- **Gioco**: Un gioco è una tripla $\Gamma = \{N, \{X_i\}_{i \in N}, \{C_i\}_{i \in N} : N = \{1, .., n\}\}$ Insieme dei giocatori;X_i non vuoto insieme delle strategie del giocatore i; C_i payoff in fomra di costo.
- **Stato**:Vettore $(x_1, .., x_n)$ con $x_i \in X_i \ \forall i$;
- **Strategia del giocatore i sapendo la giocata di un altro giocatore**:$x_i = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n)$;
- **Payoff del giocatore i sapendo la giocata di un altro giocatore**:$C_i(x_i, x_{-i})$;
- **Best Response**: $B_i(x_{-i})$ è l'insieme delle migliori strategie che il giocatore i èuò utilizzare se gli altri giocatore giocano x_{-i}: $B_i(x_{-i}) = \{x_i^{'} \in X_i : C_i(x_i^{'}, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i})\}$;
- **Strategia debolmente dominante**: Una strategia $x_i^{'} \in X_i$ è debolmente dominante per il giocatore i se, per ogni punto ammissibile (x_i, x_{-i}) con $x_i \neq x_i^{'}$ risulta: : $C_i(x_i^{'}, x_{-i}) \leq C_i(x_i, x_{-i})\}$. Quindi se e solo se $x_i \in B_i(x_{-i})$ appartiene alle best response;
- **Strategia strettamente dominante**: è una strategia debolmente dominante, ma con il segno della disequazione con il minore stretto;
- **Ottimo debole di Pareto**: Dato un gioco Γ, un punto ammissibile $x = (x_1, .., x_n)$ è un ottimo debole di Pareto se non esiste un punto ammissibile x' tale che $C_i(x') < C_i(x) \forall i \in N$. Se un punto x è un ottimo debole secondo Pareto, vuol dire che anche se i giocatori considerasse altir punti, esiste sempre un giocatore che non ha interesse a spostarsi da x: non è un ottimo debole se entrambi i giocatori migliorano il payoff.
- **Ottimo forte secondo Pareto**: Dato un gioco Γ, un punto ammissibile $x = (x_1, .., x_n)$ è un ottimo forte di Pareto se non esiste un punto ammissibile x' tale che $C_i(x') <\leq C_i(x)$ per ogni giocatore e $C_h(x') < C_h(x)$ per almento un giocatore.
- **Strategia dominante e Ottimo Pareto**: se l'incrocio delle strategie dominante è un punto di ottimo debole di pareto, allora questa sarà la soluzione probabile del gioco.
- **Equilibrio di Nash**: Dato un gioco Γ e un suo punto ammissibile, esso è un equilibrio di Nash per il gioco se risulta per ogni giocatore:$C_i(x_i*, x_{-i}*) \leq C_i(x_i, x_{-i}*) \ \forall x_i \in X_i$.
  Un punto è un equilibrio di Nash per il gioco se e solo se $x_i* \in B_i(x_{-i}*)$ ogni strategia appartiene alla best response.
  Un punto è un equilibrio di Nash se nessun giocatore può migliorare il proprio payoff modificando in modo unilaterale la propria strategia;
- **Pollution Game**:
  - **Gioco:** Estensione del dilemma dei prigionieri sul controllo delle emissioni e sull'inquinamento: se il giocatore i inquina aggiunge una unità di costo al payoff di ciascun giocatore.
  - **Svolgimento:**
    1. **Formalizzazione**: $x_i = 1$ se il giocatore i controlla le emissioni e $x_i = 0$ se il giocatore i sceglie di inquinare.
    2. Consideriamo un qualunque stato in cui almeno un giocatore controlla le emissioni.
    3. Il suo payoff sarà pari a $C_i(x_i) = 3x_i + \sum_{j=1,...,n}(1 - x_j)$;
    4. Si osserva che $C - i(x_i, x_{x_i}) = 2x_i + n - t \quad t = \sum_{j \neq i} x_j$;
    5. **Equilibrio di Nash**: L'unico equilibrio di Nash è $0, \dots, 0$, ma non è stabile;
- **Strategie Dominanti e E.N.**: Se ogni giocatore ha una strategia debolmente dominante, allora il punto di incrocio di queste strategie è un equilibrio di Nash.
  Se ogni giocatore ha una strategia strettamente dominante allora il punto di incrocio è l'unico equilibrio di Nash del gioco.
- **Strategia Conservativa**: Una strategia è detta minimax/conservativa per il giocatore i se risulta:$\tilde{C}_i(x_i) = min_{x_i \in X_i} C_i(x_i)$. Equivale a minimizzare quello che si dovrà pagare nel caso peggiore.
- **Stratergia Dominante e Conservativa**: Se per un giocatore i esiste una strategia debolmente dominante, allora è anche una strategia conservativa per il giocatore.
- **Equilibri di Nash e Giochi Antagonistici**;
  - **Gioco a somma costante**: Un gioco è a somma costante se per stato del gioco risulta che la sommatoria dei payoff è costante. Viene detto a somma zero se la somma è zero.
  - **Gioco Antagonistico** Un gioco a somma zero con due giocatori è detto antagonistico se per ogni stato del gioco risulta il payoff del primo giocatore uguale a - payoff del secondo giocatore.
  - **Gioco Simmetrico**: un gioco antagonistico è detto simmetrico se la matrice dei payoff è antisimmetrica.
  - **Equilibrio di Nash Gioco Antagonista**: Uno stato di un gioco antagonisa è di Nash se: $C(x_1, x_2*) \geq C(x_1*, x_2*) \forall x_1 \in X_1, \forall x_2 \in X_2$;
  - **Gioco Antagonista con funzioni**:

