OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 4 Novembre 2019

1. Determinare la sequenza ottima di controlli u_k per minimizzare l'indice di costo $J(u)$ definito da
$$J(u) = \sum_{k=0}^{2} (x_{1,k}^2 + x_{2,k}^2 + u_k^2), \tag{1}$$
in presenza del vincolo dinamico
$$x_{1,k+1} = x_{2,k} \,,$$
$$x_{2,k+1} = u_k \,,$$
a partire dalla condizione iniziale $(x_{1,0}, x_{2,0})^\top = (1,\, 1)^\top$. [7 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:
$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_2(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2)dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - \frac{1}{2}(1 - x_1^2)x_2 + x_1 u \end{array} \right. \tag{2}$$
   (a) Verificare se la legge di controllo in retroazione $u = -2x_1x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (2). [3 PUNTI]
   (b) Dire se esiste un costo corrente significativo per il quale u sia la soluzione ottima. [3 PUNTI]

3. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:
$$\min_u J(u) = \left\{ \int_0^\infty \left(x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + \frac{1}{2}u(t)^2 \right) dt \right\}, \quad s.t. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 - 2x_2 + u \end{array} \right. \tag{3}$$
   Si determini una legge di controllo in retroazione $\bar{u}$ tale che il costo $J(\bar{u})$ sia minore di 4 a partire dalla condizione iniziale $x(0) = [1,\, 1]^\top$. [6 PUNTI]

4. Dare la definizione di funzione valore di un problema di controllo ottimo e derivare l'equazione di Hamilton- Jacobi-Bellman nel caso nonlineare. [6 PUNTI]

5. Enunciare il teorema di esistenza della soluzione del LQR ad orizzonte infinito. Dimostrare che il sistema a ciclo chiuso con la soluzione di LQR risulta asintoticamente stabile. [6 PUNTI]