Teoria dei Giochi – Prova del 22 NOVEMBRE 2017
CONSEGNARE ESCLUSIVAMENTE QUESTO FOGLIO
NGR≡ Non Giustificare la Risposta

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per il primo e il secondo giocatore:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii) : \xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{2}$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$; $(iii) : \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{2}$

$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = 0, \xi_2^2 = \frac{1}{4}, \xi_2^3 = \frac{3}{4}, \xi_2^4 = 0$; $(jjj) : \xi_2^1 = \frac{1}{4}, \xi_2^2 = \xi_2^3 = 0$ e $\xi_2^4 = \frac{3}{4}$

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Rispettivamente: (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $-\frac{1}{2}$; (iii) $\frac{3}{2}$; (j) 1; (jj) 2; (jjj) $\frac{1}{2}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (iii) è conservativa.

1.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Il valore del gioco è $-\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 6 & -3 \\ -5 & -6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

2.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Nessuno dei due giocatori ha strategie debolmente dominanti

2.2 Indicare tutte le strategie conservative per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie conservative per il secondo, se ve ne sono. **NGR**

Per il primo giocatore, la prima e paga 4 nel caso peggiore. Per il secondo giocatore, la prima e la quarta e paga 5 nel caso peggiore.

2.3 Considera quindi il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, fornire dei valori di a e b per i quali l'affermazione seguente è vera: il valore del gioco è certamente compreso nell'intervallo $[a,b]$. *Scegliere a e b in modo che l'ampiezza dell'intervallo* $[a,b]$ *sia la minima possibile.* **NGR**

$[-5,4]$

2.4 Si consideri nuovamente il gioco in strategia pura. È possibile cambiare il segno di un *unico* elemento della matrice, in modo che la nuova matrice definisca un gioco antagonistico con equilibri di Nash? Se la risposta è "si" indicare qual è l'elemento e quali sono gli equilibri di Nash; altrimenti scrivere "no". **NGR**.

Si se cambiamo di segno l'elemento in quarta riga e quarta colonna, l'elemento in quarta riga e prima colonna diventa un equilibrio di Nash.

In alternativa, se cambiamo di segno l'elemento in quarta riga e terza colonna, l'elemento in prima riga e terza colonna diventa un equilibrio di Nash.

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 5 min) In un parlamento siedono 12 deputati di cui 8 provengono da una regione A, 3 da una regione B e uno da una regione C. L'approvazione di ogni legge richiede la maggioranza stretta dei deputati di ogni regione, quindi: il voto di almeno 5 deputati di A, il voto di almeno 2 deputati di B e il voto del deputato di C. Dire solo se l'affermazione che segue è vera o falsa. **NGR, penalità per risposta errata.**

Il valore di Shapley del deputato della regione C è pari a 1. ☐ VERO ■ FALSO

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 13 deputati di cui 10 provengono da una regione A e 3 da una regione B. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore votano almeno 9 deputati (qualsiasi) o anche solo otto deputati, ma in questo caso devono essere 6 di A e 2 di B. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato oppure spiegare perchè non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

Consideriamo un deputato della regione B. Esso è determinante solo se è in ottava posizione e nelle prime 7 posizioni ci sono 6 deputati di A e 1 di B, oppure se è in nona posizione e nelle prime 7 posizioni *non* ci sono 6 deputati di A e 2 di B. Quindi il suo valore è pari a:

$$\frac{\binom{10}{6}\cdot\binom{2}{1}\cdot 7!\cdot 5! + (12! - \binom{10}{6}\cdot\binom{2}{2}\cdot 8!\cdot 4!)}{13!}.$$

Il valore di un deputato A segue banalmente dall'assioma dai razionalità collettiva.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 10 min) Si consideri il seguente gioco con insieme dei giocatori $N = \{A,B,C\}$. Ogni giocatore deve scegliere un numero dall'insieme $X_A = X_B = X_C = \{1,2\}$ e il payoff si determina come segue:

- se i tre giocatori scelgono lo stesso numero, non ci sono vincitori;
- se due giocatori scelgono lo stesso numero e l'altro giocatore sceglie l'altro numero, quest'ultimo riceve un euro da ciascuno dei due giocatori che hanno scelto lo stesso numero.

Indicare quali sono gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Tutte le situazioni in cui due giocatori scelgono uno stesso numero e il terzo giocatore sceglie un numero diverso (ovvero tutte le situazioni in cui c'è un vincitore).

Esercizio 6 (Tempo risoluzione stimato: 10 min) Si consideri il seguente gioco con insieme dei giocatori $N = \{A,B,C,D\}$. Ogni giocatore deve scegliere un numero dall'insieme $X_A = X_B = X_C = X_D = \{1,2\}$ e il payoff si determina come segue:

- se i quattro giocatori scelgono lo stesso numero, non ci sono vincitori;
- se tre giocatori scelgono lo stesso numero e l'altro giocatore sceglie l'altro numero, quest'ultimo riceve un euro da ciascuno dei tre giocatori che hanno scelto lo stesso numero;
- se due giocatori scelgono 1 e gli altri due giocatori scelgono 2, non ci sono vincitori.

Indicare quali sono gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Tutte le situazioni in cui due giocatori scelgono uno stesso numero e gli altri due giocatore scelgono l'altro numero.

Esercizio 7 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Sia $0 \le \rho \le 1$ e si consideri il gioco cooperativo (N,v) con $N = \{1,2,3\}$ e funzione v così definita:

- $v(\emptyset) = 0$;
- $v(S) = \rho$, se $S \subseteq N$ e $|S| = 1$;
- $v(S) = 3\rho$, se $S \subseteq N$ e $|S| = 2$;
- $v(N) = 1$

7.1 Dire per quali valori di ρ la funzione v è additiva. *Riportare esclusivamente tali valori, oppure dire che v non è mai additiva.* **NGR**

Perché la funzione sia additiva devono valere contemporaneamente: $v(\{1,2\}) = v(\{1\}) + v(\{2\})$ e $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = 1$: questo non è possibile perché dalla prima segue che $\rho = 0$ dalla seconda che $\rho = \frac{1}{3}$.

7.2 (*) Dire per quali valori di ρ la funzione v è super-additiva. *Riportare esclusivamente tali valori, oppure dire che v non è mai super-additiva.* **NGR**

$\rho \leq 1/4$, vediamo perché. Perché la funzione sia superadditiva deve valere $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ per ogni coppia di sottoinsiemi $S, T \subseteq N$ disgiunti. In particolare, deve valere $v(\{1,2\}) + v(\{3\}) \leq v(N)$, quindi è necessario che $4\rho \leq 1$. È facile poi verificare che $\rho \leq 1/4$ è anche sufficiente perché v sia superadditiva.