Università di Tor Vergata

Dipartimento di Ingegneria dell'Impresa «Mario Lucertini»

CORSI DI

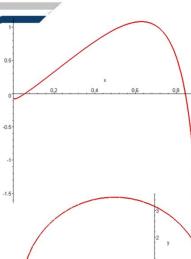
PROTOTIPAZIONE VIRTUALE

PROTOTIPAZIONE VIRTUALE E SIMULAZIONE DEI SISTEMI MECCANICI

T1: Le curve

Pier Paolo Valentini @ 2015

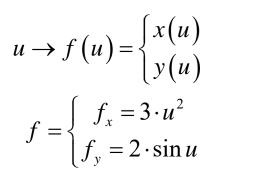
Richiami di geometria



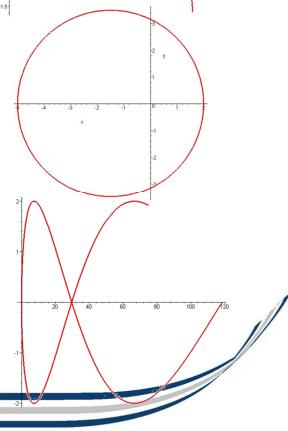
$$y, x \to f(x, y) = 0$$

 $x^2 + y^2 + 3 \cdot x - 10 = 0$

Equazione di una curva nel piano in FORMA IMPLICITA



Equazione di una curva nel piano in FORMA PARAMETRICA



Dall'analisi alla modellazione

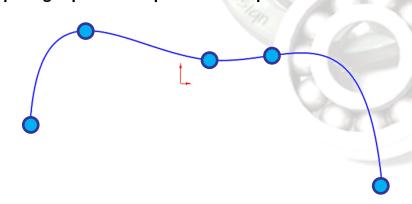
- Nei corsi di geometria ed analisi si è approfondito il discorso dello studio ANALITICO di funzione: funzione -> grafico, tangenza, concavità, max, min
- ✓ La modellazione di curve affronta il problema inverso: a partire da alcune specifiche → trovare al curva e definirne una sua schematizzazione
- Ad esempio:

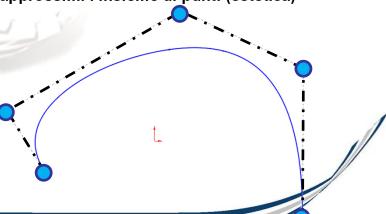
Curve interpolanti

Dato un insieme di punti trovare la struttura che passi per ogni punto con particolari requisiti di continuità

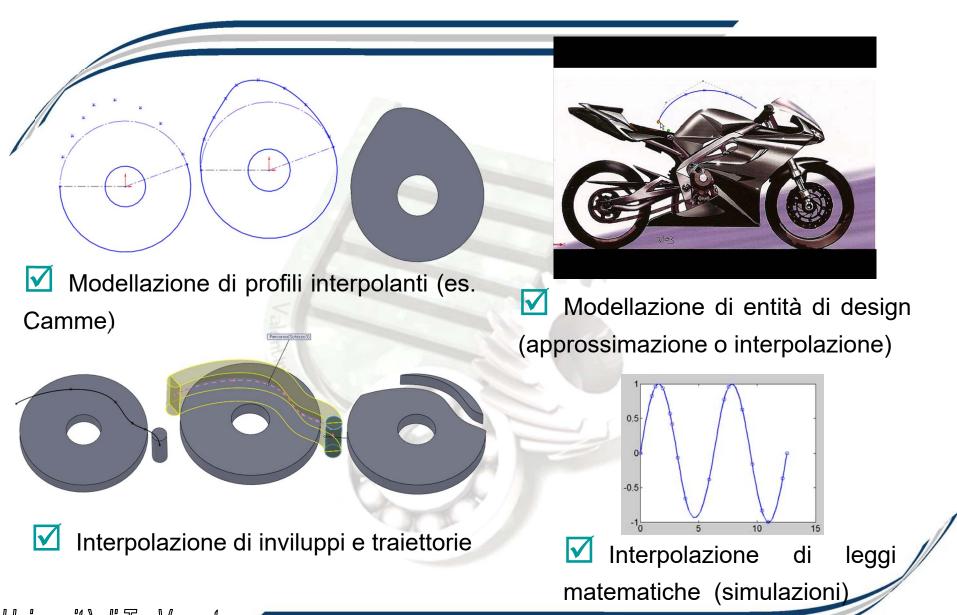
Curve approssimanti

Dato un insieme di punti trovare la struttura la cui forma approssimi l'insieme di punti (estetica)



