Matrice Hamiltoniana e soluzione dell'Equazione Differenziale di Riccati

a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Nelle lezioni precedenti

- Abbiamo visto che per risolvere un problema di controllo ottimo per sistemi lineari e con indice di costo quadratico è necessario determinare la soluzione di un'**equazione alle derivate ordinarie**
- L'equazione differenziale di Riccati consiste di $n(n+1)/2$ equazioni quadratiche da integrare all'indietro
- Abbiamo visto che l'equazione può essere scritta in maniera equivalente come un sistema di equazioni differenziali **lineari**

Proprietà della matrice Hamiltoniana

Sistema Hamiltoniano

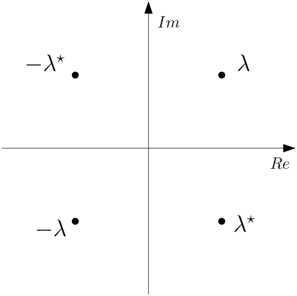
$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix}}_{\triangleq H \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix}$$

Proprietà della matrice Hamiltoniana H

- (in generale) se λ è autovalore di una matrice A allora $-\lambda$ è autovalore di $-A$
- (in generale) A e $A^\top$ hanno lo stesso insieme di autovalori
- $H^\top$ e $-H$ sono matrici simili, ovvero

$$-H = JH^\top J^{-1} \qquad \text{con} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ **simmetria quadrantale**, se λ è autovalore di H anche $-\lambda$ è autovalore di H



Una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, ovvero esiste T non-singolare e Λ diagonale tali che $\Lambda = TAT^{-1}$

$\Rightarrow$ non tutte le matrici sono diagonalizzabili!

A è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovalore la *molteplicità algebrica*[1] coincide con la *molteplicità geometrica*[2] (con T data da una collezione di autovettori)

$\Rightarrow$ tutte le matrici possono essere trasformate in Forma di Jordan, ovvero simili ad una matrice diagonale a blocchi

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & J_p \end{bmatrix}, \qquad \text{con} \quad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

La matrice T è data da una collezione di *autovettori generalizzati*:
Supponiamo che λ sia autovalore di A con molteplicità algebrica $k \geq 1$, allora v è autovettore generalizzato se $(A - \lambda I)^k v = 0$, $(A - \lambda I)^{k-1} v \neq 0$, ne esistono $k - 1$
$\Rightarrow$ **catena di autovettori generalizzati**, $(A - \lambda I) v_i = v_{i-1}$, $i = 2, \dots, k$

[1] numero di volte con cui l'autovalore è soluzione di $\det(A - \lambda I) = 0$, esempio $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2) = 0 \dots$

[2] dimensione dello spazio generato dai corrispondenti autovettori, ovvero $n - \text{rango}(A - \lambda_i I)$

Supponiamo che H non abbia autovalori puramente immaginari, dunque n a parte reale positiva (instabili) e n a parte reale negativa (stabili)

Esiste (sempre) una trasformazione non-singolare U tale che

$$U^{-1}HU = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix}$$

dove Λ_s / Λ_u raccoglie tutti i blocchi di Jordan associati ad autovalori **stabili/instabili**

Partizioniamo anche U in maniera *coerente* come

$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}$$

ha come colonne gli autovettori generalizzati di H corrispondenti agli autovalori **stabili/instabili**

Soluzione di DRE tramite matrice Hamiltoniana (2/4)

Consideriamo il seguente **cambio di coordinate** per il sistema Hamiltoniano

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Il sistema nelle nuove coordinate diventa

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \dot{\hat{Y}} \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = U^{-1} H \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = U^{-1} H U \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistema lineare e **disaccoppiato** per $\hat{X}$ e $\hat{Y}$!

