Teoria dei Giochi 2020/21

Sinossi

G. Oriolo *Quarta Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Capitolo 2 Dispense Facchinei; capitolo 15 del testo di Chvatal (in particolare il poker di Kuhn è illustrato a pag 235-237).

1 Estensione in strategia mista di un gioco

- Definire il gioco della morra (MO). Payoff in forma di utilità per il primo giocatore:

$(Hide, Guess)$	$[1,1]$	$[1,2]$	$[2,1]$	$[2,2]$
$[1,1]$	0	2	-3	0
$[1,2]$	-2	0	0	3
$[2,1]$	3	0	0	-4
$[2,2]$	0	-3	4	0

- Ricordiamo che un gioco antagonista (finito) è simmetrico se la matrice C dei payoff è anti-simmetrica. Naturalmente, in un gioco simmetrico, il payoff $\tilde{C}_1(\bar{x})$ garantito al primo giocatore da una strategia conservativa $\bar{x}$ (quando esiste) ha lo stesso valore del payoff $\tilde{C}_2(\bar{x})$ garantito al secondo giocatore dalla stessa strategia consevativa! Quindi un gioco simmetrico ha un equilibrio di Nash se e solo se $\tilde{C}_1(\bar{x}) = -\tilde{C}_2(\bar{x}) = 0$.
- MO è un gioco simmetrico. Tuttavia $\tilde{C}_1(\bar{x})$ e $\tilde{C}_2(\bar{x})$ valgono -2, e il gioco non ha equilibri di Nash (Osserviamo che per la morra la matrice di payoff è scritta nella forma di utilità , quindi la strategia conservativa è una strategia di max min, i.e. $\tilde{C}_1(\bar{x}_1) = \max_{x_i \in X_i} \tilde{C}_i(x_i) = \max_{x_i \in X_i} \inf_{x_{-i} \in X_{-i}} C_i(x_i, x_{-i})$).
- Tuttavia i giochi come la morra si giocano iterativamente ... e una qualunque (buona) strategia dovrebbe essere implementata in modo randomizzato.
- Definizione *estensione in strategia mista di un gioco*. Dato un gioco *finito* in forma normale $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i\in N}, \{C_i\}_{i\in N}\}$, con $X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{m_i}\}$, l'estensione in strategia mista di Γ è un nuovo gioco *infinito* $\overline{\Gamma} = \{N, \{\overline{X}_i\}_{i\in N}, \{\overline{C}_i\}_{i\in N}\}$, definito da:

$\overline{X}_i = \{\xi_i \equiv (\xi_i^1, \ldots, \xi_i^{m_i}) \in \mathcal{R}^{m_i} : \xi_i \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} \xi_i^j = 1\}$;

$\overline{C}_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i_1=1}^{m_i} \ldots \sum_{i_n=1}^{m_n} C_i(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n}$.

- Si noti che per un gioco con due giocatori il payoff $\overline{C}_i(\xi_1, \xi_2)$ è pari a $\xi_1^T C \xi_2$. Per esempio, per il gioco della morra, se $\xi_1 = (1/4, 0, 1/4, 1/2)$ e $\xi_2 = (1/3, 0, 1/3, 1/3)$, abbiamo $\overline{C}_1(\xi_1, \xi_2) = (1/4, 0, 1/4, 1/2)^T C (1/3, 0, 1/3, 1/3) = 1/3$.

- Gli elementi di ciascun insieme $\overline{X}_i$ sono chiamati *strategie miste*.

  Sia $j \in \{1, \ldots, m^i\}$. La strategia mista del giocatore i tale che $\xi_i^j = 1$ e $\xi_i^h = 0$ per $h \neq j$, corrisponde alla strategia x_i^j del gioco Γ. Queste strategie sono chiamate *strategie pure*.

2 Estensione in strategia mista di un gioco antagonistico e teorema di Von Neumann

- Ci concentriamo adesso sull'estensione in strategia mista di un gioco antagonista (finito). Innanzitutto osserviamo che l'estensione in strategia mista di un gioco antagonista è anch'esso un gioco antagonista (infinito). Come mostriamo nel seguito, questo nuovo gioco ha sempre equilibri di Nash.

- Le condizioni perché un gioco antagonista ammetta un equilibrio di Nash in strategia mista sono: (i) $\sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2 = \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$; (ii) esiste una strategia conservativa per il primo giocatore, i.e. $\exists \xi_1^* \in \overline{X}_1 : \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^{*T} C \xi_2$; (iii) esiste una strategia conservative per il secondo giocatore, i.e. $\exists \xi_2^* \in \overline{X}_2 : \inf_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \sup_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2 = \sup_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1 C \xi_2^{*T}$.

  Ricordiamo inoltre che, se esistono strategie conservative ξ_1^* e ξ_2^*, valgono: $\tilde{\overline{C}}_1(\xi_1^*) = \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2$ e $-\tilde{\overline{C}}_2(\xi_2^*) = \inf_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$. Quindi il gioco ha un equilibrio se è solo se $\tilde{\overline{C}}_1(\xi_1^*) = -\tilde{\overline{C}}_2(\xi_2^*)$.

