Consideriamo il modello del pendolo inverso descritto da:

$$M\ddot{s} + F\dot{s} - u = d_1$$

$$\ddot{\phi} - \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}\ddot{s}\cos(\phi) = 0$$

Lo stato $x(t)$ è espresso dal seguente vettore:

$$x(t) = \begin{vmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{vmatrix}$$

Consideriamo come ingresso di controllo $u(t) = \nu(t)$

Possiamo riscrivere le equazioni della dinamica:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u + \frac{1}{M}d_1$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{g}{l}\sin(x_3) - \frac{1}{l}\cos(x_3)\left(-\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u + \frac{1}{M}d_1\right)$$

Inoltre poiché i segnali $s(t)$ e $\phi(t)$ sono misurabili possiamo considerare come uscita del sistema:

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_3$$

Passiamo ora ad analizzare il sistema esogeno.

Il segnale $s(t)$ deve inseguire il riferimento $r(t) = a\sin(\omega t)$ da cui:

$$\dot{r} = \omega \cdot a\cos(\omega t) = v$$

$$\ddot{r} = -\omega^2 \cdot a\sin(\omega t) = -\omega^2 \cdot r$$

È presente inoltre un disturbo costante non noto $d_1(t)$:

$$\dot{d}_1(t) = 0$$

Quindi il sistema esogeno è:

$$\dot{d} = Sd = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \\ v \\ d_1 \end{vmatrix}$$

con $d = |r, v, d_1|^T$

Andiamo ora a calcolare i punti di equilibrio con $u(t)=0$ e $d_1(t)=0$. Per farlo bisogna imporre la seguente condizione

$$f(x_e, 0) = 0$$

$$x_2 = 0$$
$$-F/M \, x_2 = 0$$
$$x_4 = 0$$
$$\frac{g}{L} \sin(x_3) + \frac{F}{ML} \cos(x_3) x_2 = 0$$

Si ottiene quindi che i punti di equilibrio sono: $x_e = \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Passiamo ora a linearizzare il sistema intorno al punto di equilibrio

$$A = \frac{\partial f(x_e, 0)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{ML} & g/L & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \frac{\partial f(x_e, 0)}{\partial u} = \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -1/ML \end{vmatrix}$$

$$P = \frac{\partial f(x_e, 0)}{\partial d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/ML \end{vmatrix} \qquad C = \frac{\partial h(x_e, 0)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Con il segnale d'errore $e(t) = s(t) - r(t)$ derivato dalle relazione

$e = \tilde{C}x + \tilde{Q}d$ con $\tilde{C} = |1 \quad 0 \quad 0 \quad 0|$

$\tilde{Q} = |-1 \quad 0 \quad 0|$

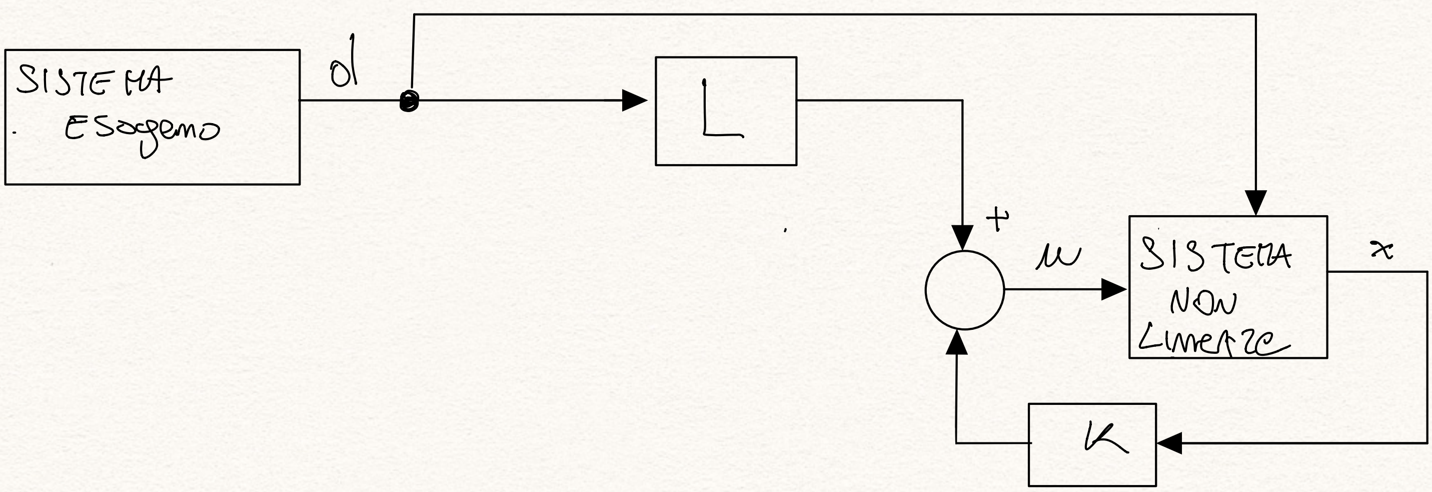
Tutte le dimostrazioni delle ipotesi che seguiranno sono presenti nello script MATLAB.

