Teoria dei Giochi – Prova del 13 Febbraio 2018
CONSEGNARE SOLO QUESTO FOGLIO: PENALITÀ PER CHI CONSEGNA ALTRI FOGLI
NGR≡ Non Giustificare la Risposta

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________

Esercizio 1 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ S1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ S2 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ S3 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ S4 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per $G1$ e $G2$:
$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{4}, \xi_1^4 = \frac{3}{4}$; $(iii): \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$;
$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj): \xi_2^1 = \frac{1}{8}, \xi_2^2 = \frac{7}{8}, \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{4}, \xi_2^2 = \frac{3}{4}, \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**
Rispettivamente: (i) 0; (ii) $-\frac{3}{4}$; (iii) 0; (j) $\frac{3}{2}$; (jj) $\frac{3}{4}$; (jjj) $\frac{3}{2}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**
Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**
L'incrocio delle strategie conservative determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**
Il valore del gioco è $-\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo, dove x è un numero razionale qualsiasi (non necessariamente intero!):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & D & E & F \\ A & 10 & 8-x & 6 \\ B & 6+2x & 6 & 8 \\ C & 14-x & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

2.1 Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). **NGR**
Per il primo giocatore C è una strategia dominante per $x = 4$. Per il secondo giocatore D è una strategia dominante per $1 \leq x \leq 10$.

2.2 Indicare quali sono, al variare di x, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). **NGR**
(A,D) per $x \in [2,4]$; (B,D) per $x \in [1,2]$; (C,D) per $x \in [4,10]$.

2.3 Porre $x = 0$. Indicare quali sono, in questo caso, le strategie conservative per il primo e per il secondo giocatore (se ve ne sono). **NGR**
B per il primo giocatore che nel caso peggiore paga 8; D per il secondo giocatore che nel caso peggiore vince 6.

2.4 Assumere nuovamente che $x = 0$ e considerare il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, per ognuna delle affermazioni seguenti dire se essa è vera o falsa **NGR**:

1 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 3. ☐ VERO ■ FALSO

2 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 4. ☐ VERO ■ FALSO

3 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 7. ■ VERO ☐ FALSO

4 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 8. ■ VERO ☐ FALSO

5 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 10. ☐ VERO ■ FALSO

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 11 deputati, di cui 5 provengono da una regione A, 5 da una regione B e uno da una regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una stretta maggioranza di tutti deputati (quindi almeno 6) che includa necessariamente il deputato C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley del deputato di C è pari a

$$S_c(v) = \frac{6 \cdot 10!}{11!} = \frac{6}{11}.$$

I deputati di A e B sono indistinguibili (per via dell'assioma deli giocatori indifferenti). Il loro valore è quindi pari a:

$$S_{na}(v) = \frac{1 - \frac{6}{11}}{10} = \frac{1}{22}.$$

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) È dato un insieme N di n stand gastronomici che condividono uno spazio comune in cui gli utenti possono consumare quanto acquistato nei diversi stand. La pulizia dello spazio comune è affidata ai diversi stand e ogni stand $i \in N$ deve scegliere quanto investire nella pulizia dello spazio comune da un insieme di 7 possibili standard $s_i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (lo standard 7 è quello con pulizia più accurata, mentre il livello 1 quello a pulizia meno accurata). Il payoff di ogni stand, espresso in forma di utilità è pari a:

$U_i(s_1, s_2, ..., s_n) = 70 \cdot \max\{s_1, s_2, ..., s_n\} - 10 \cdot s_i$

ovvero tiene conto sia del costo dello standard s_i adottato dal singolo stand (il termine $10 \cdot s_i$), che della pulizia dello spazio comune percepita dagli utenti (che è un'utilità ed è pari al termine $70 \cdot \max\{s_1, s_2, ..., s_n\}$, cioè lo standard di pulizia percepito è proporzionale al massimo tra quelli adottati dai singoli stand).

4.1 Indicare quali sono gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

I sette stati in cui $s_i = 7$ e $s_j = 1, j \neq i$, per $i = 1..7$.

4.2 Indicare quali sono le strategie debolmente dominanti, se ve ne sono. **NGR**

Non ve ne sono.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 10 min) La seguente istanza dell'House Allocation Problem con 5 giocatori è descritta in modo parziale: per ogni giocatore, diverso dal primo, è specificata solo la seconda casa preferita (e per il primo neanche quella). È possibile scegliere la casa preferita di ciascun giocatore (ovvero la prima di ciascun ordine) in modo che *qualunque* siano i completamenti delle graduatorie (ovvero le case dalla terza alla quinta di ogni graduatoria) l'algoritmo TTCA impiega esattamente 5 iterazioni? Per rispondere, riporta i soli valori $x_1, \ldots, x_5$ senza giustificare la risposta.

- Giocatore 1: $\{x_1, \ldots\}$;
- Giocatore 2: $\{x_2, 2, \ldots\}$;
- Giocatore 3: $\{x_3, 3, \ldots\}$;
- Giocatore 4: $\{x_4, 4, \ldots\}$;
- Giocatore 5: $\{x_5, 5, \ldots\}$.

Una soluzione è la seguente: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4$, ma ce ne sono molte altre simili.

Esercizio 6 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Una spiaggia è lunga 1 km e i bagnanti sono distribuiti su tutta la sua lunghezza in modo uniforme. Quattro barlady $D_1, \ldots, D_4$ possono aprire un proprio chiosco sulla spiaggia e ognuna può scegliere dove posizionare il chiosco (eventualmente anche nello stesso punto, cioè uno affianco all'altro). I quattro chioschi sono agli occhi dei bagnanti non distinguibili e ogni bagnante si recherà semplicemente al chiosco più vicino (assumete che le situazioni di parità siano risolte con probabilità uniforme). Naturalmente ogni barlady vuole massimizzare il numero di bagnanti serviti presso il proprio chiosco. Procedendo in modo intuitivo e senza giustificare la risposta, per ognuna delle affermazioni seguenti dire se essa è vera o falsa **NGR, penalità per risposte errate**:

1 Se tutte le barlady si posizionano al centro della spiaggia, è un equilibrio di Nash. ☐ VERO ■ FALSO

2 Se due barlady si posizionano all'inizio della spiaggia e due alla fine, è un equilibrio di Nash. ☐ VERO ■ FALSO

3 Se le barlady si posizionano rispettivamente a 125, 375, 625 e 825 mt dall'inizio della spiaggia, è un equilibrio di Nash. ☐ VERO ■ FALSO

4 Se due barlady si posizionano a 250 mt dall'inizio della spiaggia e due a 750 mt, è un equilibrio di Nash. ■ VERO ☐ FALSO