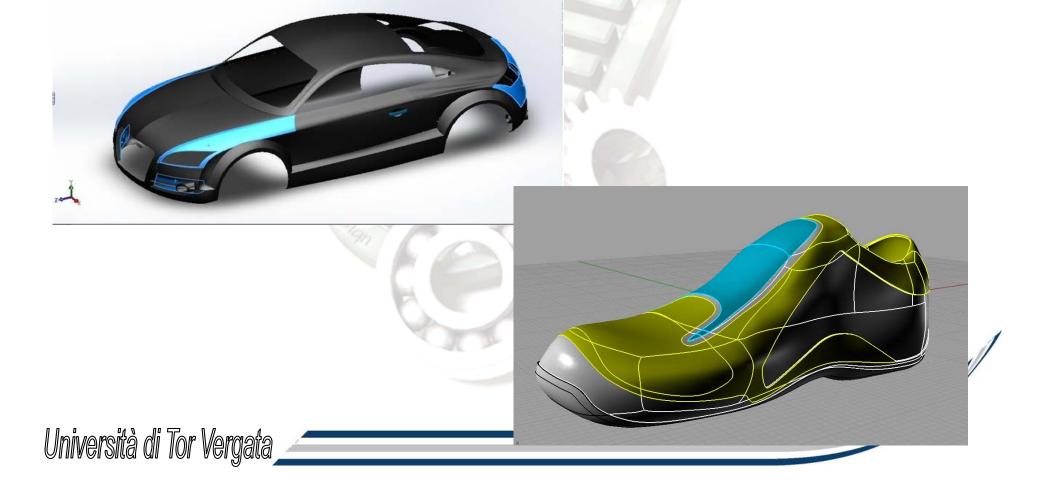


L'utilizzo di curve in modellazione e simul.



Curve per superfici con funz. estetica

Le curve possono essere anche la base per la modellazione di superifici (le vedremo in seguito) per la definizione di geometrie con funzionalità estetica



Schematizzazione delle curve

☑ I pionieri della schematizzazione delle curve sono stati P. de Casteljau della Citroën e P. Bézier della Rénault che giunsero alla formulazione di una sistematica espressione per la descrizione schematica delle curve negli anni '60. Essi possono essere considerati i fondatori della moderna disciplina del Computer-Aided Geometric Design (CAGD).



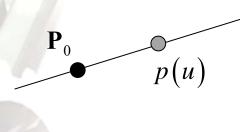


Interpolazione lineare – segmento rettilineo

La più semplice curva che può essere schematizzata è quella che descrive un segmento rettilineo tra due punti \mathbf{P}_0 e \mathbf{P}_1 . La sua forma parametrica p(u) $0 \le u \le 1$ può essere ottenuta mediante una semplice interpolazione lineare:

$$p(u) = (1 - u) \mathbf{P}_0 + u \mathbf{P}_2$$

o in forma matriciale $p(u) = \begin{bmatrix} u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}$



I polinomi (1-u) e u prendono il nome di basi

E' possibile generalizzare l'espressione parametrica ammettendo che in corrispondenza dei sue punti estremali la variabile di parametrizzazione assuma due generici valori a e b. In tal caso l'interpolazione lineare può essere scritta come:

$$p(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{P}_0 + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{P}_1$$

Curve di secondo grado

E' possibile creare una curva di secondo grado da tre differenti punti. Una curva definite a partire da un set di punti noti è definita **spline**.

Storicamente la spline era lo strumento composto da un'asta sottile e flessibile e una serie di piccoli pesi. L'asta veniva flessa posizionando i pesi che la vincolavano al passaggio per alcuni punti specifici. La spline veniva particolarmente impiegata per disegnare i profili delle imbarcazioni



$$p(u) = (2u^{2} - 3u + 1)\mathbf{P}_{0} + (-4u^{2} + 4u)\mathbf{P}_{1} + (2u^{2} - u)\mathbf{P}_{2}$$

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^{2} & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0} \\ \mathbf{P}_{1} \\ \mathbf{P}_{2} \end{bmatrix}$$

$$p(0) = \mathbf{P}_{0}$$

Le coniche

Le coniche (o sezioni coniche) sono delle curve che si ottengono come intersezione tra un cono e un piano

A seconda della posizione e dell'inclinazione del piano secante è possibile ottenere coniche di diverso tipo

☑ Circonferenza: il piano secante è ortogonale all'asse del cono

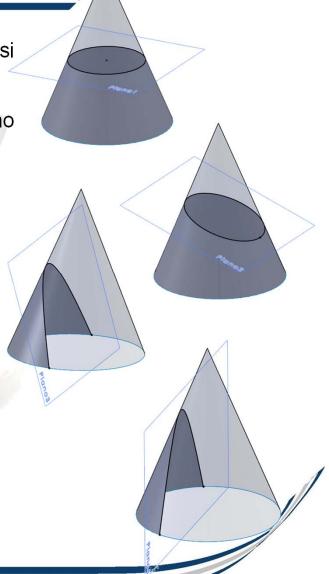
Ellisse: la normale al piano secante forma un angolo acuto con l'asse del cono

Parabola: il piano secante è parallelo ad una generatrice del cono

✓ Iperbole: la normale al piano secante forma un angolo ottiso con l'asse del cono

