| **Progetto di Reti** | 18 Giugno 2018 |
|---|---|
| Esame finale | |
| *G. Oriolo* | *18 Giugno 2018* |

**Consegnare esclusivamente questo foglio, rispondendo alle domande sul retro.**

**Esercizio 1.** Considerate l'istanza del Facility Location Game con insieme dei clienti $N = \{A, B, C, D\}$, insieme delle facility $F = \{1, 2, 3\}$, costi di set-up $f_1 = 12, f_2 = 14, f_3 = 10$ e costi di connessione $d_{A,1} = 7, d_{A,2} = 17, d_{A,3} = 7, d_{B,1} = 11, d_{B,2} = 17, d_{B,3} = 9, d_{C,1} = 17, d_{C,2} = 19, d_{C,3} = 17, d_{D,1} = 17, d_{D,2} = 13, d_{D,3} = 9$.

- Utilizzando l'algoritmo primale-duale individuare una soluzione per il problema di facility location (ovvero, quali facility aprire e la connessione di ogni cliente a una facility aperta). *Illustrare lo svolgimento dell'esercizio riportando i valori di tutte le variabili al variare della variabile di clock $t$, le facility aperte in modo temporaneo e quelle aperte in modo definitivo (giustificando la eventuale chiusura di una o più facility) e i valori delle variabili duali.*
- Quale frazione del costo di questa soluzione può essere recuperata utilizzando una divisione dei costi che sia stabile? *Per rispondere alla domanda, indicare quanto dovrebbe pagare ciascun cliente e appunto la frazione di costo che questa divisione permette di recuperare.*
- Sulla base delle risposte precedenti, dire quanto può valere l'integrality gap della formulazione standard del problema di facility location:

  $$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{i \in F} f_i y_i + \sum_{i \in F} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij} & \\ \textstyle\sum_{i \in F} x_{ij} \geq 1,\ & j \in N \\ x_{ij} \leq y_i,\ & i \in F, j \in N \\ x_{ij}, y_i \in \{0, 1\}, & i \in F, j \in N; \end{aligned}$$

  in questo caso. *Per rispondere alla domanda, fornire un intervallo, il più piccolo possibile, nel quale si colloca il valore dell'integrality gap. Non è necessario giustificare la risposta*

**Soluzione** Innanzitutto è facile verificare che i costi di connessione soddisfano l'ipotesi metrica, quindi l'uso dell'algoritmo primale-duale  appropriato.

Svolgiamo dunque l'algoritmo. Esso fa crescere ordinatamente le variabili $\alpha_j, j \in \{A, B, C, D\}$ e le variabili $\beta_{ij}, i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{A, B, C, D\}$. Immaginiamo che il suo svolgimento segua un clock esterno, rappresentato da una variabile temporale $t$: all'inizio $t = 0$ e tutte le variabili valgono 0, poi $t = \varepsilon$ e tutte le $\alpha_j$ valgono $\varepsilon$ etc.

All'istante $t = 7$, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D = 7$, le variabili $\beta$ sono a 0, gli archi $\{1, A\}$ e $\{3, A\}$ sono tight, nessuna facility è temporaneamente aperta.

All'istante $t = 9$, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D = 9$, $\beta_{A1} = \beta_{A3} = 2$, le altre variabili $\beta$ sono a 0, gli archi $\{1, A\}$, $\{3, A\}$, $\{3, B\}$ e $\{3, D\}$ sono tight, nessuna facility è temporaneamente aperta.

All'istante $t = 11$, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D = 11$, $\beta_{A1} = \beta_{A3} = 4$, $\beta_{B3} = \beta_{C3} = 2$ le altre variabili $\beta$ sono a 0, gli archi $\{1, A\}$, $\{3, A\}$, $\{3, B\}$, $\{3, D\}$ e $\{1, B\}$ sono tight, nessuna facility è temporaneamente aperta.

All'istante $t = \frac{35}{3}$, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_C = \alpha_D = \frac{35}{3}$, $\beta_{A1} = \beta_{A3} = \frac{14}{3}$, $\beta_{B3} = \beta_{C3} = \frac{8}{3}$ le altre variabili $\beta$ sono a 0, gli archi $\{1, A\}$, $\{3, A\}$, $\{3, B\}$, $\{3, D\}$ e $\{1, B\}$ sono tight, la facility 3 è temporaneamente aperta.

All'istante $t = 17$, $\alpha_A = \alpha_B = \alpha_D = \frac{35}{3}$, $\alpha_C = 17$, $\beta_{A1} = \beta_{A3} = \frac{14}{3}$, $\beta_{B3} = \beta_{C3} = \frac{8}{3}$ le altre variabili $\beta$ sono a 0, gli archi $\{1, A\}$, $\{3, A\}$, $\{3, B\}$, $\{3, D\}$, $\{1, B\}$ e $\{3, D\}$ sono tight, la facility 3 è temporaneamente aperta e tutti i clienti sono connessi a essa.

In questo caso non è necessario svolgere la seconda parte dell'algoritmo perché una sola facility è aperta e non ci sono conflitti.

È facile verificare che il costo sia della soluzione primale che della soluzione duale è pari a 52 e quindi esiste una allocazione dei costi che permette di recuperare integralmente il costo della soluzione primale.

Infine in questo caso l'integrality gap è 1.