Elementi di Cinematica e Dinamica dei Robot

Claudio Melchiorri

Dipartimento di Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione (DEI)

Università di Bologna

email: claudio.melchiorri@unibo.it

Sommario

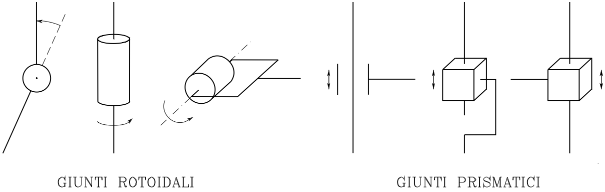
Sommario

Sommario

Sommario

Introduzione
Gradi di libertà di un manipolatore

- Un manipolatore può essere visto come il risultato dell'interconnessione di corpi rigidi *(link)* tramite coppie cinematiche *(giunti)*
- I giunti sono elementi che vincolano alcune direzioni di moto relativo tra due corpi rigidi. I tipi di giunti utilizzati in robotica sono:
  - *rotoidali:* rotazione attorno ad un asse fisso
  - *prismatico:* traslazione lungo un asse fisso



- Ogni giunto è caratterizzato dal numero di direzioni indipendenti concesse al moto relativo tra i corpi rigidi che interconnette. Tale numero indica i *gradi di libertà* del giunto

  ⇒ *i giunti rotoidali e primatici hanno 1 grado di libertà!*

Introduzione
Gradi di libertà di un manipolatore

- Se un giunto ha k gradi di libertà, allora la configurazione relativa tra i due corpi rigidi può essere espressa in funzione di k variabili $q_1, q_2, \ldots, q_k$, dette *variabili di giunto*
  - *giunto rotoidale:* q indica l'ampiezza della rotazione
  - *giunto prismatico:* q indica l'ampiezza della traslazione
- Consideriamo un manipolatore costituito da *n link* interconnessi da *n giunti* ed indichiamo con k_i il numero di gradi di libertà del giunto i-esimo
  $\Rightarrow$ *supponiamo una struttura meccanica seriale!!*
- È facile intuire che la *configurazione* nello spazio del manipolatore può essere modificata agendo su N_{dof} variabili indipendenti, dove

$$N_{dof} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

- N_{dof} rappresenta il numero di *gradi di libertà (dof)* del manipolatore
  $\Rightarrow$ *N_{dof} indica anche il numero attuatori*
  $\Rightarrow$ *per un manipolatore con n link e giunti rotoidali/prismatici, $N_{dof} = n$*

Introduzione
Spazio di giunto e spazio di lavoro

- *Spazio di giunto.* Supponiamo di raggruppare tutte le variabili di giunto in un vettore $q \in \mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^{N_{dof}}$. L'insieme $\mathcal{Q}$ è detto *spazio di giunto* e contiene tutti i possibili valori che le variabili di giunto possono assumere. Ad ogni $q \in \mathcal{Q}$ corrisponde *una sola* configurazione della struttura meccanica
- *Spazio di lavoro.* È il *mondo "reale"* in cui il robot si trova ad operare, ovvero l'insieme di tutte le configurazioni che la struttura meccanica può assumere. Più formalmente, lo spazio di lavoro è uno *spazio Euclideo* $\mathbb{E}$ a 2 o 3 dimensioni (piano o spazio 3D). Indicheremo con x un elemento dello spazio di lavoro. $\Rightarrow x \in \mathbb{R}^?$
- *Configurazione del manipolatore.* Si intende come la *posizione* ed *orientamento* di un *sistema di riferimento* solidale all'estremità del manipolatore (end effector). Quindi (localmente):
  - $x \in \mathbb{R}^3$ nel piano;
  - $x \in \mathbb{R}^6$ nello spazio
- *Classificazione dei manipolatori:* (con $\mathbb{R}^n$ spazio di giunto ed $\mathbb{R}^m$ spazio di lavoro)
  - $n = m$: caso "normale"
  - $n < m$: manipolatori *difettivi*
  - $n > m$: manipolatori *rindondanti*

Introduzione
Tipologie di manipolatori

I primi tre gdl definiscono la *struttura* del robot.

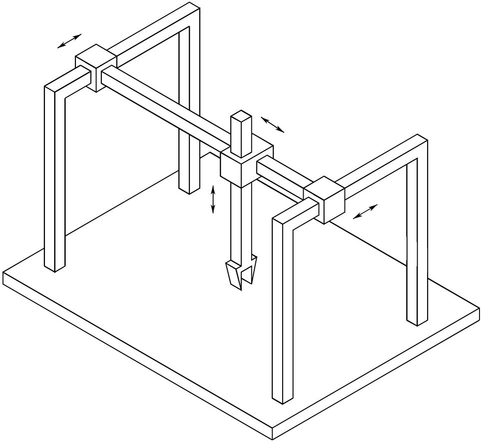
Componendo opportunamente giunti rotoidali e prismatici è possibile ottenere diverse strutture cinematiche, con diverse caratteristiche che possono essere sfruttate in diversi tipi di compiti.

Tra le tipologie sviluppate vi sono:

- Robot cartesiani
- Robot antropomorfi
- Robot SCARA
- Robot cilindrici, robot sferici
- Polsi sferici

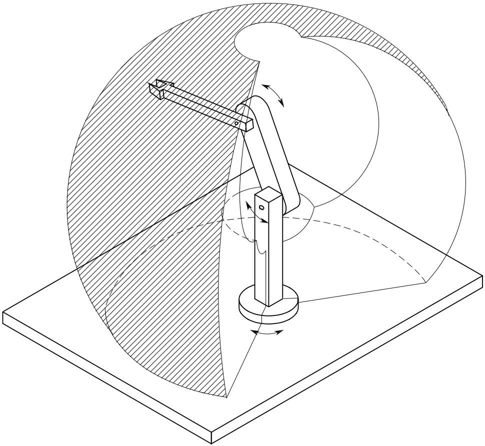
Introduzione
Tipologie di manipolatori

Manipolatore cartesiano



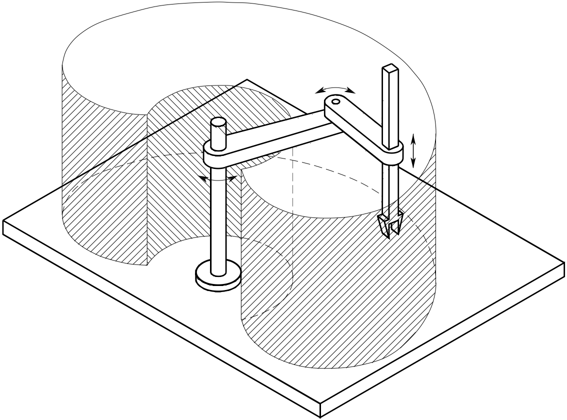
Introduzione
Tipologie di manipolatori

Manipolatore antropomorfo



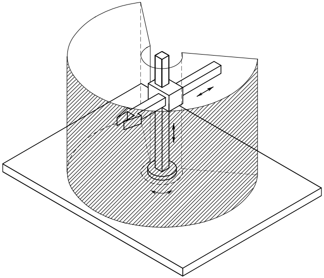
Introduzione
Tipologie di manipolatori

Manipolatore SCARA

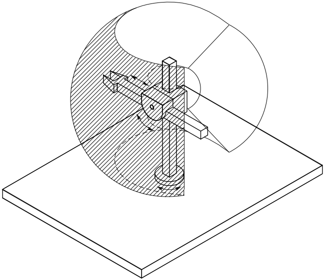


Introduzione
Tipologie di manipolatori

Manipolatore cilindrico

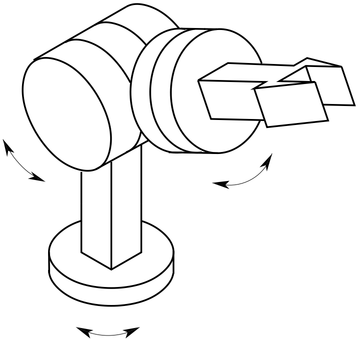


Manipolatore sferico



Introduzione
Tipologie di manipolatori

Polso sferico



Modello cinematico di un manipolatore

Nella cinematica dei manipolatori si individuano due problemi:

- *PROBLEMA CINEMATICO DIRETTO:* passare dalla conoscenza di posizione, velocità o accelerazione nello spazio delle variabili di giunto alla conoscenza delle rispettive grandezze dell'estremità del manipolatore, descritte in un opportuno sistema di riferimento (per esempio cartesiano)

$$x = f(q) \qquad q \in \mathbb{R}^n, \; x \in \mathbb{R}^m$$

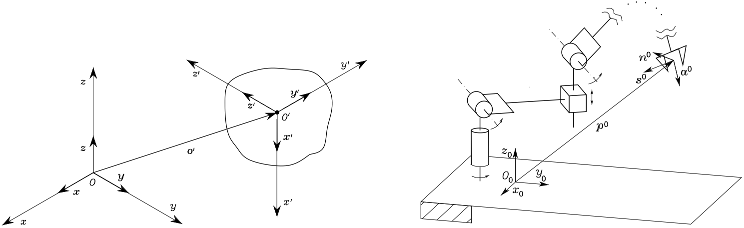
- *PROBLEMA CINEMATICO INVERSO:* conversione delle grandezze cinematiche di interesse dallo spazio di lavoro allo spazio dei giunti

$$q = g(x) = f^{-1}(x) \qquad q \in \mathbb{R}^n, \; x \in \mathbb{R}^m$$

Per lo stesso manipolatore si possono definire *modelli cinematici differenti*, anche se equivalenti da un punto di vista operativo.