In forma implicita una conica è espressa mediante:

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$$



Tipi di coniche

☑ Circonferenza:

$$e = 0$$

$$e = 0$$
 $ax^2 + ay^2 + cx + dy + f = 0$

✓ Ellisse:

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 < ab$$

$$ax^{2} + by^{2} + cx + dy + f = 0$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^{2} < ab$$

$$ax^{2} + by^{2} + cx + dy + exy + f = 0$$

Parabola:

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = ab$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = ab \qquad ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$$

✓ Iperbole:

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 > ab$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 > ab$$
 $ax^2 + by^2 + cx + dy + exy + f = 0$



Curve di terzo grado

E' possibile creare una curva di terzo grado come spline passante per quattro differenti punti.

$$p\left(\frac{2}{3}\right) = \mathbf{P}_{2}$$

$$p\left(\frac{1}{3}\right) = \mathbf{P}_{1}$$

$$p\left(u\right)$$

$$p\left(1\right) = \mathbf{P}_{3}$$

$$p\left(0\right) = \mathbf{P}_{0}$$

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \\ 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{11}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$

Generalizzazione: i polinomi di Lagrange

Se vogliamo generalizzare il concetto di spline e renderla adatta all'interpolazione di un set di *n* punti in corrispondenza di valori arbitrari della variabile di parametrizzazione è possibile usare i polinomi di Lagrange.

$$\mathbf{P}_{i} \quad i = 0...n - 1$$

$$p(u) : p(u_{i}) = \mathbf{P}_{i} \quad i = 0..n - 1$$

$$p(u_{i}) = \mathbf{P}_{i}$$

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}_{i} L_{i}^{n-1}(u)$$

$$L_{i}^{n-1}(u) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n-1} (u - u_{j})}{\prod_{\substack{j=0 \ j \neq i}}^{n-1} (u_{i} - u_{j})}$$

$$p(0) = \mathbf{P}_{0}$$

- E' bene sottolineare come l'ordine del polinomio è proporzionale al numero di punti da interpolare (è *n*-1). Questo si rivela una limitazione quando sono molti i punti da interpolare (complessità matematica)
- ☑ La forma della curva è influenzata dalla scelta dei valori della variabile di parametrizzazione *ui*

Esempi di polinomi di Lagrange

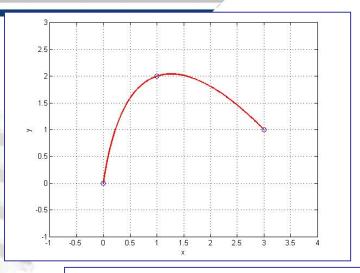
$$\mathbf{P}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

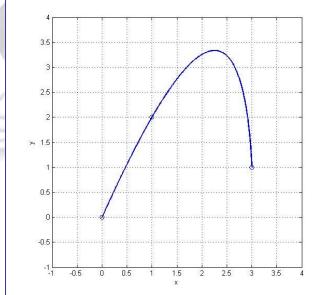
$$u_i = \{0 \quad 0.5 \quad 1\}$$

$$p(u) = \begin{cases} 6u \cdot (u - \frac{1}{2}) - 4u \cdot (u - 1) \\ 2u \cdot (u - \frac{1}{2}) - 8u \cdot (u - 1) \end{cases}$$

$$u_i = \{0 \quad 0.2 \quad 1\}$$

$$p(u) = \begin{cases} \frac{15}{4} u \cdot (u - \frac{1}{5}) - \frac{25}{4} u \cdot (u - 1) \\ \frac{5}{4} u \cdot (u - \frac{1}{5}) - \frac{25}{2} u \cdot (u - 1) \end{cases}$$





Le curve di Bézier

Una curva di Bézier è una curva approssimante tre punti di controllo. E' importante, nella definizione della curva, specificare l'ordinamento dei punti. La curva passerà esattamente per il punto iniziale e per quello finale e la sua forma sarà influenzata dal punto intermedio per il quale, però, la curva non passerà.

$$\mathbf{P}_0; \mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2 \qquad p(u) = \sum_{i=0}^2 b_i(u) \mathbf{P}_i \qquad 0 \le u \le 1$$

$$b_0(u) = u^2 - 2u + 1$$

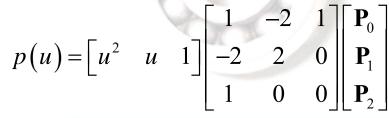
$$b_1(u) = 2u - 2u^2$$

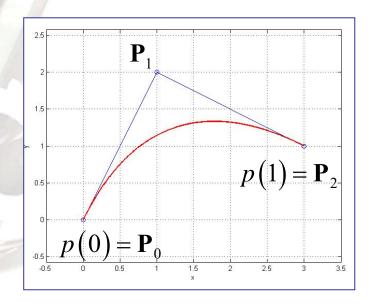
$$b_2(u) = u^2$$

$$b_2(u) = u^2$$
FUNZIONI
MISCELAMENTO

(BLENDING
FUNCTIONS)

