Teoria dei Giochi 2020/21	
Sinossi	
G. Oriolo	*Settima Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**

- **Riferimenti**: Capitolo 3 Dispense Facchinei, seguite in modo quasi pedissequo.

1 Il valore di Shapley

- Premessa. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le permutazioni dell'insieme N dei giocatori. Presa una permutazione $p \in \mathcal{P}$ e un giocatore $i \in N$, indichiamo con A_i^p è l'insieme (la coalizione) formata da i e da tutti i giocatori che precedono i nella permutazione p. Per esempio, se $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $i = 4$ e $p = 3, 7, 2, 1, 4, 5, 6$, abbiamo che $A_4^p = \{1, 2, 3, 4, 7\}$.

- Il nucleo di un gioco cooperativo può essere vuoto o cosituito da un numero infinito di punti (o, come per i giochi inessenziali, da un solo punto). Nel seguito discutiamo un approccio, dovuto a Shapley, che consente di definire *sempre* e *univocamente* una possibile soluzione di un gioco cooperativo.

- L'approccio di Shapley è di tipo "assiomatico": si definiscono una serie di proprietà minimali che devono essere soddisfatte da una soluzione del gioco, ovvero dal vettore di payoff di ciascun giocatore, e si cerca una funzione che assegni a ciascun giocatore un payoff che rispetti i precedenti assiomi.

- Consideriamo quindi un gioco cooperativo (N, v). La funzione che assegna a ciascun giocatore un payoff $S_i(v)$ deve soddisfare i seguenti assiomi ("S" è in onore di Shapley, la dipendenza da v sottolinea il fatto che il valore di questa funzione (per ogni giocatore) dipende solo da v):
  - Assioma di razionalità collettiva: $\sum_{i \in N} S_i(v) = v(N)$.
  - Sia $i \in N$. Se per ogni $T \subseteq N$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T)$ (nota che questo implica $v(\{v_i\}) = 0$), allora $S_i(v) = 0$ (assioma del giocatore "inutile")
  - Siano $i, j \in N, i \neq j$. Se per ogni $T \subseteq N : i, j \notin T$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$, allora $S_i(v) = S_j(v)$.

– Sia u e v due funzioni di utilità . Allora $S(u+v) = S(u)+S(v)$. (A proposito di quest'ultimo assioma, notiamo che se u e v sono super-additive, anche $f(S) = u(S) + v(S)$ è super-additiva, infatti, per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$, vale: $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ e $u(S) + u(T) \leq u(S \cup T)$; segue: $(v(S)+u(S))+(u(T)+v(T)) \leq (v(S\cup T)+u(S\cup T))$, i.e $f(S)+f(T) \leq f(S\cup T)$.)

- **Teorema (Shapley)** Fissato un insieme N di giocatori, esiste una e una sola funzione S che soddisfa gli assiomi precedenti:

$$S_i(v) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{n!}(v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})) \quad (s1)$$

e $S(v)$ è un'imputazione.

- Non dimostriamo il teorema di Shapley, ma nel seguito offriamo una interpretazione alternativa dei valori $S_i(v)$.

  Iniziamo considerando un giocatore i e una coalizione $i : i \in T$. L'*utilità marginale* che il giocatore i apporta a T è pari a $v(T) - v(T \setminus \{i\})$. Idealmente vorremmo assegnare a ogni giocatore un payoff pari all'*utilità media che il giocatore apporta.* Il problema è che per fare questo dovremmo (implicitamente) anche valutare il peso, l'importanza di una coalizione (per esempio, è giusto che una coalizione con 2 e una con 10 giocatori abbiano lo stesso peso?) ...quindi prendiamo una strada alternativa.

  Consideriamo tutte le permutazioni $\mathcal{P}$ dell'insieme N dei giocatori: è ragionevole che abbiano tutte la stessa importanza e poiché sono in numero $n!$ è facile mediare. Per ciascuna permutazione $p \in \mathcal{P}$, diciamo che l'utilità marginale apportata da i alla permutazione p è pari a $v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})$. A questo punto, se prendiamo il valor medio dell'utilità marginale apportata da i a ciascuna permutazione di $\mathcal{P}$, otteniamo proprio il valore $S_i(v)$.

