

Controllo Adattivo e Robusto

Lorenzo Rossi

April 5, 2022

Contents

0.1 Strumenti

0.1.1 Norma di un segnale, guadagno di un sistema

Il controllo robusto e adattivo hanno l'obiettivo di controllare sistemi dinamici in presenza di incertezze. In particolare, il controllo robusto regola l'incertezze dinamiche mentre quello adattivo le incertezze statiche. Le incertezze possono essere rappresentate anche come segnali esterni e quindi considerate come disturbi. Così, si dà luogo alla teoria della regolazione.

0.1.2 Incertezza

I sistemi di controllo sono progettati in modo tale che certi segnali di riferimento non abbiano valori eccessivi al fine di raggiungere un valore di riferimento e mantenendo piccolo il segnale degli attuatori, responsabili del controllo. Gli attuatori sono affetti da incertezza poiché operano sul modello matematico che si basa sulle leggi fisiche che descrivono il processo. Approssimando il sistema si introducono delle **dinamiche non modellate** che producono incertezza associate, nella maggior parte dei casi, ad alte frequenze o legate ai sensori che si utilizzano. Queste incertezze possono essere modellate a seconda dell'obiettivo che si vuole raggiungere tramite vari metodi:

- **Controllo Adattivo:** è il metodo di controllo che contiene un meccanismo di adattamento in funzione dei parametri;
- **Controllo Robusto:** è un metodo di controllo che garantisce le performance in presenza di un'incertezza limitata nel caso peggiore;
- **Teoria della regolazione:** l'idea è quella che i segnali esterni possano essere descritti attraverso un altro sistema dinamico al fine di garantire le performance;
- **Controllo stocastico** l'idea è quella che l'incertezza viene modellata tramite grandezze probabilistiche.

Di solito il problema di controllo si sviluppa in una combinazione tra le varie tecniche di controllo.

Definition 0.1.1 (Principio di equivalenza certa). *Il **principio di equivalenza certa** dice che sostituendo ai valori veri quelli stimati, a patto che le stime abbiano proprietà di convergenza ai valori veri e favorevoli come la limitatezza e la convergenza asintotica, allora è possibile sostituire ai valori veri il corrispondente valore stimato;*

Definition 0.1.2 (Principio del modello interno). *Il **principio del modello interno** dice che bisogna incorporare nel cammino del feedback un modello copiato del sistema che genera il disturbo.*

Definition 0.1.3 (Metodo del gradiente). *Il **metodo del gradiente** è un metodo di ottimizzazione in cui si cerca di minimizzare il costo.*

Definition 0.1.4 (Teoria della passività). *La **teoria della passività** generalizza Lyapunov in cui si interpreta il comportamento del sistema tramite l'ingresso, l'uscita e l'energia. Ci si limita allo studio dello scambio energetico di un sistema.*

Definition 0.1.5 (Parametrizzazione). *La **parametrizzazione** fornisce un metodo per descrivere l'incertezza di un sistema dinamico come combinazione lineare di segnali noti e quantità non note.*

0.1.3 Norma di un segnale

Come abbiamo detto precedentemente l'obiettivo del controllo di un sistema è quello di ottenere un comportamento desiderato e per questo motivo occorre definire il concetto di norma di un vettore.

Definition 0.1.6 (Norma di un vettore). *Sia un vettore su spazio finito, allora definiamo la norma di un vettore come:*

$$v \in \mathbf{R}^n \rightarrow \|v\| = \sqrt{v^T v}$$

Nei segnali la norma indica se il segnale è piccolo o grande e come è facilmente intuibile dipende dal tipo di norma utilizzata. Questo perché un segnale può apparire più o meno grande in base alla norma scelta. Quindi, assumiamo che un segnale $r(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, allora è possibile definire le seguenti norme.

Definition 0.1.7 (Norma 2). *All'istante t : $r^T(t)t(t) \geq 0$ Integrando in tutto il dominio del segnale e normalizzando il segnale:*

$$\sqrt{\int_0^\infty r^T(\tau)r(\tau)d\tau}$$

Tuttavia, non è detto che questo integrale converga.

Definition 0.1.8 (Segnale limitato). Il segnale $r(t) \in \mathbf{R}^2$ limitato se $\|r\|_2$ è limitato.

Remark. • convergenza asintotica $\rightarrow r(t) \rightarrow 0$
 $t \rightarrow \infty$

- Non fornisce nessuna informazione sulla limitatezza del segnale.

Definition 0.1.9 (Norma 1). Dato un segnale $r(t) \in \mathbf{R}_n$ si definisce la norma 1 del segnale:

$$\|r\|_1 = \int_0^\infty |r_1(t) + |r_2(t)| + \dots d\tau = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty |r_i(t)| d\tau$$

Remark. • segnale che converge a zero più veloce della norma 2.

- Non fornisce informazione sulla limitatezza del segnale.

Definition 0.1.10 (Norma ∞). Dato un segnale $r(t) \in \mathbf{R}_n$ si definisce la norma infinito:

$$\|r\|_\infty = \max_{i=1}^n \sup |r_i(\tau)|$$

ù

Remark. • La norma infinito dà informazioni sulla limitatezza del segnale poiché:

- si considera il massimo assoluto;
- si considera il massimo assoluto da tutte le componenti;

Quindi tutte le componenti del segnale sono al di sotto del massimo.

Definition 0.1.11 (Norma p). Dato un segnale $r(t) \in \mathbf{R}_n$ si definisce la norma p :

$$\|r\|_p = (\int_0^\infty |r(\tau)|^p d\tau)^{1/p} = (\int_0^\infty \sum_{i=1}^n |r_i(\tau)|^p d\tau)^{1/p}$$

Remark. • Fornisce proprietà di convergenza;

- Non fornisce informazioni sulla limitatezza del segnale.

Per analizzare la **stabilità** si deve utilizzare la norma 1 o la norma 2 e per le proprietà di convergenza e limitatezza la norma infinito.