FUNCTIONS)





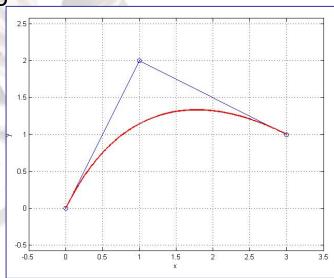
Proprietà delle curve di Bézier

- ☑ Il grado della curva è 2, poiché 2 è il grado delle funzioni di miscelamento
- ☑ la curva è contenuta interamente nel triangolo che ha come vertici i punti di controllo
- ☑ la curva interpola (passa) esattamente per i punti iniziale e finale, ma la forma è "controllata" dal punto intermedio

il vettore tangente nei punti iniziali e finali è parallelo ai lati del triangolo che ha come vertici i punti di controllo

$$\mathbf{P}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

$$p(u) = \begin{cases} u^2 + 2u \\ 4u - 3u^2 \end{cases}$$



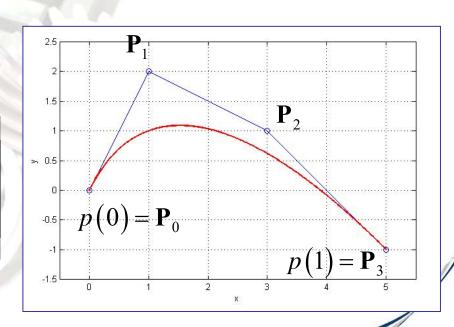
Curve di Bézier di terzo grado

L'approccio nella definizione delle curve di Bézier può essere esteso considerando quattro punti di controllo:

$$\mathbf{P}_0 \dots \mathbf{P}_3 \qquad p(u) = \sum_{k=0}^3 b_{k,n}(u) \mathbf{P}_k \qquad 0 \le u \le$$

4 punti di controllo

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$$



Generalizzazione delle curve di Bézier

L'approccio nella definizione delle curve di Bézier può essere esteso considerando un generico insieme di punti di controllo (non necessariamente 3) e andando a definire una struttura simile che possa rappresentare una curva che li approssimi.

$$\mathbf{P}_{0}...\mathbf{P}_{n}$$

$$p(u) = \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(u)\mathbf{P}_{k} \qquad 0 \le u \le 1$$

$$n+1 \text{ punti}$$

$$\text{di controllo}$$

$$b_{k,n}(u) = \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k (1-u)^{n-k}$$

0! = 1

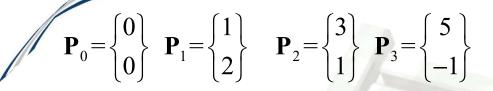
FUNZIONI DI MISCELAMENTO

POLINOMI DI BERNSTEIN

Proprietà delle curve di Bézier generaliz.

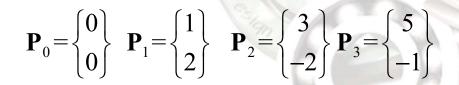
- l'espressione parametrica della curva è influenzata da tutti i punti di controllo;
- ☑ il grado della curva è pari a ossia al numero dei punti di controllo diminuito di un'unità;
- l'intera curva giace all'interno del semispazio convesso (convex hull) del poligono di controllo;
- ☑ la curva passa esattamente (interpola) i punti iniziale e finale, ma approssima i punti intermedi
- ☑ il vettore tangente nei punti iniziale e finale è parallelo ai lati del poligono di controllo

Esempi di curve di Bézier generalizzate

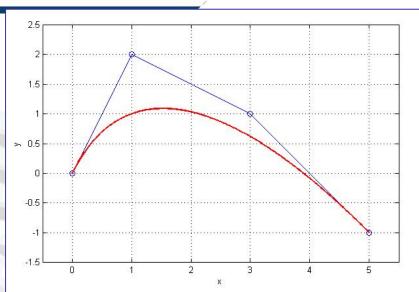


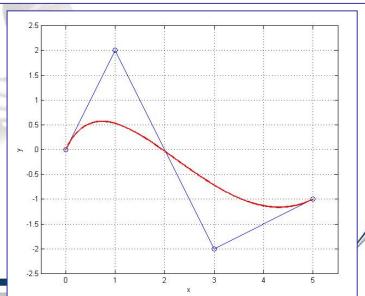
$$p(u) = \begin{cases} 3u(u-1)^{2} - 9u^{2}(u-1) + 5u^{3} \\ 6u(u-1)^{2} - 3u^{2}(u-1) - u^{3} \end{cases}$$

4 punti di controllo → curve di 3° grado



$$p(u) = \begin{cases} 3u(u-1)^{2} - 9u^{2}(u-1) + 5u^{3} \\ 6u(u-1)^{2} + 6u^{2}(u-1) - u^{3} \end{cases}$$