- * **Equilibrio di Nash**: Un equilibrio di Nash è un punto di sella della funzione di Payoff.
  * **Strategia Conservativa**:

$$\begin{matrix} 7 & -2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & -6 & -9 & -4 \end{matrix}$$

Indichiamo x_j^i la strategia i-esima del giocatore j. Allora: $\tilde{C}_1(x_1^1) = 7$; $\tilde{C}_1(x_1^2) = 6$; $\tilde{C}_1(x_1^3) = 2$; quindi la strategia conservativa per il primo giocatore è $\bar{x}_1 = x_1^3$ e vale $\tilde{C}_1(x_1^*) = 2$.

Inoltre $\tilde{C}_2(x_2^1) = -1$; $\tilde{C}_1(x_2^2) = 6$; $\tilde{C}_1(x_2^3) = 9$; $\tilde{C}_1(x_2^4) = 4$; quindi la strategia conservativa per il secondo giocatore è $\bar{x}_2 = x_2^1$ e vale $\tilde{C}_2(x_2^*) = -1$.

Il primo giocatore ha quindi a disposizione una strategia, la strategia x_1^3 che gli garantisce di perdere, nel caso peggiore, 2 euro, mentre il secondo giocatore ha a disposizione una strategia, la strategia x_2^1, che gli garantisce di vincere, nel caso peggiore, almeno 1 euro.

Incidentalmente, osserviamo che il gioco è privo di equilibri di Nash, come possiamo verificare studiando direttamente la matrice.

  * **Equilibrio di Nash**: Per un gioco antagonista un punto ammissibile è un equilibrio di Nash se e solo se le strategie del primo e seconod giocatore sono strategie conservative per i corrispettivi giocatori.
- **Valore di un gioco Antagonista**: Il valore delle strategie consrvative dell'equilibrio di Nash è detto valore del gioco antagonista.
  Un gioco a valore zero è detto fair e nel caso di un gioco simmetrico esso è sempre 0.
- **Giochi Antagonistici infiniti**: In questa casistica non sempre esiste una strategia conservativa. Nel caso in qui esistesse, allora valgono le considerazioni del caso finito: il gioco ha un equilibrio di Nash se e solo se le rispettive straegie sono conservative.
- **Giochi Strettamente Competitivi**: Un gioco con due giocatori è strettamente competitivo se vale: $C_1(x^a) \leq C_1(x^b)$ se e solo se $C_2(x^a) \geq C_2(x^b)$ $\forall x^a, x^b$

• **Equilibri di Nash in Strategia Mista**:

- **Estensione in strategia mista**: Dato un gioco finito in forma normale, l'estensione in strategia mista è un nuovo gioco infinito definito da:

$$\overline{X}_i = \{\xi_i \equiv (\xi_i^1, \ldots, \xi_i^{m_i}) \in \mathcal{R}^{m_i} : \xi_i \geq 0, \sum_{j=1}^{m_i} \xi_i^j = 1\};$$
$$\overline{C}_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i_1=1}^{m_i} \cdots \sum_{i_n=1}^{m_n} C_i(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \cdot \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n}.$$

