ESERCIZI MOBD

• TROVA CONVESSITA' f: $\rightarrow$ SEGNO DI $\nabla^2 f$

1- applico criterio N-O elimino n-k righe e colonne:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=1 \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=3$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=2$$

2- se un determinante ≤ 0 $\rightarrow$ NO CONVESSA

3- SE det $= 0$ $\rightarrow$ criterio M.P. elimino n-k righe e relative colonne

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} k=3$$

• TROVA SE DA x^* $\rightarrow$ d E' DI DISCESA

1- trova il gradiente di f $\rightarrow$ $\nabla f(x)$

$\nabla f \neq 0 \rightarrow$ 2- sostituisci x^* in $\nabla f(x)$

3- fai il prodotto $\nabla f(x^*)^T d < 0$

4- calcola α:

A. sostituisci x^* in $f(x)$

B. fai $x + \alpha d$ (dove x è quello trovato in A)

C. sostituisci $x+\alpha d$ in f $\rightarrow$ $f(x+\alpha d)$

5- se $\nabla f = 0$ allora calcola $\nabla^2 f$ e fai tutti i passi (2,4)

• TROVA PUNTO OTTIMO → ESEMPIO:

$$\begin{cases} \min \ x_1^3 - x_2 \\ 0 \le x_1 \le 2 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{cases}$$

1. studia convessità:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ge 0 \rightarrow f \text{ CONVESSA}$$

2. valuta il gradiente con condizioni ottimo:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \partial x_1 \ge 0 \\ \rightarrow \partial x_2 < 0 \end{matrix}$$

siccome:

$$\cdot \ \frac{\partial f(x^*)}{\partial x^*} = \begin{cases} > 0 & se \quad x_i^* = l_i \\ = 0 & se \quad l_i \le x_i^* \le u_i \\ < 0 & se \quad x_i^* = u_i \end{cases}$$

di conseguenza:

$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_2} = -1 \quad \forall x_2 \longrightarrow x_2^* = 3 = \text{upper-bound}$$

$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 > 0 \longrightarrow x_1^* = \begin{cases} l_1 = \text{lower-bound} \\ 3x_1^2 = 0 \quad \text{interno} \end{cases}$$

allora avremo:

$$l = 0 \longrightarrow x_1^* = 0 \qquad \text{quindi} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ OTTIMO GLOBALE}$$

$$\begin{cases} \min \ x_1^3 - x_2 \\ -2 \le x_1 \le 2 \\ 0 \le x_2 \le 3 \end{cases}$$

procedendo come prima arriviamo a:

$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x_1} = 3x_1^2 \ge 0 \begin{cases} x_1 = l_1 = -2 \quad \text{ovvero } \partial f/\partial x_1 = 12 \\ x_1 = 0 = l_2 \end{cases}$$

quindi due punti stazionari:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$ sostituisco in f e il minimo sarà quello che da f più piccola

• TROVA PUNTO OTTIMO → ESEMPIO:

$$\begin{cases} \min (x_1-1)^2+(x_2-1)^2 \\ x_1+x_2=1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

] S. SIMPLESSO UNITARIO (convesso compatto)

cosa possiamo dire sui punti:

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1. Trova gradiente e hessiana:

$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2(x_1-1) \\ 2(x_2-1) \end{bmatrix}$ e $\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} > 0$

se f è strettamente convessa (coerciva) → OK:

2. Sostituisci i punti:

$\nabla f(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[A]{x_1>0} \frac{df}{\partial x_1} \leq \frac{df}{\partial x_2} \rightarrow 0 \stackrel{!}{\leq} -2$ NO

$\nabla f(B) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[B]{x_2>0} \frac{\partial f}{\partial x_2} \leq \frac{\partial f}{\partial x_1} \rightarrow 0 \stackrel{!}{\leq} -2$ NO

$\nabla f(C) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[x_2>0]{x_1>0} \left.\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \leq \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \leq \frac{\partial f}{\partial x_1} \end{matrix}\right] \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{x_2} \rightarrow -1 = -1$ OK

C minimo globale.

