**Teoria dei giochi e delle decisioni**
**House allocation e Stable Matching**

**Esercizio 1** Gli organi dirigenti della serie A italiana decidono di tentare di ridefinire gli equilibri del campionato. Una volta individuato il calciatore più importante per ognuna delle prime 8 squadre in classifica, la Federazione intende riallocare, in modo stabile rispetto le coalizioni, i calciatori selezionati tra le 8 squadre. Per fare ciò la Federazione richiede ad ogni squadra di formulare una graduatoria dei calciatori: ogni graduatoria è un ordine totale. Sia $i$ il calciatore più importante della squadra $i-$sima. Fornire la soluzione al problema della Federazione nel caso le graduatorie siano le seguenti:

- Squadra 1: $\{1, 3, 4, 2, 5, 6, 7, 8\}$;
- Squadra 2: $\{1, 3, 5, 4, 2, 8, 6, 7\}$;
- Squadra 3: $\{2, 1, 3, 5, 6, 4, 7, 8\}$;
- Squadra 4: $\{5, 1, 2, 4, 3, 6, 7, 8\}$;
- Squadra 5: $\{6, 1, 2, 3, 7, 4, 5, 8\}$;
- Squadra 6: $\{4, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$;
- Squadra 7: $\{3, 2, 1, 6, 4, 5, 8, 7\}$;
- Squadra 8: $\{1, 4, 2, 5, 3, 6, 7, 8\}$.

**Esercizio 2** Si consideri il testo dell'esercizio 1 e si riduca l'insieme delle squadre alle prime 4 in classifica. La Federazione desidera riallocare, in modo stabile rispetto le coalizioni, i calciatori selezionati (uno per ogni squadra) tenendo conto sia delle graduatorie in termini di calciatori fornite da ogni squadra sia delle preferenze che ogni calciatore ha nei confronti delle 4 squadre in questione. Ogni calciatore infatti fornisce alla Federazione la propria gradutoria delle squadre. Sia le graduatorie delle squadre che quelle dei calciatori sono degli ordini totali.
Sia $i$ il calciatore più importante della squadra $i-$esima. Fornire una soluzione al problema della Federazione, nel caso le graduatorie delle squadre siano le seguenti:

- Squadra 1: $\{1, 3, 4, 2\}$;
- Squadra 2: $\{1, 3, 4, 2\}$;

- Squadra 3: $\{2, 1, 3, 4\}$;
- Squadra 4: $\{1, 2, 4, 3\}$;

e le graduatorie fornite dai calciatori siano le seguenti:

- Calciatore 1: $\{2, 1, 3, 4\}$;
- Calciatore 2: $\{1, 4, 3, 2\}$;
- Calciatore 3: $\{2, 4, 3, 1\}$;
- Calciatore 4: $\{4, 1, 2, 3\}$.

# 1 Soluzioni

**1.** Chiaramente il problema in questione è formulato negli stessi termini dell'house allocation problem; abbiamo 8 giocatori, ovvero le prime 8 squadre della classifica ed ogni squadra possiede un calciatore "simbolo"; date le graduatorie indicate, vogliamo riallocare i calciatori tra le squadre, ovvero vogliamo trovare un matching $M$ stabile di dimensione 8 tra l'insieme delle squadre e quello dei calciatori.
Per fare ciò utilizziamo l'algoritmo TTCA illustrato a lezione:

- I Iterazione:
  Costruiamo il grafo diretto $G_1$ il cui insieme di nodi è $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e quello di archi è $A_1 = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 5), (5, 6), (6, 4), (7, 3), (8, 1)\}$. In $G_1$ sono presenti due cicli orientati: il loop $(1, 1)$ ed il ciclo formato dagli archi $\{(4, 5), (5, 6), (6, 4)\}$; sia $N_1 = \{1, 4, 5, 6\}$ l'insieme dei nodi appartenenti ad un ciclo di $G_1$, assegniamo ad ogni squadra $i \in N_1$ il calciatore posseduto dalla squadra $j \in N_1$ tale che $(i, j) \in E(G_1)$. Rimuoviamo quindi le squadre ed i calciatori $1, 4, 5, 6$;

- II Iterazione:
  Consideriamo il "sottoproblema" ottenuto in seguito alla precedente iterazione:

