Consideriamo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i \\ y_j = h_j(x) \qquad j = 1, \dots, p \end{cases}$$

$h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix}$ denota la mappa di uscita del sistema.

$x(t) \in \mathbb{R}^n$

tipicamente abbiamo accesso solo a u e y, ma ci serve $x(t)$ per il controllo
$\Downarrow$ se h non è invertibile
problema di **osservazione**

e definiamo la nozione di **osservabilità** che consideriamo qua:

Definizione: Due stati $x_1, x_2 \in U_0$ sono detti "**indistinguibili**" ($x_1 I x_2$) se per ogni $u(\cdot)$ e ogni $t \geq t_0$

$$y_1(t) = h(x(t, t_0, x_1, u)) \equiv y_2(t) = h(x(t, t_0, x_2, u))$$

$\Rightarrow$ misurando solo $y(t)$ non posso distinguere x_1 da x_2, al variare di t e di $u(t)$.

Un sistema è **osservabile** se $\forall$ coppia $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ è possibile ottenere abbastanza info da u e y per ricostruire univocamente $x(0)$.

$x_1 I x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ $\Rightarrow$ non ammette nessuna coppia indistinguibile (**versione globale** $\Rightarrow$ troppo generale)

- Per sistemi lineari indistinguibilità e osservabilità sono proprietà di (A, C): B e $u(t)$ non sono coinvolti e non cambiano le proprietà.

$\Rightarrow$ per sistemi **nonlineari**, l'osservabilità può essere legata alla scelta di $u(t)$

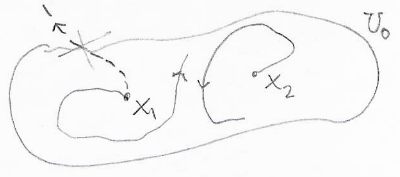
la definizione non implica che ogni ingresso "**distingue**" i punti di U_0

$\begin{cases} \dot{x} = u \\ y = \sin(x) \end{cases}$ $x_0 I x_0 + 2k\pi$ $\Downarrow$ non osservabile ma in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Definiamo una versione **locale** di osservabilità: $\rightarrow$ vogliamo distinguere gli stati dai loro "vicini".

* intorno ad un punto x_0

- un sistema si dice **localmente osservabile*** se è possibile distinguere tutti gli stati in un intorno U_0 considerando solo traiettorie che appartengono a quell'intorno



$\Rightarrow$ ogni altro $x \neq x_0$ è distinguibile da x_0

- è una definizione più utile dal punto di vista pratico
- permette caratterizzazione in termini di **condizioni di rango**

Per studiare l'osservabilità locale, introduciamo lo "**spazio di osservazione**" (Observation space):

- lo spazio di osservazione $\mathcal{O}$ è lo spazio delle funzioni (su U_0) che contiene $h_1, \dots h_p$ e tutte le **derivate di Lie** della forma

$$L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_k} h_i$$

con $i = 1, \dots p$; $k = 1, 2, \dots$ e $X_i \in \operatorname{span}\{f, g_1, \dots g_m\}$

$\mathcal{O} = \{h_1, \dots h_p, L_f h_1, \dots L_f h_p, L_{g_1} L_f h_1, \dots\}$ è uno spazio di funzioni: più piccolo spazio di funzioni contenente $\{h_1, \dots h_p\}$ e chiuso rispetto alla derivata di Lie lungo f, g_i.

$\rightarrow$ Algebra, chiuso rispetto a derivata di Lie.

- Consideriamo il caso di sistemi lineari (SISO)

$f = Ax, \quad g = B \quad, h = Cx$

$$\mathcal{O} = \{ Cx, \underbrace{CAx}_{\substack{L_f h \\ = \frac{\partial h}{\partial x} \cdot f}}, \overbrace{CB}^{L_g h}, \underbrace{CA^2x}_{L_f^2 h}, L_g L_g h = L_g^2 h = 0 \dots \}$$

- consideriamo invece il caso di sistemi **non lineari autonomi**: $g(x) = 0$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \mathcal{O} = \{ \underset{y}{h}, L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = \dot{y}, L_f^2 h = \ddot{y}, \dots \}$$

derivate successive (rispetto al tempo) dell'uscita.