Interpolazione con le curve di Bézier

Le curve di Bézier sono state presentate come curve approssimanti di un insieme di punti di controllo. Nelle schematizzazioni presentate si è visto come tali curve siano interpolanti soltanto dei punti iniziali e finali. In alcune applicazioni può essere necessario imporre alla curva di passare per alcuni punti specifici.

$${\bf R}_{i}$$
 $j = 0...m$

m+1 punti da interpolare (DATI)

$$\mathbf{P}_{i}$$
 $i=0...n$

n+1 punti di controllo(INCOGNITE)

$$u_{j}$$
 $j=0...m$

 m+1 valori della variabile di parametrizzazione in corrispondenza dei punti da interpolare (INCOGNITE o PARAMETRI LIBERI)

Le incognite P_0 e P_n sono determinate direttamente in quanto i punti di controllo estremali sono anche punti di interpolazione (la curva passa per essi)

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{R}_0 \qquad u = 0$$

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{R}_m \quad u = 1$$

Interpolazione con le curve di Bézier (2)

Occorre impostare un sistema vettoriale da risolvere, imponendo il passaggio per i punti richiesti

$$\mathbf{R}_{j} = p(u_{j}) = \sum_{k=0}^{n} b_{k,n}(u_{j}) \mathbf{P}_{k}$$



2(m+1) equazioni scalari in 2(n+1) + (m+1) incognite \leftarrow curva nel piano

3(m+1) equazioni scalari in 3(n+1) + (m+1) incognite \leftarrow curva nello spazio

Per potersi risolvere in maniera non univoca → incognite = equazioni (da scegliere alcune variabili libere, in numero differente da caso 2D a caso 3D)

Esempio di interp. con le curve di Bézier

Curva nel piano --- 4 punti di controllo --- 4 punti da interpolare

$$\mathbf{R}_0 = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \mathbf{R}_1 = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \mathbf{R}_2 = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases} \mathbf{R}_3 = \begin{cases} 5 \\ 5 \end{cases}$$

$$p(u) = (1-u)^3 \mathbf{P}_0 + 3u(1-u)^2 \mathbf{P}_1 + 3u^2(1-u)\mathbf{P}_2 + u^3\mathbf{P}_3 \qquad 0 \le u \le 1$$

$$\begin{cases}
\mathbf{R}_{0} = \mathbf{P}_{0} \\
\mathbf{R}_{1} = (1 - u_{1})^{3} \mathbf{P}_{0} + 3u_{1} (1 - u_{1})^{2} \mathbf{P}_{1} + 3u_{1}^{2} (1 - u_{1}) \mathbf{P}_{2} + u_{1}^{3} \mathbf{P}_{3} \\
\mathbf{R}_{2} = (1 - u_{2})^{3} \mathbf{P}_{0} + 3u_{2} (1 - u_{2})^{2} \mathbf{P}_{1} + 3u_{2}^{2} (1 - u_{2}) \mathbf{P}_{2} + u_{2}^{3} \mathbf{P}_{3} \\
\mathbf{R}_{3} = \mathbf{P}_{3}
\end{cases}$$

$$0 \le u \le 1$$

4 equazioni vettoriali → 8 equazioni scalari

8 incognite (4 punti di controllo)

2 parametri liberi (u_1 e u_2) da poter scegliere a piacere

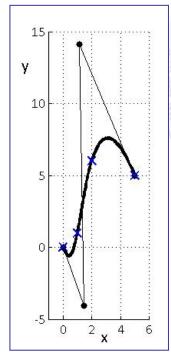
Esempio di interp. con le curve di Bézier (2)

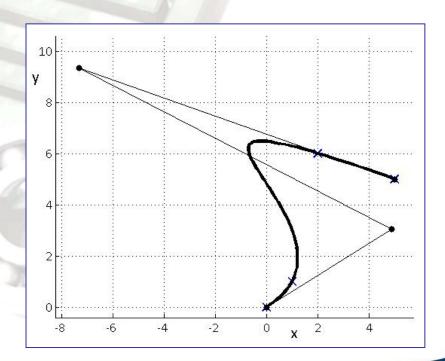
Curva nel piano --- 4 punti di controllo --- 4 punti da interpolare

$$R_{0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} R_{1} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} R_{2} = \begin{cases} 2 \\ 6 \end{cases} R_{3} = \begin{cases} 5 \\ 5 \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0.6 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 & 1 \end{pmatrix}^T$$





Interpolazione con le curve di Hérmite

L'interpolazione di Hérmite risolve il problema del trovare una curva che passi per 2 estremi e abbia la direzione in tali punti del vettore tangente ben definita.