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica diretta

Per definire il modello cinematico si usano le *trasformazioni omogenee* ${}^{i}T_j$.



- In coordinate, la configurazione nello spazio del corpo rigido i-esimo viene descritta dalla *trasformazione omogenea* ${}^{0}T_i$ tra il sistema di riferimento solidale al corpo rigido $FF-i$ e quello base $FF0$

$$
{}^{0}T_i = \begin{pmatrix} {}^{0}R_i & {}^{0}p_i \\ 0\ 0\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \left({}^{0}R_i\right)^{\mathrm{T}} = \left({}^{0}R_i\right)^{-1} \quad {}^{0}p_i \in \mathbb{R}^3
$$

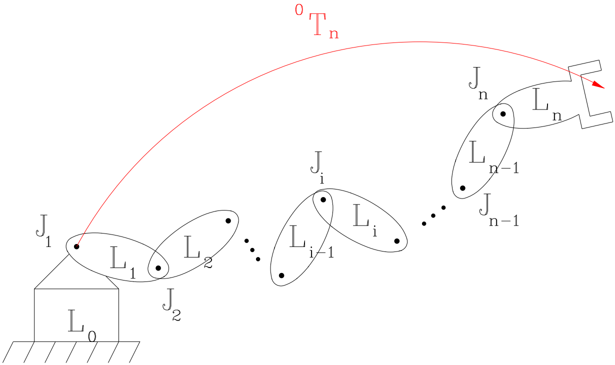
- Dati i due corpi rigidi i e j, la *configurazione relativa* è data da:

$$
{}^{j}T_i = \left({}^{0}T_j\right)^{-1}\,{}^{0}T_i
$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica diretta

Per definire il modello cinematico si usano le *trasformazioni omogenee* ${}^{i}T_{j}$.

Un manipolatore è un meccanismo formato da una serie di corpi rigidi, i link, connessi da giunti. Ad ogni link viene associato un *sistema di riferimento* descritto da una trasformazione omogenea.

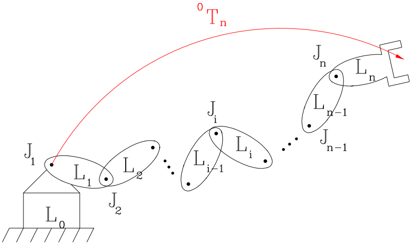


Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica diretta

Una convenzione per la descrizione di manipolatori.

- Ogni link viene numerato, da 0 ad n, in modo da essere individuato univocamente nella catena: $L_0, L_1, \ldots, L_n$. Al link "base" viene assegnato per convenzione il numero 0 (L_0), al link finale il numero n (L_n). Un manipolatore con $n+1$ link ha n giunti che ne permettono il *moto relativo*
- Anche i giunti vengono numerati progressivamente, da 1 ad n, iniziando dalla base: $J_1, J_2, \ldots, J_n$. Secondo questa convenzione il giunto J_i collega i link L_{i-1} ed L_i



Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica diretta

- Il moto dei giunti altera la posizione e l'orientamento nello spazio dell'estremità del manipolatore. La posizione e l'orientamento sono funzioni, in genere *non lineari*, delle n variabili di giunto q_1, q_2, ..., q_n, cioè:

$$p = f(q_1, q_2, \dots, q_n) = f(q)$$

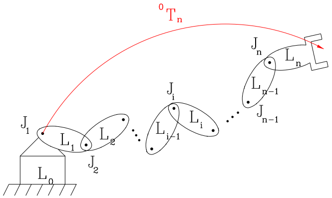
  dove
  - $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)^{\mathrm{T}}$ è definito nello *spazio di giunto* $\mathbb{R}^n$
  - p è definito nello *spazio di lavoro* R^m
- Il vettore p comprende di solito:
  - alcune componenti di *posizione* (p.e. la posizione x, y, z, rispetto ad un sistema di riferimento base cartesiano)
  - alcune componenti di orientamento (p.e. *angoli di Eulero* o *angoli RPY*).
- La notazione di *Denavit-Hartenberg* fornisce una procedura sistematica per la definizione del modello cinematico di un manipolatore in modo che il numero di parametri necessari risulta minimo (4 per ogni link, invece dei 6 teorici). Due vincoli: asse x_{i+1} che interseca ed è perpendicolare a z_i.

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica diretta

- Dati i due link consecutivi L_{i-1} ed L_i interconnessi dal giunto J_i, la matrice ${}^{i-1}T_i$ è *funzione della variabile di giunto q_i*, ovvero di una rotazione θ_i se il giunto è rotoidale o di una traslazione d_i se il giunto è prismatico $\Rightarrow\ {}^{i-1}T_i = {}^{i-1}T_i(q_i)$
- Per un manipolatore ad n giunti, la relazione tra i sistemi di riferimento FF0 ed FFn è data da

$$ {}^{0}T_n = {}^{0}T_1(q_1)\ {}^{1}T_2(q_2) \cdots {}^{n-1}T_n(q_n) $$

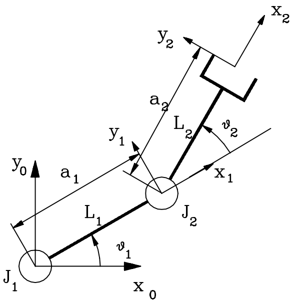
  che esprime posizione ed orientamento dell'ultimo link rispetto al sistema di riferimento base, una volta note le variabili di giunto $q_1, q_2, \ldots, q_n$
- Questa equazione è il *modello cinematico del manipolatore*



Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica diretta

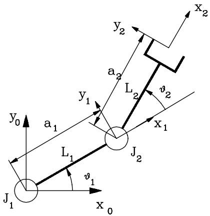
Esempio. Si consideri il manipolatore planare a 2 dof



Le matrici $^{i-1}T_i$ sono date da ($C_i = \cos\theta_i$, $S_i = \sin\theta_i$):

$$
{}^0T_1(\theta_1) = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & a_1 C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & a_1 S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}^1T_2(\theta_2) = \begin{pmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica diretta



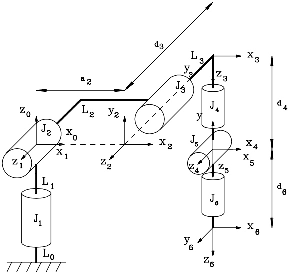
Quindi ($C_{ij} = \cos(\theta_i + \theta_j)$, $S_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j)$):

$$
{}^0T_2 = {}^0T_1 \, {}^1T_2 = \begin{pmatrix} n & s & a & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & a_1 C_1 + a_2 C_{12} \\ S_{12} & C_{12} & 0 & a_1 S_1 + a_2 S_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

I vettori n, s, a definiscono l'orientamento dell'estremità del manipolatore (rotazione attorno a z), mentre p definisce la sua posizione (piano $x - y$)

Esempio: PUMA 260



Trasformazione omogenee:

$$
{}^0T_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad {}^1T_2 \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & a_2 C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & a_2 S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad {}^2T_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3T_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad {}^4T_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Esempio: PUMA 260. Matrice ${}^0T_6 = \left[\begin{array}{ccc|c} n & s & a & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, dove

$$n = \begin{bmatrix} S_1(C_5C_6S_4 + C_4S_6) + C_1(C_2(-(C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) - S_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6))) \\ -(C_1(C_5C_6S_4 + C_4S_6)) + S_1(C_2(-(C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) - S_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6))) \\ S_2(-(C_6S_3S_5) + C_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) + C_2(C_3C_6S_5 + S_3(C_4C_5C_6 - S_4S_6)) \end{bmatrix}$$

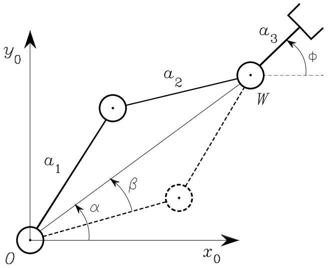
$$s = \begin{bmatrix} S_1(C_4C_6 - C_5S_4S_6) + C_1(C_2(S_3S_5S_6 + C_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6)) - S_2(-(C_3S_5S_6) + S_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6))) \\ -(C_1(C_4C_6 - C_5S_4S_6)) + S_1(C_2(S_3S_5S_6 + C_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6)) - S_2(-(C_3S_5S_6) + S_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6))) \\ S_2(S_3S_5S_6 + C_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6)) + C_2(-(C_3S_5S_6) + S_3(-(C_6S_4) - C_4C_5S_6)) \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} S_1S_4S_5 + C_1(C_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) - S_2(-(C_3C_5) + C_4S_3S_5)) \\ -(C_1S_4S_5) + S_1(C_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) - S_2(-(C_3C_5) + C_4S_3S_5)) \\ S_2(C_5S_3 + C_3C_4S_5) + C_2(-(C_3C_5) + C_4S_3S_5) \end{bmatrix}$$

