Teoria dei Giochi – Prova del 28 Febbraio 2014

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ____________________________

Esercizio 1 Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco in forma di massimizzazione, dove x è un qualunque numero intero (positivo o negativo):

		Giocatore 2		
		A	B	C
Giocatore 1	D	$6,3$	$1,4$	$4,1$
	E	$3+x, 4-x$	$2,2$	$3,1$
	F	$4,4$	$2,3+x$	$1,2$

1.1 Dire per quali valori di x esistono equilibri di Nash del gioco (se ne esistono) e quali sono.

1.2 Per ciascun giocatore, dire per quali valori di x esistono strategie debolmente dominanti (se ve ne sono) e quali sono.

1.3 Porre adesso $x = 0$ e dire quali sono i vettori di strategie ottimi deboli secondo Pareto (se ve ne sono) in questo caso.

Non è richiesto di giustificare alcuna risposta.

Soluzione 1.1 Il punto (E,B) è un equilibrio di Nash per $x \geq 2$. Il punto (F,B) è un equilibrio di Nash per $x \geq 1$. **1.2** Il primo giocatore non ha strategie debolmente dominanti, per il secondo giocatore B è una strategia debolmente dominante per $x \geq 2$. **1.3** I punti sono: (D,A), (D,B), (E,A), (F,A).

Esercizio 2 Consideriamo la seguente variazione del meccanismo d'asta in busta chiusa di secondo prezzo. Ogni giocatore i attribuisce al bene oggetto dell'asta un valore $v_i \geq 0$ e fa un'offerta $x_i \geq 0$. Vince l'asta il giocatore i che ha fatto l'offerta x_i più alta (a parità di offerta, vince il giocatore con indice i più basso), e paga un prezzo p pari a *un terzo* della seconda offerta più alta. Al solito, il payoff del giocatore i è: 0 se il giocatore i non vince l'asta; $v_i - p$ se il giocatore i vince l'asta. Per semplicità supponiamo di avere 3 o più giocatori.

Quali delle seguenti affermazioni è vera? N.B. Se un'affermazione è vera, non è necessario fornire una giustificazione, se un'affermazione è falsa è necessario fornire un esempio in cui appunto è falsa.

Per il giocatore i ogni strategia $x > v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i ogni strategia $x < v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = 3v_i$ è un strategia debolmente dominante.

Per il giocatore i la strategia $x = \frac{v_i}{3}$ è un strategia debolmente dominante.

Soluzione 2.1 Si consideri per esempio la prima giocatrice. Se ella gioca un *qualunque* valore $x_1 > 3v_1$ e tutti gli altri giocatori giocano valori $x_j \in (3v_1, x_1)$, allora la sua utilità è negativa: se invece ella avesse giocato $3v_1$ allora la sua utilità sarebbe stata zero.

Analogamente, se la prima giocatrice gioca un *qualunque* valore $x_1 < 3v_1$ e tutti gli altri giocatori giocano valori $x_j \in (x_1, 3v_1)$, allora la sua utilità è negativa: se invece ella avesse giocato $3v_1$ allora la sua utilità sarebbe stata zero.

Segue che qualunque strategia $x_1 \neq 3v_1$ non è debolmente dominante. È facile vedere poi come $3v_1$ sia invece debolmente dominante, e come questo si estende a tutti i giocatori: giocare $3v_j$ è l'unica strategia debolmente dominante.

Esercizio 3 Si consideri il seguente gioco. Il primo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,3,8,26\}$; il secondo giocatore può scegliere un numero tra $\{1,5,15,29\}$. Sia x il numero scelto dal primo giocatore e y il numero scelto dal secondo giocatore. Se $x+y$ è una potenza di 2 ma non è una potenza di 4, il primo giocatore vince un euro. In tutti gli altri casi c'è parità (quindi il secondo giocatore non può avere mai payoff positivo).

Si consideri innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

3.1 Indicare tutte le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore, se ve ne sono, e tutte le strategie debolmente dominanti per il secondo, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risposta.

3.2 Indicare tutti gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. Non è richiesto di giustificare la risp.

Si consideri ora il gioco l'*estensione in strategia mista* del gioco.

3.3 Formulare i problemi di programmazione lineare che il primo e il secondo giocatore devono risolvere per individuare, ciascuno, la propria strategia conservativa (non è richiesto di risolvere tali programmi). Si consideri quindi la seguente strategia per il primo giocatore:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$

e le seguenti strategie per il secondo giocatore:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 1, \xi_2^4 = 0$:

(al solito indichiamo con $\xi_1 = (\xi_1^1,\dots,\xi_1^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del primo giocatore, e con $\xi_2 = (\xi_2^1,\dots,\xi_2^4)$ il vettore stocastico associato alle 4 possibili strategie pure del secondo giocatore). Per ciascuna di queste strategie, indicare quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la utilizza. (Giustificare brevemente la risposta).

3.4 Qualcuna delle strategie indicate al punto 1.3 è conservativa? (Giustificare brevemente la risposta).

3.5 Esistono equilibri di Nash in strategia mista? (Se ve ne sono, indicarne quanti più possibile; se ve ne sono ma non è possibile individuarli, spiegare perché; se non ve ne sono, spiegare perché.)

