Procedura 5: matrici di rotazione tramite trasformata di Laplace

Scrivere una procedura che utilizzando la trasformata di Laplace calcoli la matrice di rotazione intorno all'asse rappresentata dal versore v, di un angolo ϑ

$$R_v(\theta) = e^{S(v)\theta}$$

Per il calcolo della matrice di rotazione tramite la trasformata di Laplace occore seguire i seguenti passi:

1) Calcolo della matrice $S(k)$ con $k \in \{e_x, e_y, e_z\}$ con e_x, e_y, e_z versori dei rispettivi assi x, y, z:

$$S(e_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; S(e_y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; S(e_z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2)Calcolo della matrice $s\,I - S(k)$ di Laplace con s variabile di Laplace e I matrice identità $I \in R^{3x3}$:

$$s\,I - S(e_x) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 1 & s \end{pmatrix}; s\,I - S(e_y) = \begin{pmatrix} s & 0 & 1 \\ 0 & s & 0 \\ -1 & 0 & s \end{pmatrix}; s\,I - S(e_z) = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 1 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}.$$

3)Invertire le matrici appena ottenute:

$$(s\,I - S(e_x))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ 0 & \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{pmatrix};$$

$$(s\,I - S(e_x))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{s^3+s} & 0 & \frac{s}{s^3+s} \\ 0 & \frac{s^2+1}{s^3+s} & 0 \\ -\frac{s}{s^3+s} & 0 & \frac{s^2}{s^3+s} \end{pmatrix};$$

$$(s\,I - S(e_x))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{s^2}{s^3+s} & -\frac{s}{s^3+s} & 0 \\ \frac{s}{s^3+s} & \frac{s^2}{s^3+s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s^2+1}{s^3+s} \end{pmatrix}.$$

4)Calcolare l'inversa di Laplace della matrici inverse $\mathcal{L}\{(s\,I - S(k))^{-1}\}^{-1}$:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}; R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}; R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La funzione inverseLaplace(SI) calcola e restituisce in output l'antitrasformata di Laplace scorrendo tutti gli elementi della matrice data in input

```
(%i1) inverseLaplace(SI):=block([res],
                               M:SI,
                               MC:SI,
                               for i:1 thru 3 do(
                                 for j:1 thru 3 do
                                     (
                                       a:M[i,j],
                                       b:ilt(a,s,theta),
                                       MC[i,j]:b
                                      )
                                  ),
                               res:MC

                            )
```

(%o1) inverseLaplace(SI) := **block** ([res], M: SI, MC: SI, **for** i **thru** 3 **do for** j **thru** 3 **do** (a: $M_{i,j}$,

b: ilt(a, s, ϑ), MC$_{i,j}$: b), res: MC)

La funzione rotLaplace(k) riceve in input un vettore v e calcola 1), 2), 3). In seguito, invoca la funzione inverseLaplace per effettuare 4) e, quindi, restituire in output l'effettiva matrice di rotazione corrispondente al versoe in input.

```
(%i2) rotLaplace(k):=block([res],
                           S:ident(3),
                           I:ident(3),
                         for i:1 thru 3 do
                           (
                           for j:1 thru 3 do
                              (
                                if i=j
                                   then S[i][j]:0
                                elseif j>i
                                   then (
                                  temp:(-1)^(j-i)*k[3-remainder(i+j,3)],
                                         S[i][j]:temp,
                                         S[j][i]:-temp

                                          )
                                )
                            ),
                           res:inverseLaplace(invert(s*I-S))

                          )
```

(%o2) rotLaplace(k) := **block** ([res], S: ident(3), I: ident(3), **for** i **thru** 3 **do for** j **thru** 3 **do if** $i = j$ **then** $(S_i)_j$: 0 **elseif** $j > i$ **then** (temp: $(-1)^{j-i}\, k_{3-\mathrm{remainder}(i+j,3)}$, $(S_i)_j$: temp, $(S_j)_i$: $-$temp), res: inverseLaplace(invert$(s\, I - S)$))

Matrice di rotazione $R_x(\theta)$:

```
(%i3) R[x](theta):=rotLaplace([1,0,0]);
```

(%o3) $R_x(\vartheta) :=$ rotLaplace([1, 0, 0])

```
(%i4) R[x](theta);
```

(%o4)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Matrice di rotazione $R_y(\theta)$:

```
(%i5) R[y](theta):=rotLaplace([0,1,0]);
```

(%o5) $R_y(\vartheta) :=$ rotLaplace([0, 1, 0])

```
(%i6) R[y](theta);
```

(%o6)
$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Matrice di rotazione $R_z(\theta)$:

```
(%i7) R[z](theta):=rotLaplace([0,0,1]);
```

(%o7) $R_z(\vartheta) := \mathrm{rotLaplace}([0,0,1])$

```
(%i8) R[z](theta);
```

(%o8) $$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i9)
```