Teoria dei Giochi 2020/21

Sinossi

G. Oriolo *Quinta Sinossi*

- **AVVERTENZA**: Di seguito trovate alcuni appunti, poco ordinati e poco formali, che uso come traccia durante le lezioni. **Non sono assolutamente da considerarsi sostitutivi del materiale didattico.**
- **Riferimenti**: Non ci sono riferimenti per il bluffing game. Il poker di Kuhn è illustrato a pag 235-237 del testo di Chvatal.

1 Bluffing Game

- Descrizione del gioco: Io sono un giocatore tu sei il mio avversario. Svolgimento: 1) Entrambi mettiamo un chip di 1 euro. 2) Tu peschi da un mazzo di carte da poker una carta, l'unica cosa che conta è il colore, e il nero è vince sul rosso. 3) Decidi se scommettere un altro euro oppure passare: se passi io vinco e guadagno un euro, il tuo chip; 3.1) se hai scommesso io posso venire a vedere la tua carta o passare: se vengo a vederti e tu hai rosso (nero) tu vinci (perdi) 2 euro, il chip + rilancio; se passo tu vinci un euro, il chip.
- Formuliamo il gioco e vediamo come un gioco antagonistico. La prima osservazione è che possiamo assumere che se se tu hai pescato una carta rossa certamente scommetterai (a rigore questa affermazione andrebbe dimostrata). Segue che tu devi semplicemente decidere cosa fare quando peschi una carta nera e quindi hai a disposizione due strategie:

  1) (scommettere con la carta rossa e) scommettere con la carta nera: 2) (scommettere con la carta rossa e) passare con la carta nera.

  Osserviamo che la tua prima strategia prevede il bluff. Per quanto riguarda me, vincerò il gioco se tu passi quindi devo solo decidere cosa fare se tu scommetti e naturalmente ho a disposizione due strategie:

  1) vedere; 2) passare.

  Andiamo infine a studiare la matrice C dei tuoi payoff. Iniziamo studiando il valore di C_{11}. In questo stato, tu stai scommettendo sia se hai la carta rossa che quella nera e io sto vedendo il tuo punto. Assumendo che tu peschi una carta nera con probabilità 1/2 e una carta rossa con probabilità 1/2, la metà delle volte vinci due euro e la metà delle volte perdi due euro, quindi $C_{11} = 0$.

Passiamo al valore di C_{21}. In questo stato, tu stai scommettendo sia se hai la carta rossa che quella nera e io sto passando sempre. Io perdo un euro qualunque sia la tua carta, quindi $C_{12} = -1$.

Passiamo al valore di C_{12}. In questo stato, tu stai scommettendo se hai la carta rossa e passando con quella nera; io, se scommetti, vengo a vederti. Assumendo al solito che tu peschi una carta nera con probabilità 1/2 e una carta rossa con probabilità 1/2, la metà delle volte vinci due euro e la metà delle volte perdi un euro, quindi $C_{11} = -1/2$.

Infine vediamo il valore di C_{22}. In questo stato, tu stai scommettendo se hai la carta rossa e passando con quella nera; io, se scommetti, passo. Assumendo al solito che tu peschi una carta nera con probabilità 1/2 e una carta rossa con probabilità 1/2, la metà delle volte vinci un euro e la metà delle volte perdi un euro, quindi $C_{11} = 0$.

La matrice C è quindi la seguente:

	Vedere	*Passare*
Scommettere sempre	0	-1
Scommettere con rosso, passare con nero	$-1/2$	0

- In strategia pura entrambe le strategie sono conservative per te, perché nel caso peggiore perdi 0. Per quanto riguarda me, la strategie conservativa è vedere, e nel caso peggiore perdo 1/2. In strategia pura non ci sono quindi equilibri di Nash e strategie pure.
- Se analizziamo invece il gioco in strategia mista, è facile verificare che:
  - la tua strategia conservativa è giocare la prima strategia 1/3 delle volte e la seconda strategia 2/3 delle volte;
  - la mia conservativa è giocare la prima strategia 2/3 delle volte e la seconda strategia 1/3 delle volte;
  - il valore del gioco è - 1/3.
- Quindi in strategia mista tu hai a disposizione una strategia che ti permette di vincere in media almeno 1/3, mentre in strategia pura avevi solo la garanzia di non perdere: potere della randomizzazione!
- Inoltre la tua strategia conservativa prevede che 1/6 delle volte bluffi! (Giochi la prima strategia 1/3 delle volte, ma bluffi solo la metà delle volte che la giochi, quando hai la carta nera.)

2 Il poker di Kuhn

- Osservare come, indipendentemente dalle carte che ricevono i giocatori, esisitono 5 possibili svolgimenti del gioco: A passa, B passa: carta più alta vince 1; A passa, B gioca, A passa: B vince 1; A passa, B gioca, A gioca: carta più alta vince 2; A gioca, B passa: A vince 1; A gioca, B gioca: carta più alta vince 2.

- Osservare come, per ogni carta che riceve, il giocatore A ha tre possibili *scelte*: passare, e se B scommette, rinunciare; passare, e se B scommette, scommettere; scommettere. Per esempio A potrebbe decidere di utilizzare la prima scelta se ha un 1; la seconda se ha un 2; la terza se ha un 3: possiamo rappresentare questa *strategia* (pura) con il vettore (1,2,3). In alternativa A potrebbe decidere di utilizzare la terza scelta se ha un 1 (bluffando), la terza se ha un 2 e la seconda se ha un 3 (underbid): possiamo rappresentare questa *strategia* (pura) con il vettore (3,3,2). Naturalmente il numero di strategie possibili per A è pari a 27.