Scansionato con CamScanner

• TROVA IPERPIANO OTTIMO

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, -1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, -1 \right), \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, -1 \right) \right\}$$

allora possiamo notare → INSIEME SEPARABILE:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

sappiamo che:

$$\hat{w}^T x + \hat{b} = 2x_1 + x_2 - 10$$

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \|\hat{w}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

1. possiamo sostituire i punti di A nell'iperpiano e trovare il più piccolo:

$$d\left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{|\hat{w}^T x + \hat{b}|}{\|\hat{w}\|} = \frac{|10+5-10|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

allora il minimo per A è:

$$\hat{x}_i = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \hat{d}_i = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

2. sostituisco i punti di B:

$$d\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{b} \end{pmatrix} \right) = \frac{|\hat{w}^T x + \hat{b}|}{\|\hat{w}\|} = \frac{|6+3-10|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

allora il minimo:

$$\hat{x}_j = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \hat{d}_j = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

3. ricordandoci che vale:

$$\rho(\hat{w}, \hat{b}) = \min\{\hat{d}_i, \hat{d}_j\} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

4. possiamo calcolarci un nuovo iperpiano:

$$\begin{cases} \alpha \hat{w}^T \hat{x}_i + \beta = 1 \\ \alpha \hat{w}^T \hat{x}_j + \beta = -1 \end{cases} \rightarrow \alpha \hat{w} = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$$

allora sostituendo i due di minimi:

$$\begin{cases} (2\alpha \quad \alpha) \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \beta = 1 \\ (2\alpha \quad \alpha) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10\alpha + 5\alpha + \beta = 1 \\ 6\alpha + 3\alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

quindi:

$$\begin{cases} 15\alpha + \beta = 1 \\ 9\alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow 6\alpha = 2 \rightarrow \alpha = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{OK}$$

mentre β sarà:

$$\beta = 1 - 15\alpha = 1 - 5 = -4$$

5. il NUOVO IPERPIANO sarà:

$$\begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -4 \end{pmatrix} \overset{\cdot 3}{\Rightarrow} 2x_1 + x_2 - 12 = 0$$

e il suo margine

$$\|\bar{w}\| = \sqrt{5}/3 \rightarrow \rho(\bar{w}, \bar{b}) = \frac{1}{\|\bar{w}\|}$$

- ESERCIZIO COMPLETO: esistenza, convessità, KKT

$$\begin{cases} \min \ (x_1-1)^3 - x_1 x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \longrightarrow -x_1^2 - x_2^2 \leq -1 \\ (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \longrightarrow -x_1 \leq 0 \end{cases}$$

i) esistenza soluzione:

- S è compatto (solo vincoli $\leq$)

↳ soluzione $\exists$ per Weierstrass

ii) convessità:

- calcolo per S:

$$\nabla g_1 = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} \ e \ \nabla^2 g_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \leq 0 \rightarrow \text{NO CONVESSO}$$

- calcolo per f:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 3(x_1-1)^2 - x_2^2 \\ -2x_2x_1 \end{bmatrix} \quad \nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 6(x_1-1) & -2x_2 \\ -2x_2 & -2x_1 \end{bmatrix}$$

allora presi ad esempio:

$$\begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \longrightarrow \nabla^2 f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \ \text{INDEFINITA}$$

iii) scrivere condizioni di ottimo:

- controllo se l'insieme è regolare
  - Slater violato poiché S è non convesso
  - vincoli uguaglianza lineari e di disuguaglianza concavi
  - LICQ: devo guardare ai vincoli di disuguaglianza attivi lungo la frontiera
    ↳ devo avere un solo vincolo attivo per LICQ

↳ controllo se i vincoli attivi sono:

LINEARMENTE INDIPENDENTI:
fai gradienti dei vincoli e incolonnali poi controllo rank.

