CONTROLLO NONLINEARE PER SISTEMI MIMO

come prima cosa dobbiamo cercare di estendere il concetto di grado relativo.

⇒ consideriamo quindi le equazioni

$$(1)\quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x)u_i \\ y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases}$$

grado relativo vettoriale: il sistema (1) ha grado relativo $\{r_1, \dots, r_m\}$ in un punto $x_0 \in U$ se

i) $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$, per ogni $1 \le j \le m$, $k < r_i - 1$ e ogni $1 \le i \le m$ per ogni x in un intorno di x^0

ii) la matrice $m \times m$ (matrice di "disaccoppiamento").

$$A(x) = \begin{pmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{pmatrix}$$

è nonsingolare per $x = x_0$

$$A = \begin{pmatrix} dL_f^{r_1-1} h_1 \\ \vdots \\ dL_f^{r_m-1} h_m \end{pmatrix} \cdot (g_1 \cdots g_m) \; *$$

Interpretazione: ogni valore r_i è associato ad un'uscita h_i, e fornisce il numero di derivate per far comparire la prima dipendenza da un ingresso (⇒ ∃ un ingresso j tale che il sistema SISO da u_j a h_i ha grado relativo r_i, e per tutte le altre scelte di u il grado relativo sarebbe $> r_i$).

la condizione ii) suggerisce intuitivamente che tutti gli ingressi sono "selezionati" da almeno una uscita ⇒ (non singolarità di $A(x_0)$).

⇒ consente inoltre di ottenere facilmente forme normali MIMO.

Lemma 5.1.1: supponiamo che il sistema abbia grado relativo vettoriale $\{r_1, \dots, r_m\}$ a x^0, allora i vettori riga

$$dh_1(x_0),\ dL_f h_1(x^0),\ \dots\ dL_f^{r_1-1} h_1(x^0)$$
$$\vdots$$
$$dh_m(x_0),\ \dots\ \dots\ dL_f^{r_m-1} h_m(x^0)$$

sono linearmente indipendenti

* notiamo che come conseguenza i vettori $(g_1(x_0) \dots g_m(x^0))$ devono essere linearmente indipendenti.

Proposizione 5.1.2

Supponiamo che il sistema abbia grado relativo vettoriale $\{r_1, .. r_m\}$ a x^0. Allora

$$r_1 + .. + r_m \leq n.$$

Poniamo allora per $1 \leq i \leq m$ (ogni uscita)

$$\phi_1^i(x) = h_i(x)$$
$$\phi_2^i(x) = L_f h_i(x)$$
$$\vdots$$
$$\phi_{r_i}^i(x) = L_f^{r_i - 1} h_i(x)$$

se $\underbrace{r_1 + .. + r_m}_{r} < n$, è sempre possibile determinare funzioni $\phi_{r+1}(x) .. \phi_n(x)$ tali che lo Jacobiano di $\Phi(x) = (\phi_1^1(x), .., \phi_{r_1}^1(x), \phi_1^2(x), .., \phi_{r_m}^m(x), \underbrace{\phi_{r+1}(x), .. \phi_n(x)}_{\text{aggiunta}})$ è non singolare a x^0.

Inoltre se la distribuzione $G = \text{span}\{g_1, .., g_m\}$ è involutiva* vicino a x^0, è sempre possibile scegliere le funzioni $\phi_{r+1}(x), .., \phi_n(x)$ tali che

$$L_{g_j}\phi_i(x) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad r+1 \leq i \leq n$$, per ogni x intorno a x^0. ∎

* questa condizione è banalmente soddisfatta nel caso SISO ⇒ c'è un solo g_i! (sempre involutiva).

Nota: il ragionamento può essere esteso al caso "non-quadrato" a patto che $A(x_0)$ abbia rango riga pieno ⇒ più ingressi che uscite!

