Teoria dei Giochi 2020/21
Sinossi
G. Oriolo — *Seconda Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Paragrafi 3.5 e 3.6 del testo di Osborne. (N.b. Per il testo di Osborne a volte sono riportati due diversi riferimenti: uno vale per i capitoli in download, uno vale per il testo "tradizionale".)

1 Meccanismi d'asta

- Un'asta è un processo di compravendita di un bene che viene venduto (acquistato) al migliore offerente.
- Esistono molti meccanismi d'asta: asta inglese (sequenziale con rialzo minimo); asta olandese (al ribasso); asta in busta chiusa. Ci occupiamo principalmente di *aste in busta chiusa*: ogni giocatore sottopone la sua offerta una e una sola volta; tutte le buste sono aperte contemporaneamente. Di fatto vedremo come sia l'asta inglese che l'asta olandese possano essere modellate come una basta a busta chiusa! Con tutti i vantaggi del caso: non è richiesta la presenza fisica e contemporanea dei giocatori; l'asta può essere svolta completamente da una autorità (trusted) ... Esempio assegnazione delle licenze UMTS.
- Modelliamo l'asta in busta chiusa come un gioco non cooperativo. Il nostro obiettivo è quello di *progettare* l'asta (i.e. progettare il gioco). I *giocatori* sono i possibili acquirenti e indichiamo i giocatori come 1, 2, ..., n. La *strategia* x_i del giocatore i è semplicemente il valore dell'offerta effettuata dal giocatore (n.b. in un'asta in busta chiusa tutti i giocatori scommettono "simultaneamente" e una volta sola).
- In molti casi (ma non sempre!) l'obiettivo di chi progetta un'asta è quello di progettare un meccanismo d'asta che:
  1. (i) assegni il bene al giocatore che fa l'offerta x_i massima;
  2. (ii) induca ogni giocatore a fare un'offerta il più possibile vicina al valore v_i che egli attribuisce all'oggetto dell'asta. Per questo, vorremmo disegnare il gioco in modo tale che, per ogni giocatore i, *la strategia* $x_i = v_i$ *sia debolmente dominante.*

- Infatti, un elemento cruciale (comune a tutti i meccanismi d'asta) è il seguente: per ogni giocatore i il bene oggetto dell'asta ha un valore v_i.

  In modo coerente, il *payoff* del giocatore i (in forma di utilità) è quindi: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta pagando p. Naturalmente, il valore v_i è un valore *privato*, noto solo al giocatore i; tuttavia, come vedremo più avanti in alcuni casi il meccanismo del gioco che definiamo consente di rilassare questa ipotesi.

- Abbiamo definito: giocatori /strategie / payoff: abbiamo definito completamente un gioco? In effetti la definizione del payoff non è ancora completa. Dobbiamo dare:

  1. una regola per determinare il vincitore: vince l'asta il giocatore che ha fatto l'offerta più alta; inoltre, per rompere le parità, assumiamo, che a parità di offerta, vinca il giocatore con indice più basso; questo naturalmente realizza il punto (i) precedente;
  2. una regola per definire p, il prezzo che paga il vincitore dell'asta. Naturalmente, la scelta più banale è quella di porre p è pari al valore della massima offerta: in questo caso parliamo di *First-Price Sealed-Bid Auction*. Si invece poniamo p pari al valore della seconda massima offerta, parliamo di *Second-Price Sealed-Bid Auction*. Mostreremo più avanti che quest'ultima asta modella l'asta al rialzo!

1.1 Asta di primo e secondo prezzo

- Assumiamo che $v_i > 0$ per ogni $i \in N$.

- Analizziamo First-Price Sealed-Bid Auction. Avendo fissato p, il gioco è definito. Definizione formale con $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{C_i\}_{i\in N}\}$. Per il giocatore i:

  1) $C_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se: $x_i < \max_j x_j$, oppure se $x_i = \max_j x_j$ ma $\exists h < i$: $x_i = x_h$;

  2) $C_i(x_1, \ldots, x_n) = v_i - p = v_i - x_i$ altrimenti.

