Teoria dei Giochi 2020/21

Compiti

G. Oriolo *Esercizi 3*

Esercizio 1. Considera il seguente gioco. Tu e il tuo avversario potete scegliere un intero tra 1 e 100. Se il numero x che hai scelto è minore di quello y del tuo avversario, allora tu vinci un euro, a meno che $x = y - 1$, nel qual caso il tuo avversario vince un euro. Se il numero x che hai scelto è maggiore di quello y del tuo avversario, allora lui vince un euro, a meno che $y = x - 1$, nel qual caso tu vinci un euro. Se $x = y$ c'è un pareggio.

Studiare prima il gioco in strategia pura, individuando le strategie conservative di ciascun giocatore e, se esistono gli equilibri di Nash e il valore del gioco.

Passare quindi alla strategia mista. Formulare il problema di programmazione lineare che consente di calcolare il valore del gioco e le strategie conservative del primo giocatore. Non è richiesto di risolvere il gioco, ma di dire quali tra le seguenti strategie è conservativa per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$
- $\xi_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1, \ldots, 50$
- $\xi_1^1 = \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 100$
- $\xi_1^{98} = \xi_1^{99} = \xi_1^{100} = \frac{1}{3}; \xi_1^i = 0, \forall i = 1, \ldots, 97$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^i, \ldots, \xi_1^{100})$ il vettore stocastico associato alle 100 possibili strategie pure del primo giocatore).

Soluzione. (Attenzione: nello svolgimento poniamo $x_i = \xi_1^i$ e $y_j = \xi_2^j$.) La matrice A che descrive il gioco è una matrice 100×100. L'elemento a_{ij} è pari al numero di euro che perdi nel caso tu scelga l'intero i e il tuo avversario l'intero j. Quindi:

$$A: \quad a_{ij} = \begin{cases} +1 & i \geq j+2 \\ -1 & i = j+1 \\ 0 & i = j \\ +1 & i = j-1 \\ -1 & i \leq j-2 \end{cases}$$

Se analizziamo il gioco in strategia pura vediamo che qualunque cifra giochi il primo giocatore, il secondo giocatore può costringerlo a pagare un euro. Quindi tutte le strategie del primo giocatore sono conservative e per ogni strategia conservativa $\tilde{C}_1$ vale 1. Poiché il gioco è simmetrico, abbiamo che analogamente anche per il secondo giocatore tutte le strategie sono conservative e per ogni strategia conservativa $\tilde{C}_2$ vale 1. Quindi il gioco in strategia pura non ha né valore né equilibri di Nash.

Passiamo alla strategia mista. Il problema di PL associato alla scelta della migliore strategia per te è quindi il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{100} a_{ij} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

cioè

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{j-2} -x_i + x_{j-1} - x_{j+1} + \sum_{i=j+2}^{100} x_i \quad j = 1..100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 1$$

$$x_1, \ldots, x_{100} \geq 0$$

Poiché il gioco è simmetrico, il suo valore in strategia mista (che esiste!) deve essere 0.

Dobbiamo determinare se i vettori stocastici proposti sono strategie conservative per il primo giocatore. Poiché il gioco è a valore 0, una strategia conservativa deve determinare un valore $z^* = 0$. Per ogni strategia proposta dobbiamo quindi utilizzare la formulazione di PL scritta in precedenza per determinare se il valore corrispondente della funzione obiettivo è pari a zero.

- $x_1^i = \frac{1}{100}, \forall i = 1, \ldots, 100$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{100} + \sum_{i=3}^{100} \frac{1}{100} \rightarrow z \geq \frac{97}{100}$$

  Da cui $z \geq \frac{97}{100}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^{2i} = \frac{1}{50}, \forall i = 1, \ldots, 50$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq -\frac{1}{50} + \sum_{i=2}^{50} \frac{1}{50} \rightarrow z \geq \frac{48}{50}$$

  Da cui $z \geq \frac{48}{50}$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

- $x_1^1 = x_1^2 = x_1^3 = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 4, \ldots, 100$ è un vettore di strategie conservative, infatti considerando tutte le possibili risposte con strategie pure del secondo giocatore (cioè analizzando i vincoli per $j = 1..100$, abbiamo:

$$\begin{array}{lll} j = 1 & z \geq -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 2 & z \geq +\frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 3 & z \geq -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq 0 \\ j = 4 & z \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -\frac{1}{3} \\ j \geq 5 & z \geq -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} & \Rightarrow \quad z \geq -1 \end{array}$$

  Da cui otteniamo che $z = 0$, quindi il vettore stocastico proposto è una strategia conservativa per il primo giocatore.