Vediamo come diventa il sistema localmente nelle nuove coordinate:

→ definiamo $\quad \xi^i = \begin{pmatrix} \phi_1^i(x) \\ \vdots \\ \phi_{r_i}^i(x) \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^{r_m} \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{pmatrix}$

e $\quad a_{ij}(\xi, \eta) = L_{g_j} L_f^{r_i - 1} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta))$

$\quad b_i(\xi, \eta) = L_f^{r_i} h_i(\Phi^{-1}(\xi, \eta))$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i - 1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \underbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j}_{\text{riga i-esima di } A(x) \text{ per } u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}} \\ y_i = \xi_1^i \end{cases}$$

$1 \leq i \leq m$
↓
m catene di integratori (una per ogni uscita).

la dinamica rimanente non ha "struttura":

$$\dot{\eta} = q(\xi,\eta) + \underbrace{p(\xi,\eta)u}_{=0 \text{ se } \{g_1,\dots g_m\} \text{ involutiva.}}$$

Consideriamo ora l'estensione multivariabile del problema dell'output zeroing (e quindi di "dinamica zero").

⇒ imponendo che tutte le "ultime" derivate di ciascuna catena siano nulle, otteniamo

$$0 = y_i^{(r_i)}(t) = b_i(0,\eta(t)) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(0,\eta(t))u_j(t)$$

che, in forma vettoriale, diventa

$$0 = b(0,\eta(t)) + A(0,\eta(t))u(t)$$

matrice A (nelle nuove coordinate), non singolare localmente, per $\eta(t)$ piccolo

$$\Rightarrow u^*(t) = -(A(0,\eta(t)))^{-1} b(0,\eta(t)) \quad (u^* \text{ è unico})$$

dunque la dinamica zero è descritta da

$$\dot{\eta} = q_0(0,\eta), \qquad q_0(\xi,\eta) = q(\xi,\eta) - p(\xi,\eta)A(\xi,\eta)^{-1}b(\xi,\eta).$$

• Problema della linearizzazione esatta via Feedback

chiaramente se il sistema ha grado relativo $r_1 + r_2 + \dots + r_m = n$

⇒ risolviamo il problema selezionando

legge di controllo statica $\Leftarrow u = A^{-1}(\xi)[-b(\xi) + v] \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i} = v_i \end{cases} \quad 1 \le i \le m$$

lineare e controllabile.

[Supponendo quindi che $g(x^0)$ abbia rango m, il problema ha soluzione $\Leftrightarrow \exists\ h_1,\dots h_m$ tale che il sistema abbia grado relativo vettoriale $\{r_1,\dots,r_m\}$ a x^0, con $r_1+\dots+r_m = n$ ⊥ ⇒ costruzione molto complicata!

Nel caso in cui un sistema non abbia grado relativo vettoriale perché la matrice $A(x^0)$ è singolare possiamo sempre ottenere grado relativo attraverso una legge di controllo dinamica:

$$\begin{cases} u = \alpha(x,\xi) + \beta(x,\xi)v \\ \dot{\xi} = \gamma(x,\xi) + \delta(x,\xi)v \end{cases}$$

⇒ consideriamo un esempio per capire "intuitivamente" l'idea.

Esempio 5.4.1

consideriamo un sistema con $m=2$, $n=4$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_4 \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1(x) = x_1$$
$$h_2(x) = x_2$$

"compare" u_1

partiamo dalla prima uscita, $\dot{y}_1 = \overbrace{L_f h_1(x)}^{=0} + \overbrace{L_{g_1} h_1(x)}^{=1} u_1 + \underbrace{L_{g_2} h_1(x)}_{=0} u_2$

$r_1 = 1$, e prima riga di $A(x) = (1 \ \ 0)$

consideriamo ora y_2, $\dot{y}_2 = \underbrace{L_f h_2(x)}_{x_4} + \underbrace{L_{g_1} h_2(x)}_{x_3} u_1 + \overbrace{L_{g_2} h_2(x)}^{=0} u_2$

$\Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$, sicuramente rango $1 < 2 = m$, $\forall x$.

