Robust Stability and Robust Performance

Lorenzo Rossi Matricola: 0301285

June 9, 2022

Assignment 6

Consideriamo la famiglia degli impianti:

$$\tilde{P} = P(1 + \Delta W_2) \tag{1}$$

con $P(s) = \frac{1}{s-1}, \quad W_2(s) = \frac{2}{s+10}, \quad C(s) = k, \quad W_1(s) = \frac{1}{s+1}$. Assumendo che Δ è tale che $\|\Delta\|_\infty \leq 2$, determinare l'intervallo dei valori di k per cui si otteniene la stabilità robusta e determinare il valori di k per per cui si ottiene stabilità rousta e minimizza le prestazioni robuste di lvello α.

Stabilità Robusta

Δ è una incertezza di livello $\beta = 2$. Quindi, la condizione di stabilità robusta è data da $\|W_2 T\|_\infty < \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}$ dato che, utilizzando il teorema del piccolo guadagno e separando il sistema a ciclo chiuso dall'incertezza, si ottiene che:

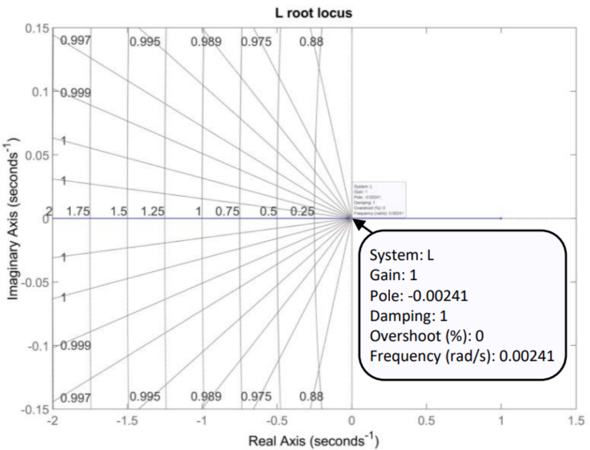
$$\Delta_{in} \to \Delta_{out} : W_2 \frac{PC}{1+PC} = W_2 \frac{L}{1+L} = W_2 T$$

Deve valere che:

$$\|\Delta\|_\infty \|W_2 T\|_\infty < 1 \xrightarrow{\|\Delta\|_\infty \leq 2} 2 \cdot \|W_2 T\|_\infty < 1 \to \|W_2 T\| < \frac{1}{2}$$

Preliminarmente, occorre rispettare la stabilità del sistema a ciclo chiuso. A tale scopo, si considera il luogo delle radici di$L = PC$ da cui si ottiene il seguente risultato.

Stabilità Robusta



Quindi, si ha stabilità asintotica nominale per $k > 1$. Un metodo alternativo può essere dato dall'analisi dei poli della funzione di sensitività $S = \frac{1}{1+L} = \frac{1}{1+PC} = \frac{s-1}{s-1+k}$.

Stabilità Robusta

Considerando esplicitamente il diagramma dei moduli di:

$$W_2 T = W_2 \frac{2k}{1+PC} = \frac{2k}{s^2 + s(9+k) + 10(k-1)}$$

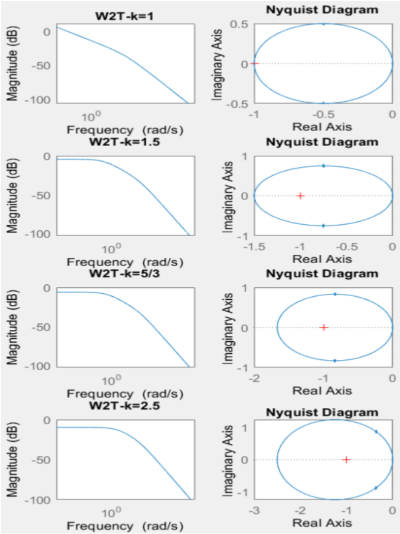
Si ottiene che il guadagno maggiore si ottiene per $\omega = 0$:

$$\|W_2 T\|_\infty = |W_2 T|_{\omega=0} = \frac{2k}{10(k-1)} = \frac{k}{5k-5}$$

Per avere stabilità robusta dobbiamo soddisfatte:

$$\frac{k}{5(k-1)} < \frac{1}{2} \rightarrow k > \frac{5}{3}$$

Inoltre, per $k = 1$, il sistema risulta instabile poiché il diagramma di Nyquist passa per il punto $-1 + 0j$. Con l'aumentare di k aumenta la distanza dal punto $-1+0j$ e per $k > \frac{5}{3}$ si soddisfano le specifiche di robustezza.



Stabilità Robusta e Prestazioni Robuste

Per garantire prestazioni robuste di livello α e tollerare incertezze di livello $\beta = 2$, devono essere soddisfatte:

$$\|W_2 T\|_\infty < \frac{1}{2} \quad \wedge \left\|W_1 \tilde{S}\right\|_\infty = \left\|\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T}\right\| < \alpha \quad \forall \Delta : \|\Delta\|_\infty \leq 2$$

$$\max_{|\Delta| \leq 2} \left|\frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T}\right| = \frac{|W_1 S|}{1 - 2|W_2 T|} < \alpha \Rightarrow \alpha_{\text{min}} = \max_\omega \frac{|W_1 S|}{1 - 2|W_2 T|} = \left\|\frac{|W_1 S|}{1 - 2|W_2 T|}\right\|_\infty$$

$$W_1 S = \frac{s - 1}{s^2 + ks + k - 1} \quad \text{massimo in } \omega = 0$$

$$|W_1 S(0)| = \frac{1}{k - 1} \Rightarrow \alpha_{\text{min}} = \frac{5}{3k - 5} \rightarrow k > \frac{5}{3}$$

Stabilità Robusta e Prestazioni Robuste

Ne deriva quindi che:

- il più grande valore di k è il più piccolo valore di α raggiungibile;
- Con l'aumentare di k si ha che $\|W_2 T\|_\infty$ e $\|W_1 S\|_\infty$ diventano sempre più piccoli;
- Il diagramma polare di L per $k > \frac{5}{3}$ si allontana sempre di più dal punto $-1 + 0j$.