Definition 0.1.12 (Segnale di potenza). Dato un segnale $r(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ è un **segnale di potenza** se;

$$pow(r) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T r(t)^T \partial \tau \text{ è finito.}$$

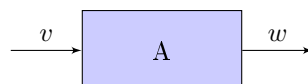
Remark. • Se $\|r\|_2$ limitata $\rightarrow pow(r) = 0$;

- Se $\|r\|_\infty$ definito $\rightarrow pow(r) \leq \|r\|_\infty$ e si possono avere segnali illimitati.

Definition 0.1.13 (Norma indotta). Considerato un vettore $v \in \mathbf{R}^n$ tale che $w = Av \in \mathbf{R}^p$ definiamo la **norma indotta** della matrice A :

$$\|A\|_{indotta} = \sup_v \frac{\|w\|_2}{\|v\|_2} = \sup_v \frac{\sqrt{v^T A^T A v}}{\sqrt{v^T v}} \text{ se finita.}$$

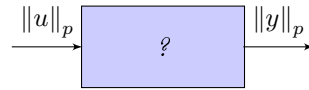
Estendendo questo concetto ai sistemi si può considerare la seguente situazione:



In cui w una amplificazione di v .

0.1.4 Guadagno di un sistema

Definition 0.1.14 (Guadagno di un sistema). *Il guadagno di un sistema è la misura di amplificazione considerando ingressi $u \in \mathbb{R}^p$ e uscite $y \in \mathbb{R}^p$ con il suo massimo.*



Remark. Se le norme sono limitate, allora il guadagno è limitato.

Nei sistemi lineari è possibile utilizzare norme diverse per ingressi come l'impulso di Dirac. Le relative proprietà del sistema vengono rappresentate nel dominio della frequenza come per esempio il **margin di fase e/o di guadagno**. Queste proprietà caratterizzano la **robustezza** del sistema.

Theorem 0.1.1. *La norma L_2 di un sistema SISO lineare, tempo invariante, asintoticamente stabile coincide con la distanza in C tra l'origine e il punto più lontano nel diagramma di Nyquist.*

Remark. In un sistema dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1)$$

definiamo la matrice di trasferimento nel dominio delle frequenze $G(j\omega)$, il massimo valore della risposta in frequenza, se il sistema è asintoticamente stabile, vale:

$$\|G\|_\infty = \sup_\omega |G(j\omega)| = \|G\|_{2_{indotta}}$$

Esercizio

$$G(s) = \frac{as + 1}{bs + 1} \quad a \geq 0, b > 0 \quad (2)$$

Dato che $a \geq 0 \rightarrow$ assenza di zeri a fase non minima in $\text{Re}(s) > 0 \rightarrow$ il sistema è asintoticamente stabile.

Remark. Nei sistemi lineari propri, l'esistenza di una norma implica l'esistenza delle altre norme e viceversa, legandosi così alla proprietà di asintotica stabilità. Tuttavia, questo non è vero nei sistemi non lineari.

0.1.5 Lemma di Barbalat

Stabilità di Lyapunov

Definition 0.1.15 (Stabilità secondo Lyapunov). *Considerato un sistema dinamico con lo stato x e un punto di equilibrio x_e e con x_0 lo stato in $t=0$. Il punto di equilibrio è **stabile secondo Lyapunov** se:*

$\exists \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che:

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

La ε legata alle prestazioni future del sistema con δ il vincolo sulle condizioni iniziali che garantiscono la limitatezza negli istanti futuri.

Esercizio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \psi(t, x_1, x_2)x_2 \\ \dot{x}_2 = -\psi(t, x_1, x_2)x_1 \end{cases}, \quad \psi(t, x_1, x_2) > 0 \quad \forall t, x_1, x_2 \quad (4)$$

Dimostra che il sistema ha un unico punto di equilibrio nell'origine.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \psi \\ -\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial(\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2})}{\partial t} = 0 \quad (6)$$

Se è costante in t :

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{x_1(0)^2}{2} + \frac{x_2(0)^2}{2} \quad (7)$$

Quindi, scelto un ε fissiamo $\delta(\varepsilon)$ tale che l'evoluzione futura del sistema sia limitato. In questo caso è stabile, ma non asintoticamente stabile poiché non converge a 0. Come si può vedere in figura:

Definition 0.1.16 (Punto attrattivo). Un punto di equilibrio x_e si dice **attrattivo** se tutte le traiettorie con le condizioni iniziali convergono al punto di equilibrio.

Remark. La proprietà di attrattività è diversa dalla proprietà di stabilità.

Definition 0.1.17 (Stabilità asintotica). Un punto di equilibrio x_e è **stabile asintoticamente** se è stabile attrattivo.

Theorem 0.1.2 (Teorema di stabilità di Lyapunov). Consideriamo un sistema autonomo non lineare descritto da:

$$\dot{x} = f(x) \quad x(t) \in X \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

Assumiamo $x_e = 0$ punto di equilibrio tale che $f(0) = 0, x(t) = 0 \forall t \geq 0$ ed inoltre:

- autovalori di $\frac{\partial f(0)}{\partial x}$ siano nella parte sinistra del piano complesso; (**Criterio di Linearizzazione**)
- esiste una matrice definita positiva $V : x \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ (t.c. $V(0) = 0, V(x) > 0 \forall x \neq 0$) tale che $V_x f(x) < 0 \forall x \neq 0$ in un intorno dell'origine. (**Principio di Lasalle**)

Allora il punto di equilibrio x_e è localmente asintoticamente stabile

Remark.

Linearizzazione

$$\dot{x} = f(x) \quad (9)$$

$$\dot{x} = Ax + o(\|x\|^2) \quad (10)$$

In cui la matrice $A = \frac{\partial f(0)}{\partial x}$. Quindi, se:

$$\forall \lambda_i \in \sigma(A) \geq 0 \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Asintoticamente stabile in un intorno di } x_e \quad (11)$$

Inoltre, se $\text{Re}(\lambda) < 0 \forall \lambda_i$, l'andamento è esponenziale.

