Università di Tor Vergata

Dipartimento di Ingegneria dell'Impresa «Mario Lucertini»

CORSI DI

PROTOTIPAZIONE VIRTUALE

PROTOTIPAZIONE VIRTUALE E SIMULAZIONE DEI SISTEMI MECCANICI

T2: Le superfici

Pier Paolo Valentini @ 2015

La modellazione di superfici

La modellazione di superfici in ambiente CAD ha l'impiego principale per il design estetico e funzionale. La schematizzazione è utile sia come strumento matematico, sia per trattare anche tutti i problemi di operazioni booleane tra entità.



Dalle curve alle superfici

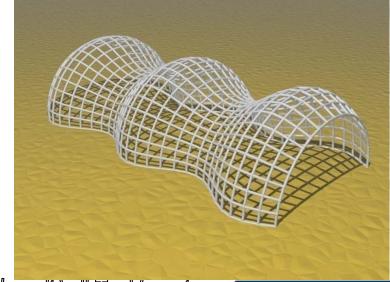
In precedenza si è vista l'utilità di descrivere le curve in maniera parametrica, in dipendenza da una singola variabile u. E' possibile estendere il concetto di superficie parametrica come una funzione dipendente da 2 parametri u e v.

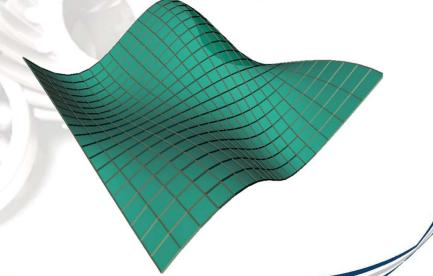
CURVA

$$u \to f(u) = \begin{cases} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{cases}$$

SUPERFICIE

$$u, v \to f(u, v) = \begin{cases} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{cases}$$





Università di Tor Vergata

Interpolazione bilineare – patch di Bézier

Una patch di Bézier è una superficie definita come <u>interpolazione lineare</u> tra quattro punti di controllo. La curva passerà esattamente per tutti e quattro i punti.

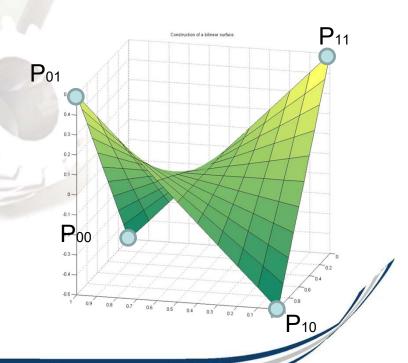
$$\mathbf{P}_{0,0}; \mathbf{P}_{0,1}; \mathbf{P}_{1,0}; \mathbf{P}_{1,1} \qquad s(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} b_i(u) b_j(v) \mathbf{P}_{i,j}$$

Equazione di un paraboloide iperbolico

$$b(u) = \begin{cases} 1 - u \\ u \end{cases} \quad b(v) = \begin{cases} 1 - v \\ v \end{cases}$$

In forma matriciale:

$$s(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,1} \\ \mathbf{P}_{1,0} & \mathbf{P}_{1,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$



Un esempio di patch di Bézier

Punti di controllo

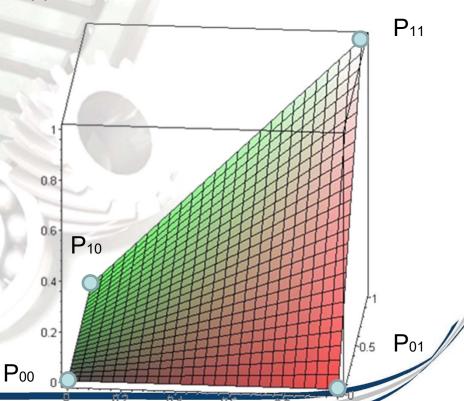
$$\mathbf{P}_{0,0} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases}; \mathbf{P}_{0,1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \\ 0 \end{cases}; \mathbf{P}_{1,0} = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 0 \end{cases}; \mathbf{P}_{1,1} = \begin{cases} 1 \\ 1 \\ 1 \end{cases} \qquad b(v) = \begin{cases} 1 - v \\ v \end{cases} \quad b(u) = \begin{cases} 1 - u \\ u \end{cases}$$

$$b(v) = \begin{cases} 1 - v \\ v \end{cases} \quad b(u) = \begin{cases} 1 - u \\ u \end{cases}$$