  Mostriamo nel seguito che First-Price Sealed-Bid Auction non ha strategie debolmente dominanti. Consideriamo un giocatore i. Consideriamo una strategia $x_i > 0$: se tutti gli altri giocatori giocano 0, la strategia $x'_i = \frac{v_i}{2}$ è migliore, quindi in questo caso x_i non è una migliore risposta e quindi non può essere una strategia debolmente dominante. Consideriamo la strategia $x_i = 0$: se tutti gli altri giocatori giocano $\frac{v_i}{2}$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che la strategia $x'_i = \frac{v_i}{2} + \varepsilon$ è migliore, quindi anche in questo caso x_i non è una migliore risposta e quindi non può essere una strategia debolmente dominante.

  Quindi, per First-Price Sealed-Bid Auction non esistono strategie debolmente dominante per nessun giocatore.

Il motivo di fondo è che quanto offre i influisce: sul fatto che i vinca o meno (com'è giusto); sul payoff di i (meno giusto: questo potrebbe indurre un giocatore a fare un'offerta lontana dal valore attribuito al bene!). Nei fatti, per ogni giocatore la scelta della strategia è difficile e l'esito dell'asta è imprevedibile.

- Analizziamo Second-Price Sealed-Bid Auction. È chiamato anche meccanismo d'asta di Vickrey. Di nuovo abbiamo: $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{C_i\}_{i\in N}\}$. Sia $x^* = \max_{j\neq i} x_j$. Per il giocatore i:

  1) $C_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ se: $x_i < x^*$, oppure se $x_i = x^*$ ma $\exists h < i$: $x_i = x_h$;

  2) $C_i(x_1, \ldots, x_n) = v_i - p = v_i - x^*$ altrimenti.

  Mostriamo nel seguito che per l'asta di Vickrey una strategia $x_i \neq v_i$ non è debolmente dominante. Consideriamo un giocatore i. Prima consideriamo una strategia $x_i > v_i$: se tutti gli altri giocatori giocano $\frac{x_i+v_i}{2}$, la strategia $x'_i = v_i$ è migliore. Consideriamo quindi una strategia $x_i < v_i$: se tutti gli altri giocatori giocano $\frac{x_i+v_i}{2}$, la strategia $x'_i = v_i$ è migliore.

  Dimostriamo infine che la strategia $x_i = v_i$ è invece debolmente dominante per tutti i giocatori. Consideriamo il generico stato $x_{-i} \in X_{-i}$. Il nostro claim è che, per ogni $x_i \in X_i$, $C_i(v_i, x_{-i}) \geq C_i(x_i, x_{-i})$. Dimostrazione grafica attraverso fig. 85.1 (in download: fig. 83.1) Osborne. In alternativa, osserviamo che $x_i = v_i$ è la migliore risposta nei 3 scenari: $v_i > x^*$; $v_i = x^*$; $v_i < x^*$.

- Quindi per Second-Price Sealed-Bid Auction per ogni giocatore la strategia v_i è debolmente dominante. Diversamente dal First-Price, x_i non influenza il payoff del giocatore, ma solo il fatto che il giocatore vinca o meno!

  Second-Price Sealed-Bid Auction modella quindi l'asta inglese, in cui, presumibilmente: il vincitore è il giocatore che ha il valore v_i più alto; il vincitore paga un prezzo di poco superiore al secondo valore v_i piu' alto.

  Osserviamo infine che l'analisi del gioco appena effettuata prescinde dall'ipotesi che i valori v_i siano privati o pubblici.