- **Equilibrio di Nash**: In estensione in strategia mista di un gioco antagionista si ha un equilibrio di Nash se esiste una strategia conservativa per il primo e secondo giocatore e se e solo se: $C_1(x_11) = -C_2(x_2)$;
- **Strategie Conservative**: In estensione in strategia mista esistono sempre strategie conservative.
- **Problema PL**:Primo giocatore:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & z \geq \sum_{i=1..m_1} c_{ij}\xi_1^i, j = 1..m_2 \\ & \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\ & \xi_1^i \geq 0, \quad i = 1..m_1 \end{array}$$

  Secondo giocatore:

$$\begin{array}{ll} \max & w \\ & w \leq \sum_{j=1..m_2} c_{ij}\xi_2^j, i = 1..m_1 \\ & \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\ & \xi_2^j \geq 0, \quad j = 1..m_2 \end{array}$$

- **Equilibrio di Nash**: si ha ottimalita se w e z sono uguali. Questo punto sarà l'equilibrio di Nash. Questo equilibrio esiste sempre.

• **Giochi Cooperativi**:

- **Gioco Cooperativo**:è un gioco in cui gruppi di giocatori possono coalizzarsi e garantire alla coalizione di una certà utilità.
- **Utilità trasferibile**: Un gioco cooperativo con utilità trasferibile è definit da una coppia (N, v): N è l'insieme dei giocatori, v è una funzione che associa ad ogni sottoinsieme S di N un utilità $v(S)$ tale che $v(insiemevuoto) = 0$. Ciascun giocatore di S è detto coalizione e l'insieme N di tutti i giocatore è la grande coalizione.
  L'utilità è trasferibile poiché per ogni coalizione l'utilità e definita in maniera cumulativa.

- **Grande Coalizione Stabile**: Ogni volta che esiste una soluzione che ripartisca tra tutti i giocatori l'utilità $v(N)$ della grande coalizione in modo tale che nessuna coalizione sia tentat dal rompere la grande colizione. Quinid esiste una soluzione $\alpha \in \mathbf{R^n}$ tale che:
  - $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(s) \quad \forall S in N$
  - $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$; In cui α_i è il payoff assegnato dalla soluzione α al giocatore i
- **Nucleo**: Il nucle è l'insieme dei vettori $\alpha \in \mathbf{R}^n_+$ tali che:
  - $\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(s) \quad \forall S in N$
  - $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$; In cui α_i è il payoff assegnato dalla soluzione α al giocatore i
- **Stabilità**: La grande coalizione è stabile se il nuclo non è vuoto.
- **SuperAdditività**: Sia N un insieme. Indichiamo con 2^N la famiglia di tutti i sottoinsiemi di N. Una funzione $v : 2^N$ è detta super additiva se soddisfa le seguenti proprietà:$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) \quad \forall S, T \subset N : S \cap T = \varnothing$
- **C.N.S. Superadditiva**: Una funzione v è super additiva se e solo se:
  - $v(\varnothing) = 0$
  - $\sum_{i=1..h} v(S_i) \leq v(Q) \forall Q \subseteq N$ e partizioni in classi $S_1, ..S_h$
- **Imputazione**: Un'imputazione per un gioco cooperativo (N, v) è un vettore α che soddisfa le seguenti proprietà:

  - (i) $\alpha_i \geq v(\{i\})$, per ogni $i \in N$ – *razionalità individuale*;
  - (ii) $\sum_{i \in N} \alpha_i = v(N)$ – *razionalità collettiva*

  Quindi è una soluzione del gioco che ripartisce tra i giocatori l'utilità della grande coalizione in modo tale che nessun giocatore singolo sia tenato dall'abbandonare la grande coalizione.L'insieme delle imputazioni è sempre non vuoto.
- **Giochi Inessenziali**: In un gioco cooperativo queste tre affermazioni sono equivalenti e caratterizzano i giochi inessenziali:

  (i) $v(S) + v(T) = v(S \cup T)$ per ogni $S, T \subset N : S \cap T = \emptyset$ (additività).
  (ii) $\sum_{i \in N} v(\{i\}) = v(N)$.
  (iii) Il nucleo è non vuoto ed è costituito dall'unica soluzione $\alpha_i = v(\{i\}), \forall i \in N$.