Regolazione in full information

1) $\sigma(S) \subset \mathbb{C}^{\geq 0}$
2) (A, B) è raggiungibile
3) il lemma di Hautus verificato
4) il sistema $\dot{x} = (A + BK)x$ è asintoticamente stabile
5) ricavate matrici Π, Γ
6) $L = \Gamma - K\Pi$

Unendo questi 6 punti troviamo la legge di controllo

$$u = Kx + Ld$$



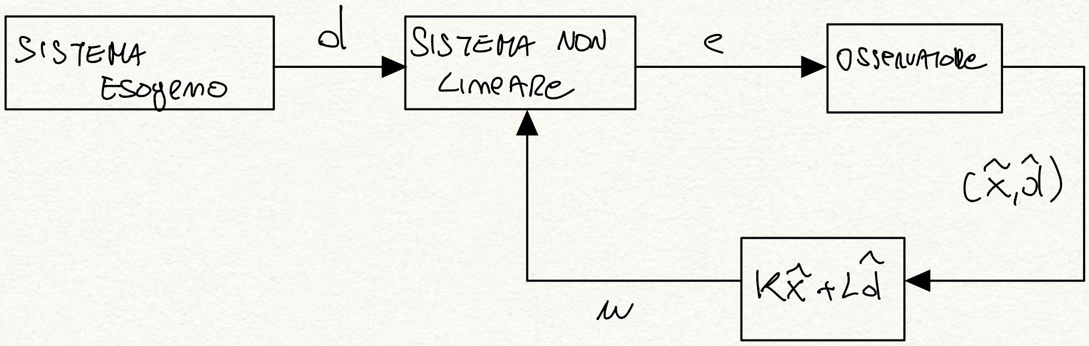
Regolazione di Error Feedback

1) $\sigma(S) \subset \mathbb{C}^{\geq 0}$

2) (A, B) è raggiungibile

3) (A_{OBS}, C_{OBS}) è osservabile

Il problema della regolazione di Error Feedback è risolubile <=> lo è in full information. Tale condizione è stata verificata in precedenza



```
% Assignment 7 calcoli e definizioni
% Alessandro Lomazzo 0294640, Gianluca Coccia 0300085
% 02/02/2021

clearvars
close all
clc

% Parametri sistema
M = 1;
l = 1;
F = 1;
g = 9.81;

% Parametri sistema esogeno
omega = 0.1;
% omega = 1;
% omega = 10;
alpha = 1;
d1 = 1;
d1_amp = 0.5;
d1_period = 50;

%% Modello nello spazio di stato
A_t = [0 1 0 0
       0 -F/M 0 0
       0 0 0 1
       0 F/(M*l) g/l 0];
B_t = [0; 1/M; 0; -1/(M*l)];
P_t = [0 0 0
       0 0 1/M
       0 0 0
       0 0 -1/(M*l)];
C_t = [1 0 0 0
       0 0 1 0];
C_te = [1 0 0 0];
S = [0 1 0
     -omega^2 0 0
     0 0 0];
Q = [-1 0 0
     0 0 0];
Q_te = [-1 0 0];
BP = horzcat(B_t, P_t);
x0 = [0 0 0 0];
n = 4;
p = 1;
r = 3;

fprintf("Modello linearizzato:\n");
A_t
B_t
P_t
C_t
Q
```

```
fprintf("Modello sistema esogeno:\n");
S
fprintf("Condizioni iniziali:\n");
x0

%% Proprieta' del sistema
% Controllo autovalori matrice S non negativi
s_eigs = eig(S);
fprintf("Autovalori di S: \n");
s_eigs

% Controllabilita'
P_reach = ctrb(A_t, B_t);
P_reach_inv = P_reach^(-1);
if rank(P_reach) ~= n
    fprintf("Sistema non controllabile\n");
    return
else
    fprintf("Sistema controllabile\n");
end

% Osservabilita'
if rank(obsv(A_t, C_t)) ~= n
    fprintf("Sistema non osservabile\n");
    return
else
    fprintf("Sistema osservabile\n");
end
if rank(obsv(horzcat(vertcat(A_t, zeros(3, 4)), vertcat(P_t, S)), horzcat(C_t, Q)))↙
~= n+r
    fprintf("Sistema eseteso non osservabile\n");
    return
else
    fprintf("Sistema esteso osservabile\n");
end

% Lemma di Hautus
for i=1:length(s_eigs)
    hautus_mat = horzcat(vertcat(s_eigs(i)*eye(4) - A_t, C_te), vertcat(B_t, 0));
    if rank(hautus_mat) ~= n+p
        fprintf("Lemma di Hautus non soddisfatto\n");
        return
    end
end
fprintf("Lemma di Hautus soddisfatto\n");

% Autovalori di A
eigs_A = eig(A_t);
fprintf("Autovalori di A =");
eigs_A

% Stabilizzazione con Ackermann
ack = P_reach_inv(end, :);
pDesA = (A_t + eye(4))*(A_t + 2*eye(4))*(A_t + 3*eye(4))*(A_t + 4*eye(4));
```

```
K = -ack*pDesA;
newEigs = eig(A_t+B_t*K);

fprintf("Nuovi autovalori:\n");
disp(newEigs);
fprintf("Guadagno di stabilizzazione:\n");
K

% Soluzione equazioni FBI
% omega = 0.1
Pi = [1 0 0
      0 1 0
      -1/982 0 0
      0 -1/982 0];
Gamma = [-1/100 1 -1];

% omega = 1
% Pi = [1 0 0
%       0 1 0
%       -100/1081 0 0
%       0 -100/1081 0];
% Gamma = [-1 1 -1];

% omega = 10
% Pi = [1 0 0
%       0 1 0
%       -1e4/10981 0 0
%       0 -1e4/10981 0];
% Gamma = [-100 1 -1];

fprintf("Matrici Pi e Gamma:\n");
Pi
Gamma

% Guadagno segnali esogeni
L = Gamma - K*Pi;

fprintf("Guadagno segnali esogeni L:\n");
L
```