Principio di Lasalle Se

$$\exists V : x \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \quad (12)$$

funzione di Lyapunov, allora rappresenta l'energia del sistema tale che:

$$\begin{cases} V(0) = 0 & \text{in } x_e \\ V(x) > 0 & \forall x \neq 0 \end{cases} \quad (13)$$

con $V_x f(x) < 0 \forall x \neq 0$ in un intorno dell'origine.

Applicazione Teorema Lyapunov

$V(x) > 0 \rightarrow$ insieme chiuso e limitato

Per valutare la funzione di Lyapunov occorre valutare il suo gradiente in un punto:

$V_x^T f < 0 \quad x \neq 0 \rightarrow \dot{x} \in$ al settore interno della linea di livello dato $\rightarrow t + \partial t \rightarrow \dot{x}$ viene attratta verso l'interno. Tramite Lyapunov, inoltre, è possibile valutare le condizioni di stabilità:

Se prende una condizione iniziale nella circonferenza di raggio

$\delta\epsilon$, questa potrebbe uscire dalla circonferenza di raggio $\delta\epsilon$, ma deve rimanere all'interno della circonferenza di raggio ϵ (più grande) per poi convergere a zero

Remark. Se gli insiemi di livello della funzione di Lyapunov sono limitati allora $\exists \forall \epsilon > 0$ t.c. le condizioni di Lyapunov sono soddisfatte.

Remark. Per avere l'asintotica stabilità, integrando lo Jacobiano della funzione di Lyapunov, le traiettorie tendono ad insiemi di livello sempre più piccole e si fermano in $V(x) = 0$ in cui si ha un solo punto

Quindi, la teoria di Lyapunov è utile per capire le proprietà di **stabilità** e **attrattività** nel punto di equilibrio. Tuttavia, lo svantaggio è che occorre trovare la corretta funzione di Lyapunov e il sistema deve essere autonomo, cioè senza ingresso/uscita/disturbo.

Teorema di Barbalat

Il teorema di Barbalat viene utilizzato nei sistemi SISO per determinare la convergenza dei segnali senza utilizzare una funzione di Lyapunov.

Definition 0.1.18 (Lemma di Barbalat). *Supponiamo un segnale $r(t) = \begin{bmatrix} r_1(t) \\ \dots \\ r_n(t) \end{bmatrix} \in L_\infty \cap L_2$ e $\dot{r} \in L_\infty$. Allora:*
 $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$

Remark. • $L_\infty \cap L_2$ implica un segnale infinito;

- $r(t) \in L_\infty$ è necessario per la convergenza;
- **Lemma di Barbalat debole:** $r \in L_\infty$ non necessariamente $\dot{r} \in L_\infty$. Allora: $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$;
- si può utilizzare anche la norma p ;
- $\dot{r} \in L_\infty$ è necessario.

Il lemma di Barbalat può essere un'alternativa al principio di invarianza di Lasalle, ma richiede l'invarianza nel tempo. **ESERCIZI: pag. 14-15 degli appunti.**

Metodo del Gradiente

Definition 0.1.19 (Gradiente di f). *Consideriamo il problema di minimizzare una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Questa è una funzione continua e derivabile e definiamo il gradiente di f :*

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Se $\nabla f(x) = 0 \rightarrow$ **punti stazionari** (massimo, minimo, flesso)

Lemma 0.1.3. *Consideriamo una funzione f continuamente differenziabile e la dinamica del sistema è costituita da:*

$$\dot{x} = -\nabla f(x)$$

Quindi, tutte le traiettorie del sistema convergono in un punto stazionario della funzione f . Inoltre:

- Se f è radialmente illimitata allora tutte le traiettorie sono limitate;
- Se f convessa allora tutte le traiettorie convergono in un insieme minimizzatore globale di f .

Esercizio (Vedere pagina 16)

Supponiamo f quadratica: $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + d$ $Q = Q^T$ e assumiamo che $Q \succ 0$ definita positiva e f convessa. Mostra che il sistema $\dot{x} = -(Qx + c)$ ha un unico punto di equilibrio asintoticamente stabile.

0.1.6 Dissipatività

La teoria della dissipatività permette lo studio delle proprietà dei sistemi interconnessi usando una prospettiva basata su considerazioni energetiche.

Consideriamo un sistema non lineare Σ descritto da:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad y = h(x, u)$$

$$x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n; \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m; \quad y(t) \in Y \subset \mathbb{R}^p; \quad f, h \text{ vettoriali e differenziabili}$$

Definition 0.1.20 (Supply rate). *Nello spazio $U \times Y$ delle variabili esterne (ingresso e uscita), definiamo la funzione supply rate come:*

$$s: U \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

Definition 0.1.21 (Sistema dissipativo). *Un sistema Σ detto dissipativo rispetto alla supply rate S se $\exists S: X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, detta funzione di storage, tale che:*

$$\forall t_1 \geq t_0, \quad \forall u \quad S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} S(u(\tau), y(\tau)) \partial \tau$$

In cui lo stato $x(t_1)$ deve essere limitato superiormente dalla funzione di storage e l'integrale della supply rate. Inoltre, se l'equazione è soddisfatta per tutti i u su $[t_0, t_1]$ allora Σ è detta **loseless** rispetto a Σ , cioè che non vi è dissipatività.

Remark. La **disuguaglianza dissipazionale** ci dice che l'energia immagazzinata nel sistema in t_1 al massimo uguale all'energia che è stata immessa nel sistema e a tutte l'energia immagazzinata dall'esterno. Quindi non vi è **creazione di energia**.

La disuguaglianza dissipazionale è:

$$\forall t_1 \geq t_0, \quad \forall u \quad S(x(t_1)) \leq S(x(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} S(u(\tau), y(\tau)) \partial \tau$$

Essa dipende dalle traiettorie del sistema, ma quello che vogliamo fare è slegare questa dipendenza. Quindi:

$$\begin{aligned} S(x(t)) - S(x(t_0)) &\leq \int_{t_0}^t S(u, y) \partial \tau \quad t \geq t_0 \\ \frac{S(x(t)) - S(x(t_0))}{t - t_0} &\leq \frac{\int_{t_0}^t S(u, y) \partial \tau}{t - t_0} \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(x(t)) - S(x(t_0))}{t - t_0} &\leq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\int_{t_0}^t S(u, y) \partial \tau}{t - t_0} \end{aligned}$$

Remark. Questo è possibile poiché S è differenziabile.