siccome l'insieme risulta regolare:

- KKT diventa necessario e sufficiente

↳ • condizione di OTTIMO: KKT

$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) =$

$= (x_1-1)^3 - x_1 x_2^2 + \lambda_1(-x_1 - x_2^2 + 1) + \lambda_2((x_1-1)^2 + (x_2-2)^2 - 4) -$
$- \lambda_3 x_1$

- scriviamo l'annullamento ∇L:

$3(x_1-1)^2 - x_2^2 - 2\lambda_1 x_1 + 2\lambda_2(x_1-1) - \lambda_3 = 0$

$-2x_1x_2 - 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2(x_2-1) = 0$

- per la complementarità avremo:

$\lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

$\lambda_2((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 4) = 0$

$\lambda_3 x_1 = 0$

- per la non negatività:

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$

- per l'ammissibilità:

$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$

$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 4$

$x_1 \geq 0$

- infine sostituendo i punti avremo:
  - soddisfa KKT → CANDIDATO OTTIMO
  - non soddisfa → non so niente

Scansionato con CamScanner

• ESERCIZIO: IPERPIANO OTTIMO

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, -1 \right), \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, -1 \right), \dots \right.$$

$$\left. \dots, \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, -1 \right) \right\} \quad e \quad \begin{pmatrix} \overline{w} \\ \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -4 \end{pmatrix} = \text{IPERPIANO AMMISSIBILE}$$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

• Trovare iperpiano ammissibile vuol dire risolvere:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}\|w\|^2 \\ w^T x_i + b \geq 1 \quad \forall x_i \in A \\ w^T x_j + b \leq -1 \quad \forall x_j \in B \end{cases} \rightarrow \text{ovvero} \rightarrow \begin{cases} \min \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{2}w_2^2 \\ w_1 \cdot 5 + w_2 \cdot 5 + b \geq 1 \\ w_1 \cdot 7 + w_2 \cdot 4 + b \geq 1 \\ w_1 \cdot 5 + w_2 \cdot 7 + b \geq 1 \\ w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 2 + b \leq -1 \\ w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 4 + b \leq -1 \\ w_1 \cdot 3 + w_2 \cdot 3 + b \leq +1 \end{cases}$$

• Assegnando $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ allora possiamo scrivere:

1. LAGRANGIANA
2. CONDIZIONI DI KKT

• Prendendo poi le condizioni relative ai vincoli attivi, possiamo controllare se l'iperpiano ammissibile dato è OTTIMO

• ESERCIZIO: DUALE DI WOLFE

Dato:

$$\begin{cases} \min \frac{1}{2}(4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2) - 3x_1 - 2x_2 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \rightarrow x_1 - x_2 \le -2 \\ -3x_1 - 2x_2 \le 6 \end{cases}$$

vogliamo scrivere il duale di wolfe dove:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dove } \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \bar{\lambda} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

verificare poi se $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è soluzione del primale, e con quali moltiplicatori.

• scriviamo il duale di wolfe:

1. LAGRANGIANA:

$$L(x,\lambda) = \frac{1}{2}(4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_2^2) - 3x_1 - 2x_2 - \lambda_1 x_1 + \lambda_2(x_1 - x_2 + 2) + \lambda_3(-3x_1 - 2x_2 - 6)$$

2. SCRIVO DUALE DI WOLFE:

$$\begin{cases} \max L(x,\lambda) \\ 4x_1 + 4x_2 - 3 - \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - 2 - \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0 \end{cases}$$

• per vedere se $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ è SOLUZIONE:

1. scrivo KKT per il duale
2. sostituisco i ~~punti~~ moltiplicatori e il punto
3. se il punto e moltiplicatori soddisfano:
   OK

• ESEMPIO: DUALE VARIABILI SLACK, KERNEL

Dato:

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 4.231 \\ 4.750 \end{bmatrix}, 1 \right), \left(\begin{bmatrix} -1.535 \\ -0.624 \end{bmatrix}, 1 \right) \cdots \right\}$$

si suppongo di voler costruire una SVM per risolvere il sistema di classificazione utilizzando il KERNEL LINEARE.