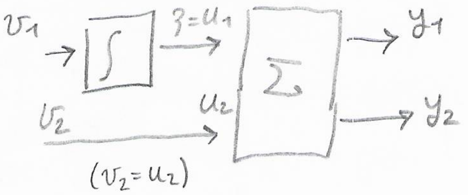
$\rightarrow$ grado relativo vettoriale non definito!

il problema è che u_1 appare per primo in tutte le derivate delle uscite

$\Rightarrow$ dovremmo provare a "ritardare" la comparsa di u_1

definiamo u_1 in realtà come un nuovo "stato" guidato da un nuovo "primo" input v_1, il modo più semplice è un integratore $\begin{cases} \dot{\xi} = v_1 \\ u_1 = \xi_1 \end{cases}$

$u_1 = \xi$



$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) + \tilde{g}_1(\tilde{x}) v_1 + \tilde{g}_2(\tilde{x}) v_2 \\ y = h(x) \end{cases}$

$\tilde{x} = (x, \xi) \Rightarrow \tilde{f} = \begin{pmatrix} \xi \\ x_4 + x_3 \xi \\ \lambda x_3 + x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

abbiamo che $L_{\tilde{g}} h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$L_{\tilde{g}} L_{\tilde{f}} h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_3 & 1 \end{pmatrix}$ non-singolare per ogni x

$\Rightarrow$ il sistema ha grado relativo $\{2,2\}$.

▲

vediamo ora una procedura che ci permette di capire quanti integratori aggiungere e "dove". (su quale canale di ingresso).

Supponiamo che rango $A(x)$ sia costante in un intorno di x°, ma minore di m (supponiamo che il rango sia $p-1$ e le prime $p-1$ righe sono linearmente indipendenti)

$\hookrightarrow$ potendo anche ri-arrangiarle allora esistono funzioni smooth $c_1(x), \dots c_{p-1}(x)$ tali che

$$a_p(x) = \sum_{i=1}^{p-1} c_i(x)\, a_i(x)$$

e inoltre esistono due interi i_0, j_0, tali che $c_{i_0}(x)$ non è identicamente nulla e

$$a_{i_0 j_0}(x^0) = L_{g_{j_0}} L_f^{r_{i_0}-1} h_{i_0}(x^0) \neq 0$$

definiamo il feedback dinamico

$$\begin{cases} u_j = v_j \quad \text{per } j \neq j_0 \quad \text{(non cambia nulla)} \\ u_{j_0} = \dfrac{1}{a_{i_0 j_0}(x)} \Big(p(x) + q(x)\, \xi - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq j_0}}^{m} a_{i_0 j}(x) v_j \Big) \\ \dot{\xi} = v_{j_0} \end{cases}$$

arbitrarie con $p(x^0) = 0$ e $q(x^0) = 1$

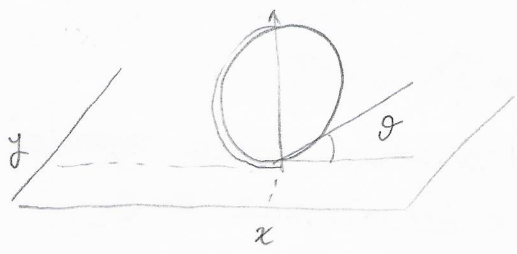
consideriamo il sistema esteso a ciclo chiuso e iteriamo...

ROBOT MOBILE CAR-LIKE

come prima cosa, deriviamo il modello cinematico: facciamo l'ipotesi di "puro rotolamento", senza slittamento, tra ruota e terreno.

consideriamo prima una singola ruota, che rotola sul terreno mantenendosi verticale (modello dell'uniciclo).

$\Rightarrow$ il suo stato può essere descritto da 3 coordinate generalizzate: x, y e ϑ



le velocità generalizzate $\dot{q}$ non sono indipendenti ma devo essere tali che

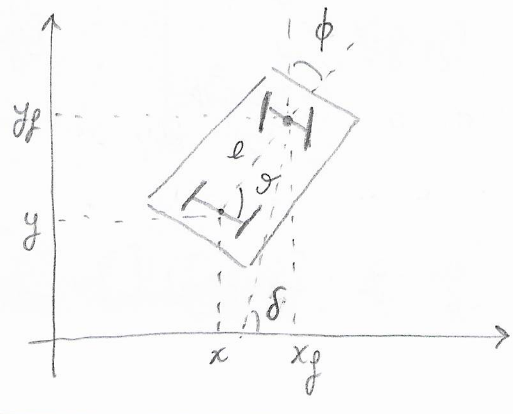
$$[\sin\vartheta \;\; -\cos\vartheta \;\; 0]\, \dot{q} = [\sin\vartheta \;\; -\cos\vartheta \;\; 0] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ velocità nulla nella direzione perpendicolare a ϑ (zero velocità laterale) (sistema non-olonomo, $C(q)\dot{q} = 0$).