La soluzione al tempo T può essere trovata facilmente:

$$\hat{X}(T) = e^{\Lambda_s (T-t)} \hat{X}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{X}(t) = e^{-\Lambda_s (T-t)} \hat{X}(T)$$

$$\hat{Y}(T) = e^{\Lambda_u (T-t)} \hat{Y}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \hat{Y}(t) = e^{-\Lambda_u (T-t)} \hat{Y}(T)$$

Imponendo la condizione al contorno, otteniamo

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}\hat{X}(T) + U_{12}\hat{Y}(T) \\ U_{21}\hat{X}(T) + U_{22}\hat{Y}(T) \end{bmatrix}$$

che utilizziamo per ricavare $\hat{Y}(T)$ in funzione di $\hat{X}(T)$:

$$M \underbrace{(U_{11}\hat{X}(T) + U_{12}\hat{Y}(T))}_{=I} = U_{21}\hat{X}(T) + U_{22}\hat{Y}(T)$$

$$\Rightarrow \hat{Y}(T) = \underbrace{-(U_{22} - MU_{12})^{-1}(U_{21} - MU_{11})}_{\triangleq G}\hat{X}(T) \triangleq G\hat{X}(T)$$

Dunque dalla relazione $[X(t)^\top, Y(t)^\top]^\top = U[\hat{X}(t)^\top, \hat{Y}(t)^\top]^\top$, otteniamo

$$\begin{aligned} X(t) &= U_{11}\hat{X}(t) + U_{12}\hat{Y}(t) = U_{11}e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T) + U_{12}e^{-\Lambda_u(T-t)}\hat{Y}(T) \\ &= U_{11}e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T) + U_{12}e^{-\Lambda_u(T-t)}G\hat{X}(T) \\ &= [U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_u(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}]e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T) \end{aligned}$$

Ripetiamo lo stesso ragionamento per $\hat{Y}(t)$

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= U_{21}\hat{X}(t) + U_{22}\hat{Y}(t) = U_{21}e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T) + U_{22}e^{-\Lambda_u(T-t)}\hat{Y}(T) \\
&= U_{21}e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T) + U_{22}e^{-\Lambda_u(T-t)}G\hat{X}(T) \\
&= [U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_u(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}]e^{-\Lambda_s(T-t)}\hat{X}(T)
\end{aligned}
$$

Avendo ora esplicitamente calcolato $X(t)$ e $Y(t)$, possiamo ottenere $P(t) = Y(t)X(t)^{-1}$ (notando che il fattore comune si cancella nell'inversa):

$$
P(t) = [U_{21} + U_{22}e^{-\Lambda_u(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}][U_{11} + U_{12}e^{-\Lambda_u(T-t)}Ge^{\Lambda_s(T-t)}]^{-1}
$$

$\Rightarrow$ soluzione della DRE ottenuta calcolando solo autovalori e autovettori di H!

Esempio di soluzione tramite matrice Hamiltoniana (1/2)

Consideriamo (nuovamente) il seguente problema di controllo ottimo

$$\min_u \int_0^T (x(t)^2 + u(t)^2)dt$$

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

Si tratta di un problema LQ con $A = 0$, $B = 1$, $Q = 1$, $R = 1$ e $M = 0$

La matrice Hamiltoniana H dunque è:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^\top \\ -Q & -A^\top \end{bmatrix}}_{\triangleq H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}} = H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(H - \lambda I) = \lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \text{autovalori} \quad \{1, -1\}$$

Calcoliamo autovettore stabile $(\lambda_s = -1)$ v_s:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = y \quad \Rightarrow \quad v_s = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempio di soluzione tramite matrice Hamiltoniana (2/2)

Calcoliamo autovettore instabile $(\lambda_u = 1)$ v_s:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = -y \quad \Rightarrow \quad v_u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Quindi $\Lambda_s = -1$, $\Lambda_u = 1$ e $\longrightarrow$ $U^{-1}HU = \begin{bmatrix} \Lambda_s & 0 \\ 0 & \Lambda_u \end{bmatrix}$

I lambda contengono i blocchi di Jordan Relativi all'autovalori stabili e instabili riispettivamente. In questo caso -1 stabile e +1 instabile. La U sarà formata dagli autovettori messi in colonna.

$$U = \begin{bmatrix} \overbrace{1}^{U_{11}} & \overbrace{1}^{U_{12}} \\ \underbrace{1}_{U_{21}} & \underbrace{-1}_{U_{22}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad G = -U_{22}^{-1} U_{21} = -\frac{1}{-1} = 1$$

e la soluzione della DRE è

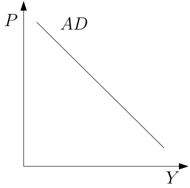
$$P(t) = \frac{1 - e^{-2(T-t)}}{1 + e^{-2(T-t)}}$$

Approcci alla macro-economia

- 1928, Modello di crescita di Ramsey: come suddividere in maniera ottima il profitto complessivo tra investimenti e beni di consumo?
- dal 1929, Modelli Keynesiani: quale è il livello giusto di produzione/offerta?