- **Soluzione Giochi Inessenziali**: Un gioco inessenziale ha come unica soluzione $\alpha_i = v(\{i\}) \quad i \forall N$
- **Lemma** Il nucleo è non vuoto se e solo se il seguente problema di PL ha una soluzione ottima con valore $\leq v(N)$:

  $$\sum \alpha_i$$
  $$\sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S) \quad \forall S \in N_p$$

  Il suo problema duale è:

  $$max \sum \lambda_s v(s)$$
  $$\sum_{S \in N_{p:i \in S}} \lambda_s = 1 \quad i \in N$$
  $$\lambda \geq 0$$
- **Vettore bilanciato**: Un vettore λ è detto bilanciato se per ogni $i \in N$ vale $\sum_{S \in N_{p:i \in S}} \lambda_s = 1$.
- **Bondareva-Shaplet** Un gioco cooperativo ha nucleo non vuoto se e solo se è bilanciato.

- **Valore di Shapley**:
  - **Importante:** Non è possibile calcolare il valore di Shapley se la somma della coalizione per rendere effettiva una legge è minore di $\frac{N}{2}$
  - Una coalizione è **dummy** se non contribuisce all'approvazione della legge. Il suo valore di Shapley è 0.
  - **Premessa**: Sia P l'insieme di tutte le permutazione dell'insieme N dei giocatori. presa una permutazione $p \in P$ e un giocatore $i \in N$ indichiamo con A_i^p è la coalzione formata da i e da tutti i giocatori che precedono i nella permutazione p.
  - **Funzione payoff**: Consideriamo un gioco cooperativo (N, v). La funzione che assegna a ciascun giocatore un payoff $S_i(v)$ deve soddisfare i seguenti assiomi:
    - Assioma di razionalità collettiva: $\sum_{i \in N} = v(N)$;
    - Sia $i \in N$. Se per ogni $T \subseteq N$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T)$;
    - Siano $i, j \in N \neq j$. Se per ogni $T \subseteq N : i, j \notin T$ risulta $v(T \cup \{i\}) = v(T \cup \{j\})$ allora $S_i(v) = S_j(v)$;
    - Sia u e v due funzipni di utilità. Allora $S(u + v) = S(u) + S(v)$.
  - **Teorema di Shapley**: Fissato un insieme N di giocatori, esiste una e una sola funzione S che soddisfa gli assiomi:

    $$S_i(v) = \sum_{p \in P} \frac{1}{n!}(v(A_i^p) - v(A_i^p \backslash \{i\}))$$

    e $S(v)$ è una imputazione

- **Utilità Marginale**: è l'utilità che apporta il giocatore i a T ed è pari a $v(T) - v(T\backslash\{i\})$
  Considerando tutte le permutazioni P dell'insieme N dei giocatori, si dice che l'utilità marginale apportata da i alla permutazione $p \in P$ è pari a $v(A_i^p) - v(A_i^p\backslash\{i\})$. Preso il valor medio dell'utilità marginale apportata da i a ciascuna permutazione di P si ottiene il valore $S_i(v)$
- **Alternative**:
  * $S_i(v) = \sum_{T\subseteq N: i\in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(v(T) - v(T\backslash\{i\}))$
- **Gioco Semplice**: Un gioco cooperativo è detto semplice se la funzione di utilità ha valore 0,1. Una coalizione in grado di imporre una decisione ha valore 1.

  Esempio. In un parlamento sono rappresentati quattro partiti con numero percentuale di seggi: 10%, 20%, 30%, 40%. Le decisioni vengono prese a maggioranza semplice (50% voti più 1). Se assumiamo che i deputati di uno stesso partito votino tutti allo stesso modo, possiamo definire un gioco cooperativo: i giocatori sono i quattro partiti e l'utilità di una coalizione è 1 se la coalizione rappresenta più del 50% di seggi, 0 altrimenti.

  È facile verificare che l'utilità così definita soddisfa la superadditività. Calcoliamo il valore di Shapley di ciascun giocatore utilizzando la $(s2)$:
  $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 1$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 2$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{12}$ se $|T| = 3$; $\frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} = \frac{1}{4}$ se $|T| = 4$.
  Allora $S_1(v) = \frac{1}{4}(v(\{1\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\})) = \frac{1}{12}$;
  $S_2(v) = \frac{1}{4}(v(\{2\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{1,2\}) - v(\{1\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3\}) - v(\{3\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\})) = \frac{1}{4}$.
  $S_3(v) = \frac{1}{4}(v(\{3\}) - v(\emptyset)) + \frac{1}{12}(v(\{3,2\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3\}) - v(\{2\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,4\}) - v(\{4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,2,3\}) - v(\{2,1\})) + \frac{1}{12}(v(\{3,2,4\}) - v(\{2,4\})) + \frac{1}{12}(v(\{1,3,4\}) - v(\{1,4\})) + \frac{1}{4}(v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,1,4\})) = \frac{1}{4}$;
  $S_4(v) = 1 - (S_1(v) + S_2(v) + S_3(v) = \frac{5}{12}$.