- Ricordiamo che per il teorema di Weierstrass una funzione continua su un insieme chiuso e limitato ha (almeno) un punto di minimo e (almeno) un punto di massimo. Poiché $\overline{X}_2$ è chiuso e limitato e, fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, $\xi_1^T C \xi_2$ è una funzione continua su $\overline{X}_2$, allora abbiamo che $\sup_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$. È facile verificare che $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$ è continua su $\overline{X}_1$, quindi applicando di nuovo il teorema di Weierstrass segue che $\exists \xi_1^* \in \overline{X}_1 : \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^{*T} C \xi_2$ e il primo giocatore ha una strategia conservativa. Analogamente, è facile verificare che anche per il secondo giocatore esiste una strategia conservativa.

- Nell'estensione in strategia mista di un gioco antagonistico esistono quindi sempre strategie conservative (ξ_1^*, ξ_2^*) per entrambi i giocatori. Rimane da dimostrare che vale la (i) che possiamo riscrivere:

$(\tilde{\overline{C}}_1(\xi_1^*) =)$ $\min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2$ $(= -\tilde{\overline{C}}_2(\xi_2^*))$.

- Cominciamo con il calcolare il termine $\min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2$. È facile vedere che, fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, allora $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \sum_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j = \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i$, ovvero la migliore risposta del secondo giocatore alla strategia $\xi_1 \in \overline{X}_1$ del primo giocatore è una strategia pura. Dim:

  $\sum_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_1^i \xi_2^j = \sum_{j=1..m_2} \xi_2^j \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i \leq \sum_{j=1..m_2} \xi_2^j \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i =$
  $= (\sum_{j=1..m_2} \xi_2^j) \cdot (\max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i) = \max_{h \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ih} \xi_1^i$.

  Dim alternativa: fissato $\xi_1 \in \overline{X}_1$, vogliamo trovare ξ_2 che sia una soluzione ottima per il seguente problema: $\max \xi_1^T C \xi_2$ con $\xi_2 : \xi_2 \geq 0, \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1$. Si osservi che la funzione obiettivo è lineare e l'insieme ammissibile $\xi_2 : \xi_2 \geq 0, \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1$ è un poliedro. È un poliedro molto semplice che va sotto il nome di *simplesso* e i cui vertici, come è facile verificare, sono tutti e soli i punti $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots (0, 0, \ldots, 0, 1)$, cioè le strategie pure del secondo giocatore.

- Abbiamo quindi: $\min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \xi_1^T C \xi_2 = \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \max_{j \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i \equiv$

$$\begin{array}{ll}
\equiv \min \max_{j \in \{1,\ldots,m_2\}} \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i & \\
& \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\
& \xi_1^i \geq 0, \quad i = 1..m_1 \\
\equiv \min & z \\
& z \geq \sum_{i=1..m_1} c_{ij} \xi_1^i, j = 1..m_2 \\
& \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\
& \xi_1^i \geq 0, \quad i = 1..m_1
\end{array}$$

- Si noti che la risoluzione del precedente problema (un problema di Programmazione Lineare!) restituisce la strategia conservativa ξ_1^* del primo giocatore. Per la morra, per esempio, $\xi_1^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$.

- Calcoliamo adesso il termine $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2$. Procedendo come prima, $\max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{\xi_1 \in \overline{X}_1} \xi_1^T C \xi_2 = \max_{\xi_2 \in \overline{X}_2} \min_{i=1..m_1} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_2^j \equiv$

$$\begin{array}{ll}
\equiv \max \min_{i \in \{1,\ldots,m_1\}} \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_2^j & \\
& \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\
& \xi_2^j \geq 0, \quad j = 1..m_2 \\
\equiv \max & w \\
& w \leq \sum_{j=1..m_2} c_{ij} \xi_2^j, i = 1..m_1 \\
& \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\
& \xi_2^j \geq 0, \quad j = 1..m_2
\end{array}$$

- Notiamo che il problema $\max z$ è il duale del problema $\min w$ e che entrambi hanno soluzioni ammissibili (infatti, abbiamo già osservato che strategie conservative esistono per entrambi i giocatori). Segue quindi che entrambi i problemi hanno un ottimo finito e all'ottimo abbiamo $z^* = w^*$. Sono quindi soddisfatte le condizioni per l'esistenza di un equilibrio di Nash, ovvero: *l'estensione in strategia mista di un gioco antagonista ha* sempre *un equilibrio di Nash.*

- Naturalmente, la risoluzione del secondo PL restituisce la strategia conservativa ξ_2^* del secondo giocatore. Per la morra, per esempio, $\xi_2^* = (0, 3/5, 2/5, 0)$, come era ovvio dato che il gioco è simmetrico.

- Una conseguenza non banale del teorema appena dimostrato è che in un qualunque gioco antagonista giocato in modo randomizzato, per ciascun giocatore esiste una strategia, la strategia conservativa, che può essere dichiarata in anticipo senza ledere le proprie possiblità!

- In effetti il senso più profondo del teorema appena dimostrato – la possibilità per ogni giocatore di comunicare la propria strategia senza ledere le proprie possibilità – prescinde dalla considerazione che l'incrocio di queste strategie restituisce un equilibrio di Nash. In fatti questo teorema venne dimostrato nel 1928, molti anni da Von Neumann prima che Nash introducesse il suo concetto di equilibrio, e va sotto il nome di Th di Von Neumann:

  Per ogni matrice A $(m \times n)$ esiste un vettore stocastico riga x^* e un vettore stocastico colonna y^* tale che $\min_x xAy^* = \max_y x^*Ay$, dove il minimo e il massimo sono presi su tutti i vettori stocastici di dimensione rispettivamente m e n.

  (Un *vettore stocastico* è un vettore non negativo tale che la somma delle sue componenti è pari a 1).