Regolatore Lineare-Quadratico (LQR) ed Equazione Differenziale di Riccati

a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Nelle lezioni precedenti

- Abbiamo visto che per risolvere un problema di controllo ottimo per sistemi non lineari a tempo continuo è necessario determinare la soluzione di un'**equazione alle derivate parziali**
- L'equazione di HJB fornisce condizioni **necessarie e sufficienti** di ottimalità

Problema del Regolatore Lineare-Quadratico (LQR)

Consideriamo un problema di controllo ottimo su orizzonte finito descritto da un **sistema lineare** e indice di **costo quadratico**[1]

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t)) dt + \frac{1}{2} x(T)^\top M x(T) \right\}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \qquad x(0) = x_0$$

con $Q = Q^\top \geq 0$, $M = M^\top \geq 0$ e $R = R^\top > 0$
L'equazione di HJB scritta per il problema di controllo ottimo LQ diventa

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V^\star}{\partial t}(x,t) & = \min\limits_u \left\{ \dfrac{1}{2} x^\top Q x + \dfrac{1}{2} u^\top R u + \dfrac{\partial V^\star}{\partial x}(x,t)(Ax + Bu) \right\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T] \\ V^\star(x, T) & = \dfrac{1}{2} x^\top M x, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

[1] Dal momento che il sistema è *stazionario* possiamo considerare $t_0 = 0$ senza perdita di generalità.

Abbiamo visto che il primo *passo* per risolvere l'equazione consiste nel minimizzare il termine di destra rispetto a u (in funzione di x e $\partial V^\star / \partial x$)

$\Rightarrow$ Dal momento che il termine di destra di HJB è una funzione **strettamente convessa** in u (perchè $R > 0$), possiamo semplicemente fare la derivata rispetto a u e imporla pari a zero

$$u^\top R + \frac{\partial V^\star}{\partial x}(x,t) B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad u^\star = -R^{-1} B^\top \left(\frac{\partial V^\star}{\partial x}(x,t) \right)^\top$$

Tuttavia ancora non conosciamo la *struttura* della Funzione Valore $V^\star(x,t)$!

Dal momento che - quantomeno al tempo T - la funzione $V^\star$ deve essere quadratica in x per soddisfare la condizione al contorno

$$V^\star(x, T) = \frac{1}{2}x^\top Mx, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

proviamo ad **ipotizzare** una forma **quadratica** per la funzione $V^\star$, ovvero

$$V^\star = \frac{1}{2}x^\top P(t)x$$

con $P(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $P(t) = P(t)^\top \geq 0$, $t \in [0, T]$, **da determinare**

Per sostituire la funzione $V^\star$ nell'equazione di HJB, calcoliamo le sue derivate parziali

$$\frac{\partial V^\star}{\partial t} = \frac{1}{2}x^\top \dot{P}(t)x$$

$$\frac{\partial V^\star}{\partial x} = x^\top P(t) \qquad \Rightarrow \qquad u^\star = -R^{-1}B^\top P(t)x \qquad (☺ \text{ lineare, } ☹ \text{ non-stazionario})$$

Sostituendo in HJB le derivate parziali di $V^\star$ e il controllo $u^\star$, otteniamo

$$-\frac{1}{2}x^\top \dot{P}x = \frac{1}{2}x^\top Qx + x^\top P(t)Ax - \frac{1}{2}x^\top P(t)BR^{-1}B^\top P(t)x$$

Dal momento che l'equazione deve valere per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $P(t)$ deve essere tale da soddisfare la seguente **equazione alle derivate ordinarie**

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^\top P(t) - P(t)BR^{-1}B^\top P(t) + Q, \qquad P(T) = M$$

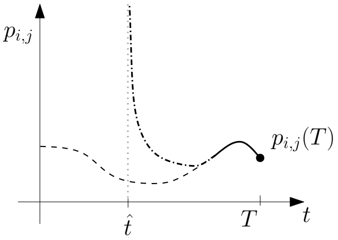
detta Equazione Differenziale di Riccati (DRE)

Commenti:

- Equazione alle derivate ordinarie da *integrare all'indietro* a partire dalla condizione terminale $P(T) = M$
- Equazione quadratica in $P(t)$!
- Ci chiediamo sotto quali condizioni possiamo aspettarci di trovare una soluzione...

Esistenza Locale

Sappiamo che la soluzione $P(t)$ esiste per tempi *sufficientemente* vicini a T, integrando all'indietro (esistenza e unicità locale in t)



Esistenza Globale in $[0, T]$

Supponiamo che $\frac{1}{2}x^\top P(t)x$ sia la funzione valore, allora la soluzione dell'Equazione Differenziale di Riccati esiste per ogni t

dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un istante $\hat{t} < T$ tale che $P(t)$ esiste sull'intervallo aperto $(\hat{t}, T]$ ma un suo elemento $p_{i,j}(t)$ diventa *illimitato* per t che converge a $\hat{t}$ *da destra* (ovvero per valori $t > \hat{t}$)

Distinguiamo due casi:

1) l'elemento $p_{i,j}$ è **fuori dalla diagonale** $(i \neq j)$

Dal momento che $P(t)$ è semi-definita positiva tutti i suoi minori principali sono maggiori o uguali a zero

Consideriamo il minore di ordine 2 ottenuto scegliendo proprio le righe e colonne nell'insieme $\{i, j\}$[2]

$$\det \begin{bmatrix} p_{i,i}(t) & p_{i,j}(t) \\ p_{i,j}(t) & p_{j,j}(t) \end{bmatrix} = p_{i,i}(t)p_{j,j}(t) - p_{i,j}(t)^2$$

ottenendo una contraddizione visto che il minore diventa negativo per t che tende a $\hat{t}$ da destra (ovvero per valori $t > \hat{t}$), perchè $p_{i,j}$ diventa illimitato mentre $p_{i,i}$ e $p_{j,j}$ restano limitati