- Per esercizio, analizziamo gli equilibri di Nash (N. E.) di Second-Price Sealed-Bid Auction. Senza perdita di generalità assumiamo che $v_1 \geq v_2 \geq \ldots v_n > 0$. Osserviamo nel seguito che ci sono moltissimi (di fatto infiniti) N.E. Intanto $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è un N.E., poiché sappiamo che l'"incrocio" delle strategie dominanti individua un N.E. Un altro N.E. è $(v_1, 0, \ldots, 0)$: il payoff del primo giocatore è v_1 ed è massimo; il payoff di ogni altro giocatore è 0: per avere un payoff positivo dovrebbe vincere il gioco (scommettendo più di v_1), ma in questo caso pagherebbe comunque v_1 e il suo payoff sarebbe non positivo. Analogamente, se $\varepsilon_i \leq v_i$ per ogni $2 \leq i \leq n$, $(v_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ è un equilibrio di Nash. E ci sono N.E. in cui il primo giocatore non vince l'asta: $(v_2, v_1, 0, \ldots, 0)$; $(v_3, 0, v_1, 0, \ldots, 0)$; $\ldots$; $(v_n, 0, \ldots, 0, v_1)$; e più in generale, $(v_2, v_1, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n)$ con $\varepsilon_i \leq v_2$, $i = 3..n$; etc.

- Analizziamo anche i N. E. di First-Price Sealed-Bid Auction. Per semplicità assumiamo che $v_1 > v_2 > \dots v_n > 0$. Vale il seguente risultato: $(x_1, \dots, x_n)$ è un N.E. se e solo se valgolo le tre seguenti condizioni: 1) $x_1 = \max_j x_j$ (quindi il giocatore 1 vince l'asta); 2) $x_1 \in [v_1, v_2]$; 3) $\exists h > 1$: $x_h = x_1$ (ovvero, esiste almeno un altro giocatore che offre tanto quanto x_1).

  Dim: Necessità : se un punto è un N.E. deve soddisfare 1-3. 1) Supponiamo viceversa che x sia un N.E. tale che il giocatore 1) non vinca il gioco. Esiste allora $i \neq 1$ tale che $x^* = x_i > x_1$. Se $x_i > v_i$ allora il giocatore i aumenterebbe il suo payoff scommettendo v_i; se $x_i \leq v_i$ allora il giocatore 1 aumenterebbe il suo payoff scommettendo $v_i + \varepsilon$, per un opportuno $\varepsilon > 0$ (per hyp $v_1 > v_2 > \dots v_n$). 2) Sappiamo quindi che il primo giocatore vince l'asta. Supponiamo che $x_1 \notin [v_1, v_2]$: se $x_1 > v_1$ il giocatore 1 aumenterebbe il suo payoff scommettendo v_1; se $x_1 < v_2$ il giocatore 2 aumenterebbe il suo payoff scommettendo $v_2 - \varepsilon$ per un opportuno $\varepsilon > 0$. 3) Sappiamo quindi che il primo giocatore vince l'asta e che $x_1 \in [v_1, v_2]$. Supponiamo che $x_1 > \max_{j \neq 1} x_j$: allora il giocatore 1 aumenterebbe il suo payoff scommettendo $x_1 - \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$.

  Sufficienza: dimostriamo ora che un punto che soddisfa 1-3 è un N.E. Si osservi che nell hyp il giocatore 1 vince l'asta. I giocatori $\neq 1$ hanno payoff 0: modificherebbero la loro strategia per avere un payoff positivo, ma per fare questo dovrebbero vincere il gioco, quindi scommettere più di x_1 e meno di v_2: impossibile. Allo stesso modo il giocatore 1 al momento ha un payoff non negativo: per aumentare il suo payoff dovrebbe diminuire x_1, ma come prova a diminuire x_1 perde il gioco e quindi il suo payoff non aumenta.

2 Legislazione di incidente

- Vediamo un'applicazione degli equilibri di Nash (e delle funzioni best response) al diritto privato. L'approccio *Law and Economics* va adesso molto di moda nel diritto privato e pubblico, mentre nel diritto commerciale si tratta di un'impostazione acquisita già dagli anni '30, ed è ovviamente imprescindibile nel diritto antitrust.

- Legislazione di incidente. Due giocatori: la vittima (gioc. 2) e il responsabile (gioc. 1). La strategia di ogni giocatore è semplicemente il livello di attenzione a_i che ogni giocatore pone.

- Per definire il payoff supponiamo sia data una funzione $L(x_1, x_2) : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \mapsto \mathcal{R}_+$ che misura il danno (atteso) subito dal secondo giocatore in funzione del livello di attenzione a_i di ciascun giocatore.