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} b_i(u)b_j(v)\mathbf{P}_{i,j}$$



$$s(u,v) = \begin{cases} (1-v)u + uv \\ (1-u)v + uv \\ uv \end{cases}$$



Università di Tor Vergata

Interpolazione bicubica

Una patch bicubica può essere generata da 16 punti di controllo organizzati in una matrice 4x4. Similmente alla curve spline assumiamo che i valori della variabile di parametrizzazione siano uniformemente spaziati negli intervalli 0 1

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} b_i(u)b_j(v)\mathbf{P}_{i,j}$$

In forma matriciale:

$$s(u,v) = \begin{bmatrix} u^{3} & u^{2} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}(0 & 0) & \mathbf{P}(0 & \frac{1}{3}) & \mathbf{P}(0 & \frac{2}{3}) & \mathbf{P}(0 & 1) \\ \mathbf{P}(\frac{1}{3} & 0) & \mathbf{P}(\frac{1}{3} & \frac{1}{3}) & \mathbf{P}(\frac{1}{3} & \frac{2}{3}) & \mathbf{P}(\frac{1}{3} & 1) \\ \mathbf{P}(\frac{2}{3} & 0) & \mathbf{P}(\frac{2}{3} & \frac{1}{3}) & \mathbf{P}(\frac{2}{3} & \frac{2}{3}) & \mathbf{P}(\frac{2}{3} & 1) \\ \mathbf{P}(1 & 0) & \mathbf{P}(1 & \frac{1}{3}) & \mathbf{P}(1 & \frac{2}{3}) & \mathbf{P}(1 & 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{3} \\ v^{2} \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Università di Tor Vergata

Generalizzazione e superfici di Bézier

A partire da una matrice (m+1) x (n+1) di punti di controllo (reticolo di controllo) è possibile ottenere una forma compatta per esprimere una superficie di Bézier.

$$\begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & \dots & P_{n0} \\ P_{01} & \dots & \dots & P_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{0m} & P_{1m} & \dots & P_{nm} \end{bmatrix}$$

Matrice dei punti di controllo (reticolo di controllo)

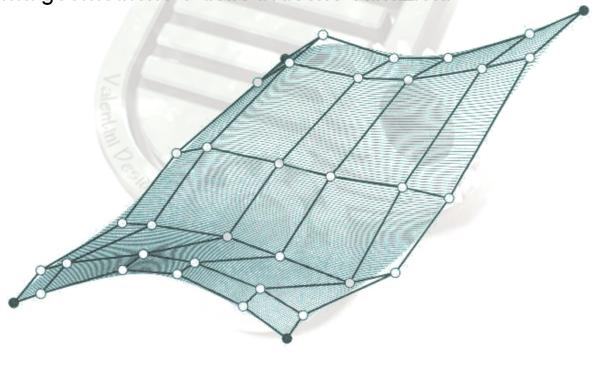
$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} b_i^m(u) b_j^n(v) P_{i,j}$$

Un tale approccio ha l'interpretazione fisica di costruire una superficie di Bézier come luogo dei punti dello spazio definiti dal movimento di una curva che cambia la sua forma. Il grado della curva e quello della curva che ne descrive il suo spostamento possono essere differenti

$$(m \neq n)$$

Reticolo di controllo e modellazione

La modellazione si una superficie di Bézier avviene agendo sulla posizione dei punti del reticolo di controllo che a loro volta influenza la forma della curva. La modellazione attraverso lo spostamento dei punti di controllo permette di lasciare morbida la forma della superficie, senza inserire delle singolarità geometriche o delle brusche variazioni