Definiamo ora la <u>codistribuzione di osservabilità</u> (vettori riga)

$$d\mathcal{O} = \{ d\lambda : \lambda \in \mathcal{O} \}$$

<u>definizione</u>: un sistema soddisfa l'"**Observability rank condition**" se ("orc")

$$\dim (d\mathcal{O})|_{x_0} = n$$

<u>thm</u>: un sistema che soddisfa "orc" a x_0 è "**localmente osservabile a x_0**". (CONDIZIONI **SUFFICIENTI**)

$\Downarrow$ $\exists$ U_0 di x_0 : $\nexists$ stati indistinguibili da x_0 considerando intervalli di tempo per i quali le traiettorie restano dentro U_0.

(in realtà vale una cosa più "sottile", $\forall V \subset U_0$, x_0 è dist. da tutti $x \in V$, per traiettorie in V).

Nota che la "orc" è ancora insufficiente per fare il **design** di un osservatore perché l'osservabilità dipende dalla scelta dell'ingresso u.

$\downarrow$ è necessario fornire altre **condizioni più "costruttive"**.

- <u>definizione</u>: "ingresso universale": $\bar{u}$ è universale se $\forall x_1 \neq x_2$, $\exists \tau \geq 0$ ($\to$ in $[t_0, t]$) tale che
  $h(x(\tau, t_0, x_1, \bar{u})) \neq h(x(\tau, t_0, x_2, \bar{u}))$
- <u>definizione</u>: "sistema localmente **uniformemente osservabile**" (UO): sistema è UO se ogni ingresso è universale in $[0,t]$

$\Rightarrow$ l'osservatore può non dipendere dall'ingresso. (così come se limito l'attenzione solo ad ingressi universali)

consideriamo

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & u(t) \\ -u(t) & 0 \end{pmatrix} x, \quad y = (1 \ \ 0) x \quad \Rightarrow \quad u(t) = \begin{cases} 1 & , t < t_1 \\ 0 & , t \geq t_1 \end{cases}$$

è universale (li distinguo prima di t_1)

ma con un disturbo dopo t_1, potrei non essere più in grado di ricostruire x.

$\Rightarrow$ la proprietà di universalità deve essere <u>persistente</u>: (deve essere garantita nel tempo).

$$\exists T : \underset{\forall t}{\forall x_t \neq x_t'}, \int_t^{t+T} \| h(x(\tau, t, x_t, u)) - h(x(\tau, t, x_t', u)) \|^2 d\tau > 0$$

(potrebbe diventare sempre meno osservabile).

$\Rightarrow$ **regularly persistent** $\Rightarrow$ **gramiana** (nel caso lineare).

indistinguibilità nel **caso lineare**: le evoluzioni in uscita devono essere uguali per ogni t

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow \quad Ce^{At}x_1 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = Ce^{At}x_2 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

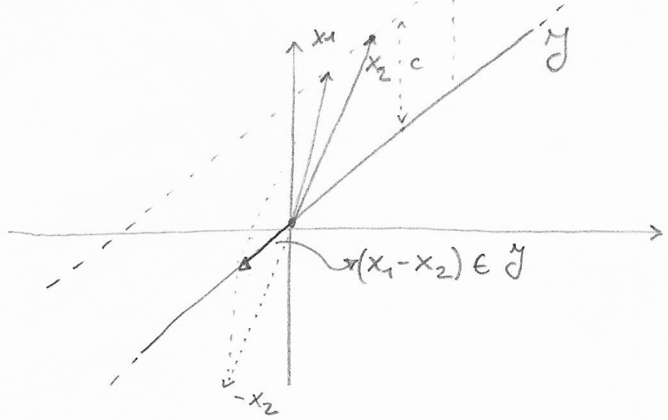
⇒ proprietà solo di A e C, non dipende da B e $u(t)$.