  Nel seguito, assumiamo che la funzione L sia tale che fissato $x_1 = \bar{x}_1 \geq 0$ (risp. fissato $x_2 = \bar{x}_2 \geq 0$), $L_2(x_2) = L(\bar{x}_1, x_2)$ (resp. $L_1(x_1) = L(x_1, \bar{x}_2)$) sia una funzione strettamente decrescente. È questa una ipotesi molto ragionevole.

- Per definire esattamente il payoff dobbiamo definire anche una *regola legale*, i.e. quale parte $\rho(x_1, x_2)$ del danno $L(x_1, x_2)$ imputiamo al responsabile (e quindi quale parte $1 - \rho(x_1, x_2)$ imputiamo alla vittima; naturalmente: $0 \leq \rho(x_1, x_2) \leq 1$).

  Una volta definita la regola legale $\rho(x_1, x_2) : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \mapsto [0, 1]$, il payoff del primo giocatore (in forma di costo) è quindi: $C_1(x_1, x_2) = x_1 + \rho(x_1, x_2)L(x_1, x_2)$ e il payoff del secondo giocatore è $C_2(x_1, x_2) = x_2 + (1 - \rho(x_1, x_2))L(x_1, x_2)$ – ovvero stiamo assumendo per semplicità che per ogni giocatore il costo di attivare un livello di attenzione a_i sia proprio a_i.

- Noi siamo qui interessati a regole legali della classe *neglicence with contribution negligence* (nella nostra giurisprudenza, colpa con concorso di colpa). Per tale classe, il danno è imputato integralmente (i.e. $\rho = 1$) al responsabile se e solo se: la vittima è stata sufficientemente attenta *and* il responsabile non e' stato sufficientemente attento; in tutti gli altri casi il danno è imputato integralmente alla vittima (i.e. $\rho = 0$).

  Le diverse regole nella classe neglicence with contribution negligence differiscono nella definizione del livello di attenzione ritenuto sufficiente. Nel seguito inidichiamo con Y_i il livello (minimo) di sufficiente attenzione per ciascun giocatore. Allora, per una regola legale del tipo neglicence with contribution negligence, $\rho(x_1, x_2) = 1$ se e solo se: $x_1 < Y_1$ *and* $x_2 \geq Y_2$; in tutti gli altri casi $\rho(x_1, x_2) = 0$. N.b. se $Y_1 = 0$ paga (integralmente) la vittima; se $Y_2 = 0$ e Y_1 è finito, il responsabile paga (integralmente) se e solo se non è suff. attento; se $Y_2 = 0$ e $Y_1 = \infty$, il responsabile paga (integralmente) in ogni caso.

- Il nostro obiettivo è di nuovo quello di chi *progetta* il gioco, ovvero il legislatore. Innanzitutto, osserviamo che il costo complessivo, i.e. "costo sociale" dell'incidente è $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + L(x_1, x_2)$.

  Supponiamo, per semplicità, che il minimo $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ di U su $\mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+$ esiste e sia unico. Supponiamo inoltre che $\tilde{x}_1 \neq 0$. (In effetti, l'esistenza segue dall'ipotesi che le funzioni $L_2(x_2)$ e $L_1(x_1)$ siano strettamente decrescenti. L'unicità e il fatto che $\tilde{x}_1 \neq 0$ semplificano la nostra analisi.)

  Vorremmo quindi che l'*esito* del gioco sia proprio l'ottimo sociale $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

- Naturalmente l'ideale sarebbe fissare i valori di Y_1 e Y_2 in modo tale che giocare $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ sia debolmente dominante per entrambi i giocatori. Ci accontenteremo di qualcosa di più debole: faremo vedere che se fissiamo $Y_1 = \tilde{x}_1$ e $Y_2 = \tilde{x}_2$, allora nessuno dei due giocatori ha strategie debolmente dominanti, ma $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ è l'unico equilibrio di Nash del gioco, ovvero l'ottimo sociale è l'unico equilibrio di Nash del gioco.

- Studiamo la funzione best response. Innanzitutto studiamo $b_1(x_2)$. Se $x_2 < \tilde{x}_2$ allora $b_1(x_2) = \{0\}$.

