Tokamak 3D Equilibrium Reconstruction

A Deep Learning approach

Lorenzo Rossi

Università di Rome "Tor Vergata"

June 21, 2022

TOR VERGATA
UNIVERSITY OF ROME
School of Engineering

Contents

Introduzione

L'obiettivo di questa tesina è quello di fornire una ricostruzione 3D del plasma in forma analitica. Tramite le equazioni MHD (*MagnetoHydroDynamics*) è possibile considerare il plasma come un fluido conduttore soggetto all'azione di un campo magnetico.

Equilibrio

L'equilibrio è quella situazione in cui tutte le forze agenti su di essa hanno risultante nulla.

La ricostruzione dell'equilibrio del plasma è necessaria al miglioramento dell'efficienza fusionistica e alla protezione delle componenti che costituiscono il Tokamak.

Dinamica del plasma

La dinamica del plasma viene descritta da:

- Continuity equation (1):$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\nu) = 0$;
- Momentum equation (3):$\rho\frac{\partial\nu}{\partial t} + \rho(\nu \cdot \nabla)\nu = J \times B - \nabla p$;
- Ideal Ohm's law (3):$E + \nu \times B = 0$;
- Faraday's law (3):$\frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$;
- "Low frequency" Ampere's law (3):$\mu_0 J = \nabla \times B$;
- Magnetic divergence (1):$\nabla \cdot B = 0$;
- Energy (1):$\frac{d}{dt}(\frac{p}{\rho^\gamma})$;

Equilibrio del plasma

Assumendo che:

- Il plasma si trovi in regime stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Riferimento in v ($\nu = 0$);

Si ottiene:

- $J \times B = \nabla p$
- $\mu_0 J = \nabla \times B$
- $\nabla \cdot B = 0$

Grad-Shafranov

Per giungere infine all'equazione di Grad-Shafranov occorre supporre simmetria toroidale. In particolare:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$$

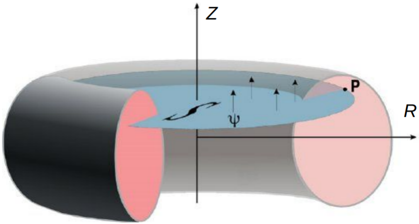
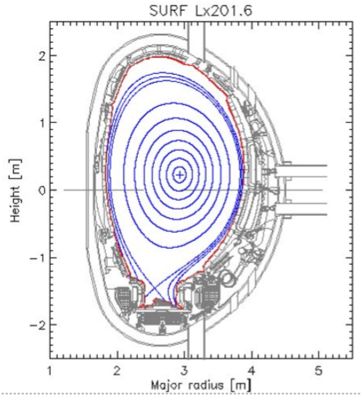


Figure: Simmetria toroidale Tokamak

Equazione di Grad-Shafranov

$$p = f(\psi)$$
$$F = g(\psi)$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\mu_0 r^2 \frac{dp}{d\psi} - \frac{1}{2}\frac{dF^2}{d\psi}$$

Limitazioni



Sebbene questo metodo consenta di ricostruire efficientemente l'equilibrio del plasma. Tuttavia:

- Il plasma non è sempre in regime stazionario;
- La simmetria toroidale non è sempre rispettata.

Una valida alternativa per ottenere più informazioni sul processo in questione viene fornita dal metodo Physics Informed Neural Network basati sul deep learning.

Deep Learning

Il deep Learning è una branca del Machine Learning che studia l'apprendimento automatico tramite l'utilizzo di architetture stratificate dette **neural network multilayers**.

L'unità fondamentale di una neural network multilayers è il **neurone** che esegue una singola operazione non lineare.
Ci sono vari metodi su come strutturare i neuroni in una struttura stratificata.
Tuttavia, la scelta più gettonata è quella della **backpropagation**: i pesi associati ad ogni neurone vengono aggiornati calcolando l'uscita della rete e propagando l'errore all'indietro verso i livell più alti.

Physics Informed Neural Network

Physics Informed Neural Network

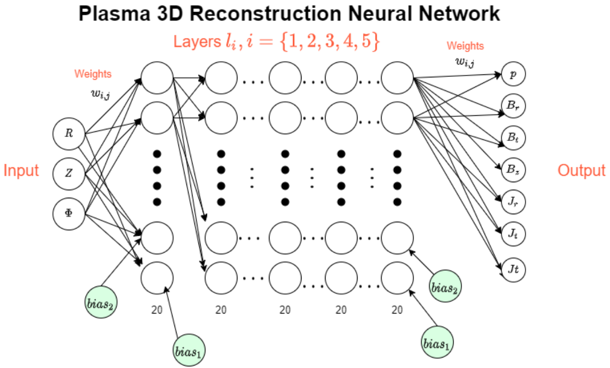
Il Physics Informed Neural Network è un metodo di deep learning basato su reti neurali per risolvere le PDE (*Partial Differential Equation*).