• SCRIVI IL DUALE CHE DEVE RISOLVERE SVM:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{17} \lambda_i \lambda_j y_i y_j (x_i)^T x_j - \sum_{i=1}^{17} \lambda_i \\ \sum_{i=1}^{17} \lambda_i y_i = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = 0 \\ 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{(abbiamo } C=1) \end{cases}$$

• SAPENDO LA SOLUZIONE DEL DUALE:

$$\lambda^T = \begin{bmatrix} 0.422 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \end{bmatrix}$$

- INDIVIDUA I VETTORI DI SUPPORTO
- CALCOLA IPERPIANO OTTIMO
- DIRE QUALI ξ_i DETERMINABILI

possiamo calcolarci iperpiano ottimo:

$$w^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* y_i x_i = -0.422 \begin{pmatrix} 4.231 \\ 4.750 \end{pmatrix} + (1) \cdot 1 \cdot \begin{pmatrix} -1.535 \\ -0.624 \end{pmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{pmatrix} -0.216 \\ -3.468 \end{pmatrix}$$

per calcolare b^* devo scegliere $\lambda \in (0,1)$ in modo tale che risulti $\xi_i = 0$:

$$\lambda_1^* = 0.422 \rightarrow \xi_1^* = 0$$

$$\lambda_1^* \left(y \left(w^{*T} x_1 + b^* \right) - 1 \right) = 0 \rightarrow b^* = 16.387$$

allora l'IPERPIANO da inserire in SVM sarà:

$$y(x) = \operatorname{sgn}\left(-0.216 x_1 - 3.468 x_2 + 16.387\right)$$

per determinare ξ e i relativi vettori di supporto, scriviamo:

dalla complementarietà del primale:

$$\mu_i^* \xi_i^* = 0 \rightarrow (C - \lambda_i^*) \xi_i^* = 0$$

$$\lambda_i^* < C \rightarrow \xi_i^* = 0$$

quindi:

$\xi_1^* = \xi_n^* = \dots = 0 \longrightarrow$ relativi PUNTI BEN CLASSIFICATI (gli altri non so)

• TROVA α_{k+1} e VARIABILI SLACK

$$TS = \left\{ \left(\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, 1\right), \left(\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}, 1\right), \left(\begin{bmatrix}5\\7\end{bmatrix}, 1\right), \left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, -1\right), \left(\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}, -1\right), \left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, -1\right) \right\}$$

possiamo separare:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix} \right\} \quad e \quad B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} \right\}$$

possiamo quindi il primale come:

$$\begin{cases} \min \ \frac{1}{2}w_1^2 + \frac{1}{2}w_2^2 + C\xi_1 + \dots + C\xi_6 \\ w_1 \cdot 5 + w_2 \cdot 5 + b \geq 1 - \xi_1 & \rightarrow \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ w_1 \cdot 3 + w_2 \cdot 3 + b \leq -1 - \xi_6 & \rightarrow \alpha_6 \end{cases}$$

possiamo costruire Q come:

$$ij = x_i^T \cdot x_j \rightarrow 11: (5 \quad 5)\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} = 25 + 25 = 50$$

$$Q = \begin{bmatrix} 50 & 55 & \cdots \\ 55 & 65 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

da cui possiamo ricavarci gli autovalori,

$$\lambda = (0, \dots, 217.5983)$$

e quindi scrivere:

$$\begin{cases} \min \ \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\alpha_i\alpha_j - \sum_{i=1}^{6}\alpha_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 = 0 \\ 0 \leq \alpha_i \leq C = 1 \end{cases} \quad \text{DUALE}$$

