Teoria dei Giochi – Prova del 12 Dicembre 2018
CONSEGNARE SOLO QUESTO FOGLIO: PENALITÀ PER CHI CONSEGNA ALTRI FOGLI
NGR≡ Non Giustificare la Risposta

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ S1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ S2 & -1 & 1 & -3 & -1 \\ S3 & -5 & 2 & -6 & -1 \\ S4 & 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per il primo e il secondo giocatore:

$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii): \xi_1^1 = 0, \xi_1^2 = \frac{3}{5}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = \frac{2}{5}$; $(iii): \xi_1^1 = \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{1}{2}$;

$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj): \xi_2^1 = 0, \xi_2^2 = \frac{1}{4}, \xi_2^3 = \frac{3}{4}, \xi_2^4 = 0$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{10}, \xi_2^2 = \frac{2}{5}, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{1}{2}$.

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Rispettivamente: (i) $\frac{1}{4}$; (ii) $-\frac{1}{5}$; (iii) 0; (j) $\frac{5}{2}$; (jj) 4; (jjj) $\frac{1}{5}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jjj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

L'incrocio delle strategie determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Il valore del gioco è $-\mathbf{\frac{1}{5}}$.

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di costo, dove x è un numero razionale qualsiasi (positivo o negativo):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & D & E & F \\ A & 4 & 3 & 1 \\ B & 3+2x & 5 & 7-x \\ C & 3 & 4-x & 2 \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

2.1 Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). **NGR**

Per il secondo giocatore D è una strategia dominante per $x \geq \frac{4}{3}$.

2.2 Indicare quali sono, al variare di x, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). **NGR**

(C,D) per $x \geq 1$; (C,E) per $x = 1$.

2.3 Porre $x = 0$. Indicare quali sono, in questo caso, le strategie conservative per il primo e per il secondo giocatore (se ve ne sono). **NGR**

A e C per il primo giocatore che nel caso peggiore paga 4; D ed E per il secondo giocatore che nel caso vince 3.

2.4 Assumere nuovamente che $x = 0$ e considerare il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, per ognuna delle affermazioni seguenti dire se essa è vera o falsa **NGR**:

1 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 2.5. ☐ VERO ■ FALSO

2 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 3. ■ VERO ☐ FALSO

3 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 3.5. ■ VERO ☐ FALSO

4 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 4. ■ VERO ☐ FALSO

5 Il valore del gioco in strategia mista potrebbe essere 4.5. ☐ VERO ■ FALSO

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 25 min) In un parlamento siedono 12 deputati di cui 4 *anziani*. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota la maggioranza stretta di tutti deputati (quindi almeno 7) o anche se a suo favore votano 6 deputati, ma in questo caso tra i 6 deputati ci devono essere tutti e 4 gli anziani. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley di un deputato anziano è pari a:

$$S_a(v) = \frac{11! + \binom{8}{2} \cdot 5! \cdot 6!}{12!} = \frac{35}{396}.$$

Segue che il valore di Shapley di un deputato non anziano è pari a:

$$S_{na}(v) = \frac{1 - 4 \cdot \frac{35}{396}}{8} = \frac{8}{99}.$$

3.1 Il parlamento decide di darsi un regolamento leggermente più restrittivo. Una legge viene approvata se e solo se ci troviamo in uno dei tre seguenti casi: a suo favore votano 6 deputati tra cui i 4 gli anziani (come prima); a suo favore votano 7 deputati, ma in questo caso tra i 7 deputati ci devono almeno 3 anziani; a suo favore votano almeno 8 deputati (qualsiasi essi siano). Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley di un deputato anziano è pari a:

$$S_a(v) = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{3}{3} \cdot 5! \cdot 6! + \binom{8}{4} \cdot \binom{3}{2} \cdot 6! \cdot 5! + \binom{8}{3} \cdot \binom{3}{3} \cdot 6! \cdot 5! + \binom{8}{7} \cdot \binom{3}{0} \cdot 7! \cdot 4! + \binom{8}{6} \cdot \binom{3}{1} \cdot 7! \cdot 4! + \binom{8}{5} \cdot \binom{3}{2} \cdot 7! \cdot 4!}{12!} = \frac{47}{396}.$$

Segue che il valore di Shapley di un deputato non anziano è pari a:

$$S_{na}(v) = \frac{1 - 4 \cdot \frac{35}{396}}{8} = \frac{13}{198}.$$

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) La sicurezza di una compagnia aerea dipende non solo da quali misure di sicurezza adotta, ma anche dalle misure di sicurezza adottate dalle altre compagnie, perché i bagagli vengono spesso trasferiti (per esempio, il bagaglio che fece esplodere il volo Pan Am sopra Lockerbie, in Scozia, era stato accettato a Malta, trasferito a Francoforte e poi a Londra). Si consideri dunque il seguente gioco.

È dato un insieme N di n compagnie aeree. Ogni compagnia aerea $i \in N$ deve scegliere quale livello di sicurezza s_i adottare da un insieme di 7 possibili livelli di sicurezza, quindi $s_i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$ (il livello 7 è quello a maggior sicurezza, il livello 1 quello a minor sicurezza). Il payoff di ogni compagnia, espresso in forma di *utilità*, è una funzione che tiene conto sia del livello di sicurezza complessivo che del costo affrontato dalla singola compagnia per adottare il proprio livello di sicurezza. Esso è pari a:

$C_i(s_1, s_2, ..., s_n) = 50 + 20 \cdot \min\{s_1, s_2, ..., s_n\} - 10 \cdot s_i$

dove il termine 50 indica un costo fisso che ogni compagnia deve sostenere mentre l'operatore minimo indica che il livello di sicurezza complessivo è pari a quello minimo tra quelli adottati dalle singole compagnie.

4.1 Indicare quali sono gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

I sette stati in cui $s_1 = s_2 = \ldots = s_n$.

4.2 Indicare quali sono le strategie debolmente dominanti, se ve ne sono. **NGR**

Non ve ne sono.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) Si consideri una istanza dello stable matching problem con 3 uomini $\{U_1, U_2, U_3\}$, 3 donne $\{D_1, D_2, D_3\}$ e le seguenti graduatorie:

Uomini: $U_1 : D_3, D_1, D_2$; $U_2 : D_1, D_3, D_2$; $U_3 : D_1, D_2, D_3$.

Donne $D_1 : U_1, U_2, U_3$; $D_2 : U_1, U_3, U_2$; $D_3 : U_2, U_1, U_3$

Dire quale matching restituisce l'algoritmo di Gale Shapley svolto a partire dalle donne. **NGR**

D_1U_1, D_2U_3, D_3U_2.

5.1 Sempre nell'ipotesi di svolgere l'algoritmo a partire dalle donne, dire se la donna D_1 potrebbe ottenere un partner migliore mentendo: in caso di risposta negativa, non è necessario giustificare la risposta; in caso di risposta affermativa riportare una (falsa) graduatoria che D_1 potrebbe riportare per ottenere un partner migliore.

No non può.

5.2 Sempre nell'ipotesi di svolgere l'algoritmo a partire dalle donne, dire se l'uomo U_1 potrebbe ottenere un partner migliore mentendo: in caso di risposta negativa, non è necessario giustificare la risposta; in caso di risposta affermativa riportare una (falsa) graduatoria che U_1 potrebbe riportare per ottenere un partner migliore.

Si, se l'uomo avesse riportato la graduatoria $U_1 : D_3, D_2, D_1$ (il matching sarebbe stato D_1U_2, D_2U_3, D_3U_1, che per U_1 è preferibile).