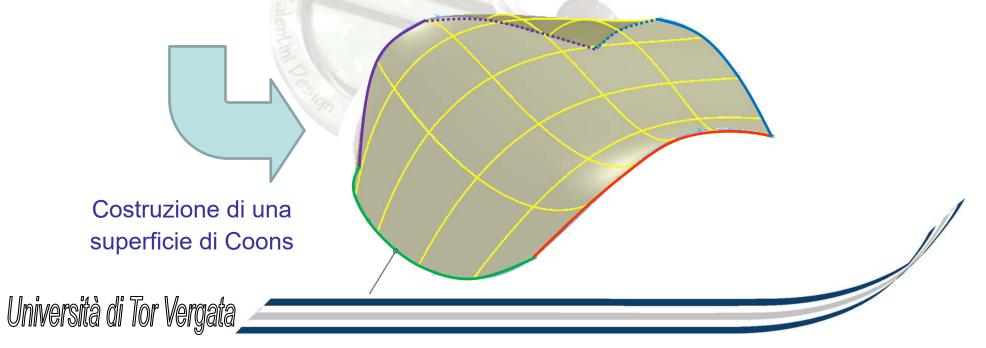


Patch di Coons (consulente Ford)

Supponiamo il seguente problema:

Siano date 4 curve di confine di una generica superficie. Siano espresse tali curve mediante curve di Bézier (curve opposte con lo stesso grado).

Trovare il reticolo di controllo che definisce la superficie di interpolazione tra le curve.



Calcolo della patch di Coons

Il calcolo del poligono di controllo si imposta nel seguente modo

Gradi delle curve di Bézier opposte

$$\mathbf{P}_{i,j}^{u} = \left(1 - \frac{i}{m}\right)\mathbf{P}_{0,j} + \frac{i}{m}\mathbf{P}_{m,j}$$
 Prima creiamo dei punti di

$$\mathbf{P}_{i,j}^{v} = \left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{P}_{i,0} + \frac{j}{n}\mathbf{P}_{i,i}$$

controllo per le superfici $\mathbf{P}_{i,j}^{v} = \left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{P}_{i,0} + \frac{j}{n}\mathbf{P}_{i,n}$ rigate nelle 2 direzioni $u \in V$ in maniera equispaziata in maniera equispaziata

$$m = n = 3$$
 P_{00} P_{01} P_{02} P_{03}
 P_{10} P_{13} P_{20} P_{23}
 P_{30} P_{31} P_{32} P_{33}

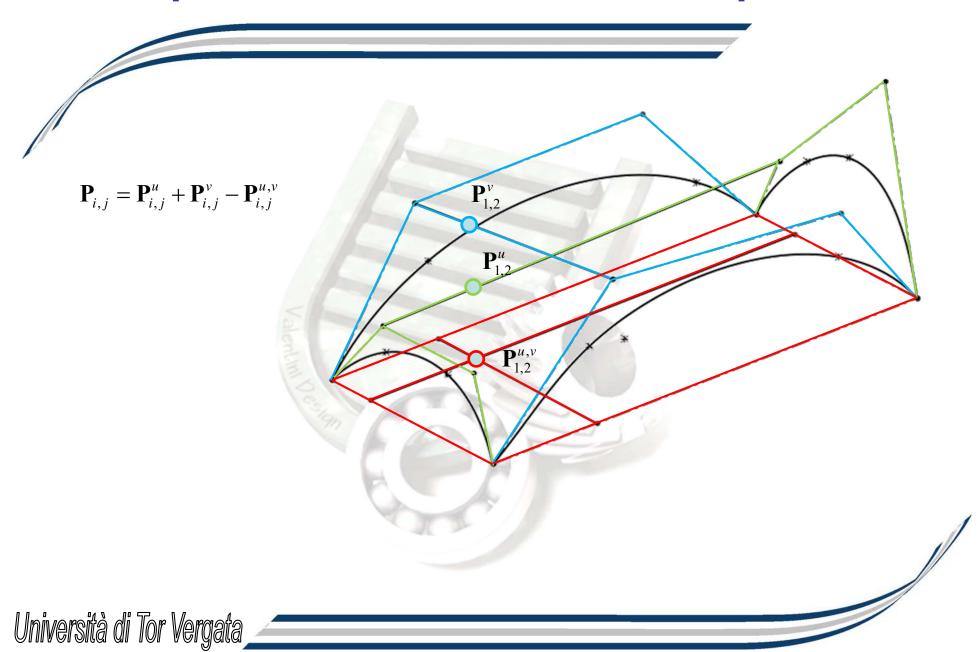
$$\mathbf{P}_{i,j}^{u,v} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{n} & \frac{j}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,m} \\ \mathbf{P}_{n,0} & \mathbf{P}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{i}{m} \\ \frac{i}{m} \end{bmatrix}$$
 Poi calcoliamo il punto interpolante bilinearmente i 4 punti di controllo agli angoli (\Rightarrow sulla patch di Bézier)