Applicando la differenziabilità per la parte sinistra della disequazione e il teorema di De Hopital per il membro destro, si ottiene:

$$S_x f(x, 0) \leq S(u, y) \leq S(u, h(x, u))$$

Se $u = 0$:

$$S_x f(x, 0) \leq S(0, h(x, 0)) = 0$$

0.1.7 Passività

una scelta particolare di supply rate, tipica del controllo adattativo) è:

$$s(u, y) = u^T y$$

Questo è possibile se e solo se il numero di input è uguale a quello di output e quindi il sistema viene detto **quadrato**. Supponiamo Σ dissipativo rispetto alla supply rate appena definita. Allora per qualche funzione $S \geq 0 \forall x(0), T \geq 0$ e tutti i segnali di input $u_{[0, T]}$:

$$\begin{aligned} S(x(t)) &\leq S(x(0)) + \int_0^t u^T(\tau) y(\tau) \partial \tau \\ \int_0^t u^T(\tau) y(\tau) \partial \tau &\geq S(x(t)) - S(x(0)) \geq -S(x(0)) \end{aligned}$$

Quindi, la massima energia estratta dal sistema è limitata superiormente e dipende dalla funzione di storage iniziale.

Definition 0.1.22 (Sistema Passivo). Dato un sistema Σ , esso è:

- **passivo** se risulta dissipativo rispetto alla supply rate

$$s(u, y) = u^T y$$

;

- **strettamente passivo rispetto all'ingresso** se è possibile determinare:

$$\exists \delta > 0. \text{csistemadissipativo con } S(u, y) = u^T y - \delta \|u\|^2$$

- **stettamente passivo rispetto all'uscita** se:

$$\exists \varepsilon t. \text{csistemadissipativo con } S(u, y) = u^T y - \varepsilon \|y\|^2$$

;

- **conservativo** se è loseless rispetto a

$$s(u, y) = u^T y$$

Remark. I termini con il segno meno nella passività rispetto all'ingresso e all'uscita rappresentano termini di sconto per la supply rate.

0.1.8 Condizioni di Hill-Moylan e KYP

L'obiettivo delle **condizioni di Hill-Moylan e KYP** è quello di disaccoppiare le condizioni sugli stati e gli ingressi rispetto alla dissipatività. A tale scopo consideriamo sistemi **affini nelle variabili di ingresso** (lineari).

Definition 0.1.23 (Classe di Sistema). Definiamo la **classe di sistemi** Σ_a tutti questi sistemi descritti da:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad y = h(x)$$

Theorem 0.1.4 (Teorema Hill e Moylan). Considerato il sistema affine Σ_a , supponiamo, inoltre, che il sistema sia passivo con una funzione differenziabile di sotrage S . Allora:

$$S_x f(x) \leq 0 \quad S_x g(x) = h^T(x)$$

Proof. Se $f(x, u) \leq S(u, h(x, u)) \rightarrow$

$$S_x[f(x) + g(x)u] \leq u^T y = h^T(x)u$$

Se $u = 0$:

$$S_x f \leq 0$$

Fissato $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ S_x f \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ S_x g - h^T \\ \vdots \end{bmatrix} u \leq 0$$

che rappresenta l'equazione di una retta:

Appena aumenta si va oltre $z = 0$ e la disuguaglianza risulta non verificata;

$$\alpha = 0 \rightarrow S_x g - h^T = 0$$

Quindi:

$$S_x g(x) = h^T(x)$$

□

Remark. • Le condizioni di Hill-Moylan generalizzano il teorema di Lyapunov, poiché se il sistema è asintoticamente stabile secondo Lyapunov, allora:

$$S : xf(x) \leq 0$$

risulta soddisfatta.

- Sono condizioni più restrittive dato che:

$$S_x g(x) = h^T(x)$$

- Permette l'interconnessione tra sistemi dato che si considerano più ingressi e uscite.

Supponiamo Σ :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

Il punto $x = 0$ è stabile se $\exists V \succ 0$ tale che $V_x f \geq 0$

Vogliamo chiederci se esiste un y tale che Σ sia passiva. Questo è possibile definendo:

$$y = h(x) \quad h(x) = g^T V x^T$$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = g^T(x) V x^T \end{cases} \quad \text{un sistema passivo.}$$

Theorem 0.1.5 (KYP). Consideriamo la classe di sistemi Σ_a . Supponiamo il sistema lineare:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

e che Σ sia passivo con una funzione di storage quadratica:

$$S(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad P = P^T \succ 0$$

Allora:

$$A^T P + P A \leq 0 \quad P B = C^T$$

Remark.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx$$

$$x^T P A x + x^T A^T P x \leq 0$$

$$x^T P B = x^T C^T \rightarrow P B = C^T$$

Rappresenta l'uscita passiva del sistema. Quindi:

$$\forall P \exists! \text{ uscita passiva.}$$

Theorem 0.1.6. Consideriamo la classe di sistemi Σ_a . Supponiamo che il sistema sia strettamente passivo rispetto all'uscita con una funzione differenziale di storage S . Allora:

$$S_x f(x) \leq -\varepsilon h^T(x) h(x) \quad S_x g(x) = h^T(x)$$

Proof.