dunque tutte le possibili velocità devono stare nel nullo di $[\sin\vartheta \;\; -\cos\vartheta \;\; 0]$

ovvero
$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2$$

consideriamo ora un robot "car-like":



il sistema è sottoposto a vincoli non-olonomi, uno per ciascuna ruota

$$\begin{cases} \dot{x}_f \sin(\theta+\phi) - \dot{y}_f \cos(\theta+\phi) = 0 \\ \dot{x} \sin(\theta) - \dot{y} \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

e inoltre abbiamo dei vincoli di corpo rigido $x_f = x + \ell\cos\theta$, $y_f = y + \ell\sin\theta$

$\Rightarrow$ il primo vincolo diventa

$$(\dot{x} - \ell\sin\theta\cdot\dot{\theta})\sin(\theta+\phi) - (\dot{y} + \ell\cos\theta\cdot\dot{\theta})\cos(\theta+\phi) =$$

$$= \dot{x}\sin(\theta+\phi) - \dot{y}\cos(\theta+\phi) - \ell\dot{\theta}\Big(\sin(\theta)\underbrace{\sin(\theta+\phi)}_{\substack{\sin\theta\cos\phi\, + \\ \cos\theta\sin\phi}} + \cos(\theta)\overbrace{\cos(\theta+\phi)}^{\cos(\theta)\cos(\phi) - \sin\theta\sin\phi}\Big) = 0$$

$$= (\sin\theta)^2\cos\phi + (\cos\theta)^2\cos\phi = \cos(\phi)$$

$\Rightarrow$ il vincolo diventa dunque

$$C(q) = \begin{bmatrix} \sin(\theta+\phi) & -\cos(\theta+\phi) & -\ell\cos\phi & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rango costante pari a 2.

front-wheel drive

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi/\ell \\ 0 \end{bmatrix} v_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2$$

$\boxed{\text{rear-wheel drive}}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \tan\phi/\ell \\ 0 \end{bmatrix}}_{g_1} v_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{g_2} v_2$$

singolarità per $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$
(tangente diventa infinito)
$\Rightarrow$ discontinuità in g_1

$\Rightarrow$ controllabilità:

$$[g_1, g_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\ell}\cos^2\phi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [g_1[g_1, g_2]] = \begin{bmatrix} -\sin\theta/\ell\cos^2\phi \\ \cos\theta/\ell\cos^2\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

rango $[g_1, g_2, [g_1, g_2], [g_1, [g_1, g_2]]] = 4$, lontano dalla singolarità.

consideriamo ora le uscite $y = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (posizioni)

cerchiamo di determinare il grado relativo

$$L_{g_1} h_1 = \cos\vartheta \,, \quad L_{g_2} h_1 = 0$$
$$L_{g_1} h_2 = \sin\vartheta \,, \quad L_{g_2} h_2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{non definito!}$$

consideriamo la procedura dinamica:

$a_1 = (\cos\vartheta, 0)$ $\quad p = 2$ (rango, pari ad 1)

$a_2 = (\sin\vartheta, 0)$

c_1 tale che $a_2 = c_1 a_1$ ... oppure più semplicemente aggiungiamo un doppio integratore

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u_1 \\ v_1 = z_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos\vartheta \, z_1 \\ \dot{y} = \sin\vartheta \, z_1 \\ \dot{\vartheta} = \frac{1}{\ell} \tan\phi \, z_1 \\ \dot{\phi} = v_2 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = v_1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{f} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \, z_1 \\ \sin\vartheta \, z_1 \\ \frac{1}{\ell} \tan\phi \, z_1 \\ 0 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{\tilde{g}_1} h_1 = 0 \,, \quad L_{\tilde{g}_2} h_1 = 0 \,, \quad L_{\tilde{g}_1} h_2 = 0 \,, \quad L_{\tilde{g}_2} h_2 = 0$$

per uscita y_1:

$$L_{\tilde{g}_1} L_{\tilde{f}} h_1 = L_{\tilde{g}_1} (\cos\vartheta \cdot z_1) = (0 \quad 0 \quad -\sin\vartheta \cdot z_1 \quad 0 \quad \cos\vartheta \quad 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$L_{\tilde{g}_2} L_{\tilde{f}} h_1 =$$