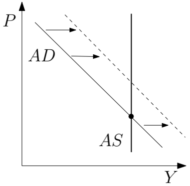
Per rispondere alla questione keynesiana, ricordiamo:

Domanda Aggregata (AD): domanda di beni o servizi formulata da un sistema economico



curva di domanda aggregata

Offerta Aggregata (AS): capacità produttiva di un sistema economico



curva di offerta aggregata
modello *classico* (lungo periodo)

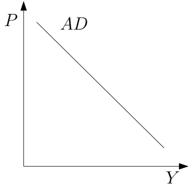
P: prezzi medi, Y: produzione effettiva (*PIL*)

Approcci alla macro-economia

- 1928, Modello di crescita di Ramsey: come suddividere in maniera ottima il profitto complessivo tra investimenti e beni di consumo?
- dal 1929, Modelli Keynesiani: quale è il livello giusto di produzione/offerta?

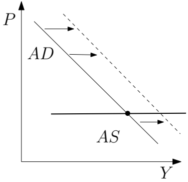
Per rispondere alla questione keynesiana, ricordiamo:

Domanda Aggregata (AD): domanda di beni o servizi formulata da un sistema economico



curva di domanda aggregata

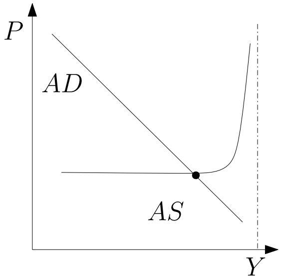
Offerta Aggregata (AS): capacità produttiva di un sistema economico



curva di offerta aggregata
modello *Keynesiano* (breve periodo)

P: prezzi medi, Y: produzione effettiva (*PIL*)

Modello Nuovo-Keynesiano



- gli **stipendi** sono più lenti dei **prezzi** ad adeguarsi
- se cala la domanda (AD) le aziende devono licenziare per adeguarsi ai prezzi
- è necessario aumentare (AD) per diminuire la **disoccupazione**

composizione Domanda Aggregata

$$\overbrace{\text{Domanda Aggregata}}^{Z(t)} = \overbrace{\text{Consumi}}^{C(t)} + \overbrace{\text{Investimenti}}^{I(t)} + \overbrace{\text{Spesa Pubblica}}^{G(t)} + \overbrace{\text{Esportazioni}}^{N(t)}$$

Modello Nuovo-Keynesiano

- se AD supera AS, le industrie aumentano la produzione in maniera proporzionale

$$\dot{Y}(t) = \alpha(Z(t) - Y(t))$$

- la propensione al consumo è proporzionale all'offerta $C(t) = \beta Y(t)$
- deve essere presente un capitale $K(t)$ a sostenere la produzione, l'investimento è pari alla variazione del capitale $I(t) = \dot{K}(t)$
- esiste un livello di capitale desiderato proporzionale alla produzione $K^\star(t) = \gamma Y(t)$ e il capitale deve essere aggiustato in modo da coincidere con $K^\star(t)$

$$\dot{K}(t) = \delta(K^\star(t) - K(t))$$

- il controllo è la spesa pubblica $u(t) = G(t)$, con l'obiettivo di mimizzare la distanza tra K e $K^\star$ e tra Y e un livello desiderato di produzione $Y^\star$

Rimettendo tutti gli *ingredienti* insieme, otteniamo

$$\min_u \int_0^T \left([y(t), k(t)] Q [y(t), k(t)]^\top + R u(t)^2 \right) dt$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(t) \\ \dot{k}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\beta + \delta\gamma - 1) & -\alpha\delta \\ \delta\gamma & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ k(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

dove $y(t) = Y(t) - Y^\star$, $k(t) = K(t) - K^\star(t)$ e $u(t) = G(t)$
con $Q = I$ e $R > 0$

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo LQ su orizzonte infinito

Prossimi passi:

- Studiamo il limite per T che tende all'infinito della soluzione ottima su orizzonte finito
- Consideriamo condizioni che garantiscano che il sistema a ciclo chiuso con il controllo ottimo abbia un equilibrio asintoticamente stabile