

# OTTIMIZZAZIONE NEI SISTEMI DI CONTROLLO 1

Esame 30 Agosto 2019

1. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + 2u(t)^2) dt \right\}, \quad s.t. \quad \begin{cases} \dot{x}_1 &= g(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (1)$$

- a) Determinare una funzione continua  $g$  tale che  $\bar{u} = -x_1 - \sqrt{3}x_2$  sia la soluzione ottima di (1) con funzione valore associata  $\bar{V}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1^2 + x_1x_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2^2$ . [4 PUNTI]
- b) Determinare, motivando la risposta, tutte le condizioni iniziali  $x(0)$  tali che il costo di  $\bar{u}$  sia pari a zero. [2 PUNTI]

2. Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u J(u) = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^2 5x(t)^2 + u(t)^2 dt \right\}, \quad s.t. \quad \dot{x} = 2x + u, \quad (2)$$

- a) Determinare la soluzione ottima del problema (2). [4 PUNTI]
- b) Determinare il costo ottimo a partire dalla condizione iniziale  $x(0) = 2$ . [2 PUNTI]

3. Si consideri il problema di Reinforcement Learning stocastico rappresentato graficamente nella pagina seguente. Supponendo che la policy  $\pi$  è tale che  $v_\pi(x^1) = 2$ ,  $v_\pi(x^2) = 1$  e  $v_\pi(x^3) = 2.5$  e che  $\pi(u_1|x) = 0.2$ ,  $\pi(u_2|x) = 0.7$ ,  $\pi(u_3|x) = 0.1$ , calcolare  $v_\pi(x)$  [4 PUNTI] e  $q_\pi(x, u)$  [3 PUNTI] con  $\gamma = 1$ .
4. Descrivere brevemente l'equazione differenziale di Riccati. Dimostrare l'esistenza globale (nell'intervallo  $[0, T]$ ) della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati. [6 PUNTI]
5. Descrivere brevemente l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman. Dimostrare che l'equazione HJB fornisce condizioni necessarie di ottimalità. [6 PUNTI]

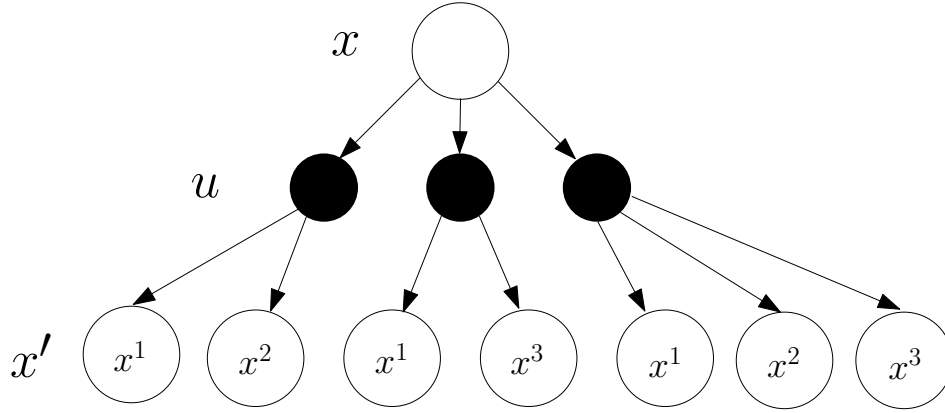


Figure 1: figura Domanda 3.

### Funzione di massa di probabilità

Dati  $x$  e  $u_1$

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 0.5) & \text{prob} = 0.4 \\ (x^2, 0.5) & \text{prob} = 0.6 \end{cases}$$

Dati  $x$  e  $u_2$

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 1) & \text{prob} = 0.8 \\ (x^3, 4) & \text{prob} = 0.2 \end{cases}$$

Dati  $x$  e  $u_2$

$$(x', r) = \begin{cases} (x^1, 0.5) & \text{prob} = 0.6 \\ (x^2, 4) & \text{prob} = 0.1 \\ (x^3, 1) & \text{prob} = 0.3 \end{cases}$$