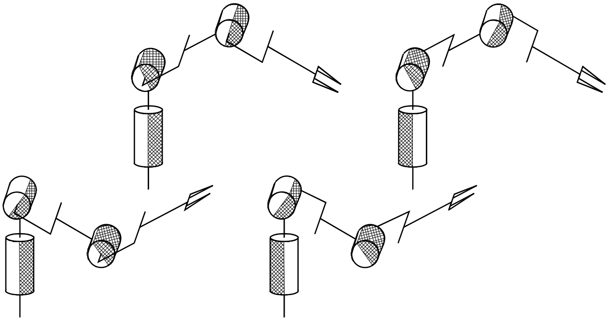
$$p = \begin{bmatrix} S_1(-d_3 + d_6S_4S_5) + C_1(a_2C_2 + C_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_6S_5) - S_2(-(C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_6S_3S_5)) \\ -(C_1(-d_3 + d_6S_4S_5)) + S_1(a_2C_2 + C_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_6S_5) - S_2(-(C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_6S_3S_5)) \\ a_2S_2 + S_2((d_4 + C_5d_6)S_3 + C_3C_4d_6S_5) + C_2(-(C_3(d_4 + C_5d_6)) + C_4d_6S_3S_5) \end{bmatrix}$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica inversa

- Per passare da posizione/orientamento dell'estremità del manipolatore alle variabili di giunto *non esiste alcuna tecnica che applicata dia una soluzione*
- La soluzione che si ottiene *non è unica*. E' possibile avere:
  - nessuna soluzione (se si parte da un punto esterno allo spazio di lavoro)
  - un insieme finito di soluzioni (una o più)
  - infinite soluzioni.
- Si ricercano soluzioni in *forma chiusa* e non numeriche:
  - per *ragioni computazionali*, la soluzione in forma analitica è tipicamente più veloce da calcolare una volta che si ha l'espressione generale
  - esprimendo le soluzioni analiticamente è possibile *selezionarne una*



Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica inversa



Molteplicità di soluzioni per un manipolatore antropomorfo

Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica inversa

Per ottenere una soluzione in forma chiusa al problema della cinematica inversa, esistono essenzialmente due tecniche:

- una di carattere *ALGEBRICO*, che consiste in manipolazioni delle equazioni cinematiche fino ad ottenere un insieme di relazioni che permettono un'inversione delle equazioni
- una di carattere *GEOMETRICO* che si basa, quando e se possibile, su considerazioni di tipo geometrico, dipendenti dalla struttura del manipolatore, che aiutano nella soluzione

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica inversa

- *Approccio algebrico.* Per un manipolatore a sei gradi di libertà si ha una equazione del tipo

$$ {}^0T_6 = {}^0T_1(q_1)\ {}^1T_2(q_2) \cdots {}^5T_6(q_6) $$

equivalente a 12 equazioni nelle 6 incognite q_i, $i = 1, \dots, 6$

- Dato che sia i valori degli elementi della matrice ${}^0T_6$ che la struttura delle ${}^{i-1}T_i$ sono noti, premoltiplicando e postmoltiplicando si ottiene:

$$ \left[{}^0T_1(q_1) \cdots {}^{i-1}T_i(q_i) \right]^{-1} {}^0T_6 \left[{}^jT_{j+1}(q_{j+1}) \cdots {}^5T_6(q_6) \right]^{-1} = $$
$$ = {}^iT_{i+1}(q_{i+1}) \cdots {}^{j-1}T_j(q_j) $$

ottenendo altre 12 equazioni per ogni coppia (i, j), $i < j$

- Selezionando le espressioni più *semplici* fra quelle così ricavate, è spesso possibile ottenere una soluzione al problema
$\Rightarrow$ *questa tecnica è troppo legata alle equazioni cinematiche dirette!!!*

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica inversa

- Mentre **non** esistono *considerazioni generali* che possono guidare nel trovare una soluzione in forma algebrica, esistono considerazioni che aiutano per quanto riguarda la *soluzione per via geometrica*

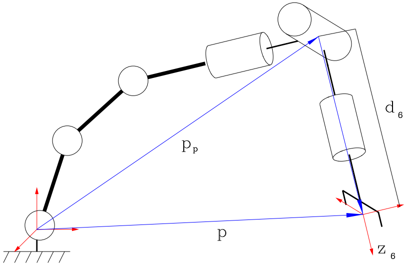
  $\Rightarrow$ *approccio di Pieper*

- Per molte strutture di manipolatori industriali vale il cosiddetto *disaccoppiamento cinematico*, che permette di scomporre il problema in due sottoproblemi:
  1. determinazione della soluzione inversa al problema del *posizionamento*
  2. determinazione della soluzione al problema dell'*orientamento* dell'estremità del manipolatore

- *Approccio di Pieper:* condizione sufficiente per trovare una soluzione in forma chiusa per un manipolatore a sei gradi di libertà è che esistano:
  - *tre giunti di rotazione consecutivi i cui assi si intersecano in un punto*

    oppure
  - *tre giunti di rotazione consecutivi i cui assi sono paralleli*

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica inversa



- si calcola p_p dalla conoscenza di ${}^0T_6$ (e delle matrici R e p): $p_p = p - d_6 z_6$
  $\Rightarrow$ *p_p è funzione di q_1, q_2 e q_3*
- si risolve la cinematica inversa per q_1, q_2 e q_3
- si determina la matrice di rotazione ${}^0R_3$ dovuta ai primi tre giunti
- si calcola ${}^3R_6 = {}^0R_3^{-1}\, R = {}^0R_3^T\, R$
- si risolve la cinematica inversa dell'orientamento (Eulero)

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

In robotica è di interesse ricavare, oltre che il legame tra posizioni di giunto e posizione/orientamento del manipolatore, anche la relazione tra:

- velocità dell'estremità del manipolatore e velocità ai giunti:

$$\begin{pmatrix} v \\ \omega \end{pmatrix} \iff \dot{q}$$

- forza esercitata sull'ambiente dal manipolatore e corrispondenti coppie applicate ai giunti:

$$\begin{pmatrix} f \\ n \end{pmatrix} \iff \tau$$

Queste due relazioni si basano su di un operatore lineare, una matrice detta *Jacobiano del manipolatore*. Questo operatore è anche utilizzato per:

- studiare le *singolarità*;
- definire *algoritmi numerici per la cinematica inversa*;
- studio della *manipolabilità*

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- L'espressione *analitica* dello Jacobiano è ottenuta differenziando un vettore $x = f(q)$ a sei componenti che esprime la posizione e l'orientamento secondo qualche convenzione del manipolatore rispetto alla base FF0
- Differenziando $f(q)$ si ottiene:

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial q}(q)\,\mathrm{d}q = J(q)\,\mathrm{d}q$$

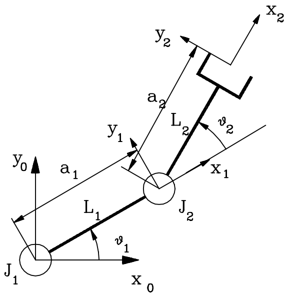
in cui la matrice $m \times n$

$$J(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{pmatrix} \qquad J(q) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

è chiamata *matrice Jacobiana* o *Jacobiano* del manipolatore

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Esempio. Si consideri il manipolatore planare a 2 dof



Abbiamo ottenuto:

$$\begin{cases} p_x = a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ p_y = a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ \gamma = \theta_1+\theta_2 \end{cases}$$

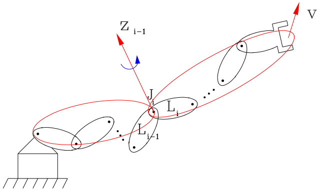
$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -a_1 \sin\theta_1 - a_2 \sin(\theta_1+\theta_2) & -a_2 \sin(\theta_1+\theta_2) \\ a_1 \cos\theta_1 + a_2 \cos(\theta_1+\theta_2) & a_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{J(q)} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{q}}$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

L'espressione *geometrica* dello Jacobiano è ottenuta considerando come componenti di "orientamento" il vettore velocità di rotazione ω (e non la derivata di una terna di angoli γ).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix}$$

Si può osservare che geometricamente l'espressione $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ implica che il vettore $\dot{x}$ è una combinazione lineare degli elementi di $\dot{q}$, in cui i pesi sono le colonne J_i della matrice $J(q)$ (influenza della velocità $\dot{q}_i$ su $\dot{x}$).



$$\begin{aligned} v &= J_{v1}\dot{q}_1 + J_{v2}\dot{q}_2 + \ldots + J_{vn}\dot{q}_n \\ \omega &= J_{\omega 1}\dot{q}_1 + J_{\omega 2}\dot{q}_2 + \ldots + J_{\omega n}\dot{q}_n \end{aligned}$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Si può dimostrare che per la generica colonna i-esima dello Jacobiano geometrico si ottiene una espressione del tipo

$$\begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \times ({}^0p_n - {}^0p_{i-1}) \\ {}^0z_{i-1} \end{bmatrix} \qquad \text{giunto di rotazione}$$

$$\begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^0z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{giunto prismatico}$$

Queste espressioni sono facilmente calcolabili nota la cinematica diretta del manipolatore, cioè le matrici ${}^{i-1}T_i$, da cui si ottengono i vari vettori ${}^0p_i$ e ${}^0z_i$ necessari.

Computazionalemte poco aggravio rispetto al calcolo della cinematica!