$$p(0) = \mathbf{P}_0 \qquad \dot{p}(0) = \mathbf{m}_0$$

$$p(1) = \mathbf{P}_3 \qquad \dot{p}(1) = \mathbf{m}_3$$

$$p(u)$$

E' possibile andare a cercare come soluzione una curva cubica (4 punti) di Bézier (ovvero ricercare gli altri punti di controllo). Imponendo le condizioni di tangenza, si ottiene:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{m}_0$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_3 - \frac{1}{3}\mathbf{m}_1$$

$$p(u) = H_{0,3}(u) \mathbf{P}_0 + H_{1,3}(u) \mathbf{m}_0 + H_{2,3}(u) \mathbf{m}_3 + H_{3,3}(u) \mathbf{P}_3$$

$$p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{m}_0 \\ \mathbf{m}_3 \end{bmatrix}$$

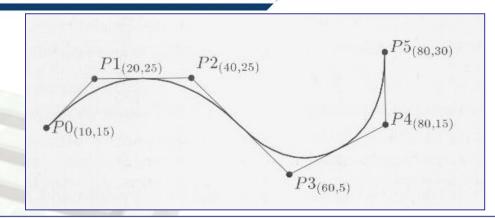
B-spline - Introduzione

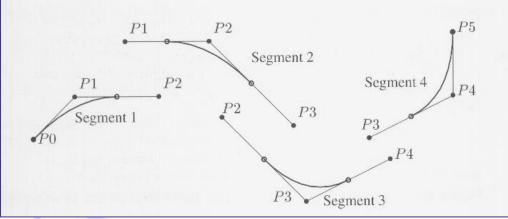
- Una B-spline è una curva composta da una sequenza di curve di Bézier opportunamente collegate e raccordate.
- La strategia si basa sull'impiego di opportune funzioni di miscelamento che possono limitare l'influenza di un gruppo di punti di controllo a una sola regione della curva.
- Garantendo opportuna continuità tra le regioni è possibile armonizzare le transizioni tra curve adiacenti.
- La curva finale, pertanto, non sarà descritta da un'unica equazione, ma da un insieme di tratti di polinomi.
- ☑ il grado della curva può essere scelto indipendentemente dal numero dei punti di controllo, scegliendo opportunamente il numero dei punti di controllo per ciascuna curva di Bézier;
- modificando la posizione dei punti di controllo, si ottengono soltanto variazioni locali della curva, mantenendo limitata l'influenza della variazione.

B-spline – un esempio concettuale

- Curva approssimante 6 punti di controllo
- Scelta di approssimare con polinomi di grado 2
- ✓Ogni segmento avrà 2+1 punti di controllo (grado +1)
- La curva finale sarà descritta da 4 segmenti:

$$n_{\mathit{segmenti}} = n_{\mathit{punti_di_controllo}} - d_{\mathit{grado_della_curva}}$$





Come le curve di Bézier, la curva finale sarà ricompresa nel semispazio convesso del poligono di controllo. Nel caso d'esempio (curve di secondo grado) la curva risulta tangente al poligono di controllo, ma questo NON è un comportamento generale.

B-spline - considerazioni

PUNTI DI CONTROLLO

I punti di controllo determinano la forma della curva B- Spline. Per ottenere una curva chiusa è sufficiente ripetere nella sequenza tanti punti di controllo quanto è il grado della curva. La ripetizione di un punto di controllo per tante volte quanto è il grado della curva lo trasforma in un punto di interpolazione (la curva passa per esso).

NODI

I nodi rappresentano i valori che la variabile di parametrizzazione assume al passaggio tra un segmento e un altro. Il numero dei nodi da assegnare è influenzato dal grado della curva e dal numero di punti di controllo.

$$nodi = grado + punti_di_controllo-1$$

La sequenza dei nodi deve riportare sempre valori crescenti (al più uguali). La spaziatura tra I nodi può essere uniforme o meno (spline uniformi o non)

$$\{t\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0.4 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 1 \quad 1 \quad 1\}$$

VETTORE DEI NODI con spaziatura uniforme

molteplicità nodo =3 molteplicità nodo =3

B-spline – costr. funzioni di miscelamento

$$\begin{cases} t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{cases} \quad m \text{ nodi} \quad u \in \begin{bmatrix} t_n & t_{m-n+1} \end{bmatrix}$$
 Grado n
$$m-n+1 \text{ punti di controllo}$$

$$b_{j,n}(u) = \frac{u - t_{j}}{t_{j+n} - t_{j}} b_{j,n-1}(u) + \frac{t_{j+n+1} - u}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} b_{j+1,n-1}(u) \qquad b_{j,0}(u) = 1 \qquad t_{j} \le u < t_{j+1}$$

$$b_{j,0}(u) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

$$b_{2,3}(u) \qquad b_{2,3}(u) \qquad b_{2,3}(u) \qquad b_{2,3}(u) \qquad 0 \qquad 0 \qquad 0$$

$$\frac{u - t_{2}}{t_{5} - t_{2}} b_{2,2}(u) \qquad b_{2,2}(u) \qquad b_{j+1,n-1}(u) \qquad b_{j,0}(u) = 0 \qquad \text{altrimenti}$$

$$\frac{u - t_{2}}{t_{6} - t_{3}} b_{3,2}(u) \qquad b_{j+1,n-1}(u) \qquad b$$

B-spline – esempio di costruzione (grado=2)

