OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

COMPITO A

Esame 25 Febbraio 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(3x_1(t)^2 + 6x_1(t)x_2(t) + 6x_2(t)^2 + u(t)^2\right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & ax_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_1 + bx_2 + u \end{array} \right. \tag{1}$$

   i) Determinare valori dei parametri a e b tali che le matrici $K_0 = [-3 \quad -2]$ e

$$P_0 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

   possano essere utilizzate per inizializzare l'algoritmo di Kleinman, verificando la correttezza del risultato.

   ii) Determinare almeno una condizione iniziale x_0 per la quale la legge di controllo $u = -3x_1 - 2x_2$ abbia costo pari a 1.

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x_2(t)^2 + u(t)^2\right) dt \right\} \quad \text{s.t.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -x_1 - \frac{1}{2}(1 - g(x_1, x_2))x_2 + x_1 u \end{array} \right. \tag{2}$$

   Conoscendo la funzione valore associata, ovvero $V(x) = 0.5(x_1^2 + x_2^2)$, determinare la soluzione ottima di (2) e la funzione continua g, motivando la risposta.

3. Si consideri il seguente gioco differenziale scalare a due giocatori:

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_{u_1} J_1(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (2x(t)^2 + u_1(t)^2) dt \right\}, \\ \min\limits_{u_2} J_2(u_1, u_2) & = & \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (8x(t)^2 + 2u_2(t)^2) dt \right\}, \end{array} \quad s.t. \quad \dot{x} = -u_1 + \sqrt{2}u_2 \tag{3}$$

   Determinare il numero e il valore di tutti gli equilibri di Nash del gioco differenziale (3).

4. Dimostrare che l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman fornisce condizioni necessarie e sufficienti di *ottimalità*.

5. Dare la definizione di gioco differenziale non-cooperativo e di equilibrio di Nash, e discutere i passaggi fondamentali per derivare le condizioni che forniscono un equilibrio di Nash.