ESAME di METODI DI OTTIMIZZAZIONE PER BIG DATA

Cognome : **Nome :**

Esercizio 1. Si consideri il problema:

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 - x_2^2 \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \end{array} \tag{1}$$

(i) Il problema è convesso?

(ii) E'possibile concludere apriori l'esistenza della soluzione?

(iii) Il punto (0 2) soddisfa la LICQ?

(iv) Scrivere le condizioni di KKT e verificare se il punto $(0\ -2)$ le soddisfa. Quali conclusioni si possono trarre sul punto?

Esercizio 2 Sia dato il seguente insieme di punti:

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

(i) Effettuare una iterazione di k-means con $k = 3$ clusters e come valore iniziale dei centroidi $z_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $z_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 Sia dato il seguente training set:

$$\mathcal{T} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, -1 \right), \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, 1 \right), \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right), \right\}$$

con la corrispondente matrice Q (calcolata con kernel lineare, cioè $Q_{ij} = y^i y^j (x^i)^T x^j$):

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & -9 & -2 & -6 & 8 \\ -9 & 18 & 6 & 3 & -12 \\ -2 & 6 & 4 & -8 & 0 \\ -6 & 3 & -8 & 41 & -20 \\ 8 & -12 & 0 & -20 & 16 \end{pmatrix}$$

Supponendo di avere $C = 1$, effettuare la prima iterazione di SVM-light

Esercizio 4. Sia dato il seguente problema di programmazione quadratica:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}\left(8x_1^2 + 8x_1x_2 + 2x_2^2\right) + x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \leq -2 \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq 6 \end{array} \tag{2}$$

(i) Scrivere il duale di Wolfe di questo problema.

(ii) Sapendo che la soluzione del problema duale è il punto $(0 \quad -56/98 \quad 0 \quad 0 \quad 3/7)$ verificare se il punto $(-50/49 \quad 72/49)$ è soluzione del problema (2) individuando eventualmente i rispettivi moltiplicatori.

Esericizo 5 Sia dato il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 8\alpha_2^2 + 5\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + 12\alpha_3\alpha_2 + 4\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_4 + 4\alpha_2\alpha_1 + 4\alpha_2\alpha_4) + \beta\alpha_2 + \gamma\alpha_4 \\ & -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \ (y^T\alpha = 0) \\ & 0 \leq \alpha_i \leq 1 \end{array} \tag{3}$$

Sia $\bar{\alpha} = (1\ 1\ 0\ 0)$

(i) Per quali valori di γ e β il punto $\bar{\alpha}$ è ottimo?

(ii) Esiste un valore γ e β per cui il punto non è ottimo e il working set è $W = \{1, 4\}$?