$$S_x(f + gu) \leq y^T u - \varepsilon h^T h$$

- $u = 0 \rightarrow$

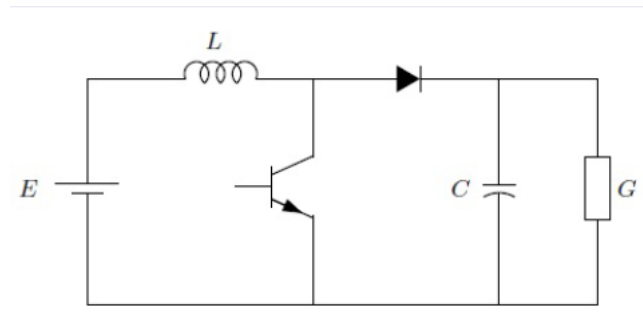
$$S_x f \leq -\varepsilon h^T h \leq 0$$

è una condizione più stringente a causa di un margine di negatività

- $u \neq 0$, verificare se presente un termine lineare e quindi $S_x g = h^T(x)$

□

ESERCIZIO



Consideriamo un boost DC-DC descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} L\dot{x}_1 = -sx_2 + E & (\text{uscita}) \\ C\dot{x}_2 = sx_1 - Gx_2 \\ y = x_1 \end{cases} \quad L > 0 \quad C > 0 \quad G > 0 \quad E > 0 \text{ ingresso} \quad s \in \{0,1\} \text{ segnale di switching}$$

Dimostra che il sistema è passivo con funzione di storage:

$$S(x_1, x_2) = \frac{L}{2}x_1^2 + \frac{C}{2}x_2^2$$

Svolgimento Occorre verificare le condizioni di Moylan:

$$\begin{cases} S_x f \leq 0 \\ S_x g = 0 \end{cases}$$

$$S_x = [Lx_1 \quad Cx_2] \quad f = \begin{bmatrix} -\frac{s}{L}x_2 \\ s\frac{x_1}{C} - \frac{G}{C}x_2 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad h = x_1$$

1.

$$S_x g = [Lx_1 \quad Cx_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = x_1 = h$$

2.

$$S_x f = [Lx_1 \quad Cx_2] \begin{bmatrix} -\frac{s}{L}x_2 \\ s\frac{x_1}{C} - \frac{G}{C}x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sx_1x_2 \\ sx_1x_2 - Gx_2^2 \end{bmatrix} = -Gx_2^2 \leq 0$$

Remark. • sx_1x_2 rappresenta l'energia scambiata e dato che si trovano su entrambe le righe è possibile semplificare

• $-Gx_2^2$ rappresenta il termine dissipazionale.

L'unione di 1 + 2 implica che il sistema è passivo con quella funzione di storage che rappresenta l'energia totale del sistema.

Remark. Non si può concludere che il sistema è passivo strettamente all'uscita poiché l'uscita è x_1 , ma la negatività viene data da x_2 . Quindi vi sono 2 uscite. In particolare:

0.1.9 Positive realness-Reale positività

Consideriamo un sistema lineare:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad y = Cx \quad S(u, y) = u^T y = y^T u$$

Associamo a questo sistema una funzione di trasferimento:

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B \quad G(jw) = C(jwI - A)^{-1}B$$

Inoltre, assumiamo che il sistema sia raggiungibile e osservabile ed in particolare il numero di ingressi è pari al numero delle uscite e che il sistema sia minimo. Allora sono equivalenti:

- Il sistema è passivo con funzione quadratica di storage $S(x) = \frac{1}{2}x^T Px$ $P = P^T \succ 0$;
- Esiste la matrice $P = P^T \succ 0$ tale che:

$$\begin{cases} A^T P + PA = -L^T L \\ PB = C^T \end{cases} \quad \text{Teorema di KYP}$$

- tutti i poli di $G(s)$ siano tutti a parte reale non positiva:

1. Siccome Σ minimo allora i poli del sistema coincidono con gli autovalori della matrice A
2. La *Arisolveladisuguaglianza di Lyapunov* $A^T P + PA \leq 0$

Da queste due condizioni tutti i poli sono nella parte chiusa del piano complesso

- 1. $\forall \omega$ tale che $j\omega$ non è polo di $G(s) \rightarrow G(j\omega) + G^T(-j\omega) \succeq 0$ semidefinita positiva
- 2. $\forall \omega$ tale che $j\omega$ è un polo semplice $\rightarrow \text{Res}(j\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s) \succeq 0$ è semidefinita positiva e Hermitiana

Definition 0.1.24 (Funzione reale positiva). Una funzione di trasferimento $G(s)$ è detta **reale positiva** se soddisfa:

1. $\forall \omega$ tale che $j\omega$ non è polo di $G(s) \rightarrow G(j\omega) + G^T(-j\omega) \succeq 0$ semidefinita positiva
2. $\forall \omega$ tale che $j\omega$ è un polo semplice $\rightarrow \text{Res}(j\omega) = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)G(s) \succeq 0$ è semidefinita positiva e Hermitiana

Definition 0.1.25 (Strettamente reale positiva). Una funzione di trasferimento $G(s)$ detta **strettamente reale positiva** se $G(s - \varepsilon)$ è una funzione positiva reale per quale $\varepsilon > 0$.

Per i sistemi SISO, lineari, raggiungibili e osservabili vale la proprietà:

$$G(j\omega) + G(-j\omega) = 2\text{Re}[G(j\omega)]$$

poiché è definita positiva se si applica la definizione di reale positiva. Quindi la proprietà di passività ci dice che $2\text{Re}[G(j\omega)] \geq 0$ che corrisponde alla condizione di stabilità nel diagramma di Nyquist: il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento giace nella parte destra del piano complesso.

Remark. Ciò è possibile solo se il grado relativo della funzione di trasferimento non è né zero né uno.

Remark. • Indipendentemente dall'approprietà del sistema, la funzione di trasferimento appartiene alla parte destra del diagramma di Nyquist;

- Se $D = 0 \rightarrow$ il grado relativo, cioè la differenza tra polie e zero ≥ 1 . Inoltre, questa condizione viene violata ad alte frequenze.

Remark. Un sistema passivo o una funzione di trasferimento reale positivo ha grado relativo nullo o 1.