3.6 Qual è il valore del gioco in strategia mista? (Se non è possibile individuarlo, spiegare perché).

Soluzione 3.1 Il primo giocatore non ha strategie debolmente dominanti, per il secondo giocatore 15 è una strategia debolmente dominante per $x \geq 1$. **3.2** I punti sono $(1,15)$, $(3,15)$, $(8,15)$, $(26,15)$. **3.3-3.6** Forumulando i problemi di programmazione lineare che devono risolvere il primo e il secondo giocatore per determinare le proprie strategie conservative, è facile vedere che in corrispondenza alla strategia:

- $\xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$

il primo giocatore paga nel caso peggiore 0, mentre in corrispondenza alle strategie:

- $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$
- $\xi_2^1 = \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 1, \xi_2^4 = 0$:

il secondo giocatore paga nel caso peggiore rispettivamente $\frac{1}{2}$ e 0. Quindi la strategia del primo giocatore e la seconda strategie del secondo giocatore sono conservative e il valore del gioco è 0. Infine l'incrocio di queste strategie determina un equilibrio di Nash in strategia mista, e naturalmente sono equilibri di Nash in strategia mista anche tutti i punti individuati al punto 3.2 opportunamente espressi con vettori randomizzati.

Esercizio 4 In un parlamento siedono n deputati, con n pari, tra cui 3 deputati anziani. L'approvazione di ogni legge richiede il voto della stretta maggioranza dei deputati (cioè almeno $\frac{n}{2}+1$), oppure il voto di esattamente $\frac{n}{2}$ deputati tra cui tutti e 3 i deputati anziani. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato (giustificare la risposta).

Soluzione È facile vedere che si tratta di un gioco cooperativo semplice in cui il valore di una coalizione è 1 se la coalizione fa approvare una decisione, 0 altrimenti. Per determinare il valore di Shapley per questo gioco cooperativo conviene utilizzare la formula:

$$S_i(v) = \frac{\text{\# permutazioni tali che: la coalizione } A_p^i \text{ vince e la coalizione } A_p^i \setminus i \text{ perde}}{n!}$$

Prendiamo in considerazione una deputata anziana. Le permutazioni in cui ella è determinante sono tutte quelle in cui questa si trova: in posizione $\frac{n}{2}+1$; in posizione $\frac{n}{2}$ e gli altri due deputati anziani si trovano nelle prime $\frac{n}{2}-1$ posizioni (e il numero di diversi modi di assegnare gli 2 deputati anziani alle prime $\frac{n}{2}-1$ posizioni è pari a $2\binom{\frac{n}{2}-1}{2}$).

Segue quindi che il valore di Shapley ciascun deputato anziano è pari a:

$$S_a(v) = \frac{(n-1)! + 2\binom{\frac{n}{2}-1}{2}(n-3)!}{n!}$$

.

Il valore di Shapley di ciascuno degli altri deputati è quindi pari a $\frac{1-S_a(v)}{3}$.

Esercizio 5 Si consideri un'istanza dello Stable Marriage problem con 4 uomini e 4 donne. I seguenti ordini totali rappresentano le graduatorie di ciascun uomo e ciascuna donna:

- Uomo 1: $\{D,A,B,C\}$; Uomo 2: $\{A,D,C,B\}$; Uomo 3: $\{A,B,D,C\}$; Uomo 4: $\{B,C,D,A\}$.
- Donna A: $\{3,2,1,4\}$; Donna B: $\{1,2,3,4\}$; Donna C: $\{1,2,4,3\}$; Donna D: $\{3,4,2,1\}$.

5.1 Il matching $M = \{(1,B),(2,A),(3,D),(4,C)\}$ è una soluzione stabile? (In caso affermativo, non è necessario giustificare la risposta; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

5.2 Esiste un matching M che non sia stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{2,C\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{4,C\}$? (In caso affermativo, esibire tale matching; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

5.3 Esiste un matching M che non sia stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{3,B\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{1,A\}$? (In caso affermativo, esibire tale matching; in caso negativo, è invece necessario giustificare la risposta).

5.4 Si considerino ora le seguenti graduatorie di preferenza *parziali*:

- Uomo 1: $\{?,?,?,?\}$; Uomo 2: $\{A,?,?,C\}$; Uomo 3: $\{D,?,?,C\}$; Uomo 4: $\{A,?,?,?\}$.
- Donna A: $\{3,?,4,?\}$; Donna B: $\{?,?,2,1\}$; Donna C: $\{4,3,2,1\}$; Donna D: $\{1,?,?,4\}$.

È possibile completare le graduatorie in modo tale che il matching $M = \{(1,C),(2,D),(3,B),(4,A)\}$ risulti stabile? (In caso affermativo, esibire un tale completamento; in caso negativo, non è invece necessario giustificare la risposta).

Soluzione:

5.1 M non è stabile. Non è stabile rispetto alla coalizione $S = \{3,A\}$.

5.2 Tale matching M, per esistere, deve assegnare sia all'uomo 4 che all'uomo 2 una donna con un'utilità inferiore rispetto a quella relativa alla donnna C (ad esempio la donna D per l'uomo 4 e la donna B per l'uomo 2); contemporaneamente M deve assegnare alla donna C un uomo con un'utilità peggiore sia dell'uomo 4 che dell'uomo 2, ovvero l'uomo 3. In definitiva, un possibile matching non

stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{4,C\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{2,C\}$ è
$M = \{(1,A),(2,B),(3,C),(4,D)\}$

5.3 Un matching M non stabile né rispetto alla coalizione $S_1 = \{3,B\}$, né rispetto alla coalizione $S_2 = \{1,A\}$ dovrebbe assegnare l'uomo 4 sia alla donna B che allla donna A, quindi è impossibile che esista.

5.4 Un possibile completamento è

- Uomo 1: $\{C,D,B,A\}$;
- Uomo 2: $\{A,D,B,C\}$;
- Uomo 3: $\{D,B,A,C\}$;
- Uomo 4: $\{A,D,C,B\}$.

- Donna A: $\{3,1,4,2\}$;
- Donna B: $\{1,4,2,1\}$;
- Donna C: $\{4,3,2,1\}$;
- Donna D: $\{1,2,3,4\}$.