- Permettono di risolvere numericamente equazioni differenziali molto complesse;
- Le soluzioni delle PDE minimizzano una funzione di costo dipendente dalle equazioni fisiche;
- La funzione di costo deve essere ben modellata per aderire al modello preso in considerazione;
- Processo di training elevato;
- Si necessitano di condizioni al contorno;

PDE Neural Network - Struttura

Per la rete neurare si è scelto di utilizzare:

- Rete **fullyconnect**: ogni neurone di ogni livello è collegato con i neuroni del livello successivo;
- Backpropagation tramite di errore;
- Ogni neurone applica l'input una tangentoide;



PDE Neural Network

Input: R, Z, ϕ

Output: p, B_r, B_z, B_ϕ

Weight Factor = $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0.001 & 0.01 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\downarrow$$

Loss1= $\frac{1}{r}\frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$

$$\nabla \times B = \mu_0 J$$

$$\downarrow$$

Loss2= $(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z})\mathbf{r} + (\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r})\phi - \frac{1}{r}(\frac{\partial (rB_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \phi})\mathbf{z} - \mu_0 \mathbf{J}$

$$J \times B = \nabla p$$

$$\downarrow$$

Loss3= $J_\phi B_z - J_z B_\phi - \frac{\partial p}{\partial R} + J_z B_r - J_r B_z - \frac{\partial p}{\partial \phi} + J_r B_\phi - J_\phi B_r - \frac{\partial p}{\partial Z}$

Vincoli al bordo

$$\downarrow$$

$p_0, B_{r0}, B_{t0}, B_{Z0}$ noti

Loss4= $\frac{mean(p-p_0)^2}{mean(p_0)^2} + \frac{mean(B_z-B_{z0})^2}{mean(B_{z0})^2} \frac{mean(B_r-B_{r0})^2}{mean(B_{r0})^2} \frac{mean(B_\phi-B_{\phi 0})^2}{mean(B_{\phi 0})^2}$

Loss=(Loss1+Loss2+Loss3+Loss4+Loss5+Loss6)* α^T

Condizioni al contorno

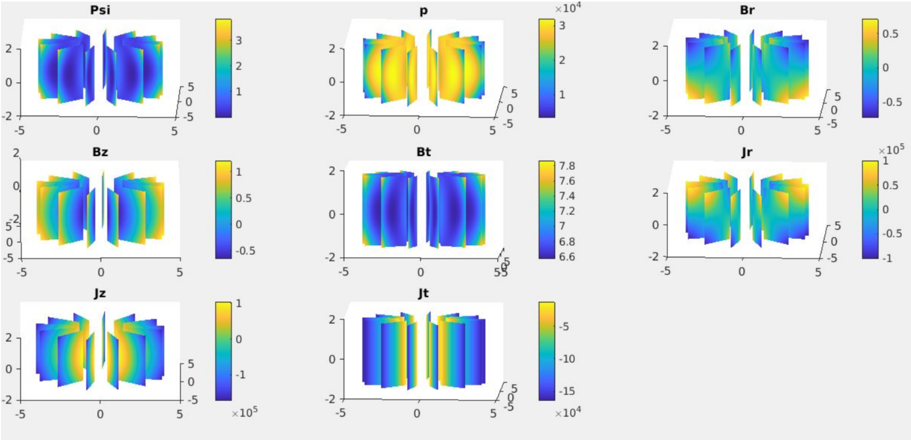
La soluzione delle PDE in $\phi = \{0, 2\pi\}$ potrebbe portare a soluzione diverse quando queste, per periodicità, devono essere identiche. Per evitare questo comportamento, occorre aggiungere una quinda funzione di costo:

$$Loss5 = \frac{mean(p - p_f)^2}{mean(p_f)^2} + \frac{mean(B_r - B_{r,f})^2}{mean(B, r_f)^2} + \frac{mean(B_z - B_{z,f})^2}{mean(B_{z,f})^2} + \frac{mean(B_t - B_{t,f})^2}{mean(B_{t,f})^2}$$

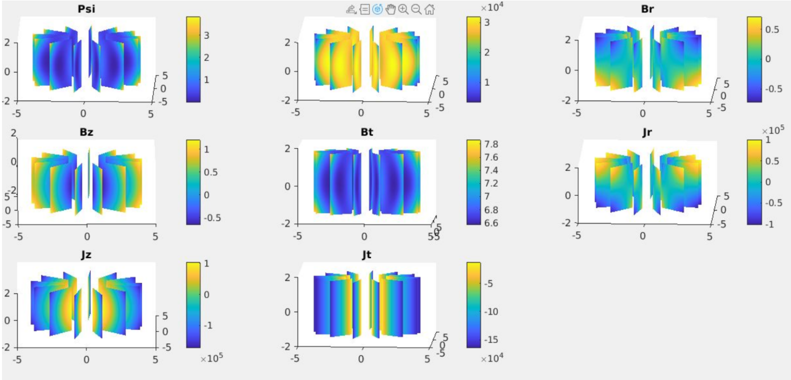
$$Loss6 = \frac{mean(p - p_i)^2}{mean(p_i)^2} + \frac{mean(B_r - B_r)^2}{mean(B, r_i)^2} + \frac{mean(B_z - B_{z,i})^2}{mean(B_{z,i})^2} + \frac{mean(B_t - B_{t,i})^2}{mean(B_{t,i})^2}$$

Risultati

Risultato atteso:



Risultati



[1]

Figure: Risultato finale 10000 epoche

[1] Learning eseguito su una macchina Dell XPS 8940:

- CPU Intel i7-11700 8c/16t @4.8Ghz;
- RAM:32GB DDR4;
- GPU:Nvidia RTX 3070;
- OS:Debian GNU Linux 10 ×86_64;