Lemma 0.1.7 (C.N.S. strettamente reale positivo). Un sistema lineare, raggiungibile e osservabile SISO è **strettamente reale positivo** se e solo se tutti i poli di $G(s)$ hanno parte reale negativa; $\text{Re}[G(j\omega)] > 0 \forall \omega \in [0, \infty)$ e $G(\infty) > 0$ o $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[G(j\omega)] > 0$

ESERCIZI Dimostra che le funzioni di trasferimento sono reali positive

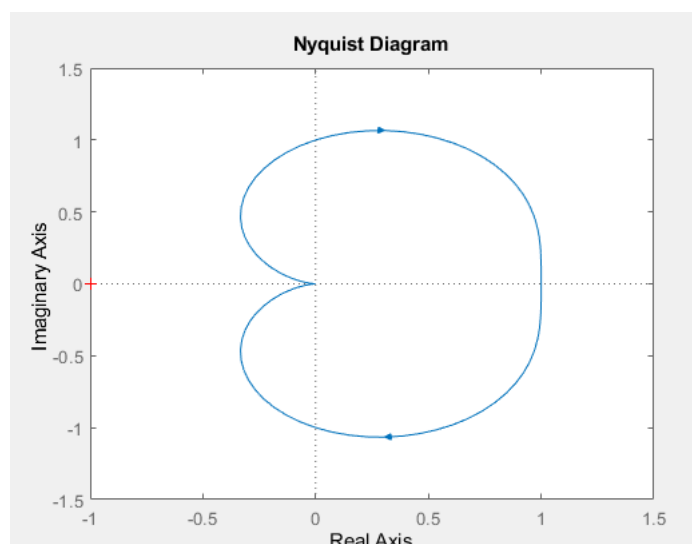
$$1. G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -\frac{j}{\omega}$$

$G(s)$ reale positiva, ma non strettamente $\rightarrow \text{Re}(G(j\omega)) = 0$ Poiché $G(s)$ non è strettamente positiva:

$$G(s - \varepsilon) = \frac{1}{s - \varepsilon} \quad \varepsilon > 0$$

Deve essere soddisfatta l'equazione di Lyapunov con $P = P^T \succ 0 \quad A^T P + P A = -L^T L \quad P B = C^T$
Poiché $\lambda A = \varepsilon \geq 0 \rightarrow \sigma(A) \subset \mathbb{C}^+$, il sistema non è passivo e quindi non reale positivo.

$$2. G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}, \text{ il sistema non è passivo, quindi non è reale positivo poiché il grado relativo è pari a 2.}$$



$$3. G(s) = \frac{1}{s+a} \quad a > 0$$

$$\deg(G(s)) = 1 \rightarrow \text{sistemastabile}$$

Quindi valutiamo la parte reale della funzione di trasferimento e nyquist.

- Da Nyquist: $|\angle G(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega \in [0, \infty]$

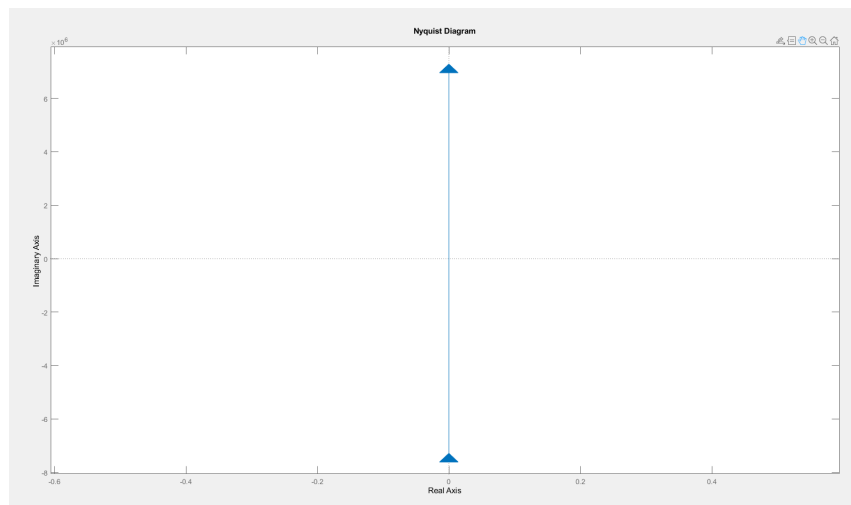
Come si può notare vi è uno sfasamento di $\frac{\pi}{2}$. Ora occorre valutare la funzione di trasferimento: $\text{Re}[G(j\omega)] > 0 \quad \forall \omega \in [0, \infty)$ e $G(\infty) > 0$ o $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \text{Re}[G(j\omega)] > 0$.

Non valutiamo $G(\infty) > 0$ poiché il grado relativo è pari ad 1. Quindi:

$$G(s - \varepsilon) = \frac{1}{s - \varepsilon + a} = \frac{1}{\tilde{a}} \quad 0 < \varepsilon \leq a, a > 0$$

Allora, posso sempre trovare un ε in particolare, se $\varepsilon = a$ $G(s - \varepsilon)$ è reale positiva, ma non strettamente e quindi la funzione di trasferimento è strettamente reale positiva.

- $G(s) = \frac{s}{s^2 + \tilde{\omega}^2} \quad \omega \neq 0$ Se $\omega = 0$ si ha una cancellazione polo-zero con una conseguente perdita di raggiungibilità e osservabilità.



Ora:

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{\tilde{\omega}^2 - \omega^2}$$

Il suo grado relativo è pari ad 1 ed è stabile dato che: $\lambda(A) = j\tilde{\omega}, -j\tilde{\omega}$ 2 poli sull'asse immaginario.

$$\angle G(j\omega) = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{al variare di } \omega$$

$$\forall |G(j\omega)| = \frac{\pi}{2} \text{ funzione di trasferimento reale positiva non strettamente e per dimostrare lo si ricorre a } G(j\omega) + G(-j\omega) = 0$$

0.1.10 Guadagno L_2 (Controllo robusto)

Definito $\gamma \geq 0$ il guadagno del sistema, consideriamo la supply rate:

$$S(u, y) = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2)$$

Supponiamo che il sistema Σ sia dissipativo rispetto alla supply rate. Allora per qualche funzione $S \geq 0 \quad \forall x(0), u \in [0, T]$ vale:

$$\frac{1}{2} \int_0^T (\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2) d\tau \geq S(x(T)) - S(x(0))$$

Quindi:

$$\int_0^T \|y\|^2 \leq \gamma^2 \int_0^T \|u\|^2 + 2S(x(0))$$

cioè che il sistema Σ ha un guadagno $L_2 \leq \gamma$.