⇒ $Ce^{At}(x_1 - x_2) = 0$ ← la possiamo interpretare come l'uscita dalla condizione iniziale nulla $x(0)=0$

⇒ x_1 e x_2 sono indistinguibili se e solo se $(x_1 - x_2)$ è indistinguibile da 0. *

Nel caso lineare, l'insieme degli stati inosservabili è un <u>sottospazio</u> (sotto insieme di uno spazio vettoriale, contiene l'elemento nullo ⇒ "intuitivamente: passa per zero")

$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$, per **Cayley-hamilton** $\mathcal{I}$ equivale a tutti gli stati x tali che $Ce^{At}x = 0$, $\forall t$



gli stati <u>indistinguibili</u> possono essere descritti come l'insieme delle <u>varietà affini</u> di $\mathcal{I}$

⇒ <u>foliazione</u>

* $\exists\, x_1$ indistinguibile da $x_2 \Leftrightarrow \exists\, x_i \neq 0 : Ce^{At}x_i = 0, \forall t$, x_i lo chiamo <u>inosservabile</u>

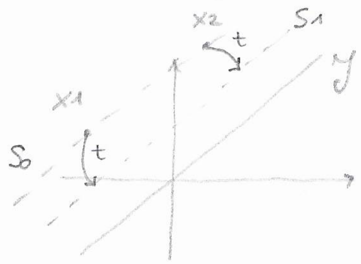
Inoltre, abbiamo visto che $\mathcal{I}$ è il più **grande** sottospazio di $\mathbb{R}^n$ tale che

1. $AV \subset V$ (invarianza)
2. $V \subset \mathrm{Ker}(C)$

sappiamo inoltre che esiste un cambio di coordinate, definito da T^{-1} = (base V : qualsiasi completamento)

tale che $TAT^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, $CT^{-1} = (0 \;\; C_2)$

⇒ se $x_1 I x_2$
lo saranno anche le loro **evoluzioni** ⇒



"foglie evolvono in foglie!"

persistenza di eccitazione nel caso lineare

$$h(x(\tau,t,x,u)) - h(x(\tau,t,x',u)) = Ce^{A(\tau-t)}(x-x')$$

nell' integrale facciamo il cambio di coordinate $\sigma = \tau - t$

per $\tau = t \Rightarrow \sigma = 0$

per $\tau = T \Rightarrow T-t$

matrice Gramiana

$$\Rightarrow \int_0^{T-t} (x-x')^T e^{A^T\sigma} C^T C e^{A\sigma}(x-x')\,d\sigma = (x-x')^T \Big(\underbrace{\int_0^{T-t} e^{A^T\sigma} C^T C e^{A\sigma}\,d\sigma}_{>0,\ \forall T>t} \Big)(x-x')$$

torniamo alla codistribuzione di osservabilità

- per sistemi lineari

$$d\mathcal{O} = \text{span}\{C, CA, \dots, CA^{n-1}, \dots\} \Rightarrow \text{osservabilità classica.}$$

* la codistribuzione $d\mathcal{O}$ è invariante per costruzione $\Rightarrow \Delta = (d\mathcal{O})^{\perp}$ è una distribuzione invariante rispetto a f, g_i

si tratta di condizioni solo **sufficienti**:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ y = x^3 \end{cases} \qquad \mathcal{O} = \{x^3, 0, \dots\}$$

$$d\mathcal{O} = \{3x^2\}, \quad \dim(d\mathcal{O}|_{x_0=0}) = 0 < 1 = n$$

$\downarrow$

è osservabile

Cosa succede se $\dim(d\mathcal{O})|_{x_0} = k < n$, per tutti gli x intorno a x_0?

$\Rightarrow$ consideriamo la distribuzione ortogonale a $d\mathcal{O} \Rightarrow (d\mathcal{O})^{\perp} = \ker(d\mathcal{O}) \triangleq \Delta$

- regolare ($\dim$, $n-k$)
- involutiva (già sappiamo che $((d\mathcal{O})^{\perp})^{\perp} = d\mathcal{O}$).

$\Rightarrow \underbrace{\ker(d\mathcal{O})}_{=\Delta = d\mathcal{O}^{\perp}}$ è la più grande distribuzione invariante per il sistema e contenuta nella distribuzione

$\ker\{dh\} = (dh)^{\perp}$, perchè $\boxed{dh \subset d\mathcal{O}}$ per definizione

$\Rightarrow \Delta^{\perp} = d\mathcal{O}$ ("spanned" da differenziali esatti)

*Codistribuzione invariante rispetto a f:

$\omega \in \Omega \Rightarrow L_f\omega \in \Omega \xRightarrow{\text{lemma 1.6.3}} \Omega^{\perp}$ invariante

