OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 24 Gennaio 2020

1. Determinare la sequenza ottima di stati x_k ottenuta minimizzando l'indice di costo $J(u)$ definito da
$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{1,k}^2 + u_k^2) + x_{2,3}^2, \tag{1}$$
in presenza del vincolo dinamico
$$x_{1,k+1} = x_{2,k}\,,$$
$$x_{2,k+1} = u_k\,,$$
a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1,\, 1)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:
$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 (3x(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \dot{x} = -x + u\,, \tag{2}$$
   a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]
   b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale $x(0) = 2$. [2 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:
$$\min_u J(u) = \left\{ \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2 \right) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 2x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$
Si determini una legge di controllo in retroazione $\bar{u}$ tale che il costo $J(\bar{u})$ sia minore di 4 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\, 1]^\top$. [6 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e dimostrare che l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman fornisce condizioni sufficienti di ottimalità. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che la sequenza di soluzioni del problema su orizzonte finito ammette un limite per T che tende all'infinito. [6 PUNTI]