Nome e Cognome

Scrivere le risposte sul retro di questo foglio e non consegnare altro. NGR $\equiv$ Non Giustificare la Risposta

Esercizio 1 Si consideri la matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ s2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ s3 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:

$(i) : \xi_1^i = \frac{1}{3}\ \forall i = 1,\dots,3$ $(ii) : \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \frac{1}{2}, \xi_1^3 = \frac{1}{2}$; $(iii) : \xi_1^1 = \frac{1}{4}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{3}{4}$;

$(j) : \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj) : \xi_2^1 = \frac{1}{4}, \xi_2^2 = \frac{1}{2}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{1}{4}$; $(jjj) : \xi_2^1 = \frac{2}{3}, \xi_2^2 = \frac{1}{3}, \xi_2^3 = \xi_2^4 = 0$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**.

Rispettivamente: (i) $\frac{2}{3}$; (ii) 0; (iii) $\frac{3}{2}$; (j) 0; (jj) $\frac{1}{2}$; (jjj) 0.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare quali, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**.

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore le strategie (j) e (jjj) sono conservative.

1.3 È possibile individuare equilibri di Nash? *Indicare quali, oppure scrivere che non si può individuarli.* **NGR**.

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**.

Il valore del gioco è 0.

Esercizio 2 In un parlamento siedono n membri: n_1 di questi membri sono del partito A, n_2 sono del partito B, n_3 sono del partito C (naturalmente $n_1 + n_2 + n_3 = n$). Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno h_1 membri di A, almeno h_2 membri di B, almeno h_3 membri di C, con $h_i \leq n_i$ per $i = 1..3$. Per ognuna delle seguenti affermazioni, dira se essa è vera o falsa (non è richiesto di individuare i valori di Shapley nel caso in cui sia possibile farlo!): **NGR**

2.1 se $h_1 + h_2 + h_3 > \frac{n}{2}$, allora il valore di Shapley può essere sempre determinato;

2.2 se $h_1 + h_2 + h_3 < \frac{n}{2}$, allora il valore di Shapley non può essere mai determinato;

2.3 se $h_1 > \frac{n_1}{2}, h_2 > \frac{n_2}{2}, h_3 > \frac{n_3}{2}$, allora il valore di Shapley può essere sempre determinato;

2.4 se $h_1 > \frac{n_1}{2}, h_2 < \frac{n_2}{2}, h_3 < \frac{n_3}{2}$, allora il valore di Shapley può essere sempre determinato;

2.5 se $h_1 < \frac{n_1}{2}, h_2 < \frac{n_2}{2}, h_3 < \frac{n_3}{2}$, allora il valore di Shapley non può essere mai determinato.

Sono tutte vere, tranne la seconda. Si osservi che non appena esista un indice i per cui $h_i > \frac{n_i}{2}$, non possono esistere due coalizioni disgiunte entrambe a valore 1 e quindi la superadditività è assicurata. Viceversa, se $h_i < \frac{n_i}{2}$ per ciascun indice i, possono esistere due coalizioni disgiunte entrambe a valore 1 e quindi non c'è superadditività. (Se avete dubbi sul caso 2.2, considerate per esempio $n_1 = 40, n_2 = 3, n_3 = 3$ e $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 2$.)

Esercizio 2bis Si consideri lo scenario dell'esercizio precedente nel caso in cui $n_1 = 4, n_2 = 2, n_3 = 3$ e $h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 2$. Determinare il valore di Shapley di ciascun membro, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

In questo caso è invece possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. I valori di Shapley sono:

$$S_A(v) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 4!\cdot 4! + \binom{3}{1}\cdot\left(\binom{3}{3}\cdot\binom{2}{1} + \binom{3}{2}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 5!\cdot 3! + \binom{3}{1}\cdot\left(\binom{3}{3}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 6!\cdot 2!}{9!}$$

$$S_B(v) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{2}\cdot 4!\cdot 4! + \left(\binom{4}{3}\cdot\binom{3}{2} + \binom{4}{2}\cdot\binom{3}{3}\right)\cdot 5!\cdot 3! + \left(\binom{4}{4}\cdot\binom{3}{2} + \binom{4}{3}\cdot\binom{3}{3}\right)\cdot 6!\cdot 2! + \binom{4}{4}\cdot\binom{3}{3}\cdot 7!}{9!}$$

$$S_C(v) = \frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}\cdot 4!\cdot 4! + \binom{2}{1}\cdot\left(\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{1}+\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 5!\cdot 3! + \binom{2}{1}\cdot\left(\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{1}+\binom{4}{3}\cdot\binom{2}{2}\right)\cdot 6!\cdot 2! + \binom{2}{1}\cdot\binom{4}{4}\cdot\binom{2}{2}\cdot 7!}{9!}$$

Esercizio 3 Due aziende concorrenti A e B decidono di offrire sul mercato un nuovo servizio. Il nuovo servizio offerto dalle due aziende è identico e 19000 consumatori decideranno se rivolgersi ad A o B come segue:

- 3000 consumatori sono fedeli a A e acquisteranno il servizio da A qualunque sia il prezzo che A decide;
- 4000 consumatori sono fedeli a B e acquisteranno il servizio da B qualunque sia il prezzo che B decide;
- 5000 consumatori vogliono acquistare il servizio in ogni caso e lo acquisteranno dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore: questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo;
- 4000 consumatori vorrebbero acquistare il servizio ma non sono disposti a spendere più di 50 euro: questi consumatori quindi acquisteranno il servizio dalla azienda (A o B) che lo offre a prezzo minore, ma solo se questo prezzo è non superiore a 50 euro. Di nuovo, questi consumatori si dividono equamente tra A e B se le aziende scelgono lo stesso prezzo non superiore a 50 euro;
- 3000 consumatori vorrebbero acquistare il servizio solo da B ma non sono disposti a spendere più di 50 euro: questi consumatori quindi acquisteranno il servizio da B se questa lo offre a prezzo non superiore a 50 euro, altrimenti non lo acquisteranno (qualunque sia il prezzo scelto da A).

Ciascuna delle due aziende può decidere di offrire il servizio a tre prezzi diversi: 40 euro, 40+α euro, 100 euro, dove α è un parametro razionale tale che $0 < \alpha < 10$. È possibile che i giocatori scelgano lo stesso prezzo.

Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

La matrice dei payoff in forma di utilità per i due giocatori è la seguente (tutti i termini andrebbero in realtà moltiplicati per 1000):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & 40 & 40+\alpha & 100 \\ 40 & 300,460 & 480,280+7\alpha & 480,400 \\ 40+\alpha & 120+3\alpha,640 & 300+7.5\alpha,460+11.5\alpha & 480+12\alpha,400 \\ 100 & 300,640 & 300,640+16\alpha & 550,650 \end{pmatrix}$$

A questo punto analizziamo questa matrice al variare del parametro α procedendo come al solito (ricordiamo che $0 < \alpha < 20$). Otteniamo che: 1) per entrambi i giocatori non esistono strategie dominanti; 2) lo stato $(40,40)$ è un equilibrio di Nash per tutti i valori ammissibili di α ($0 < \alpha < 10$), 2) lo stato $(100,100)$ è un equilibrio di Nash per $\alpha < \frac{5}{8}$. Quest'ultimo stato è anche ottimo secondo Pareto.