- Analogamente, per ogni carta che riceve, il giocatore B ha quattro possibili *scelte*: non scommettere in qualunque caso; passare se A passa, scomettere se A scommette; scommettere se A passa, passare se A scomette; scommettere in qualunque caso. Possiamo rappresentare quindi le strategie pure di A con una tripla in cui ogni elemento è un intero tra 1 e 4: naturalmente il numero di strategie possibili per B è pari a 64.

- Determiniamo il payoff di A nel caso in cui A giochi (3,1,2) e B giochi (1,2,4). Naturalmente, per quello che riguarda la distribuzione delle carte, ci sono 6 scenari possibili che assumiamo equiprobabili, ovvero con probabilità $\frac{1}{6}$. Segue che il payoff di A (in forma di utilità) è $-\frac{1}{3}$.

- A questo punto siamo in grado di formulare il gioco, con 27 strategie per il primo giocatore e 64 per il secondo e payoff come sopra. Tuttavia, se analizzassimo il gioco in strategia pura, al solito non troviamo equilibri di Nash e non riusciamo a dare al gioco un valore. Cosa succede in strategia mista?

3 Il poker di Kuhn in strategia mista

- In molti giochi bluffare (o fare underbid) è una possibilità importante. I risultati precedenti dimostrano che la strategia (mista) conservativa per giochi antagonistici è una strategia molto “solida”, la domanda quindi potrebbe essere: una strategia conservativa per un gioco antagonista può prevedere il bluff?

- Se estendiamo il poler di Kuhn in strategia mista, osserviamo che la strategia (mista) conservativa per il giocatore A è : (1,1,2) con valore $\frac{1}{3}$; (1,2,3) con valore $\frac{1}{2}$; (3,1,2) con valore $\frac{1}{6}$. Ovvero: con carta 1, 5 volte su 6 prima scelta e 1 volta su 6 terza scelta ; con carta 2, 1 volta su 2 prima scelta e 1 volta su 2 seconda scelta; con carta 3, 1 volta su 2 seconda scelta e 1 volta su 2 terza scelta. Il valore del gioco (in forma di costo) è $\frac{1}{18}$.

Per quanto riguarda il secondo giocatore, la strategia conservativa si traduce nelle seguenti scelte: con carta 1, 2 volte su 3 prima scelta e 1 volta su 3 terza scelta ; con carta 2, 2 volte su 3 prima scelta e 1 volta su 3 seconda scelta; con carta 3, sempre quarta scelta. Il valore del gioco è $\frac{1}{18}$, quindi le regole del gioco favoriscono leggermente il giocatore non di mano).

- Notare come la strategia conservativa preveda sia il bluff che l'underbid!

4 Cosa si conserva nel passaggio da un gioco puro a un gioco misto?

Consideriamo un gioco antagonistico finito in strategia pura. In generale:

- Non è detto che esistano equilibri di Nash in strategia pura e quindi non è detto che il gioco in strategia pura abbia un valore. Ma se ci sono, sono equilibri di Nash anche per il gioco misto e naturalmente il valore del gioco in strategia pura e mista sarà lo stesso; se non ci sono, il gioco misto avrà comunque equilibri di Nash e un valore.

- Non è detto che per un giocatore esista una strategia pure dominante, ma se esiste essa (espressa come vettore) è dominante anche per il gioco misto. Si noti tuttavia che non è detto che in strategia mista esistano strategie dominanti.

- In strategia pura, se il gioco è finito, esistono sempre strategie conservative: ma non è detto che queste siano strategie conservative per il gioco misto. Questo accade se e solo se, detta x_1 la strategia conservativa del primo giocatore e x_2 la strategia conservativa del secondo giocatore, vale $\tilde{C}_1(x_1) = -\tilde{C}_2(x_2)$: in questo caso le strategie x_1 e x_2 sono conservative anche per il gioco misto e naturalmente il loro incrocio determina un equilibrio di Nash.

- Perché strategie debolmente dominanti ed equilibri di Nash si conservano mentre le strategie conservative non si conservano? Tutto segue (con qualche semplice ragionamento...) dai seguenti fatti:
  - si ricordi che la migliore risposta a una strategia (pura o mista) è sempre una strategia pura. Quindi, in particolare, se nel gioco puro una strategia, per esempio x_1^i del primo giocatore, è una migliore risposta a una strategia x_2^j del secondo giocatore, anche nel gioco misto x_1^i (espressa come vettore) è una migliore risposta a x_2^j (espressa come vettore): da questo segue che eventuali equilibri di Nash in strategia pura si conservano in strategia mista;
  - il fatto che nel gioco puro le strategie dominanti si conservano richiede qualche riflessione in più. Infatti è vero che se nel gioco puro una strategia, per esempio x_1^i del primo giocatore, è una migliore risposta a qualsiasi strategia pura del

secondo giocatore, anche nel gioco misto x_1^i (espressa come vettore) è una migliore risposta a qualsiasi strategia pura (espressa come vettore) del secondo giocatore ... ma perché x_1^i è una migliore risposta anche a tutte le strategie *non pure* del secondo giocatore?

Perché se x_1^i è una migliore risposta a qualsiasi strategia pura, essa è anche una migliore risposta a qualsiasi combinazione convessa di strategie pure: e le strategie miste altro non sono che combinazioni convesse di strategie pure;

– infine sottolineiamo di nuovo che una strategia che è conservativa per il gioco puro, non è detto sia conservativa per il gioco misto. Può capitare (e capita spesso), che tra le strategie mista ce ne sia qualcuna che nel caso peggiore si comporti meglio di tutte le strategie pure: in questo caso una strategia che era conservativa per il gioco puro non è conservativa per il gioco misto.