Teoria dei Giochi – Prova del 9 Settembre 2011

Cognome, Nome, Numero di Matricola, email: ______________________________

Esercizio 1 Considera il seguente gioco non cooperativo. I giocatori sono n, con n *dispari*. Ciascun giocatore sceglie un numero tra 1 e 2 e tutti i giocatori annunciano simultaneamente il numero scelto. Il payoff del gioco è il seguente:

- se tutti i giocatori scelgono lo stesso numero, il payoff è zero per ciascun giocatore;
- se $n-1$ giocatori scelgono lo stesso numero e un giocatore sceglie l'altro numero, quest'ultimo dà un euro a ciascuno degli $n-1$ giocatori;
- se $n_1 \neq 1$ giocatori scelgono un numero e $n_2 \neq 1$ giocatori scelgono l'altro numero (naturalmente deve valere $n_1 + n_2 = n$) ciascun giocatore del gruppo più numeroso (il primo se $n_1 > n_2$, il secondo altrimenti) dà un euro ai giocatori del gruppo meno numeroso.

Dire quali sono, se esistono, gli equilibri di Nash del gioco, giustificando la risposta.

Soluzione Enumeriamo 4 possibili casi: i) i giocatori scelgono lo stesso numero; ii) $n-1$ giocatori scelgono lo stesso numero e un giocatore sceglie l'altro numero; iii) $n_1 \neq 2$ giocatori scelgono un numero e $(n_1 - 1)$ giocatori scelgono l'altro numero (in questo caso, $n_1 = \frac{n+1}{2}$); (iv) n_1 giocatori scelgono un numero e n_2 giocatori scelgono l'altro numero, con $1 < n_2 < n_1 - 1$.

i) Questo caso restituisce un equilibrio di Nash: infatti, il payoff di ogni giocatore è 0 e se un giocatore variasse unilateralmente la sua scelta dovrebbe dare un euro a tutti gli altri giocatori; ii) questo caso non restituisce alcun equilibrio di Nash: infatti, il giocatore che ha scelto il numero diverso da tutti paga n-1 euro, mentre variando unilateralmente la sua scelta il suo payoff sarebbe 0; iii) questo caso restituisce tutti equilibri di Nash: infatti: ogni giocatore che appartiene al gruppo meno numeroso ha un payoff (in forma di guadagno) positivo mentre variando unilateralmente la sua scelta avrebbe payoff negativo; un giocatore i che appartiene al gruppo più numeroso ha un payoff (in forma di guadagno) pari a $-n_1$ e variando unilateralmente questa scelta il suo payoff sarebbe immutato (infatti il gruppo a cui apparteneva il giocatore i avrebbe adesso n_1 elementi e sarebbe il meno numeroso, quindi i, avrebbe ancora un payoff pari a $-n_1$); iv) questo caso non restituisce alcun equilibrio di Nash: infatti ogni giocatore che appartiene al gruppo più numeroso ha un payoff (in forma di guadagno) negativo mentre variando unilateralmente la sua scelta il suo payoff sarebbe positivo.

Esercizio 2 Si consideri un gioco non cooperativo a due giocatori, in cui ciascun giocatore controlla un'unica variabile, che indichiamo, rispettivamente, con x_1 per il primo giocatore e x_2 per il secondo. L'insieme ammissibile del primo giocatore è $X_1 = \{x_1 : x_1 \geq 4\}$, quello del secondo giocatore è $X_2 = \{x_2 : -2 \leq x_2 \leq 4\}$. I payoff (in forma di costo) dei due giocatori sono rispettivamente $C_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2 - 5) + 7$ e $C_2(x_1, x_2) = (4 - x_2)(3 - x_1)$.

2.1 Si può affermare *a priori*, ovvero senza calcolare le funzioni best response, l'esistenza di un equilibrio di Nash? (Giustifica brevemente la risposta)

2.2 Individuare, per ciascun giocatore, la funzione best response. Individuare quindi gli equilibri di Nash, se essi esistono.

Soluzione 2.1 No, non possiamo affermare l'esistenza a priori di almeno un equilibrio di Nash poiché l'insieme ammissibile del primo giocatore non è compatto.