Se $x_2 = \tilde{x}_2$, mostriamo nel seguito che $b_1(x_2) = \{\tilde{x}_1\}$. In $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ il payoff del responsabile è $\tilde{x}_1$. Se aumenta x_1, il suo payoff è $x_1 > \tilde{x}_1$, quindi non gli conviene. Se diminuisce x_1, il suo payoff è $x_1 + L(x_1, \tilde{x}_2)$: dobbiamo dimostrare quindi che $x_1 + L(x_1, \tilde{x}_2) > \tilde{x}_1$. Si osservi che, poiché $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ è l'unico punto di minimo di $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + L(x_1, x_2)$, abbiamo che $U(x_1, \tilde{x}_2) = x_1 + \tilde{x}_2 + L(x_1, \tilde{x}_2) > U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e quindi $x_1 + L(x_1, \tilde{x}_2) > \tilde{x}_1 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq \tilde{x}_1$.

Infine se $x_2 > \tilde{x}_2$, allora ci limitiamo a osservare che se $x_1 \in b_1(x_2)$, allore vale $x_1 \leq \tilde{x}_1$: infatti, se $x_1 > \tilde{x}_1$ il payoff del primo giocatore è maggiore del payoff che otterebbe con $x_1 = \tilde{x}_1$, quindi $x_1 > \tilde{x}_1$ non può essere una best response.

Se osserviamo la funzione $b_1(x_2)$, deduciamo che per il primo giocatore non esiste strategia debolmente dominante. Inoltre, si osservi che per il primo giocatore nessuna strategia $x > \tilde{x}_1$ è *mai* una best response.

- Studiamo ora $b_2(x_1)$. Poiché per il primo giocatore non esiste una strategia debolmente dominante, d'ora in poi ci concentriamo sulla ricerca di un equilibrio di Nash. Ricordiamo che questo possiamo trovarlo "incrociando" le due funzioni best response. Possiamo scartare il caso $x_1 > \tilde{x}_1$, perché abbiamo visto che un valore maggiore di $\tilde{x}_1$ non sarà mai una best response per il primo giocatore.

  Se $x_1 = \tilde{x}_1$, mostriamo nel seguito che $b_2(x_1) = \{\tilde{x}_2\}$. In questo caso, il payoff della vittima è $x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2)$: dobbiamo dimostrare quindi che, per ogni $x_2 \neq \tilde{x}_2$, vale $x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2) > \tilde{x}_2 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Si osservi che, poiché $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ è l'unico punto di minimo di $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + L(x_1, x_2)$, abbiamo che $U(\tilde{x}_1, x_2) = \tilde{x}_1 + x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2) > U(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ e quindi $x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2) > \tilde{x}_2 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$.

  Consideriamo infine il caso in cui $x_1 < \tilde{x}_1$. Il nostro claim è che anche in questo caso $b_2(x_1) = \{\tilde{x}_2\}$. Si noti che il payoff della vittima se $x_2 = \tilde{x}_2$ è $\tilde{x}_2$. Allora è immediato che $x_2 > \tilde{x}_2$ non è una best response. Vediamo ora che neanche $x_2 < \tilde{x}_2$ è una best response. Si noti che se $x_2 < \tilde{x}_2$, il payoff della vittima è $x_2 + L(x_1, x_2)$, sarà quindi sufficiente mostrare che, se $x_1 < \tilde{x}_1$ e $x_2 < \tilde{x}_2$, allora $x_2 + L(x_1, x_2) > \tilde{x}_2$. Abbiamo infatti: $x_2 + L(x_1, x_2) > x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2) \geq \tilde{x}_2$, dove la prima disuguaglianza segue dal fatto che L_1 è strettamente decrescente e la seconda è immediatamente dimostrata se si osserva (vedi discussione per il caso $x_1 = \tilde{x}_1$) che $x_2 + L(\tilde{x}_1, x_2) > \tilde{x}_2 + L(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \geq \tilde{x}_2$ (per la non negatività della funzione L).

- Incrociando le best response, segue che $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ è l'unico equilibrio di Nash.