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- Il *principio dei lavori virtuali* ci consente di passare dalla relazione $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ che esprime il legame di *velocità* tra spazio dei giunti e spazio di lavoro ad un'analoga espressione per quanto riguarda le *forze*
- Poichè il *lavoro*, esprimibile come prodotto della forza applicata per lo spostamento, è invariante rispetto al sistema nel quale viene espresso, si ha:
$$w^{\mathrm{T}} \mathrm{d}x = \tau^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\boldsymbol{q}$$
- $w = \left(f^{\mathrm{T}} \; n^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ è un vettore a 6 componenti che comprende le *forze lineari* f e le *coppie* n applicate al manipolatore
- τ è il vettore ad n componenti delle *forze/coppie applicate ai giunti*

Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

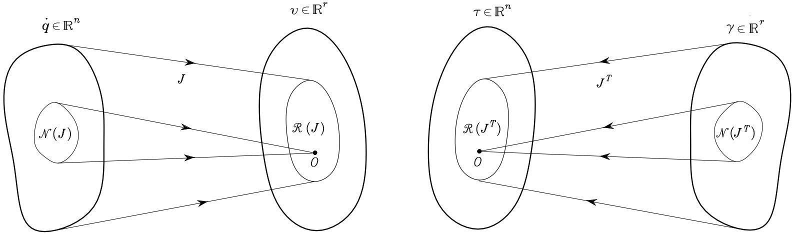
Dalla relazione $w^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x = \tau^{\mathrm{T}}\mathrm{d}q$, ricordandosi che

$$\mathrm{d}x = J(q)\mathrm{d}q$$

si ottiene

$$\tau = J^{\mathrm{T}}(q)w$$

che esprime il legame esistente tra il vettore delle coppie applicate ai giunti ed il vettore w della forza applicata dal manipolatore.



Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- La relazione $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ può essere interpretata da un punto di vista infinitesimale come:

$$\mathrm{d}x = J(q)\mathrm{d}q$$

  ovvero come una relazione tra incrementi infinitesimi in $\mathbb{R}^n$ ed $\mathbb{R}^6$
- In generale, rank $J(q) = \min(6, n)$, ma:
  $\Rightarrow$ *esistono configurazioni per cui $J(q)$ perde di rango*
  $\Rightarrow$ *in queste configurazioni esistono "direzioni" in $\mathbb{R}^6$ che non hanno una corrispondente "direzione" in $\mathbb{R}^n$*
- *Configurazioni singolari:*
  - rappresentano configurazioni nelle quali certe direzioni di moto possono *non essere realizzabili*
  - velocità limitate dell'estremità del manipolatore possono corrispondere a *velocità infinite* nello spazio di giunto
  - solitamente corrispondono a punti posti al *confine dello spazio di lavoro*, cioè a punti di massima estensione del manipolatore
  - corrispondono a zone che *non hanno una definita soluzione* al problema cinematico inverso: o nessuna o infinite

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Esempio. Sia dato lo Jacobiano

$$J(q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{con } \operatorname{rank} J(q) = 1$$

Per un qualsiasi valore di $\mathrm{d}q_1$ e $\mathrm{d}q_2$ si ha:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1 &= \mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}x_2 &= 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *qualsiasi vettore* $\mathrm{d}x$ *con seconda componente non nulla rappresenta un movimento istantaneo non realizzabile*

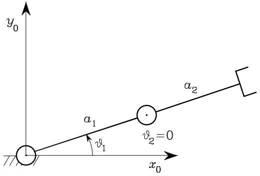
Per la dualità tra velocità e forze, si ha il sistema di forze statico

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = J^{\mathrm{T}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ *le forze* f_y *non influenzano le coppie ai giunti, e qualsiasi sistema di coppie tali che* $\tau_1 = -\tau_2$ *non esercita nessuna forza sull'ambiente*

Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica differenziale. Lo Jacobiano



$$J(q) = \begin{pmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \end{pmatrix}$$

Per $\theta_1 = \theta_2 = 0$ si ottiene

$$J(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_1 = a_2 = 1$$

quindi

$$\begin{cases} \mathrm{d}x & = & 0 \\ \mathrm{d}y & = & 2\mathrm{d}q_1 + \mathrm{d}q_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \tau_1 & = & 2f_y \\ \tau_2 & = & f_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ *forze lungo x non 'generano' coppie ai giunti (possono essere applicate senza alcuna reazione)*

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- Il legame diretto tra velocità nello spazio di giunto e di lavoro è espresso da

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}, \qquad J(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

- Il problema inverso, quindi, richiede la soluzione di un problema lineare:
  - *$m = n$:* se non si è in singolarità, viene utilizzata l'*inversa dello Jacobiano*:

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{x}$$

  - *$m \neq n$:* viene utilizzata la *pseudoinversa di Moore-Penrose dello Jacobiano*:

$$\dot{q} = J^{+}(q)\dot{x}$$

$$J^{+} = J^{\mathrm{T}}\left(JJ^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$$

se $m < n$ (pseudoinversa destra)

$$JJ^{+} = I_m$$

$$J^{+} = \left(J^{\mathrm{T}}J\right)^{-1}J^{\mathrm{T}}$$

se $m > n$ (pseudoinversa sinistra)

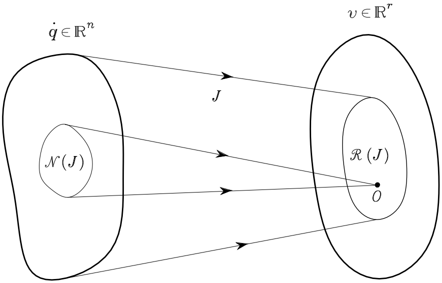
$$J^{+}J = I_n$$

I_p: matrice identità $(p \times p)$

Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

$n \neq m$

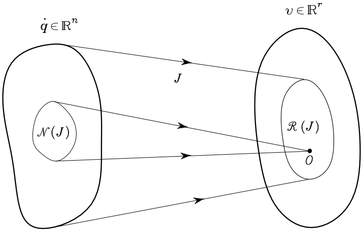


- rank $J = p < \min(m, n)$
- La soluzione data dalla pseudoinversa $\dot{q}_s = J^+ \dot{x}$ è tale che ($\dot{x}_s = J\dot{q}_s$):

$$\begin{cases} \|\dot{x} - \dot{x}_s\| & \text{la } \textit{norma dell'errore} \text{ è minima} \\ \|\dot{q}_s\| & \text{la } \textit{norma della soluzione} \text{ è minima} \end{cases}$$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Soluzione di $\dot{x} = J\dot{q}$ se $m < n$



- $rank(J) = \min(m, n) = m \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}(J) = \mathbb{R}^m$
- $\forall\ \dot{x}\ \exists\ \dot{q}$ tale che $\dot{x} = J\dot{q}$ *(ne esiste più di uno!)*
- $\dot{q} = J^+\dot{x} \quad \exists\ \mathcal{N}(J)$ tale che $\forall\ \dot{q} \in \mathcal{N}(J) \ \rightarrow \ \dot{x} = J\ \dot{q} = 0$

  $\rightarrow \ \dot{q} = J^+\dot{x} + q_N \ \rightarrow \ \dot{x} = J\ (J^+\dot{x} + \dot{q}_N) = \dot{x}, \quad \forall \dot{q}_N \in \mathcal{N}(\mathcal{J})$

  $\rightarrow \ \dot{q} = J^+\dot{x} + (I - J^+J)y$ espressione generale della soluzione
  $(I - J^+J)$ è una base di $\mathcal{N}(J)$

- $\dot{q} = J^+\dot{x}$ è di *norma minima*

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- Lo Jacobiano può essere utilizzato per la soluzione del *problema cinematico inverso*
- Una tecnica potrebbe essere quella di calcolare

$$q_{k+1} = q_k + J^{-1}(q_k) v_k T$$

  in cui si opera una *integrazione numerica* della posizione
- Tale operazione è soggetta a *derive numeriche* e *problemi di inizializzazione* che fanno sì che sia difficile raggiungere la soluzione desiderata
- Un metodo che permette di evitare questo problema è quello di definire una soluzione con uno *schema in retroazione* con un errore di posizione nello spazio operativo. Dato

$$e = x_d - x$$

  allora

$$\dot{e} = \dot{x}_d - J(q)\dot{q}$$

$\Rightarrow$ *si deve scegliere* $\dot{q}$ *in modo che* e *converga a* 0

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

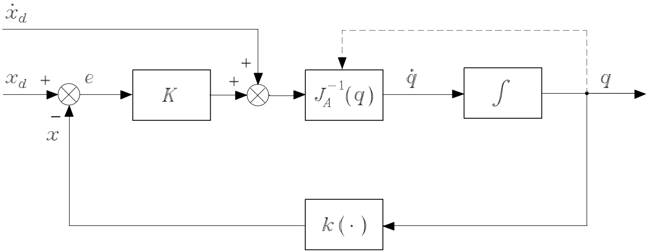
Algoritmo 1: Se

$$\dot{q} = J^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke)$$

con $K = K^{\mathrm{T}} > 0$, allora

$$\dot{e} = -Ke$$

$\Rightarrow$ *algoritmo di cinematica inversa tramite (pseudo-)inversa dello Jacobiano*



Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Algoritmo 2: Fissato $\dot{x}_d = 0$, se

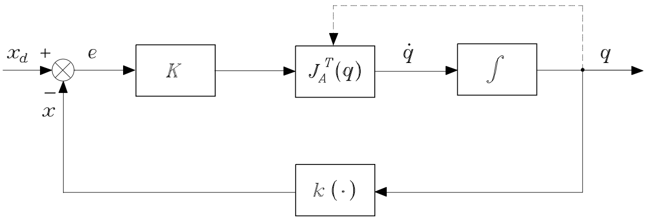
$$\dot{q} = J^{\mathrm{T}}(q)Ke$$

con $K = K^{\mathrm{T}} > 0$, allora

$$V(e) = \frac{1}{2}e^T Ke \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(e) = e^T K\dot{e} = -e^T KJ(q)J^{\mathrm{T}}(q)Ke \leq 0$$

