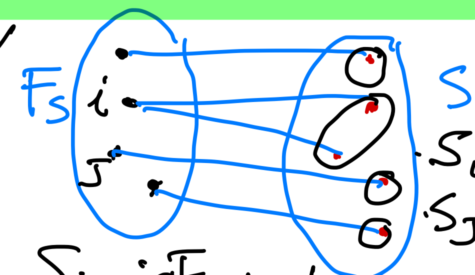
$$\alpha_j \le \beta_{ij} + d_{ij} \quad j \in S_i$$

$$\sum_{j \in S_i} \alpha_j + \sum_{j \in N / S_i} \beta_{ij} \le f_i + \sum_{j \in S_i} d_{ij}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j \in S_i} \alpha_j \le f_i + \sum_{j \in S_i} d_{ij}$$

sia $S \subseteq N$ risolviamo il problema di F.L. su $S \rightarrow$ il costo è $c(S)$, sia F_S l'insieme di facility aperte all'ottimo per S



$S_i, i \in F$ partizionano S

$$\sum_{i \in F_S} \sum_{j \in S_i} \alpha_j \le \sum_{i \in F_S} f_i + \sum_{i \in F_S} \sum_{j \in S_i} d_{ij}$$

$$\sum_{j \in S} \alpha_j \le \sum_{i \in F_S} f_i + \sum_{j \in S} d_{ij} = c(S)$$

$\alpha_j : \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$

$\exists \beta : (\alpha, \beta)$ ammissibile per D

$\beta_{ij} = \max(0, \alpha_j - d_{ij}) \Rightarrow$ per costruzione $\alpha_j \leq \beta_{ij} + d_{ij}$

devo mostrare che $\sum_{j \in N} \beta_{ij} \leq f_i \quad \forall i$

supponiamo che $\exists i \in F$ $\sum_{j \in N} \beta_{ij} > f_i$; Sia $S \subseteq N$: $\beta_{ij} > 0$
x assurdo

$$\equiv$$

$$\sum_{j \in S} \beta_{ij} > f_i$$

$$\equiv$$

$$\sum_{j \in S} (\alpha_j - d_{ij}) > f_i \equiv \sum_{j \in S} \alpha_j > f_i + \sum_{j \in S} d_{ij}$$

$\lightning$ CONTRADDIZIONE

$c(S) > f_i + \sum_{j \in S} d_{ij}$