Si dice anche che il sistema è affetto da **bias**.

Definition 0.1.26 (Guadagno L_2). *Il sistema Σ possiede un guadagno L_2 minore o pari a γ se è dissipativo rispetto alla supply rate:*

$$S(u, y) = \frac{1}{2}(\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2)$$

Theorem 0.1.8. *Consideriamo la classe di sistemi Σ_a . Supponiamo che il sistema abbia guadagno $L_2 \leq \gamma > 0$ con un funzione differenziale di storage S . Allora:*

$$S_x(f(x) + g(x)u) \leq \frac{1}{2}(\gamma^2 \|u\|^2 - \|y\|^2)$$

Proof. Se $u = 0$:

$$S_x f + \frac{\|h\|^2}{2} \leq 0$$

Se $u \neq 0$, occorre trovare la u del teorema tale che:

$$S_x(f(x) + g(x)u) - \frac{1}{2}\gamma^2 \|u\|^2 + \frac{1}{2}\|h\|^2 \leq 0$$

Per x fissato una parabola concava e per verificare che sia soddisfatta $\forall u$ occorre trovare il punto di massimo effettuando la derivata prima. Si ottiene:

$$U^* = \frac{1}{\gamma^2} g^T(x) S_x^T$$

Che, sostituita nella disuguaglianza, si giunge all'**equazione di Hamilton-Jacobi** nelle derivate parziali della funzione di storage:

$$S_x f(x) + \frac{1}{2} S_x g(x) g^T(x) S_x^T + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0$$

□

Theorem 0.1.9. *Consideriamo il sistema lineare:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

osservabile. Allora sono equivalenti:

1. *Il sistema ha guadagno $L_2 < \gamma$ con $\gamma > 0$*
2. *Esiste definita positiva $P = P^T$ tale che:*

$$A^T P + PA + P \frac{BB^T}{\gamma^2} P + C^T \leq 0$$

3. *Tutti gli autovalori hanno parte reale negativa ed esiste la matrice Hamiltoniana:*

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{BB^T}{\gamma^2} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

che non abbia autovalori sull'asse immaginario.

4. *Esiste la matrice $X = X^T \succ 0$ che risolve la disuguaglianza lineare matriciale:*

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Proof. **1 \Leftrightarrow 2:** banale poiché il sistema è quadrato e basta applicare la definizione.

2 \Leftrightarrow 4: Si dimostra tramite il complemento di Shur.

3 \Leftrightarrow 1:

$$H = \begin{bmatrix} A & \frac{BB^T}{\gamma^2} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} H J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{BB^T}{\gamma^2} \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = -H^T$$

$$\lambda(H) = \lambda(-H^T) = \lambda(-H)$$

Ricordiamo la proprietà dell'Hamiltoniano:

1. Autovalori simmetrici;
2. Autovalori simmetrici rispetto all'asse immaginario;
3. Per autovalori sull'asse immaginario non si avrà una coppia.

Quindi $J^{-1}HJs$ simile a $-H^T e\lambda$ simile a $-\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se l'autovalore non si trova sull'asse immaginario. Riscrivendo H:

$$H = L + MN = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{B}{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{B^T}{\gamma} \end{bmatrix}$$

L non ha autovalori sull'asse immaginario. Supponiamo per assurdo che $\exists \lambda = j\omega$ allora esiste un autovettore destro per H:

$$(L + MN)v = j\omega v \rightarrow MNv = (j\omega I - L)v^1$$

$$(j\omega I - L^{-1})MNv = v \rightarrow w = Nv \rightarrow \omega = N(j\omega I - L)^{-1}Mv \quad (14)$$

Ora supponiamo che $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$:

$$N(j\omega I - L)^{-1} = \frac{G(-j\omega)^T G(j\omega)}{\gamma^2}$$

$$\omega^T \frac{G(-j\omega)^T G(j\omega)}{\gamma^2} \omega = \omega^T N(j\omega I - L)^{-1} \omega \Leftrightarrow \|\omega\|^2 = \frac{\|G(j\omega)\omega\|^2}{\gamma^2}$$

Quindi:

$$\|G(j\omega)\| = \gamma$$

Applicando $u = \sin(\omega t)$, la sinusoidale con ampiezza γ volti di u. Quindi un sistema ha un guadagno L_2 di valore γ il che rappresenta una contraddizione. \square

Remark. Per un sistema SISO lineare, allora:

- La **passività** coincide con $G(s)$ reale positiva, allora il diagramma di Nyquist giace a destra del piano e il modulo della fase come
- La **passività** implica la stabilità del sistema e quindi a fase minima di grado relativo pari ad 1;
- Il **guadagno** L_2 deve essere minore di γ . Se ciò è verificato si ha asintotica stabilità e da Nyquist tutte le traiettorie di w sono racchiuse in una circonferenza di raggio γ ;
- $G(s)$ strettamente passiva e quindi $G(s) = \frac{G(s)-1}{G(s)+1}$ ha un guadagno $L_2 < 1$

0.1.11 Stabilità e stabilizzazione di sistemi dissipativi

Stabilità di sistemi dissipativo

Theorem 0.1.10. Consideriamo il sistema Σ . Supponiamo:

- Σ dissipativo con funzione di differenza di storage S ;
- Σ con punto di equilibrio $x=0$ e $h(x,0)=0$;
- x è minimizzatore stretto locale di S ;
- La supply rate è tale che $S(0,y) < 0 \quad \forall y \neq 0$

Allora un punto di equilibrio stabile per il sistema $\dot{x} = f(x,0)$. In aggiunta, l'unica soluzione di $\dot{x} = f(x,0)$ tale che $y(t)=0 \quad \forall t$ è x . Allora, il punto di equilibrio del sistema è asintoticamente stabile.