$\Rightarrow$ *algoritmo di cinematica inversa tramite trasposta dello Jacobiano*

$\Rightarrow$ $\dot{q} = 0$ *con* $e \neq 0$ *se* $Ke \in \ker J^{\mathrm{T}}(q)$



Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Misure di manipolabilità:

- Lo Jacobiano può essere utilizzato per valutare le *prestazioni ottenibili da un manipolatore* in termini di velocità e forze applicabili, ovvero la predisposizione di un manipolatore di compiere una data operazione $\Rightarrow$ *elissoidi di manipolabilità*
- *Velocità.* Data una sfera di raggio unitario nello spazio delle velocità di giunto $\dot{q}^{\mathrm{T}}\dot{q} = 1$, che rappresenta un "costo", si vuole ottenere l'equivalente nello spazio operativo, la prestazione ottenuta
- Da $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ si ottiene:

$$\dot{x}^{\mathrm{T}}\left(JJ^{\mathrm{T}}\right)^{+}\dot{x} = 1$$

ovvero un *ellissoide* nello spazio operativo $\mathbb{R}^m$

  - *direzioni degli assi principali* date dagli *autovettori* di JJ^{T}
  - *lunghezze degli assi* date dai *valori singolari* di J, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(JJ^{\mathrm{T}})}$

Modello cinematico di un manipolatore
Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

- *Forza.* Si considera ora la relazione $\tau^{\mathrm{T}}\tau = 1$ da cui si ottiene:

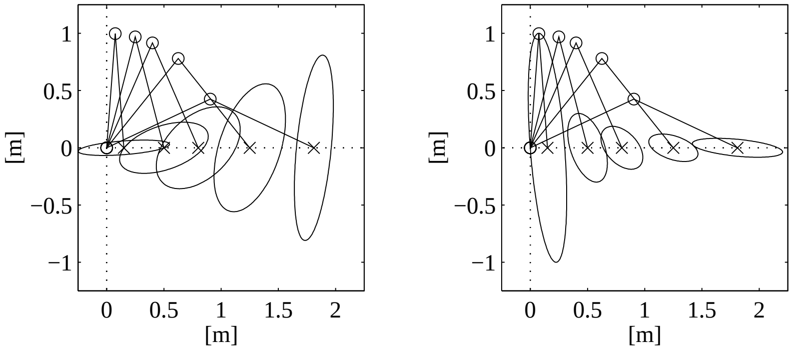
$$w^{\mathrm{T}} J J^{\mathrm{T}} w = 1$$

  che rappresenta un ellissoide nello spazio $\mathbb{R}^m$ delle forze
  - *direzioni degli assi principali* date dagli *autovettori* di JJ^{T}
  - *lunghezze degli assi* date dall'*inverso dei valori singolari* di J
- Questo è un risultato che conferma la dualità degli spazi di velocità e forza: nelle direzioni lungo le quali si ottengono elevate prestazioni in velocità si hanno basse prestazioni di forza e viceversa
- *Considerazioni:*
  - $\Rightarrow$ l'*attuazione* richiede una "grande" amplificazione e risulta migliore nelle direzioni ove si hanno gli autovettori maggiori
  - $\Rightarrow$ il *controllo* richiede una "piccola" amplificazione e risulta migliore nelle direzioni ove si hanno gli autovettori minori (maggiore sensibilità)
  - $\Rightarrow$ la *direzione "ottimale" per attuare* in velocità (forza) è anche la *direzione "migliore" per il controllo* di forza (velocità)

Modello cinematico di un manipolatore

Cinematica differenziale. Lo Jacobiano

Ellissoidi di velocità *Ellissoidi di forza*



Modello dinamico di un manipolatore

- *Dinamica dei manipolatori:* studio della relazione esistente tra le forze applicate ed il moto risultante di un robot industriale
- Anche per la dinamica si possono determinare due "modelli":
  - *Modello DIRETTO:* note le forze/coppie agenti ai giunti, le posizioni e le velocità, calcolare le accelerazioni
  $$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \tau)$$
  e quindi
  $$\dot{q} = \int \ddot{q}\mathrm{d}t \qquad q = \int \dot{q}\mathrm{d}t$$
  - *Modello INVERSO:* note le accelerazioni, velocità e posizioni dei giunti, determinare le forze/coppie da applicare
  $$\tau = f^{-1}(\ddot{q}, \dot{q}, q) = g(\ddot{q}, \dot{q}, q)$$
- Nello studio della dinamica, si fa riferimento ad una *serie di corpi rigidi ideali vincolati tra loro*

Modello dinamico di un manipolatore

I motivi per i quali si studia la dinamica di un manipolatore sono diversi:

- *simulazione:* verifica delle traiettorie senza ricorrere a esperimenti
- analisi e sintesi di opportune *leggi di controllo*
- analisi delle *proprietà strutturali del manipolatore* in fase di progetto

Due tecniche per lo studio della dinamica di un manipolatore:

⇒ *Approccio di Eulero-Lagrange.*
Prima formulazione ad essere sviluppata. Il modello così ricavato è più semplice e comprensibile nonchè maggiormente adatto per capire le influenze di variazioni dei parametri. Tutti i link del manipolatore vengono considerati allo stesso tempo e l'equazione dinamica è ricavata *in forma chiusa*. Inconvenienti di questo approccio sono che la procedura seguita non è molto comprensibile dal punto di vista fisico, in quanto si basa sull'energia cinetica e sull'energia potenziale, e che le equazioni non sono ottimizzate dal punto di vista computazionale

⇒ *Approccio di Newton-Eulero.*
Basato su una tecnica ricorsiva di calcolo che sfrutta la particolarità della struttura seriale di un manipolatore industriale. Si presta meglio per il calcolo numerico; *non fornisce le equazioni del moto in forma chiusa.*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Sia dato un sistema costituito da N punti materiali p_k, ognuno dei quali con massa m_k e con n gradi di libertà. La loro posizione in $\mathbb{R}^3$ rispetto ad un sistema di riferimento inerziale può essere descritta dalle n *variabili generalizzate* q_1, q_2, ..., q_n come

$$p_k = p_k(q_1, q_2, \ldots, q_n; t)$$

Se una forza f_k agisce sul punto p_k, la seconda legge di Newton implica che

$$f_k = m_k \ddot{p}_k$$

È possibile verificare che, introducendo l'*energia cinetica K* del sistema

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_k}{2} \dot{p}_k^{\mathrm{T}} \dot{p}_k$$

la seconda legge di Newton può essere riscritta come

$$\psi_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

dove le ψ_i sono le *forze generalizzate di Lagrange*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Vediamo ora di analizzare il termine ψ_i delle forze generalizzate di Lagrange contenente le forze agenti sul sistema. In generale, la forza agente sul singolo punto materiale può essere scomposta in due parti:

- una dovuta a campi energetici, come la gravità, esprimibile mediante la derivata di una opportuna *funzione di energia potenziale* $P(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, cioè da una relazione del tipo
$$\psi_{ip} = -\frac{\partial P}{\partial q_i}$$
- una che contiene le forze rimanenti, tra le quali si includono le forze/coppie τ_i applicate dagli *attuatori*
$$\psi_{ia} = \tau_i$$
le forze F_c applicate al manipolatore dall'*interazione con l'ambiente esterno* che, ricordando le relazioni statiche tra coppie e forze esterne, possono essere espresse a livello di giunto come
$$\psi_{ic} = \left(J^{\mathrm{T}}(q)F_c\right)_i$$
essendo $(v)_i$ la i-esima componente del vettore v, ed eventualmente le forze dovute ad *attriti viscosi*, espresse da relazioni del tipo
$$\psi_{iv} = -d_{ii}\dot{q}_i$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

In definitiva, la generica forza generalizzata di Lagrange ha la seguente formulazione:

$$\psi_i = -\frac{\partial P}{\partial q_i} + \tau_i + \left(J^{\mathrm{T}} F_c\right)_i - d_{ii}\dot{q}_i = \psi_{ip} + \psi_{ir}$$

essendo

$$\psi_{ir} = \tau_i + \left(J^{\mathrm{T}} F_c\right)_i - d_{ii}\dot{q}_i$$

e, in forma vettoriale,

$$\psi = \frac{\partial P}{\partial q} + \tau + J^{\mathrm{T}} F_c - D\dot{q} = \psi_p + \psi_r$$

dove D è una matrice diagonale composta dagli elementi d_{ii}.