$\Downarrow$

teorema di Frobenius fornisce condizioni necessarie e sufficienti

$\Downarrow$ siccome sappiamo che è completamente integrabile (per costruzione)

$\Rightarrow$ è **involutiva**

$d\mathcal{O}$ ha dimensione costante pari a k e supponiamo che sia generata da $\phi_1(x), \dots, \phi_k(x)$ (ovvero dai loro differenziali)

consideriamo il cambio di coordinate con $\lambda_{k+1}(x) = \phi_1(x), \dots \lambda_n(x) = \phi_k(x)$ più un completamento con $n-k$ vettori indipendenti.

nelle nuove coordinate

$$\underbrace{d\mathcal{O}}_{\text{sarebbe } \Delta^{\perp}} = \text{span}\Big[\; 0 \;\Big|\; \underbrace{\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}}_{z_2} \;\Big] \quad k \text{ covettori}$$

e di conseguenza

$$\underbrace{(d\mathcal{O})^{\perp}}_{\text{sarebbe } \Delta} = \ker d\mathcal{O} = \text{span}\begin{bmatrix} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}z_1 \\ \\ \end{matrix} \quad n-k \text{ vettori}$$

- **Conseguenze**:

1) dal momento che $(d\mathcal{O})^{\perp}$ (distribuzione) è invariante rispetto a $f, g_1, \dots g_m$ (ma non li contiene necessariamente):

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1, z_2) + g_1(z_1, z_2)u \\ \dot{z}_2 = f_2(z_2) + g_2(z_2)u \end{cases}$$

$z_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-k}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-k}$ $n-k$ dimensioni inosservabili

$z_2 = \begin{pmatrix} z_{n-k+1} \\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k}$

2) dal momento che, per costruzione, $dh_1, \dots dh_p \in \Delta^{\perp} = d\mathcal{O}$

le prime $n-k$ componenti devono essere nulle $\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial z_j} = 0$, $\quad i = 1, \dots p$, $\; j = 1 \leq j \leq n-k$

$\Rightarrow$ non dipende da $z_1 \Rightarrow y_j = h_j(z_2)$

dopo aver visto la conseguenza del fatto che $h_i(x) \in \mathcal{O}$, vediamo cosa succede dal momento che $L_f h_i(x) \in \mathcal{O}$

$d(L_f h_i(x)) \in d\mathcal{O}$

↑ codistribuzione di osservabilità

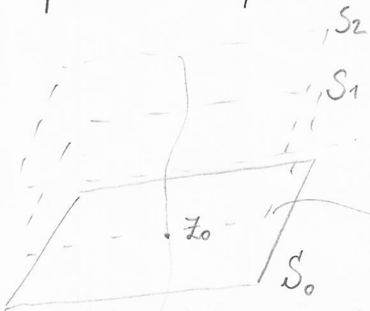
$$d\left[\underbrace{\frac{\partial h_i}{\partial z_1}}_{=0} \quad \frac{\partial h_i}{\partial z_2}\right]\begin{bmatrix} f_1(z_1,z_2) \\ f_2(z_1,z_2)\end{bmatrix} = d\left(\frac{\partial h_i}{\partial z_2} f_2(z_1,z_2)\right) \in d\mathcal{O}$$

$\Rightarrow$ non deve dipendere da z_1

$\Rightarrow f_2(z_2)$

la stessa conclusione la possiamo trarre per le $g_i(x)$:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = f_1(z_1,z_2) + g_1(z_1,z_2)u \\ \dot{z}_2 = f_2(z_2) + g_2(z_2)u \\ y = h_i(z_2) \quad , i = 1, \dots, p \end{cases}$$



$\rightarrow \{z : h(z) = h(z_0)\}$

"tangente alla superficie integrale" *'

⇑

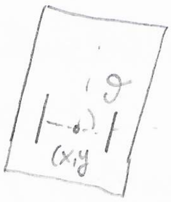
la foliazione è indotta dalla distribuzione Δ perché $dh \in d\mathcal{O}$ $\Rightarrow dh \cdot \Delta = 0$

stessa z_2, ↗ potenzialmente diversa z_1

abbiamo scoperto che tutte le condizioni iniziali in S_0, saranno tali che al tempo t_1, si troveranno tutte in S_1 le loro evoluzioni con stessa u