- Riconsideriamo il gioco con il fattore ρ. Vogliamo calcolare $S_1(v)$. Le permutazioni di N sono: 1,2,3; 1,3,2; 2,1,3; 2,3,1; 3,1,2; 3,2,1. Esse danno luogo rispettivamente ai seguenti insiemi A_i^p: $\{1\}, \{1\}; \{1, 2\}; \{1, 2, 3\}; \{1, 3\}; \{1, 2, 3\}$. Abbiamo dunque $S_1(v) = \frac{1}{6}(v(\{1\}) - v(\emptyset) + v(\{1\}) - v(\emptyset) + v(\{1, 2\}) - v(\{1\}) + v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\}) + v(\{1, 3\}) - v(\{1\}) + v(\{1, 2, 3\}) - v(\{2, 3\})) = \frac{1}{6}(\rho + (1 - \rho) + \rho + (1 - \rho)) = \frac{1}{3}$.
  Analogamente, $S_2(v) = S_3(v) = \frac{1}{3}$.

1.1 Un modo diverso di calcolare il valore di Shapley

- Abbiamo visto che il valore di Shapley del giocatore i è pari a:

$$S_i(v) = \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{n!}(v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})).$$

Nel seguito mostriamo un modo alternativo per calcolare $S_i(v)$. Assumiamo quindi al solito di aver fissato un giocatore i.

- Consideriamo una permutazione $p \in \mathcal{P}$. Osserviamo che il contributo della permutazione p al valore di Shapley dipende esclusivamente dal termine:

$$v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})$$

Per semplicità, sia $T = A_i^p$. Osserviamo ora che ogni permutazione p' del tipo

$$T \setminus \{i\} - i - N \setminus T \quad (*)$$

ovvero ogni permutazione di N che nelle prime $|T|-1$ posizioni ha gli elementi di $T \setminus \{i\}$ ordinati in un qualsiasi modo: poi in $|T|$-esima posizione ha i; infine nelle ultime $n-|T|$ posizioni ha gli elementi di $N \setminus T$ ordinati in un qualsiasi modo *restituisce lo stesso contributo di p al valore di Shapley*, poiché $A_i^{p'} = A_i^p$.

Esistono quindi $(|T|-1)!(n-|T|)!$ permutazioni (tutte del tipo (*)) che restituiscono esattamente la stessa coalizione T.

- Se viceversa consideriamo una coalizione T e un elemento $i \in T$, possiamo immediatamente verificare che le permutazioni $p \in \mathcal{P}$ tali che $A_i^p = T$ sono esattamente in numero $(|T|-1)!(n-|T|)!$.

- Fissato un elemento $i \in N$, possiamo quindi stabilire una corrispondenza suriettiva tra l'insieme delle partizioni $p \in \mathcal{P}$ e l'insieme delle coalizioni $T \subseteq N : i \in T$. In particolare, ogni coalizione $T \subseteq N : i \in T$ è l'immagine di esattamente $(|T|-1)!(n-|T|)!$ permutazioni.

- Da tutto ciò segue che possiamo fornire una definizione alternativa del valore di Shapley di un giocatore i dove invece di mediare su tutte le permutazioni di $\mathcal{P}$, mediamo su tutte le coalizioni che contengono i. In particolare, vale:

$$S_i(v) = \sum_{T \subseteq N : i \in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T \setminus \{i\})) \quad (s2)$$

Le espressioni $(s1)$ e $(s2)$ sono equivalenti. Come vedremo, per calcolare il valore di Shapley per un dato gioco (N, v) a volte conviene utilizzare la $(s1)$ e a volte utilizzare la $(s2)$.

- Come esercizio, ricalcoliamo il valore di Shapley per il gioco ρ utilizzando la $(s2)$: $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{3}$ se $|T| = 1$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{6}$ se $|T| = 2$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{3}$ se $|T| = 3$.

Allora $S_1(v) = \frac{1}{3}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{6}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{6}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{3}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) = \frac{1}{3}$. Naturalmente $S_2(v) = S_3(v) = S_1(v) = \frac{1}{3}$.

1.2 Giochi cooperativi semplici

- Un gioco cooperativo è detto *semplice* se la funzione di utilità è a valore 0, 1.

  Un gioco semplice si presta a caratterizzare quelle situazioni in cui si deve prendere una decisione. Una coalizione in grado di imporre una decisione (qualunque essa sia) è a valore 1. Giochi di questo tipo si possono presentare e.g. in consigli di amministrazione, parlamento etc.