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Definendo la *funzione di Lagrange* $\mathcal{L}$ (Lagrangiana) come

$$\mathcal{L} = K - P$$

ed utilizzando le relazioni

$$\psi_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\psi = \frac{\partial P}{\partial q} + \tau + J^{\mathrm{T}} F_c - D\dot{q} = \psi_p + \psi_r$$

si ottengono le *Equazioni di Lagrange del moto di un corpo rigido:*

$$\psi_{ir} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

ovvero

$$\psi_{ir} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Modello dinamico di un manipolatore

Eulero–Lagrange

- L'equazione

$$\psi_{ir} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

  è il modello Lagrangiano di un *generico sistema materiale*
- Nel caso di manipolatori industriali, esistono alcuni accorgimenti che permettono di calcolare agevolmente l'energia cinetica K e potenziale P in funzione di parametri caratteristici del manipolatore e, in definitiva, con *procedure algoritmiche* le equazioni dinamiche
- Si inizia ricavando l'espressione di energia cinetica K_i e potenziale P_i di un *corpo rigido nello spazio* (il link del manipolatore)
- L'energia totale del manipolatore è semplicemente la somma delle varie energie dei link:

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i \qquad P = \sum_{i=1}^{n} P_i$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Energia cinetica

- La *massa* di un corpo rigido B è data da:

$$m = \int_B \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

  dove $\rho(x, y, z) = \rho$ è la densità di massa, supposta costante

- La posizione del *baricentro* dell'oggetto è definita come:

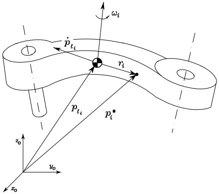
$$p_C = \frac{1}{m}\int_B p(x, y, z)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{m}\int_B p(x, y, z)\mathrm{d}m$$

- L'*energia cinetica* di un corpo rigido è allora data da:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_B v^{\mathrm{T}}(x, y, z)v(x, y, z)\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\int_B v^{\mathrm{T}}(x, y, z)v(x, y, z)\mathrm{d}m \end{aligned}$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Si supponga di conoscere la velocità di traslazione v_C e di rotazione ω del centro di massa dell'oggetto rispetto ad un sdr inerziale



La velocità di un punto generico p' del corpo rispetto allo stesso sdr è data da

$$v = v_C + \omega \times (p' - p_C) = v_C + \omega \times r$$

Volendo esprimere questa relazione nel sdr solidale col corpo rigido, si introduce la matrice di rotazione R dal sdr solidale col corpo rigido a quello base:

$$R^{\mathrm{T}} v = R^{\mathrm{T}}(v_c + \omega \times r) = R^{\mathrm{T}} v_c + \left(R^{\mathrm{T}}\omega\right) \times \left(R^{\mathrm{T}} r\right)$$

e quindi

$$v' = v'_C + \omega' \times r'$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Esprimendo il prodotto vettoriale $\omega \times r$ come

$$S(\omega)r = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} r$$

si ha che

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\int_B v^{\mathrm{T}}(x,y,z)v(x,y,z)\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_B (v_C + Sr)^{\mathrm{T}}(v_C + Sr)\mathrm{d}m \\ &= \frac{1}{2}\int_B v_C^{\mathrm{T}} v_C \mathrm{d}m + \frac{1}{2}\int_B v_C^{\mathrm{T}} Sr\mathrm{d}m + \frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} v_c \mathrm{d}m + \frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} Sr\mathrm{d}m \end{aligned}$$

dove

$$\frac{1}{2}\int_B v_C^{\mathrm{T}} Sr\mathrm{d}m = \frac{1}{2}v_C^{\mathrm{T}} S \int_B r\mathrm{d}m = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} v_C \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}}\mathrm{d}m\, S^{\mathrm{T}} v_C = 0$$

in quando dalla definizione di baricentro $\int_B r\mathrm{d}m = \int_B (p_C - p)\mathrm{d}m = 0$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

In definitiva

$$K = \frac{1}{2}\int_B v_C^{\mathrm{T}} v_C \mathrm{d}m + \frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} S r \mathrm{d}m$$

Il primo termine è dovuto alla *velocità di traslazione del baricentro* ed è pari a

$$\frac{1}{2}\int_B v_C^{\mathrm{T}} v_C \mathrm{d}m = \frac{1}{2} m v_C^{\mathrm{T}} v_C$$

Per quanto riguarda il secondo si ha che

$$\frac{1}{2}\int_B r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}} S r \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\int_B \mathrm{Tr}\left(S r r^{\mathrm{T}} S^{\mathrm{T}}\right) \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(S \int_B r r^{\mathrm{T}} \mathrm{d}m S^{\mathrm{T}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(S J S^{\mathrm{T}}\right) = \frac{1}{2}\omega^{\mathrm{T}} I \omega$$

dove si è sfruttato il fatto che $a^{\mathrm{T}} b = \mathrm{Tr}(a b^{\mathrm{T}})$ e la struttura della matrice S. Anche questo termine dipende dalla velocità ω del baricentro

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

La matrice J, detta dei *momenti d'inerzia*, e la matrice I, *tensore d'inerzia*, sono entrambe simmetriche, ed hanno rispettivamente le seguenti espressioni:

$$J = \begin{pmatrix} \int r_x^2 \mathrm{d}m & \int r_x r_y \mathrm{d}m & \int r_x r_z \mathrm{d}m \\ \int r_x r_y \mathrm{d}m & \int r_y^2 \mathrm{d}m & \int r_y r_z \mathrm{d}m \\ \int r_x r_z \mathrm{d}m & \int r_y r_z \mathrm{d}m & \int r_z^2 \mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \int (r_y^2 + r_z^2) \mathrm{d}m & -\int r_x r_y \mathrm{d}m & -\int r_x r_z \mathrm{d}m \\ -\int r_x r_y \mathrm{d}m & \int (r_x^2 + r_z^2) \mathrm{d}m & -\int r_y r_z \mathrm{d}m \\ -\int r_x r_z \mathrm{d}m & -\int r_y r_z \mathrm{d}m & \int (r_x^2 + r_y^2) \mathrm{d}m \end{pmatrix}$$

Gli elementi delle matrici J ed I dipendono dal vettore r, che definisce la posizione del generico punto del link i rispetto al baricentro, espressa nel sistema di riferimento base. Poichè la posizione del link i dipende dalla configurazione assunta dal manipolatore, *le matrici J ed I sono in generale funzioni delle variabili di giunto q*.

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

- In definitiva l'energia cinetica di un corpo rigido è data da
$$K = \frac{1}{2} m v_C^{\mathrm{T}} v_C + \frac{1}{2} \omega^{\mathrm{T}} I \omega$$
dove entrambi i termini dipendono solo dalla velocità del corpo, ma *non dal sistema di riferimento in cui questa velocità è espressa*. Questo fa sì che la scelta del sdr in cui calcolare K possa essere fatta in base ad un criterio di "semplicità"
- Per il link i-esimo, si considera solitamente anzichè il sistema di riferimento base, un *sdr baricentrico con assi paralleli a quello del giunto i-1*
- La matrice d'inerzia I risulta *costante* e facilmente calcolabile in base alle caratteristiche geometriche del link stesso
- La velocità di rotazione ω è in genere nota nel sdr base, e quindi si deve effettuare una trasformazione del tipo $R^{\mathrm{T}}\omega$, essendo R la matrice di rotazione tra il sdr baricentrico e quello base
$\Rightarrow$ *nota dalla cinematica del manipolatore!!*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

In definitiva, l'energia cinetica di un manipolatore è determinata quando per ciascun link sono noti:

- la *massa m_i* del link
- la *matrice d'inerzia I_i*, calcolata in un sistema di riferimento baricentrico dove assume un'espressione costante $\tilde{I}_i$
- la *velocità di traslazione v_{Ci} del baricentro* e di *rotazione ω_i* del link
- la *matrice R_i di rotazione* tra il sdr baricentrico solidale col link e quello base (inerziale)

ed assume la seguente espressione:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_{Ci}^{\mathrm{T}} v_{Ci} + \frac{1}{2} \omega_i^{\mathrm{T}} R_i \tilde{I}_i R_i^{\mathrm{T}} \omega_i$$

Per l'effettivo calcolo delle equazioni dinamiche, rimane a questo punto da esprimere le velocità di traslazione dei baricentri e di rotazione dei diversi link del manipolatore *in funzione delle coordinate di Lagrange*, cioè delle *variabili di giunto*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

- Si è visto che tramite lo Jacobiano può essere espressa la velocità dell'end-effector come funzione delle velocità di giunto $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Questa tecnica può essere utilizzata anche per un generico punto del manipolatore, ed in particolare per i baricentri p_{Ci}

$$p_{Ci} = J^i_{v1}\dot{q}_1 + J^i_{v2}\dot{q}_2 + \cdots + J^i_{vi}\dot{q}_i = J^i_v\dot{q}$$

$$\omega_i = J^i_{\omega 1}\dot{q}_1 + J^i_{\omega 2}\dot{q}_2 + \cdots + J^i_{\omega i}\dot{q}_i = J^i_\omega\dot{q}$$

- Per un manipolatore con n link, allora:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{n}\left[m_i {J^i_v}^{\mathrm{T}}(q)J^i_v(q) + {J^i_\omega}^{\mathrm{T}}(q)R_i(q)\tilde{I}_i R_i^{\mathrm{T}}(q)J^i_\omega(q)\right]\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\dot{q}^{\mathrm{T}}M(q)\dot{q} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}M_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j \end{aligned}$$

- $M(q)$ è una matrice di dimensioni $n \times n$, simmetrica, definita positiva e dipendente dalla configurazione del manipolatore
  $\Rightarrow$ *$M(q)$ è detta matrice d'inerzia*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Energia potenziale

- Nel caso di corpi rigidi, la sola energia potenziale che viene considerata è dovuta alla *gravità*, espressa dal vettore g. Per il generico link i:

$$P_i = \int_{L_i} g^{\mathrm{T}} p \,\mathrm{d}m = g^{\mathrm{T}} \int_{L_i} p \,\mathrm{d}m = g^{\mathrm{T}} p_{Ci} m_i$$

- Per il manipolatore vale allora

$$P = \sum_{i=1}^{n} g^{\mathrm{T}} p_{Ci} m_i$$

- Se nel sistema fossero presenti *link flessibili*, si dovrebbero considerare ulteriori contributi derivanti dalle *forze elastiche*

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

- Vediamo come risultano le *equazioni dinamiche di un manipolatore*. Si era ottenuto:

$$\psi_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \qquad k = 1, \ldots, n$$

- Dalla definizione di funzione Lagrangiana si ha:

$$\mathcal{L} = K - P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n} g^{\mathrm{T}} p_{Ci} m_i$$

- Si deduce la seguente forma delle *equazioni del moto:*

$$\sum_{j=1}^{n} M_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{kji}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \psi_k \qquad k = 1, \ldots, n$$

Modello dinamico di un manipolatore

Eulero–Lagrange

I termini $M_{kj}(q)$, $h_{ijk}(q)$, $g_k(q)$ dipendono solo dalle posizioni di giunto, e quindi sono calcolabili in modo relativamente semplice una volta nota la configurazione del manipolatore.