Proof.

$$S_x f \leq S(u,y) \xrightarrow{u=0} S_x f(x,0) \leq S(0,y) < 0 \quad y \neq 0 \quad y = h(x,0) \quad (\text{Attorno al punto di equilibrio})$$

$$\dot{S} = S_x f(x,0) \leq S(0,y) < 0$$

\square

Definition 0.1.27 (Zero State Observable). Il sistema Σ_a zero state observable se $u(t)=0$ e $y(t)=0 \quad \forall t \geq 0$:

$$x(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$$

¹ $(j\omega I - L)v$ Non singolare

Lemma 0.1.11. Consideriamo $\Sigma_a x = 0$ punto di equilibrio. Inoltre, definiamo $S \leq 0$ differenziabile di storage e dissipativo per quale supply rate tale che:

- $S_x f(x) \leq ch^T(x)h(x) \quad \forall \varepsilon > 0;$
- $S_x f(x) = 0 \quad S_x g(x) = h^T(x)$

Supponiamo Σ_a osservabile nello stato zero, allora:

$$S(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

Proof.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \quad y = h(x) \\ S &\geq 0 \quad \dot{S} = S_x f \leq -\varepsilon h^T h \\ \int_0^T \dot{S} \partial t &\leq -\varepsilon \int_0^T y y^T = -\varepsilon \int_0^T \|y\|^2 \partial t \\ S(x(T)) - S(x(0)) &\leq -\varepsilon \int_0^T \|y\|^2 \partial t \Rightarrow S(x(0)) \geq \varepsilon \int_0^T \|y\|^2 \partial t \end{aligned}$$

Ora, supponiamo che $S(x(0)) = 0 \rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow x(0) = 0 \rightarrow S(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$ e consideriamo $\Sigma_a : u = -y$. Supponiamo $S \succ 0$ tale che $S_x f(x) = 0 \quad S_x g(x) = h^T(x)$ e la disequazione dissipazionale:

$$S_x(f(x) + g(x)u) = -h^T(x)h(x)$$

$$\dot{S} = -h^T h \Rightarrow S(x(t)) - S(x(0)) = -\int_0^T \|y\|^2 \partial t$$

□

Stabilizzazione di sistemi dissipativi

Consideriamo Σ_a passivo:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases}$$

passivo con funzione di storage differenziabile S . Per la condizione di Moylan sappiamo che:

$$S_x f \leq 0 \quad S_x g = h^T \Rightarrow \dot{x} \leq u^T y$$

$S_f := \text{traiettorie del sistema con } u = 0$. Selezioniamo $u = -ky + v$ (controllo proporzionale con segnale di ingresso)

E ne consideriamo l'interconnessione. La funzione di storage soddisfa:

$$\begin{aligned} \dot{S} &\leq -y^T k^T y + v^T y \quad K = K^T > 0 \\ \dot{S} &\leq -y^T k y + v^T y \leq v^T y \quad \text{passivo} \end{aligned}$$

Allora il sistema a ciclo chiuso è strettamente passivo rispetto all'uscita.

Proprietà del sistema controllore Il controllore è:

- statico; Il sistema controllore è un sistema strettamente passivo rispetto all'ingresso;

Lemma 0.1.12. L'interconnessione in feedback negativo di due sistemi passivi risulta anch'esso passivo. Il sistema risultante sarà strettamente passivo rispetto all'uscita.

Quindi, considerato il sistema a ciclo chiuso:

- $\Sigma_a, u = -ky + v \quad k = uI > 0;$
- S definita positiva nell'intorno di $x = 0;$

Allora, se il sistema è **zero state detectable**, il controllo $u = -ky$ rende l'equilibrio $x = 0$ localmente asintoticamente stabile. In particolare:

$$S > 0 \Rightarrow \dot{S} \leq -k \|y\|^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

Stabile secondo Lyapunov. A questo punto dobbiamo dimostrare che $x = 0$ è un punto di equilibri attrattivo:

1. y converge a 0;
2. Detectabilità (Rilevabilità);

$$\dot{S} \leq -k \|y\|^2 \leq 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} S(x(t)) - S(x(0)) \leq -k \int_0^T \|y\|^2 \Rightarrow y \in L_2$$

Poiché $x = 0$ stabile e quindi $y \in L_\infty$. Quindi;

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) y \text{ limitata.}$$

Ora, tramite il **lemma di Barbalat**:

$$y(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty$$

Quindi il sistema è stabile e rilevabile³ nello stato zero. In definitiva:

$$\begin{cases} y(t) \rightarrow 0 & t \rightarrow \infty \\ u(t) = -ky(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0 \end{cases} \xrightarrow{ZSO} x(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$$

che ciò implica l'attrattività.

Remark. Si stabilizza un sistema passivo tramite un controllore proporzionale.

- 0.1.12 Teorema della passività
- 0.1.13 Trasformazioni in loop
- 0.1.14 Teorema dle piccolo guadagno
- 0.1.15 Modelli parametrici
- 0.1.16 Modelli parametrici lineari
- 0.1.17 Modelli parametrici bilineari
- 0.1.18 Perturbazioni moltiplicative
- 0.1.19 Perturbazioni in feedback
- 0.2 Stima dei parametri
- 0.3 Segnali sufficientemente ricchi
- 0.4 Design SPR per modelli lineari
- 0.5 Identificatori del gradiente
- 0.6 Proiezione e normalizzazione
- 0.7 DREM
- 0.8 Design SPR per modelli bilineari
- 0.9 Osservatore adattativo di Luenberger
- 0.10 Stima adattiva della frequenza
- 0.11 MRAC-Esempi
- 0.12 MRAC-Sistemi SISO
- 0.13 Backstepping adattivo