[2] Ricordiamo che la matrice $P(t)$ è simmetrica per ogni t, quindi $p_{i,j} = p_{j,i}$

2) l'elemento $p_{i,j}$ **appartiene alla diagonale** ($i = j \Rightarrow p_{i,i}(t)$ diventa illimitato)

Consideriamo l'i-esimo elemento della *base canonica* di $\mathbb{R}^n$ ovvero

$$\eta_i = [0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-esimo}, 0, \dots, 0]$$

Il costo ottimo da η_i al tempo t dunque dovrebbe essere

$$V^\star(\eta_i, t) = \frac{1}{2}\eta_i^\top P(t)\eta_i = \frac{1}{2}p_{i,i}(t) \ \rightarrow \infty, \quad \text{per } t \rightarrow \hat{t}$$

Ma il costo ottimo non può essere maggiore del costo, ad esempio, di $u = 0$

$\Rightarrow$ con $u = 0$, $\dot{x} = Ax \rightarrow x(\tau) = e^{A(\tau - t)}\eta_i$ e quindi il costo diventa

$$J(0) = \frac{1}{2}\int_t^T \eta_i^\top e^{A^\top(\tau-t)} Q e^{A(\tau-t)} \eta_i d\tau + \frac{1}{2}\eta_i^\top e^{A^\top(T-t)} M e^{A(T-t)}\eta_i \ < \infty$$

per ogni t, visto che si tratta di integrale di funzione continua su intervallo limitato

□

Esempio di DRE

Consideriamo il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt$$
$$\dot{x}(t) = u(t),$$

Si tratta di un problema LQ con $A = 0$, $B = 1$, $Q = 1$, $R = 1$ e $M = 0$

L'equazione differenziale di Riccati diventa (in questo caso $P(t)$ è uno scalare!)

$$-\dot{P}(t) = 1 - P(t)^2, \quad P(T) = 0$$

Procedendo per **separazione delle variabili**

$$\frac{dP}{dt} = P^2 - 1 \quad \Rightarrow \int_t^T \left(\frac{1}{P^2-1}\right) dP = \int_t^T dt \quad \Rightarrow \quad -\mathrm{atanh}(P)|_t^T = T - t$$

Ovvero

$$\underbrace{-\mathrm{atanh}(P(T))}_{=0} + \mathrm{atanh}(P(t)) = T - t \quad \Rightarrow \quad P(t) = \tanh(T-t) = \frac{e^{2(T-t)} - 1}{1 + e^{2(T-t)}}$$

Esempio di DRE

Consideriamo il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u \frac{1}{2}\int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt$$

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

Si tratta di un problema LQ con $A = 0$, $B = 1$, $Q = 1$, $R = 1$ e $M = 0$

L'equazione differenziale di Riccati diventa (in questo caso $P(t)$ è uno scalare!)

$$-\dot{P}(t) = 1 - P(t)^2, \quad P(T) = 0$$

Il **controllo ottimo** dunque è

$$u^\star(x,t) = -R^{-1}B^\top P(t)x = -\frac{e^{2(T-t)} - 1}{1 + e^{2(T-t)}}x$$

- L'Equazione (matriciale) Differenziale di Riccati consiste di[3] $\dfrac{n(n+1)}{2}$ equazioni differenziali ordinarie non lineari (quadratiche)
- Cerchiamo di riscrivere le equazioni in una forma diversa che permetta di avere più equazioni (infatti *raddoppiano*) ma che siano **lineari**

Sistema Hamiltoniano

La soluzione dell'Equazione Differenziale di Riccati può essere ottenuta come $P(t) = Y(t)X(t)^{-1}$, con $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ soluzioni di

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

con condizioni al contorno

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}$$

◇

[3] Ricordiamo che la matrice $P(t)$ è simmetrica, dunque le equazioni sopra e sotto diagonale coincidono

dimostrazione. Per iniziare notiamo che

- $\dfrac{d}{dt}(YX^{-1}) = Y\dfrac{dX^{-1}}{dt} + \dfrac{dY}{dt}X^{-1}$
- derivando la relazione $X(t)X(t)^{-1} = I$ otteniamo

$$X(t)\frac{dX(t)^{-1}}{dt} + \frac{dX(t)}{dt}X(t)^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dX(t)^{-1}}{dt} = -X(t)^{-1}\frac{dX(t)}{dt}X(t)^{-1}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\underbrace{YX^{-1}}_{P}) &= -YX^{-1}\dot{X}X^{-1} + \dot{Y}X^{-1}\\ &= -\underbrace{YX^{-1}}_{P}A + \underbrace{YX^{-1}}_{P}BR^{-1}B^{T}\underbrace{YX^{-1}}_{P} - Q - A^{\top}\underbrace{YX^{-1}}_{P}\end{aligned}$$

Inoltre

$$P(T) = Y(T)X(T)^{-1} = M$$

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo Lineare Quadratico

Prossimi passi:

- Definiamo un approccio che permetta il calcolo della soluzione di DRE esclusivamente sulla base del calcolo di autovalore e autovettori di una specifica matrice
- Cerchiamo di caratterizzare la soluzione ottima di un problema LQR nel caso in cui $T = \infty$
- Studiamo condizioni che garantiscono la stabilità asintotica dell'equilibrio in zero per il sistema ad anello chiuso con il controllo ottimo