Per essi si ha la seguente *interpretazione fisica:*

- M_{kk} rappresenta il momento d'inerzia in una data configurazione all'asse del giunto k-esimo, quando tutti gli altri giunti sono bloccati
- M_{kj} rappresenta gli *accoppiamenti d'inerzia*, e considera gli effetti dell'accelerazione del giunto j sul giunto k
- $h_{kjj}\dot{q}_j^2$ rappresenta gli *effetti centrifughi* sul giunto k indotti dalla velocità del giunto j
- $h_{kji}\dot{q}_i\dot{q}_j$ rappresenta gli *effetti di Coriolis* sul giunto k generati dalle velocità dei giunti i e j
- g_k rappresenta il *momento generato dalla forza di gravità* sul giunto k agente sul manipolatore nella data configurazione

Modello dinamico di un manipolatore

Eulero–Lagrange

- Ponendo in forma matriciale le n equazioni

$$\sum_{j=1}^{n} M_{kj}(q)\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{kji}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k(q) = \psi_k \qquad k = 1, \dots, n$$

  si ottiene

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a$$

  che viene assunta come *modello dinamico del manipolatore*

- Il termine $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{kji}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$ può essere scritto nella forma $C(q,\dot{q})\dot{q}$ in diversi modi. In particolare, per la matrice $C(q,\dot{q})$ può essere considerata qualsiasi matrice i cui elementi soddisfano la relazione:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\dot{q}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{kji}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j$$

- Il modello dinamico di un manipolatore, in generale non lineare e con accoppiamenti in q, $\dot{q}$ e $\ddot{q}$, risulta *lineare nei parametri dinamici caratteristici* (masse, inerzie, attriti) dei link

$$Y(q,\dot{q},\ddot{q})\alpha = \tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

- Una possibile definizione degli elementi della matrice $C(q,\dot{q})$ è la seguente (*simboli di Christoffel* di prima specie):

$$c_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial M_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k}\right) \qquad [C(q,\dot{q})]_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_i$$

- *Proprietà.* La matrice $N(q,\dot{q})$ definita come

$$N(q,\dot{q}) = \dot{M}(q,\dot{q}) - 2C(q,\dot{q})$$

  è tale che $N^{\mathrm{T}}(q,\dot{q}) = -N(q,\dot{q})$

- Conseguentemente, si ha che

$$\xi^{\mathrm{T}} N(q,\dot{q})\xi = 0 \qquad \forall \xi$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

- Vale però la condizione

$$q^{\mathrm{T}} N(q, \dot{q}) \dot{q} = 0$$

per qualsiasi scelta della matrice $C(q, \dot{q})$. Questa equazione deriva dal principio di conservazione dell'energia: *la derivata totale dell'energia cinetica deve essere uguale alla potenza generata da tutte le forze agenti ai giunti del manipolatore*, ovvero:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{q}^{\mathrm{T}} M \dot{q} \right) = \dot{q}^{\mathrm{T}} \left[\tau - D\dot{q} - g(q) - J^{\mathrm{T}} F \right]$$

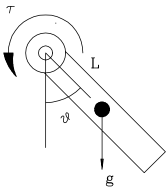
- Infatti, derivando il primo membro si ha:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{q}^{\mathrm{T}} M \dot{q} \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^{\mathrm{T}} \dot{M} \dot{q} + \dot{q}^{\mathrm{T}} M \ddot{q}$$

e quindi ...

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Esempio: Manipolatore a 1 dof



Siano:

- θ la variabile di giunto,
- τ la coppia applicata allo snodo,
- m la massa,
- L la distanza tra il centro di massa e il giunto,
- d il coefficiente di attrito viscoso,
- I il momento d'inerzia del sistema attorno all'asse di rotazione.

Il modello dinamico è dato da:

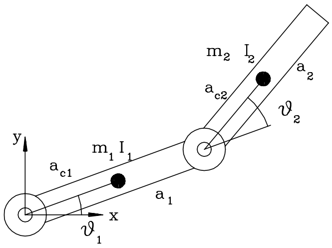
$$I\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + mgL \sin\theta = \tau$$

Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Esempio: Manipolatore a 2 dof

Siano:

- θ_i la variabile del giunto i-esimo;
- m_i la massa del link i-esimo;
- $\tilde{I}_i$ il momento d'inerzia del link i attorno all'asse che passa per il centro di massa e parallelo all'asse z;
- a_i la lunghezza del link i-esimo;
- a_{Ci} la distanza tra il giunto i ed il centro di massa del link i-esimo;
- τ_i coppia agente sul giunto i;
- g forza di gravità lungo l'asse y;
- P_i l'energia potenziale e K_i l'energia cinetica associate al link i.



Modello dinamico di un manipolatore
Eulero–Lagrange

Esempio: Manipolatore a 2 dof

Il modello dinamico è espresso da:

$$
\begin{aligned}
[m_1 a_{C1}^2 + m_2(a_1^2 + a_{C2}^2 + 2a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2(a_{C2}^2 + a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{I}_2]\ddot{\theta}_2 & \\
- m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_2^2 - 2 m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 & \\
+ (m_1 a_{C1} + m_2 a_1) g C_1 + m_2 g a_{C2} C_{12} & = \tau_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[m_2(a_{C2}^2 + a_1 a_{C2} C_2) + \tilde{I}_2]\ddot{\theta}_1 + [m_2 a_{C2}^2 + \tilde{I}_2]\ddot{\theta}_2 & \\
+ m_2 a_1 a_{C2} S_2 \dot{\theta}_1^2 & \\
+ m_2 g a_{C2} C_{12} & = \tau_2
\end{aligned}
$$

Modello dinamico di un manipolatore

Eulero–Lagrange

Ulteriori considerazioni

Nella derivazione del modello dinamico, non si è tenuto conto del *sistema di attuazione*, costituito da

- motori
- sistema di trasmissione

Il sistema di attuazione contribuisce agli effetti dinamici in vari modi:

- cambiando i parametri di inerzie e masse dei link, nel caso in cui i motori siano installati sui bracci mobili del robot
- introducendo dinamiche proprie (elettromeccaniche) che, nel caso di progetti meccanici particolarmente buoni, possono non essere del tutto trascurabili
- introducendo nel sistema ulteriori effetti non lineari come giochi, attriti ed elasticità

Tutti questi effetti possono essere considerati introducendo opportune modifiche alle equazioni dinamiche derivate in precedenza

Modello dinamico di un manipolatore
Newton–Eulero

Basato sul bilancio delle forze e coppie agenti sul generico link del manipolatore. Si ottiene una *formulazione ricorsiva* delle equazioni: in avanti per il calcolo della propagazione delle velocità ed accelerazioni ed all'indietro per il calcolo della propagazione delle forze e coppie. Ci si basa sulle:

1. equazione di Newton, o *teorema della quantità di moto:*

$$f = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$$

   dove m è la massa del corpo, v la velocità lineare, f la somma delle forze esterne applicate ed mv la quantità di moto. Poichè in robotica si possono ritenere le masse costanti, si ha la ben nota $f = ma$

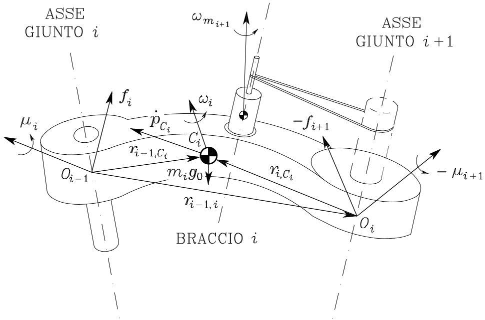
2. equazione di Eulero, o *teorema del momento della quantità di moto:*

$$n = \frac{\mathrm{d}\left({}^{0}\boldsymbol{I}\,{}^{0}\omega\right)}{\mathrm{d}t}$$

   dove ${}^{0}I$ è il momento d'inerzia del corpo espresso in un sdr inerziale FF0 con origine nel centro di massa, ${}^{0}\omega$ la velocità di rotazione, n la somma delle coppie applicate al corpo rigido

Modello dinamico di un manipolatore

Newton–Eulero



- *equazione di Newton:* $f_i - f_{i-1} + m_i g = m_i \ddot{p}_{Ci}$
- *equazione di Eulero:* $\mu_i + f_i \times r_{i-1,C_i} - \mu_{i+1} - f_{i+1} \times r_{i,C_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i \omega_i)$

  $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_i \omega_i) = I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \times (I_i \omega_i)$

