$E1$) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (2x_1(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + u \end{cases} \tag{1}$$

1. Si determini una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_0 = K_0 x$ tale che la matrice $S_0 = A + BK_0$ abbia tutti gli autovalori in -1.
2. Si determini la legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1 = K_1 x$ ottenuta eseguendo un passo dell'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [1 \;\; 0]^\top$.

$E2$) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (4x_1(t)^2 + 6x_2(t)^2 - 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{2}$$

1. Si determini una legge di controllo in retroazione dallo stato $u_0 = K_0 x$ tale che la matrice $S_0 = A + BK_0$ abbia tutti autovalori con parte reale negativa.
2. Si determini la legge di controllo in retroazione dallo stato $u_1 = K_1 x$ ottenuta eseguendo un passo dell'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [0 \;\; 1]^\top$.

$E3$) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (2x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 + u(t)^2) dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \tag{3}$$

Siano date $u_0 = K_0 x$, con $K_0 = [-2 \;\; -3]$, e

$$P_0 = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

tali che $P_0(A + BK_0) + (A + BK_0)^\top P_0 = -Q - K_0^\top K_0$. Si determini K_1 e P_1 mediante l'algoritmo di Kleinman e si verifichi che $J(u_1) \leq J(u_0)$ a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [1 \;\; 2]^\top$.