2.2 Per una data strategia $x_2 \in X_2$, per individuare la best response il primo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min \frac{1}{2}x_1^2 - x_1(x_2^2 - 5) + 7$$

$$x_1 \geq 4$$

Analogamente, per una data strategia $x_1 \in X_1$, per individuare la best response il secondo giocatore deve risolvere il seguente problema:

$$\min\ (4 - x_2)(3 - x_1)$$

$$-2 \leq x_2 \leq 4$$

Per determinare le funzioni best response e gli equilibri di Nash dobbiamo risolvere il sotto-problema di ciascun giocatore scritto precedentemente. In questo caso quindi le best response function sono date da

$$b_1(x_2) = \begin{cases} 4 & \text{se } -2 \leq x_2 \leq 3 \\ x_2^2 - 5 & \text{se } 3 \leq x_2 \leq 4 \end{cases} \qquad b_2(x_1) = \left\{ \ -2 \quad \text{se } x_1 \geq 4 \right.$$

Si può verificare graficamente o analiticamente che l'unico punto di intersezione delle best reponse function, quindi l'unico equilibrio di Nash è $(x_1, x_2)^N = (4, -2)$.

Esercizio 3 Considera l'*estensione in strategia mista* del seguente gioco. Tu puoi scegliere un numero nell'insieme $\{1, 2, 3\}$, mentre il tuo avversario può scegliere un numero nell'insieme $\{2, 4, 6, 7\}$ (è possibile che entrambi scegliate 2). Il payoff del gioco è il seguente:

- se giochi 1, e il tuo avversario gioca 2, 4, 6 perdi un euro
- se giochi 1, e il tuo avversario gioca 7 vinci un euro
- se giochi 2, e il tuo avversario gioca 2, 4, 6 vinci un euro
- se giochi 2, e il tuo avversario gioca 7 perdi un euro
- se giochi 3, e il tuo avversario gioca 2, 4, 6 perdi un euro
- se giochi 3, e il tuo avversario gioca 7 vinci un euro

Formula i problemi di programmazione lineare che tu e il tuo avversario dovete risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risovere tali programmi).

Considera quindi le seguenti strategie per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{3}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$
- $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = \frac{1}{2}$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^7 = \frac{1}{2}$ e $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j \in \{2, 4, 6\}$

- , $\xi_2^j = \frac{1}{4}, \forall j \in \{2,4,6,7\}$

(indichiamo con ξ_h^k la frazione di volte che il giocatore h sceglie il numero k).

3.1 Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustifica brevemente la risposta).

3.2 Indica se qualcuna di queste strategie è una strategia conservativa. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

3.3 Indica se qualcuna di queste strategie è un equilibrio di Nash. (Se non è possibile rispondere alla domanda, spiega perché non è possibile).

Soluzione: La matrice C dei payoff in forma di costo per il primo giocatore (cioè per te) è la seguente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & +1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se indichiamo con c_{ij} l'elemento alla riga i e la colonna j di tale matrice, il problema di programmazione lineare che devi risolvere per individuare la tua strategia conservativa è il seguente:

$$\min z$$

$$z \geq -\xi_1^1 + \xi_1^2 - \xi_1^3$$

$$z \geq \xi_1^1 - \xi_1^2 + \xi_1^3$$

$$\xi_1^i \geq 0 \;\; i \in \{1,2,3\}$$

$$\sum_{i \in \{1,2,3\}} \xi_1^i = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^i = \frac{1}{3}, \forall i \in \{1,2,3\}$ è $z = \frac{1}{3}$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{3}$ di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_1^1 = \xi_1^3 = \frac{1}{4}$ e $\xi_1^2 = \frac{1}{2}$ è $z = 0$. Quindi, se utilizzi questa strategia, paghi, nel caso peggiore, in media 0 euro per ogni round del gioco.

