# DOMANDE TEORIA OSC I

**Question** Descrivere brevemente l'equazione di Hamilton-Jacaobi Bellman. Dimostrare che HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità.

**Answer** L'equazione di Hamilton Jacobi Bellman è:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t}^*(x(t),t) = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t),u(t),t) + \frac{\partial V}{\partial x}^*(x(t),t) f(x(t),u(t),t) \right\} \\ V^*(x,T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$

Permette di rappresentare la funzione valore ottima di un problema di controllo ottimo di Bolza:

$$\begin{cases} \min_u J(u) = \min_u \left\{ \int_{t_0}^T l(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + m(x(T)) \right\} \\ \dot{x} = f(x,u,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Generalmente questa equazione non è lineare e la sua soluzione è proprio la funzione valore ottima che rispetta l'equazioene di Hellman del problema dato e, quindi, rappresentante le decisioni ottime da effettuare partendo da un determinato stato e tempo iniziale. In particolare, l'equazione HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità. A tale scopo definiamo la funzione valore per il problema di Bolza:

$$V^*(x(t),t) = \min_{u(\tau),\tau\in[\tau.T]} \left\{ \int_t^T l(x(s),u(s),s)ds + m(x(T)) \right\}$$

$$= \min_{u(\tau),\tau\in[t,T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(s),u(s),s)ds + \int_{t+\Delta t}^T l(x(s),u(s),s)ds + m(x(T)) \right\}$$

$$= \min_{u(\tau),\tau\in[t,T]} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} l(x(s),u(s),s)ds + V^*(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\}$$

Da questa espressione ricaviamo la sua corrispondente espressione differenziale sviluppando al primo ordine la funzione valore:

$$\begin{cases} 0 = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t),u(t),t) + -\frac{\partial V}{\partial t}^*(x(t),t) + \frac{\partial V}{\partial x}^*(x(t),t) f(x(t),u(t),t) \right\} \\ V^*(x,T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$

Dato che dobbiamo determinare la soluzione per ogni istante di tempo e per ogni stato, si ottiene l'equazione HJB:

$$\begin{cases} -\frac{\partial V}{\partial t}^*(x(t),t) = \min_{u(t)} \left\{ l(x(t),u(t),t) + \frac{\partial V}{\partial x}^*(x(t),t) f(x(t),u(t),t) \right\} \\ V^*(x,T) = m(x) \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, T]$$