  - Squadra 2: $\{3, 2, 8, 7\}$;
  - Squadra 3: $\{2, 3, 7, 8\}$;
  - Squadra 7: $\{3, 2, 8, 7\}$;
  - Squadra 8: $\{2, 3, 7, 8\}$;

Costruiamo il grafo diretto $G_2$ il cui insieme di nodi è $V_2 = \{2, 3, 7, 8\}$ e quello di archi è $A_2 = \{(2, 3), (3, 2), (7, 3), (8, 2)\}$. In $G_2$ è presente il ciclo orientato formato dagli archi $\{(2, 3), (3, 2)\}$; sia $N_2 = \{2, 3\}$ l'insieme dei nodi appartenenti ad un ciclo di $G_2$, assegniamo ad ogni squadra $i \in N_2$ il calciatore posseduto dalla squadra $j \in N_2$ tale che $(i, j) \in E(G_2)$. Rimuoviamo quindi le squadre ed i calciatori $2, 3$;

- III Iterazione:
  Consideriamo il sottoproblema ottenuto in seguito alla precedente iterazione:
  - Squadra 7: $\{8, 7\}$;
  - Squadra 8: $\{7, 8\}$;

  Costruiamo il grafo diretto $G_3$ il cui insieme di nodi è $V_3 = \{7, 8\}$ e quello di archi è $A_2 = \{(7, 8), (8, 7)\}$. In $G_3$ è presente il ciclo orientato formato dagli archi $\{(7, 8), (8, 7)\}$. Rimuoviamo quindi le squadre ed i calciatori $7, 8$. STOP

L'algoritmo, quindi, termina dopo tre iterazioni e restituisce il matching stabile $M = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 6), (6, 4), (7, 8), (8, 7)\}$.

**2.** Possiamo vedere questo problema come uno stable marriage problem: abbiamo 8 giocatori, 4 squadre e 4 calciatori, e vogliamo accoppiare le squadre con i calciatori in modo stabile, ovvero vogliamo trovare un matching $M$ di dimensione 4 che sia stabile.
Utilizziamo l'algoritmo di Gale-Shapley:

- I Iterazione:
  All'inizio ogni squadra tenta di ingaggiare il calciatore che preferisce, quindi: la squadra 1 si propone al calciatore 1, la squadra 2 si propone al calciatore 1, la squadra 3 si propone al calciatore 2, la squadra 4 si propone al calciatore 1.
  Il calciatore 1, quindi riceve tre proposte e, in base alla sua graduatoria, si promette alla squadra 2, quindi le squadre 1 e 4 vengono rifiutate ed entrambi cancellano dalla propria graduatoria il calciatore 1.
  Il calciatore 2 ha solo una proposta, quindi si promette alla squadra 3, mentre i calciatori 3 e 4 non ricevono proposte e rimangono liberi.

- II iterazione:
  La squadra 1 si propone al calciatore 3, che al momento non ha offerte e quindi accetta; la squadra 4, invece, si propone al calciatore 2, il

quale ora ha due proposte, essendosi promesso nella I iterazione alla squadra 3.
Il calciatore 2, in base alla propria graduatoria, sceglie di la squadra 4 e quindi la squadra 3 viene "mollata".
Il calciatore 4 continua ad essere libero.

- III Iterazione:
  La squadra 3 si propone al calciatore 1, che è già promesso alla squadra 2; poiché il calciatore 1 preferisce la squadra 2, rifiuta l'offerta della squadra 3, la quale, quindi, cancella il calciatore 1 dalla propria graduatoria.
  Il calciatore 4 continua ad essere libero.

- IV Iterazione:
  La squadra 3 si propone al calciatore 3.
  Il calciatore 3 ora ha due proposte e sceglie la squadra 3, rifiutando la squadra 1.
  La squadra 1, quindi, cancella il calciatore 3 dalla propria graduatoria.
  Il calciatore 4 continua ad essere libero.

- V Iterazione:
  La squadra 1 si propone al calciatore 4 che non ha offerte e quindi accetta.

L'algoritmo, quindi, termina in cinque iterazioni e restituisce il matching stabile $M = \{(1,4),(2,1),(3,3),(4,2)\}$.