- Per i giochi semplici testare se una funzione di utilità v è superadditiva è immediato. Infatti, è sufficiente verificare che:

  - la funzione è monotona, ovvero se $v(S) = 1$, allora per ogni coalizione $T : S \subseteq T$ vale $v(T) = 1$;
  - non esistono due coalizioni S, T tali che $S \cap T = \emptyset$ e $v(S) = v(T) = 1$.

- Il valore di Shapley sembra essere molto adatto a descrivere la capacità contrattuale dei giocatori per giochi semplici. Per questo motivo è spesso chiamato *indice di potere* (di Shapley o Schubik). Esso si applica molto bene ai giochi *semplici*.

- Esempio. In un parlamento sono rappresentati quattro partiti con numero percentuale di seggi: 10%, 20%, 30%, 40%. Le decisioni vengono prese a maggioranza semplice (50% voti più 1). Se assumiamo che i deputati di uno stesso partito votino tutti allo stesso modo, possiamo definire un gioco cooperativo: i giocatori sono i quattro partiti e l'utilità di una coalizione è 1 se la coalizione rappresenta più del 50% di seggi, 0 altrimenti.

  È facile verificare che l'utilità cosi definita soddisfa la superadditività. Calcoliamo il valore di Shapley di ciascun giocatore utilizzando la $(s2)$:
  $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 1$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 2$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 3$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 4$.

  Allora $S_1(v) = \frac{1}{4}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\})) = \frac{1}{12}$;

  $S_2(v) = \frac{1}{4}(v(\{2\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\})) = \frac{1}{4}$.

  $S_3(v) = \frac{1}{4}(v(\{3\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{3,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,1\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,1,4\})) = \frac{1}{4}$;

  $S_4(v) = 1 - (S_1(v) + S_2(v) + S_3(v) = \frac{5}{12}$.

  Notiamo che il secondo e il terzo giocatore hanno lo stesso payoff! Malgrado il terzo abbia più seggi, non ha più possibilità del secondo di formare maggioranze: dal punto di vista della contrattazione politica hanno lo stesso peso. Infatti è immediato verificare che il secondo e il terzo giocatore *devono* avere lo stesso valore di Shapley per via del terzo assioma.

- Cambiamo le percentuali in 10%, 21%, 30%, 39%. È facile vedere che il primo giocatore diviene inutile. Segue che $S_1(v) = 0$. Gli altri tre gocatori sono invece indistinguibili, dal punto di vista della contrattazione politica (di nuovo, si guardi il terzo assioma): ogni coppia di due giocatori ottiene la maggioranza. Infatti, svolgendo i calcoli: $S_2(v) = S_3(v) = S_4(v) = \frac{1}{3}$.

- Notiamo che nel caso di giochi semplici, l'espressione del valore di Shapley può semplificarsi come segue:

  $S_i(v) = \sum_{T \subseteq N: T \text{ vincente}, T \setminus \{i\} \text{ perdente}} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}, \forall i \in N$

  $S_i(v) = \frac{1}{n!}$ (n.ro permutazoni: A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente), $\forall i \in N$ $\qquad (*)$

- Questa riformulazione è utile nel caso in cui il valore di A_i^p dipende dalla posizione di i nella permutazione p. Vediamo cosa vuol dire su alcuni esempi. Premessa: il numero di permutazioni di n elementi in cui un dato elemento x è in posizione j-esima, j fissato, è pari a $(n-1)!$ (dobbiamo considerare le permutazioni degli altri (n-1) elementi e inserire x al posto j).

  - Gioco di maggioranza. Il valore di una coalizione T è 1 se e solo se $|T| > n/2$ giocatori (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley di ogni giocatore. Utilizziamo la $(*)$. Naturalmente, le permutazioni p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui i è in posizione $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Tali permutazioni sono naturalmente in numero $(n-1)!$. Quindi $S_i(v) = \frac{1}{n}$, non sorprendentemente.
  - Gioco dittatoriale. Il valore di una coalizione T è 1 se e solo se T contiene un certo giocatore $j \in N$ (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley di ogni giocatore. Utilizziamo la $(*)$. Naturalmente, se $i \neq j$, non esiste nessuna permutazione p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente; viceversa, se $i = j$, ogni permutazione p è tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente. Quindi $S_i(v) = 0$, $i \neq j$ e $S_j(v) = 1$.
  - Gioco dell'unanimità . Solo la grande coalizione ha valore 1 (osservare superadditività). Il numero delle permutazioni p tale che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui i è in ultima posizione. Quindi il valore di Shapley è lo stesso del gioco di maggioranza: $S_i(v) = \frac{1}{n}$, non sorprendentemente (notiamo come i due giochi siano sostanzialmente diversi, eppure il potere dei giocatori è lo stesso!)
  - Il valore di una coalizione T è 1 se $|T| \geq 2$ e il giocatore $n \in T$ oppure se $T = \{1, 2, \ldots, n-1\}$; altrimenti 0 (osservare superadditività). Calcoliamo il valore di Shapley del giocatore n. Utilizziamo la $(*)$. Le permutazioni p tale