Il problema di programmazione lineare che deve risolvere il tuo avversario per individuare la sua strategia conservativa è il seguente:

$$\max w$$

$$w \leq \xi_2^2 + \xi_2^4 + \xi_2^6 - \xi_2^7$$

$$w \leq -\xi_2^2 - \xi_2^4 - \xi_2^6 + \xi_2^7$$

$$\xi_2^j \geq 0 \quad j \in \{2,4,6,7\}$$

$$\sum_{j \in \{2,4,6,7\}} \xi_2^j = 1$$

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^7 = \frac{1}{2}$ e $\xi_2^j = \frac{1}{6}, \forall j \in \{2,4,6\}$ è $w = 0$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media 0 di euro per ogni round del gioco.

- il valore ottimo di questo programma, in corrispondenza a $\xi_2^j = \frac{1}{4}, \forall j \in \{2,4,6,7\}$ è $w = -\frac{1}{2}$. Quindi, il secondo giocatore, se utilizza questa strategia, paga, nel caso peggiore, in media $\frac{1}{2}$ euro per ogni round del gioco.

Si osservi che i payoff resituiti dalla prima strategia per te e dalla seconda strategia per il tuo avversario sono uguali ed opposti. Tali strategie sono dunque conservative e naturalmente individuano un equilibrio di Nash.

Esercizio 4 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti insiemi ordinati rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna (sono quindi degli ordini totali):

- Uomo 1: $\{A,B,C,D\}$;
- Uomo 2: $\{B,D,C,A\}$;
- Uomo 3: $\{D,C,B,A\}$;
- Uomo 4: $\{A,D,C,B\}$.

- Donna A: $\{4,3,2,1\}$;
- Donna B: $\{1,3,4,2\}$;
- Donna C: $\{4,3,1,2\}$;
- Donna D: $\{2,3,1,4\}$.

4.1 Il matching $M = \{(1,D),(2,B),(3,C),(4,A)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo è invece necessario giustificare la risposta).

4.2 Il matching $M = \{(1,A),(2,B),(3,D),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo è invece necessario giustificare la risposta).

4.3 Qual è il matching restituito dall'algoritmo di Gale-Shapley considerando che siano gli uomini a proporsi? (Dare una breve descrizione di ogni iterazione.)

4.4 Data una qualsiasi istanza dello Stable Marriage problem, l'algoritmo di Gale-Shapley restituisce sempre lo stesso matching sia che a proporsi siano gli uomini sia che lo facciano le donne? In caso di risposta negativa mostrare un'istanza come controesempio, altrimenti giustificare brevemente la risposta.

Soluzione:

4.1 In questo caso M non è stabile. Per esempio esso non è stabile rispetto la coalizione composta dall'uomo 1 e la donna B.

4.2 In questo caso M non è stabile. Per esempio esso non è stabile rispetto la coalizione composta dall'uomo 4 e la donna A.

4.3

- I iterazione: 1 e 4 si propongono ad A, 2 si propone a B e 3 si propone a D. A si promette a 4 e rifiuta 1 (che cancella A dalla sua graduatoria), B si promette a 2, D si promette a 3. L'uomo 1 rimane libero.

- II iterazione: 1 si propone a B. B lascia 2 (che cancella B dalla sua graduatoria) e si promette a 1. L'uomo 2 rimane libero.

- III iterazione: 2 si propone a D. D lascia 3 (che cancella D dalla sua graduatoria) e si promette a 2. L'uomo 3 rimane libero.

- IV iterazione: 3 si propone a C, che non avendo altre proposte si promette a 3. Nessun uomo è libero.

Quindi in 4 iterazioni otteniamo il matching stabile $M = \{(1,B),(2,D),(3,C),(4,A)\}$.

4.4 La risposta è no; si consideri , infatti, un' istanza in cui abbiamo 2 uomini e 2 donne. Siano i seguenti insiemi ordinati le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna (sono quindi degli ordini totali):

- Uomo 1: $\{A,B\}$;

- Uomo 2: $\{B,A\}$.

- Donna A: $\{2,1\}$;

- Donna B: $\{1,2\}$.

Se sono gli uomini a proporsi otteniamo il matching stabile rispetto alle coalizioni $M = \{(1,A),(2,B)\}$; se sono le donne a proporsi, invece, otteniamo il matching stabile rispetto alle coalzioni $M = \{(1,B),(2,A)\}$.