

Esercizio 1 Si considerino 5 partiti politici ognuno dei quali possiede la percentuale di seggi w_i :

$$\begin{array}{ll} A & w_A = 0.15 \\ B & w_B = 0.1 \\ C & w_C = 0.3 \\ D & w_D = 0.25 \\ E & w_E = 0.2 \end{array}$$

Il sistema di votazione prevede il vincolo di coalizione (ovvero i parlamentari di ogni coalizione votano allo stesso modo) e l'approvazione di una legge richiede la maggioranza semplice del numero di parlamentari (seggi), ossia $N = \{A, B, C, D, E\}$ e $\forall T \subseteq N$ $v(T) = 1$ se e solo se $\sum_{i \in T} w_i > 0.5$; altrimenti $v(T) = 0$. Determinare il valore di Shapley di ciascun partito.

Esercizio 2 Per ciascuno dei seguenti giochi cooperativi con n giocatori si dica se la funzione v è superadditiva e in caso di risposta affermativa si determini il valore di Shapley di ogni singolo giocatore. Sia $T \subseteq N$ una qualunque coalizione:

- (i) $v(T) = 1$ se $|T| \geq n - 2$; $v(T) = 0$ altrimenti.
- (ii) $v(T) = 1$ se $|T|$ è pari; $v(T) = 0$ altrimenti.
- (iii) Siano $i \in N$ e $j \in N$ due giocatori fissati, $i \neq j$. $v(T) = 1$ se $i \in T$, oppure $j \in T$, oppure $i, j \in T$; $v(T) = 0$ altrimenti.
- (iv) Si assuma ora che l'insieme dei giocatori sia diviso in m donne e $n - m$ uomini. $v(T) = 1$ se il numero di donne presenti nella coalizione T è strettamente maggiore di $\frac{m}{2}$; $v(T) = 0$ altrimenti.

Esercizio 1 (i) Sappiamo che il valore di Shapley per ogni giocatore $i \in N$ può essere determinato utilizzando la formula:

$$S_i(v) = \sum_{T \subseteq N: i \in T} \frac{(|T| - 1)! (n - |T|)!}{n!} (v(T) - v(T \setminus \{i\})) = \sum_{T \subseteq N: i \in T} a(|T|, n) (v(T) - v(T \setminus \{i\}))$$

Innanzitutto determiniamo i coefficienti $a(|T|, n)$:

$$\begin{aligned} a(1, 5) &= \frac{0!4!}{5!} = \frac{1}{5} \\ a(2, 5) &= \frac{1!3!}{5!} = \frac{1}{20} \\ a(3, 5) &= \frac{2!2!}{5!} = \frac{1}{30} \\ a(4, 5) &= \frac{3!1!}{5!} = \frac{1}{20} \\ a(5, 5) &= \frac{4!0!}{5!} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ora restano da svolgere i calcoli per ogni singolo giocatore.

$$\begin{aligned} S_A(v) &= \frac{1}{5} (v(\{A\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20} (v(\{A, B\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, C\}) - v(\{C\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, D\}) - v(\{D\})) + \\ &+ \frac{1}{20} (v(\{A, E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, C\}) - v(\{B, C\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, D\}) - v(\{B, D\})) + \\ &+ \frac{1}{30} (v(\{A, B, E\}) - v(\{B, E\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, C, D\}) - v(\{C, D\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, C, E\}) - v(\{C, E\})) + \\ &+ \frac{1}{30} (v(\{A, D, E\}) - v(\{D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, D\}) - v(\{B, C, D\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, E\}) - v(\{B, C, E\})) \\ &+ \frac{1}{20} (v(\{A, B, D, E\}) - v(\{B, D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, C, D, E\}) - v(\{C, D, E\})) + \\ &+ \frac{1}{5} (v(\{A, B, C, D, E\}) - v(\{B, C, D, E\})) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_B(v) &= \frac{1}{5} (v(\{B\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20} (v(\{A, B\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, C\}) - v(\{C\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, D\}) - v(\{D\})) + \\ &+ \frac{1}{20} (v(\{B, E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, C\}) - v(\{A, C\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, D\}) - v(\{A, D\})) + \\ &+ \frac{1}{30} (v(\{A, B, E\}) - v(\{A, E\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, D\}) - v(\{C, D\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, E\}) - v(\{C, E\})) + \\ &+ \frac{1}{30} (v(\{B, D, E\}) - v(\{D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, D\}) - v(\{A, C, D\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, E\}) - v(\{A, C, E\})) \\ &+ \frac{1}{20} (v(\{A, B, D, E\}) - v(\{A, D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, C, D, E\}) - v(\{C, D, E\})) + \\ &+ \frac{1}{5} (v(\{A, B, C, D, E\}) - v(\{A, C, D, E\})) = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_C(v) &= \frac{1}{5} (v(\{C\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20} (v(\{A, C\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, C\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20} (v(\{C, D\}) - v(\{D\})) + \\ &+ \frac{1}{20} (v(\{C, E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, C\}) - v(\{A, C\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, C, D\}) - v(\{A, D\})) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{30} (v(\{A, C, E\}) - v(\{A, E\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, D\}) - v(\{B, D\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, E\}) - v(\{B, E\})) + \\
& + \frac{1}{30} (v(\{C, D, E\}) - v(\{D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, D\}) - v(\{A, B, D\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, E\}) - v(\{A, B, E\})) \\
& + \frac{1}{20} (v(\{B, C, D, E\}) - v(\{B, D, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, C, D, E\}) - v(\{A, D, E\})) + \\
& + \frac{1}{5} (v(\{A, B, C, D, E\}) - v(\{A, B, D, E\})) = \\
& = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_D(v) &= \frac{1}{5} (v(\{D\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20} (v(\{A, D\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, D\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20} (v(\{C, D\}) - v(\{C\})) + \\
& + \frac{1}{20} (v(\{D, E\}) - v(\{E\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, D\}) - v(\{A, B\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, C, D\}) - v(\{A, C\})) + \\
& + \frac{1}{30} (v(\{A, D, E\}) - v(\{A, E\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, D\}) - v(\{B, C\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, D, E\}) - v(\{B, E\})) + \\
& + \frac{1}{30} (v(\{C, D, E\}) - v(\{C, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, D\}) - v(\{A, B, C\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, D, E\}) - v(\{A, B, E\})) \\
& + \frac{1}{20} (v(\{B, C, D, E\}) - v(\{B, C, E\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, C, D, E\}) - v(\{A, C, E\})) + \\
& + \frac{1}{5} (v(\{A, B, C, D, E\}) - v(\{A, B, C, E\})) = \\
& = \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_E(v) &= \frac{1}{5} (v(\{E\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{20} (v(\{A, E\}) - v(\{A\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, E\}) - v(\{B\})) + \frac{1}{20} (v(\{C, E\}) - v(\{C\})) + \\
& + \frac{1}{20} (v(\{D, E\}) - v(\{D\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, B, E\}) - v(\{A, B\})) + \frac{1}{30} (v(\{A, C, E\}) - v(\{A, C\})) + \\
& + \frac{1}{30} (v(\{A, D, E\}) - v(\{A, D\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, C, E\}) - v(\{B, C\})) + \frac{1}{30} (v(\{B, D, E\}) - v(\{B, D\})) + \\
& + \frac{1}{30} (v(\{C, D, E\}) - v(\{C, D\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, C, E\}) - v(\{A, B, C\})) + \frac{1}{20} (v(\{A, B, D, E\}) - v(\{A, B, D\})) \\
& + \frac{1}{20} (v(\{A, C, D, E\}) - v(\{A, C, D\})) + \frac{1}{20} (v(\{B, C, D, E\}) - v(\{B, C, D\})) + \\
& + \frac{1}{5} (v(\{A, B, C, D, E\}) - v(\{A, B, C, D\})) = \\
& = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = \frac{11}{60}
\end{aligned}$$