- $x_1^{98} = x_1^{99} = x_1^{100} = \frac{1}{3}; x_1^i = 0, \forall i = 1, \ldots, 97$ non è una strategia conservativa per il primo giocatore, infatti se il giocatore risponde giocando 1 (cioè con la strategia pura corrispondente alla prima colonna di A, otteniamo):

$$z \geq \sum_{i=98}^{100} \frac{1}{3} \Rightarrow z \geq 1$$

  Da cui $z \geq 1$, che esclude la possibilità che z sia pari a zero.

Esercizio 2 Considera il seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero tra $\{6, 7, 8, 9, 10\}$; il tuo avversario può scegliere un numero tra $\{3, 4, 5\}$. Sia x il numero che scegli tu e y il numero scelto dal tuo avversario: se x e y hanno un divisore comune diverso da 1 vinci una quantità di euro pari a $MCD(x, y)$ (dove MCD sta per *Massimo Comune Divisore*), in tutti gli altri casi perdi un euro.

2.1 Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco. Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per te:

- $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1, \ldots, 5$
- $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = 0$
- $\xi_1^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^5 = \frac{2}{5}$

e le seguenti strategie per il tuo avversario:

- $\xi_2^j = \frac{1}{3}\ \forall j = 1, \ldots, 3$
- $\xi_2^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^3 = \frac{2}{5}$

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1, \ldots, \xi_1^5)$ il vettore stocastico associato alle 5 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1, \ldots, \xi_2^3)$ il vettore stocastico associato alle 3 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore (tu o il tuo avversario) che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

2.2 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.1 è conservativa? (Giustifica brevemente la risposta).

2.3 Quali sono gli equilibri di Nash del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarli, spiega perché non è possibile).

2.4 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiega perché non è possibile).

Soluzione La tua matrice C dei payoff in forma di costo è la seguente

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Anche se non era richiesto dal testo osserviamo che in strategia pura qualunque cifra giochi il primo giocatore, il secondo giocatore può costringerlo a pagare un euro. Quindi tutte le strategie del primo giocatore sono conservative e per ogni strategia conservativa

$\tilde{C}_1$ vale 1. Per il secondo giocatore invece la strategia conservativa è giocare 3 e per questa strategia $\tilde{C}_2$ vale 3. Quindi il gioco in strategia pura non ha né valore né equilibri di Nash.

Passiamo ad analizzare il gioco in strategia mista. Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq \sum_{i=1}^{5} c_{ij}\xi_1^i \quad j = 1, \ldots, 3$$

$$\xi_1^i \geq 0 \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i = 1, \ldots, 5$ è $z = -\frac{1}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{5}$ di euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = \xi_1^5 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = 0$ è $z = -\frac{1}{2}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, (in media) $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.
- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_1^2 = \xi_1^3 = \xi_1^4 = 0$ e $\xi_1^5 = \frac{2}{5}$ è $z = -\frac{7}{5}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, vinci, nel caso peggiore, in media 1.4 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \sum_{j=1}^{3} c_{ij}\xi_2^j \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 3$$

$$\sum_{j=1}^{3} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{3}\ \forall j = 1, \ldots, 3$ è -2. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 2 euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^1 = \frac{3}{5}$, $\xi_2^2 = 0$ e $\xi_2^3 = \frac{2}{5}$ è $-\frac{7}{5}$. Quindi, il tuo avversario, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 1.4 euro per ogni round del gioco.

Si osservi che $z(3/5, 0, 0, 0, 2/5) = w(3/5, 0, 2/5)$ quindi la strategia $(3/5, 0, 0, 0, 2/5)$ è conservativa per te e la strategia $(3/5, 0, 2/5)$ è conservativa per il tuo avversario (e, le altre strategie, che restituiscono un payoff atteso diverso da -1.4, non lo sono). Segue anche che il valore del gioco è -1.4. Infine, naturalmente, la coppie di strategie conservative individuate determina un equilibrio di Nash.