Modello dinamico di un manipolatore
Newton–Eulero

- Il metodo di Newton-Eulero *non fornisce equazioni di moto in forma chiusa*: il moto di ciascun link è accoppiato al moto degli altri dalle relazioni cinematiche di velocità ed accelerazione
- Una volta note le *posizioni, velocità ed accelerazioni ai giunti*, si possono calcolare le analoghe grandezze per i *link*, e quindi tramite le equazioni di Newton-Eulero si calcolano le *forze/coppie agenti sui link* note le *forze/coppie applicate all'estremità del manipolatore*
- Per il calcolo delle velocità ed accelerazioni si inizia dal link prossimale e si procede ricorsivamente sino al link distale
- Si ottiene quindi un *algoritmo ricorsivo:*
  - ricorsione in avanti per la propagazione di velocità ed accelerazioni
  - ricorsione all'indietro per la propagazione di forze e coppie
  - calcolo delle forze generalizzate applicate ai giunti

Modello dinamico di un manipolatore
Newton–Eulero

1. note le *condizioni iniziali* ω_0, $\ddot{p}_0 - g_0$, $\dot{\omega}_0$ (velocità angolare, accelerazione del baricentro ed accelerazione angolare del link L_0), si calcolano le velocità angolari, accelerazioni lineari dei baricentri ed accelerazioni angolari ω_i, $\dot{\omega}_i$, $\ddot{p}_i$, $\ddot{p}_{C_i}$ dei *link L_i, $i = 1, \dots, n$ successivi*
2. note le *condizioni terminali* f_{n+1}, μ_{n+1} (forza e coppia applicate all'estremità del manipolatore), si calcolano le forze e coppie f_i, μ_i *applicate a ciascun link L_i*
3. le *forze generalizzate* τ_i, $i = 1, \dots, n$, si calcolano tramite

$$\tau_i = \begin{cases} \mu_i^{\mathrm{T}} \hat{z}_{i-i} + F_{vi}\dot{\theta}_i + f_{si} & \text{(giunto rotoidale)} \\ f_i^{\mathrm{T}} \hat{z}_{i-1} + F_{vi}\dot{d}_i + f_{si} & \text{(giunto prismatico)} \end{cases}$$

Nel calcolo delle forze generalizzate τ_i si sono considerati anche eventuali effetti di *attrito viscoso e statico al giunto*

Modello dinamico di un manipolatore
Considerazioni conclusive

Le formulazioni di Lagrange e di Newton-Eulero permettono di calcolare la dinamica di un manipolatore. Dal punto di vista del risultato finale, *i due approcci sono equivalenti.*

Formulazione di Lagrange

- considera il manipolatore nel suo insieme e si basa sulla *funzione di Lagrange* $\mathcal{L} = K - P$ (differenza tra energia cinetica e potenziale)
- è più facilmente comprensibile e più sistematica
- fornisce le equazioni del moto in forma chiusa (problema del controllo)
- è superiore se si vogliono considerare effetti meccanici più complessi come per esempio la *deformazione elastica* dei link

Formulazione di Newton-Eulero

- è essenzialmente una formulazione ricorsiva, ogni link è considerato separatamente e si valutano gli accoppiamenti di velocità, accelerazioni e forze tra di loro
- è migliore per il calcolo delle coppie necessarie per avere una data traiettoria
- si presta meglio a *realizzazioni computazionali (simulazione)*, anche se pure in questo aspetto con una opportuna formulazione il metodo di Lagrange è sostanzialmente equivalente

Modello dinamico di un manipolatore
Considerazioni conclusive

Si erano visti i due problemi della dinamica:

- *Problema dinamico diretto*, che consiste nel calcolo della evoluzione di $\ddot{q}(t)$ (e quindi di $q(t)$, $\dot{q}(t)$), dato il vettore di forze generalizzate (coppie e/o forze) $\tau(t)$ applicato ai giunti, le eventuali forze applicate all'estremità, e le condizioni iniziali $q(t = t_0)$, $\dot{q}(t = t_0)$
- *Problema dinamico inverso*, che consiste nel determinare il vettore $\tau(t)$ necessario per ottenere una traiettoria desiderata $\ddot{q}(t)$, $\dot{q}(t)$, $q(t)$, note le eventuali forze applicate all'estremità

Il problema diretto è di rilievo in *simulazione*, quando si vuole ricavare il moto del manipolatore conseguente all'applicazione di certe coppie ai giunti e forze all'estremità. Le velocità e posizioni si ricavano integrando un sistema di equazioni differenziali non lineari.

Con la formulazione di Lagrange si ha

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a$$

e quindi noto per $t = t_k$ lo stato del sistema $q(t_k)$, $\dot{q}(t_k)$, si calcola $\ddot{q}(t_k)$ da

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)\left[\tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a - C(q, \dot{q})\dot{q} - D\dot{q} - g(q)\right]$$

e con integrazione numerica le nuove variabili $q(t_{k+1})$, $\dot{q}(t_{k+1})$, $t_{k+1} = t_k + \Delta t$.

Modello dinamico di un manipolatore
Considerazioni conclusive

- Può essere di interesse ricavare il *modello dinamico nello spazio operativo* anziché in quello di giunto. Per semplicità, si faccia di seguito riferimento ad un manipolatore a 6 dof non in configurazione singolare
- Da $M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + D\dot{q} + g(q) = \tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a$, sappiamo che

$$\ddot{q} = M^{-1}(q)\left[\tau + J^{\mathrm{T}}(q)F_a - C(q,\dot{q})\dot{q} - D\dot{q} - g(q)\right]$$

- D'altra parte, derivando rispetto al tempo $\dot{x} = J(q)\dot{q}$, si ottiene:

$$\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q)\dot{q}$$

e quindi

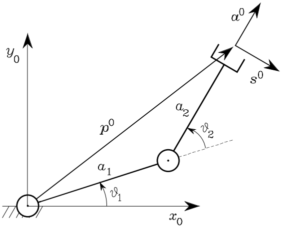
$$\hat{M}(x)\ddot{x} + \hat{C}(x,\dot{x})\dot{x} + \hat{D}\dot{x} + \hat{g}(x) = F + F_a, \qquad \tau = J^{\mathrm{T}}F$$

con:

$$\begin{aligned}
\hat{M} &= (JM^{-1}J^T)^{-1} = J^{-T}MJ^{-1} \\
\hat{C} &= \hat{M}(JM^{-1}CJ^{-1} - \dot{J}J^{-1}) = J^{-T}CJ^{-1} - \hat{M}\dot{J}J^{-1} \\
\hat{g} &= \hat{M}JM^{-1}g = J^{-T}g
\end{aligned}$$

Esercizi
Cinematica dei manipolatori

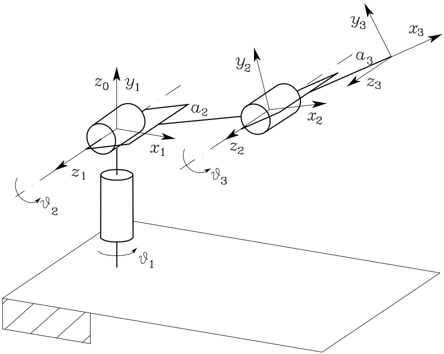
Manipolatore planare 2-dof



1. Scrivere le seguenti funzioni Matlab©:
   - `fkine_2dof(q)`: cinematica diretta;
   - `ikine_2dof(q,sol)`: cinematica inversa;
   - `jacob_2dof(q)`: calcolo dello Jacobiano del manipolatore;
2. Calcolare le configurazioni nello spazio di giunto che consentono di far percorrere una retta nello spazio operativo
   - verificare il comportamento del robot;
   - mostrare l'evoluzione degli ellissoidi di velocità e forza al variare della configurazione

Esercizi
Cinematica dei manipolatori

Manipolatore antropomorfo 3-dof *(facoltativo!)*

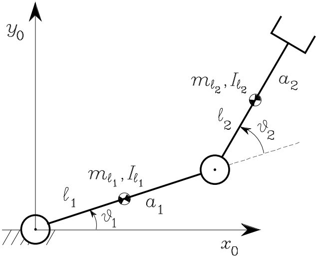


Scrivere le seguenti funzioni Matlab©:

- `fkine_3dof(q)`: cinematica diretta;
- `ikine_3dof(q,sol)`: cinematica inversa (!!)

Esercizi
Dinamica dei manipolatori

Manipolatore planare 2-dof



1. Scrivere il *modello dinamico*, sia nel caso che la forza di gravità agisca nelle direzione z, sia nella direzione $-y$. Si includano pure gli effetti di attrito viscoso e l'effetto di eventuali forze esterne
2. Scrivere il codice Matlab© per la *simulazione* del manipolatore, con ingressi:
   - le coppie ai giunti τ_1 e τ_2
   - (eventuali) forze (f_x ed f_y) e coppie (μ) applicate all'estremità

Esercizi
Dinamica dei manipolatori

Simulazione di sistemi dinamici

- `[T,Y] = solver(odefun,tspan,y0,options)` dove `solver` può essere `ode45`, `ode23`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` o `ode23tb`
- Simulazione del moto di un corpo rigido senza forze esterne:
  - ```
    function dy = rigid(t,y)
    dy = zeros(3,1); % a column vector
    dy(1) = y(2) * y(3);
    dy(2) = -y(1) * y(3);
    dy(3) = -0.51 * y(1) * y(2);
    ```
  - `options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5])`
  - `[T,Y] = ode45(@rigid,[0 12],[0 1 1],options);`
  - il risultato della simulazione può essere graficato nel modo seguente:

    `plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'-.',T,Y(:,3),'.')`
- Per quanto riguarda il modello di un manipolatore, sarà necessario includere anche ingressi esterni e prevedere "altre" uscite

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u(t) \\ y = h(x,t) \end{cases} \qquad x(0) = x_0$$
    ```