 $u \in [t_1 \quad t_5]$

Grado n = 2 (B-spline parabolica)

m-n+1 = punti di controllo = 4

nodi m = punti di controllo+n-1=5

d= punti di controllo-n = 2 segmenti

$$\{t\} = \{0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 1 \quad 1\}$$

La molteplicità = grado implica il passaggio per I punti iniziali e finali

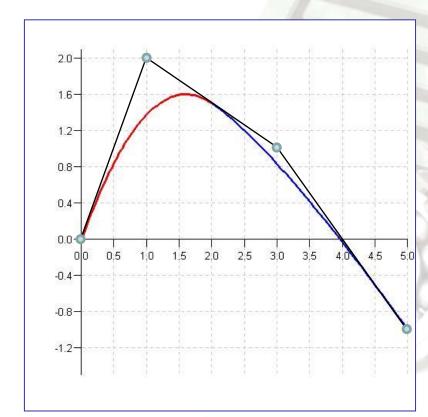
$$b_{0,2} \qquad b_{1,2} \qquad b_{2,2} \qquad b_{3,2}$$

$$\begin{vmatrix} b_{0,1} & b_{1,1} & b_{2,1} & b_{3,1} & b_{1,2} & 2(1-u) & b_{0,2} & 2(1-u) & b_{0,$$

B-spline – esempio di costruzione (grado=2)

$$\mathbf{P}_1 = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad \mathbf{P}_2 = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad \mathbf{P}_3 = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases} \quad \mathbf{P}_4 = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$$

$$p(u) = b_{0,2}\mathbf{P}_0 + b_{1,2}\mathbf{P}_1 + b_{2,2}\mathbf{P}_2 + b_{3,2}\mathbf{P}_3 \qquad 0 \le u \le 1$$



$$b_{0,2} = (1-2u)^2 b_{2,0}$$

$$b_{1,2} = 2u(2-3u)b_{2,0} + 2(u-1)^2 b_{3,0}$$

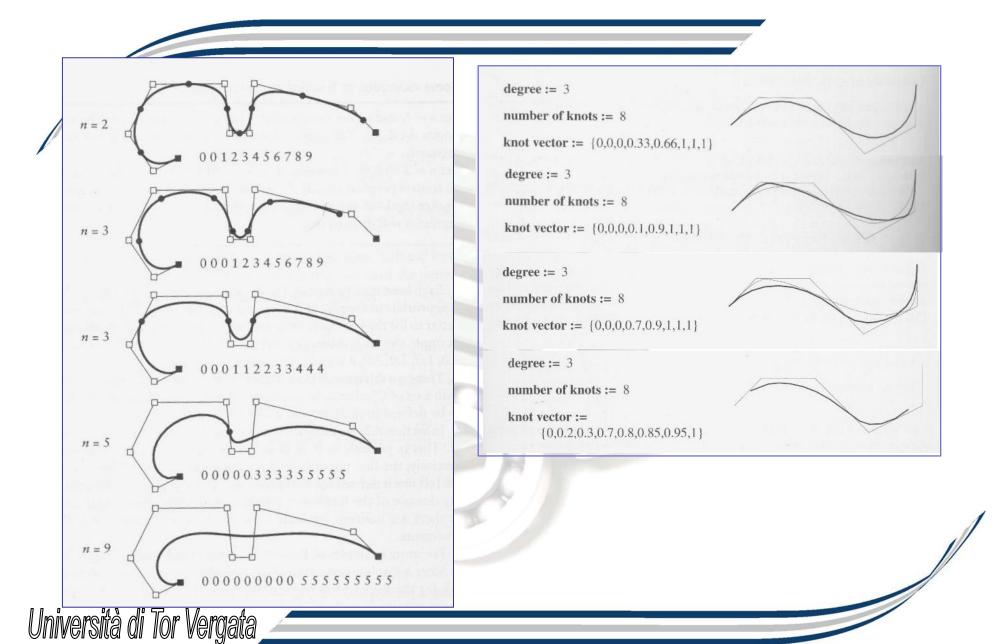
$$b_{2,2} = 2u^2 b_{2,0} + [2(1-u)(3u-1)]b_{3,0}$$

$$b_{3,2} = (2u-1)^2 b_{3,0}$$

$$b_{2,0} = \begin{cases} 1 & 0 \le u < 0.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$b_{3,0} = \begin{cases} 1 & 0.5 < u \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Influenza del grado e dell'uniformità