allora dato un vettore α_k ammissibile: → di C in generale

$$\alpha_k = \left(\tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right)^T \rightarrow \text{prendo } \alpha_i < 1 \text{ ovvero:}$$

$$\begin{cases} \min \ \frac{1}{2}(\alpha_1 \ 1 \ 0 \ \alpha_4 \ 1 \ 0) \cdot Q \cdot \alpha_k - \alpha_1 - 1 - \alpha_4 - 1 \\ \alpha_1 + 1 + 0 - \alpha_4 - 1 - 0 = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_4 \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1 \\ 0 \leq \alpha_4 \leq 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo:
$$\begin{cases} \min \ 12.5\alpha_1^2 + 22\alpha_1 \\ \alpha_1 \geq 0 \\ \alpha_1 \leq 1 \end{cases}$$

utilizziamo le KKT:

$$\mathcal{L}(\alpha_1, \xi_1, \xi_2) = 12,5\alpha_1^2 + 22\alpha_1 - \xi_1\alpha_1 + \xi_2(\alpha_1 - 1)$$

quindi:

$$\begin{cases} 25\alpha_1 + 22 - \xi_1 + \xi_2 = 0 \longrightarrow \xi_1 = 22 \\ \xi_1\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0, \xi_1 \geq 0 \\ \xi_2(\alpha_1 - 1) = 0 \rightarrow \xi_2 = 0 \\ 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0 \end{cases}$$

di conseguenza:

$\alpha_1 = \alpha_4 = 0$ è ottimo e quindi la soluzione del sotto problema sarà:

$$\alpha_k = \left(\tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 0 \quad \tfrac{1}{2} \quad 1 \quad 0\right)^T \text{ e } \alpha_{k+1} = \left(0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\right)^T$$

• TROVA α OTTIMO E VETTORI DI SUPPORTO

$TS = \{\dots\}$ che può essere diviso $\begin{cases} A = \{\dots\} \\ B = \{\dots\} \end{cases}$

ed avremo:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} Q_{ij}\alpha_i\alpha_j - \sum_{i=1}^{6}\alpha_i \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6=0 \\ 0 \le \alpha_i \le C = 1 \end{cases}$$

dove abbiamo:

$\alpha = (\frac{1}{2} \ \ 1 \ \ 0 \ \ \frac{1}{2} \ \ 1 \ \ 0)^T$

$y = (1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ -1)^T$

$\nabla f(\alpha) = (46.5 \ \ 61 \ \ 49.5 \ \ -12 \ \ -15 \ \ -29.5)^T$

quindi possiamo scrivere:

$L(\alpha) = \{3, 6\}$

$U(\alpha) = \{2, 5\}$ dove: $\begin{cases} L^+ = \{3\}, \ L^- = \{6\} \\ U^+ = \{2\}, \ U^- = \{5\} \end{cases}$

$\alpha_1, \alpha_4 \in (0, 1)$

allora avremo:

$R(\alpha) = L^+ \cup U^- \cup \{i : 0 < \alpha_i < C\} = \{1, 3, 4, 5\}$

$S(\alpha) = L^- \cup U^+ \cup \{i : 0 < \alpha_i < C\} = \{1, 2, 4, 6\}$

siccome $R(\alpha)$ e $S(\alpha) \neq \emptyset$ allora deve valere:

$$\max_{i \in R(\alpha)} \left\{-\frac{\nabla_i f}{y_i}\right\} \le \min_{j \in S(\alpha)} \left\{-\frac{\nabla_j f}{y_j}\right\} \ *$$

ovvero:

$$-\frac{\nabla f}{y_i} = (-46.5 \ \ -61 \ \ -49.5 \ \ -12 \ \ -15 \ \ -29.5)^T$$

$\max_{i \in R(\alpha)} = \{-46.5, -49.5, -12, -15\} = -12$

$\min_{i \in S(\alpha)} = \{-46.5, -61, -12, -29.5\} = -61$

* VIOLATA CONDIZIONE OTTIMO