3. Si consideri il gioco antagonista descritto dalla seguente matrice di payoff in forma di costo:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\
2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & -3 & 0 \\
-3 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 3 & -4 & 0 & 3 & 0 & 0 & -4
\end{array}$$

Quali tra le seguenti coppie di strategie sono conservative, rispettivamente per il primo e il secondo giocatore?

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4$; $y^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1, \ldots, 8$
- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4$; $y^{2i} = \frac{1}{4}, \forall i = 1, \ldots, 4$;
- $x^1 = \frac{28}{99}; x^2 = \frac{30}{99}; x^3 = \frac{21}{99}; x^4 = \frac{20}{99}$; $y^1 = 0; y^2 = \frac{56}{99}; y^3 = \frac{40}{99}; y^4 = 0; y^5 = 0; y^6 = \frac{2}{99}; y^7 = 0; y^8 = \frac{1}{99}$;

Soluzione È facile vedere che il primo giocatore per individuare la sua strategia conservativa deve risolvere il segente PL:

$$\min z$$

$$z - 2x_2 + 3x_3 \geq 0$$

$$z + 2x_1 - 3x_4 \geq 0$$

$$z - 3x_1 + 4x_4 \geq 0$$

$$z + 3x_2 - 4x_3 \geq 0$$

$$z + 3x_3 - 3x_4 \geq 0$$

$$z + 2x_1 - 2x_2 \geq 0$$

$$z - 3x_1 + 3x_2 \geq 0$$

$$z - 4x_3 + 4x_4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, 4$$

Il problema che deve risolvere il secondo giocatore per individuare la sua strategia conservativa è il seguente

$$\max w$$

$$w + 2y_2 - 3y_3 + 2y_6 - 3y_7 \leq 0$$

$$w - 2y_1 + 3y_4 - 2y_6 + 3y_7 \leq 0$$

$$w + 3y_1 - 4y_4 + 3y_5 - 4y_8 \leq 0$$

$$w - 3y_2 + 4y_3 - 3y_5 + 4y_8 \leq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 = 1$$

$$y_i \geq 0 \ \forall i = 1, \ldots, 8$$

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4$; $y^i = \frac{1}{8}, \forall i = 1, \ldots, 8$. Sostituendo nel primale otteniamo come vincolo più stringente $z \geq \frac{1}{4}$ da cui $z(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Sostituendo nel duale otteniamo come vincolo più stringente $w \leq -\frac{1}{4}$ da cui $w(\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{8}) = -\frac{1}{4}$. Si ha quindi $z(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}) \neq w(\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{8})$, la coppia di vettori stocastici non è una coppia di strategie conservative.

- $x^j = \frac{1}{4}, \forall j = 1, \ldots, 4$; $y^{2i} = \frac{1}{4}, \forall i = 1, \ldots, 4$. Per quanto riguarda il primale si ottiene analogamente al caso precedente $z(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. Nel duale il vincolo più stringente è $w \leq -1$, da cui $w(0, \frac{1}{4}, \ldots, 0, \frac{1}{4}) = -1$. Anche in questo caso quindi la coppia di vettori stocastici proposti non è una coppia di strategie conservative.

- $x^1 = \frac{28}{99}; x^2 = \frac{30}{99}; x^3 = \frac{21}{99}; x^4 = \frac{20}{99}$; $y^1 = 0; y^2 = \frac{56}{99}; y^3 = \frac{40}{99}; y^4 = 0; y^5 = 0; y^6 = \frac{2}{99}; y^7 = 0; y^8 = \frac{1}{99}$. In questo caso si ha che il vincolo più stringente del primale è $z \geq \frac{4}{99}$, mentre quello del duale è $w \leq \frac{4}{99}$; se ne deduce che $z(\frac{28}{99}, \frac{30}{99}, \frac{21}{99}, \frac{20}{99}) = w(0, \frac{56}{99}, \frac{40}{99}, 0, 0, \frac{2}{99}, 0, \frac{1}{99}) = \frac{4}{99}$. La coppia di vettori stocastici proposti è quindi una coppia di strategie conservative ed in particolare il valore del gioco è $\frac{4}{99}$.