Si può verificare l'esattezza del risultato verificando che la somma dei valori di Shapley di tutti i giocatori è pari a 1.

Esercizio 2

(i) È facile verificare per $n \leq 4$ la funzione $v(T)$ non è superadditiva, perché è possibile prendere due sottoinsiemi disgiunti di N , T_1 e T_2 , con $T_1 \geq n - 2$ e $T_2 \geq n - 2$ tali che $v(T_1) + v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$ violando così la condizione di superaddittività. Sia quindi $n \geq 5$. Per calcolare $S_i(v)$ utilizziamo:

$$S_i(v) = \frac{1}{n!} (\text{n.ro permutazioni: } A_i^p \text{ è vincente e } A_i^p \setminus \{i\} \text{ è perdente}), \forall i \in N$$

Le permutazioni tali che A_i^p è vincente e $A_i^p \setminus \{i\}$ è perdente sono tutte quelle in cui i è in posizione $(n - 2) - \text{esima}$ e sono quindi in numero $(n - 1)!$. Segue quindi che $S_i(v) = \frac{1}{n} \forall i \in N$.

(ii) In questo caso se $n > 3$ la funzione $v(T)$ non è superadditiva, perché è sempre possibile prendere due sottoinsiemi di N disgiunti di cardinalità pari, T_1 e T_2 , la cui unione ovviamente ha cardinalità pari. Si otterrebbe quindi $v(T_1) + v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$ violando così la condizione di superaddittività.

(iii) La funzione $v(T)$ non è superadditiva. Per dimostrarlo basta prendere un sottoinsieme T_1 tale che $i \in T_1$ ma $j \notin T_1$ ed un sottoinsieme T_2 tale che $j \in T_2$ ma $i \notin T_2$, in modo tale che T_1 e T_2 siano disgiunti; ovviamente si ha che $i \in T_1 \cup T_2$ e $j \in T_1 \cup T_2$, da cui $v(T_1) + v(T_2) = 2 > v(T_1 \cup T_2) = 1$.

(iv) Questo gioco è una variante del gioco a maggioranza semplice. È immediato verificare che la funzione $v(T)$ è superadditiva. Infatti se non fosse superadditiva dovremmo poter prendere due sottoinsiemi disgiunti di donne ciascuno con cardinalità strettamente maggiore di $\frac{m}{2}$, ma questo non è chiaramente possibile perché la cardinalità dell'insieme delle donne è pari a m . Per determinare il valore di Shapley di ciascun giocatore osserviamo preliminarmente che ciascun uomo è un giocatore inutile, infatti la sua presenza o meno all'interno della coalizione non modifica il valore della coalizione. A questo punto ci siamo ridotti ad un gioco a maggioranza semplice sull'insieme delle donne, il valore di Shapley è quindi $S_i(v) = 0 \forall i \in \text{Uomini}$ e $S_i(v) = \frac{1}{m} \forall i \in \text{Donne}$.