che A_n^p è vincente e $A_n^p \setminus \{n\}$ è perdente sono tutte e sole le permutazioni in cui n è in posizione diversa dalla prima e dall'ultima: quindi sono in numero $n! - 2(n-1)! = (n-2)((n-1)!)$, quindi $S_n(v) = \frac{(n-2)((n-1)!)}{n!} = \frac{n-2}{n}$. Dalla razionalità collettiva segue che il valore di ogni altro giocatore $i \neq n$ deve essere pari a $\frac{1-\frac{n-2}{n}}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)}$. Osservare come il potere del giocatore n cresce all'aumentare di n.

- Vediamo un altro esempio. Supponiamo che nel consiglio di amministrazione di una società siedono 6 uomini e 3 donne. Una decisione viene assunta se e solo se a suo favore votano la maggioranza stretta degli uomini (quindi almeno 4) e la maggioranza stretta delle donne (quindi almeno 2).

  Possiamo definire un gioco cooperativo semplice in cui l'insieme N dei giocatori è dato da 9 giocatori, 6 uomini e 3 donne. Il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti.

  La superadditività segue dal fatto che non esistono due coalizioni disgiunte entrambe in grado di far approvare una legge. Calcoliamo quindi il valore di Shapley di ogni giocatore. Per questo, conviene utilizzando l'espressione:

  $$S_i(v) = \frac{1}{n!} \text{ (n.ro permutazoni: } A_i^p \text{ è vincente e } A_i^p \setminus \{i\} \text{ è perdente)}, \forall i \in N.$$

  Fissiamo un giocatore $i \in N$ e una permutazione p di N. Diciamo che i è *determinante* per p se A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente. Quindi, per determinare il valore di Shapley di i dobbiamo contare quante sono le permutazioni per cui i è determinante. Per fare questo conteggio ci aiutano molto le seguenti due osservazioni. 1) Possiamo partizionare le permutazioni di N in n classi: le permutazioni in cui i è in prima posizione; le permutazioni in cui i è in seconda posizione; ..., le permutazioni in cui i è in ultima posizione (ognuna di queste classi contiene esattamente $(n-1)!$ permutazioni). 2) Consideriamo le permutazioni in cui i è in una certa posizione: osserviamo che il fatto che A_i^p è vincente sia $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente dipende solo da *quanti* uomini e *quante* donne ci sono in A_i^p e non da *quali* uomini e *quali* donne ci sono in A_i^p.

  Prendiamo in considerazione un consigliere uomo i. È facile vedere che i non è mai determinante se si trova in prima, seconda, terza, quarta, quinta, ottava e nona posizione. Consideriamo quindi il caso in cui i si trova in settima posizione: perché sia determinante è necessario che nelle prime 6 posizioni ci siano 3 uomini e 3 donne: il numero di permutazioni in cui i si trova in settima posizione e nelle prime 6 posizioni ci sono 3 uomini e 3 donne è pari a $\binom{5}{3} \cdot 6! \cdot 2!$. Consideriamo ora il caso in cui i si trova in sesta posizione: perché sia determinante è necessario che nelle prime 5 posizioni ci siano 3 uomini e 2 donne: il numero di permutazioni in cui i si trova in sesta posizione e nelle prime 5 posizioni ci sono 3 uomini e 2 donne è pari a $\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot 5! \cdot 3!$. Il valore di Shapley del generico uomo è quindi pari a:

$\frac{\binom{5}{3}\cdot 6!\cdot 2!+\binom{5}{3}\cdot\binom{3}{2}\cdot 5!\cdot 3!}{9!} = \frac{25}{252}$.
Il valore di Shapley di ciascun consigliere donna è quindi $\frac{1}{3}(1-6\cdot\frac{25}{252}) = \frac{17}{126}$.