B-Spline razionali e NURBS

Oltre ai punti di controllo, al vettore dei nodi e al grado è possibile introdurre un quarto set di parametri (PESI) per definire le B-SPLINE RAZIONALI

$$p(u) = \frac{\sum_{j=0}^{m-n} w_j b_{j,n}(u) \mathbf{P}_j}{\sum_{j=0}^{m-n} w_j b_{j,n}(u)} \qquad t_n \le u \le t_{m-n+1}$$

$$\begin{cases} t_1 & t_2 & \dots & t_m \end{cases} \quad m \text{ nodi} \quad u \in [t_n \quad t_{m-n+1}]$$
Grado n

$$m-n+1 \text{ punti di controllo}$$

$$b_{j,n}(u) = \frac{u - t_j}{t_{j+n} - t_j} w_{j,n-1} b_{j,n-1}(u) + \frac{t_{j+n+1} - u}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} w_{j+1,n-1} b_{j+1,n-1}(u)$$

$$b_{j,0}(u) = 1$$

$$t_j \le u < t_{j+1}$$

$$b_{j,0}(u) = 0$$
 altrimenti
$$w_{j,n} = \frac{u - t_j}{t_{j+n} - t_j} w_{j,n-1} + \frac{t_{j+n+1} - u}{t_{j+n+1} - t_{j+1}} w_{j+1,n-1}$$

- I pesi rappresentano dei parametri di attrazione verso i punti di controllo. Più un peso è elevato, più il punto di controllo attirerà la curva che passerà, pertanto, più vicino ad esso.
- Nel caso in cui il vettore dei nodi non contenga elementi equispaziati, avremo le NURBS che rappresentano uno degli strumenti più versatili nella modellazione delle forme complesse.

Coniche come B-spline razionali

☑ E' possibile esprimere esattamente una conica come B-spline razionale di grado 2 tra 3 punti di controllo

$$c(u) = \frac{w_0 b_{0,2}(u) \mathbf{P}_0 + w_1 b_{1,2}(u) \mathbf{P}_1 + w_2 b_{2,2}(u) \mathbf{P}_2}{w_0 b_{0,2}(u) + w_1 b_{1,2}(u) + w_2 b_{2,2}(u)}$$

FORMA RAZIONALE QUADRATICA DELLA CONICA

- Se tutti i pesi sono uguali, otteniamo una parabola. In generale, i pesi influenzano il tipo di conica.
 - Prendiamo ad esempio un cerchio. Le B-spline non razionali possono approssimare la sua forma, ma solo con le B-spline razionali è possibile esprimere una circonferenza in maniera esatta:

$$P_{0} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P_{1} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{3} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{4} = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \qquad P_{5} = \begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{6} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{7} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{8} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$t = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi \quad 2\pi \quad 2\pi \right\}$$

$$tratti = 4$$

3 punti a tratto

 $nodi = grado + punti _di _controllo - 1 = 2 + 9 - 1 = 10$ 2 con molteplicità doppia

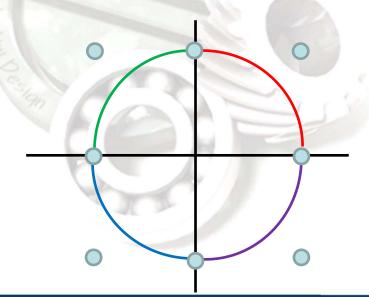
Coniche come B-spline razionali (2)

Prendiamo ad esempio un cerchio. Le B-spline non razionali possono approssimare la sua forma, ma solo con le B-spline razionali è possibile esprimere una circonferenza in maniera esatta:

$$P_{0} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad P_{1} = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{2} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{3} = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases} \qquad P_{4} = \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \qquad P_{5} = \begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{6} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{7} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \qquad P_{8} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} 0 & 0 & 0 & \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & \pi & \pi & \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} & 2\pi & 2\pi & 2\pi \end{cases}$$
 $tratti = 4$ 3 punti a tratto

 $nodi = grado + punti_di_controllo - 1 = 2 + 9 - 1 = 10$ 2 con molteplicità doppia



Interpolazione con le spline (Greville)

- Nella modellazione meccanica speso è utile modellare le B-Spline a partire da PUNTI DI INTERPOLAZIONE e non dai punti di controllo.
- Quindi il problema dell'interpolazione si pone come:

DATI

- **-** \emph{L} punti di interpolazione $\left\{D_1 \quad D_2 \quad ... \quad D_k \right\}$
- n ordine della curva

$$- k = L + n - 1 \text{ nodi}$$
 $\{t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_{L+n-1}\}$

$$INCOGNITE = 2(k-n+1) = 2L$$

-L = k-n+1 punti di controllo

$$p(\xi_i) = D_i \qquad \qquad \xi_i = \frac{1}{n} (t_i + \dots + t_{i+n-1})$$

EQUAZIONI = INCOGNITE → RISOLVIBILE

$$n = 3$$

$$\xi_1 = \frac{1}{3} (t_1 + t_2 + t_3) = 0$$

$$\xi_2 = \frac{1}{3} (t_2 + t_3 + t_4) = \frac{t_4}{3}$$

$$\xi_3 = \frac{1}{3} (t_3 + t_4 + t_5) = \frac{t_4 + t_5}{3}$$
...



Ascisse di Greville

Modellazione con NURBS