sulla patch di Bézier)

$$\mathbf{P}_{i,j} = \mathbf{P}_{i,j}^{u} + \mathbf{P}_{i,j}^{v} - \mathbf{P}_{i,j}^{u,v}$$

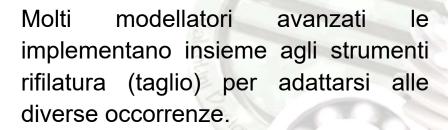
Infine calcoliamo il punto sul reticolo di controllo cercato come combinazione di questi 3 punti

Interpretazione del calcolo della patch



Applicazioni delle patch di Coons

Le patch di Coons sono particolarmente utili nella modellazione estetica di superfici dove si parte dallo schizzo di linee di bordo o linee di intento.



E' possibile generalizzare le funzioni di interpolazione (lineare -> cubica) per ottenere una maggiore versatilità nella creazione della superficie la cui espressione rimarrà comunque:

$$P_{i,j} = P_{i,j}^{u} + P_{i,j}^{v} - P_{i,j}^{u,v}$$

Superfici B-spline

Così come si è visto per le curve è possibile costruire una singola entità a partire da porzioni di sottoentità (>> superfici composite). E' possibile, dunque, estendere il concetto di curve spline alle superfici spline. In tal modo possiamo definire una superficie spline come:

$$s(u,v) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} b_i(u)b_j(v)P_{i,j}$$

Dove le $b_i(u)$ e $b_j(v)$ sono le funzioni di miscelamento delle due variabili di parametrizzazione u e v che possono essere calcolate allo stesso modo di quelle per le curve. In generale le sequenze del vettore nodale possono essere differenti per le due direzioni.

Tutte le considerazioni circa le funzioni di miscelamento possono estendersi dalle curve alle superfici.

Sebbene più complesso e raramente impiegato è possibile ricavare un algoritmo di interpolazione di punti mediante una superficie spline

Superfici NURBS

Ancora, è possibile, estendere il concetto di curve NURBS alle superfici NURBS. In tal modo possiamo definire una superficie spline come:

$$s(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} w_{i,j} b_i(u) b_j(v) P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} w_{i,j} b_i(u) b_j(v)}$$

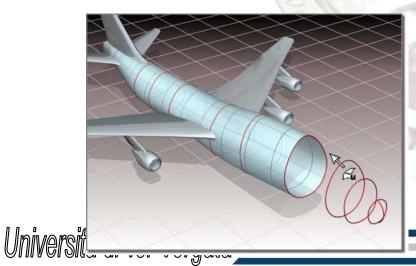
Dove le $w_{i,j}$ sono i pesi di attrazione dei punti di controllo.

Le superfici NURBS offrono un'estrema versatilità della modellazione di superfici

Superfici notevoli



Superficie di loft: ottenuta dall'interpolazione tra due o più curve con uguale connettività



Superficie di rivoluzione

ottenuta dalla rotazione di una curva piana attorno ad un asse