Esempio: uniciclo

$$\begin{cases} \dot{x} = \cos(\theta)v \\ \dot{y} = \sin(\theta)v \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_3 \cdot u_1 \\ \dot{x}_2 = \sin x_3 \, u_1 \\ \dot{x}_3 = u_2 \end{cases}$$

Supponiamo di misurare la posizione $y_1 = h_1(x) = x_1, \quad y_2 = h_2(x) = x_2$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vogliamo studiare le proprietà di osservabilità dell'uniciclo:

$\Rightarrow$ costruiamo in parallelo lo spazio di osservazione e la codistribuzione di osservabilità:

$$\mathcal{O} = \{x_1, \; x_2, \; \overbrace{\cos x_3}^{L_{g_1}h_1(x)}, \; \overbrace{\sin x_3}^{L_{g_1}h_2}, \dots$$

$\updownarrow dh_1$

$$d\mathcal{O} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,-\sin x_3), (0,0,\cos x_3), \dots$$

ancora non avrebbe rango pieno per $x_3 = k\pi$

calcoliamo $L_{g_1}h_1 = (1 \; 0 \; 0)\begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos x_3$

costruiamo anche $L_{g_1}h_2 = (0,1,0)\begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin x_3$

$\Rightarrow \operatorname{rank} d\mathcal{O}|_{x_0} = 3, \; \forall x_0 \in \mathbb{R}^3.$

corpo rigido in 3 dimensioni, dove ω_i rappresenta la velocità angolare rispetto all'i-esimo asse di un sistema di riferimento fisso

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 + u_1$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 + u_2$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2$$

consideriamo il caso con due soli attuatori sugli assi

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \dot{\omega}_1 = A_1\,\omega_2\omega_3 + u_1 \\ \dot{\omega}_2 = A_2\,\omega_3\omega_1 + u_2 \\ \dot{\omega}_3 = A_3\,\omega_1\omega_2 \end{cases}$$

supponiamo di misurare $y_1 = \omega_1$, $y_2 = \omega_2$

$$f = \begin{pmatrix} A_1\omega_2\omega_3 \\ A_2\omega_3\omega_1 \\ A_3\omega_1\omega_2 \end{pmatrix},\quad g_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad g_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

costruiamo lo spazio di osservazione

$$\theta = \{\omega_1,\ \omega_2,\ A_1\omega_3\omega_2,\ A_2\omega_3\omega_1,\ \underbrace{A_2\omega_3}_{L_{g_1}L_f h_2},\ \underbrace{A_1\omega_3}_{L_{g_2}L_f h_1}$$

$\downarrow$

$$d\theta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,A_1\omega_3,A_1\omega_2),(A_2\omega_3,0,A_2\omega_1),(0,0,A_2),(0,0,A_1),\ldots$$

$\Downarrow$

osservabile se $A_1^2 + A_2^2 \neq 0$.

calcoliamo $L_{g_1}h_1 = 1$ (non utile, ...

$L_{g_1}h_2 = 0$, $L_{g_2}h_1 = 0$, $L_{g_2}h_2 = 1$

quindi $L_f h_1 = A_1\omega_3\omega_2$, $L_f h_2 = A_2\omega_3\omega_1$

$$L_{g_1}L_f h_1 = (0, A_1\omega_3, A_1\omega_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_{g_1}L_f h_2 = (A_2\omega_3\ 0\ A_2\omega_1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = A_2\omega_3 \\ L_{g_2}L_f h_1 = (0, A_1\omega_3, A_1\omega_2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = A_1\omega_3 \end{cases}$$

---

*' superficie integrale: estende a <u>distribuzioni</u> il concetto di "curva integrale"
$\Rightarrow$ in ogni punto, una superficie ha un piano tangente ben definito
Si parla di "superficie integrale di una distribuzione" $\Delta(x)$ se questi piani tangenti sono allineati, in ogni punto, con lo spazio (piani) associati ad x da $\Delta(x)$ $\Rightarrow$ supponiamo che $h(x) = c$ (costante) descriva la superficie

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}\cdot\Delta = 0$$

($\frac{\partial h}{\partial x}$, perpendicolare alla superficie e quindi alla tangente)