- **Valore Shapley Giochi Semplici**:
  * $S_i(v) = \sum_{T\subseteq N: T\ vincente,\ T(i) perdente} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!} \quad \forall i \in N$
  * $S_i(v) = \frac{1}{n!} \quad \forall i \in N$
- **House Allocation Problem**:
  * **Gioco**: Dato un insieme di n giocatori e un incieme C di n case. Ogni giocatore possiede una e una sola delle case; inoltre ogni giocatore ha in mente una graduatoria di tutte le n case dell'insieme C: ogni giocatore i, per ogni coppia di case $u, v \in C$ preferisce u a v oppure v a u. L'obbiettivo è quello di riallocare le case tra i giocatori, ovvero trovare un matchin M di dimensione N che sia stabile.
  * **Definizioni**: Per ogni insieme S di giocari definiamo $V(S)$ come un qualunque matching che assegna a ciascun giocatore di S una e una sola casa dell'insieme C.
  * **Obiettivo:**Vogliamo un matching $M \in V(N)$ che assegna a ciasun giocatore di N una e una sola casa di C in modo tale che per ogni giocatore $i \in S$, il matching M' assegna ad i una casa non peggiore di quella che gli assegna il matching M e per almento un giocatore $j \in S$, il matching M' assegna a j una casa migliore di quella che gli assegna il matching M.**Stabilità**.
  * **Agoritmo Top Trading Cycle TTCA**:
    · **Grafo:** Costruiamo una grafo orientato G: i nodi di G corrispondono ai giocatori di N e ogni nodo ha esattamente un successore corrispondente al proprietario che i preferisce tra quelle dell'insieme N. L'unico arco usente da i è l'arco (i,i)m se la casa preferita da i è quella che possiede:**Loop**.
    G possiede per costruzione n nodi e n archi.
    · **Primo Matching**: In questo grafo possiamo sempre trovare dei cicli. Possiamo trovare un primo matchin parziale indotto dai cicli di G:
    Sia N_1 l'insieme dei nodi appartenenti ad un ciclo di G, assegniamo a ogni giocare $i \in N_1$ la casa posseduta al giocare $j \in N_1$ tale che $(i, j) \in E(G)$ e rimuoviamo dal gioco i giocare di N_1 con le corrispondenti case.
    · **Secondo Grafo:** Costruiamo un nuovo grafo G_1 in cui l'insieme dei giocatori è $N\backslash N_1$ e nuovamente ogni nodo i ha un unico successore corrispondente al proprietario della casa che i preferisce dtra quelle del nuovo insieme.
    A questo punto ragioniamo compre prima e rimoniamo le case e i nodi corrispondeti ai nuovi cicli rispettando le preferenze dei ndodi.
    · **Termine:** In $k \leq n$ l'algoritmo termina restituendo il matching.
    · **Considerazioni**: L'algoritmo TTCA restituisce l'unico matching nel nucleo del gioco. Inoltre, se M non fosse stabile, esiste un nuovo matching e un giocare i che assegna ad i una casa migliore di quella assegnatagli dal matching ottimo.
- **Stable Marriage Problem:**

- * **Gioco:** Sono dati 2n giocatori: n uomini ed n donne. Ogni giocare ha in mente una graduatoria di tutte le n persone dell'altro sesso. L'obiettivo è quello di accoppiare gli uomini con le n donne e quindi trovare un matchin M di dimensione n che sia stabile. Assumiamo che ogni giocatore preferisce in ogni caso accoppiarsi piuttosto che rimanere single.
  * **Stabilità Matching**: Un matchin M di dimensione n è stabile se non esiste un insieme S di $h \leq n$ uomini e h donne e un matching M' tra gli uomini e le donne di S tale che:
    · Per ogni giocatore $i \in S$, il matchin M' assegna a i un partner non peggiore, secondo le preferenze, di quella che aasegna il matchin M;
    · Per almento un giocatore $j \in S$ il matchin M' assegna a j un partner migliore dii quello che gli assegna il matchin M;

    In particolare, **un matching M di dimensione n è stabile se e solo se non esistono un uomo me una donna w tali che m preferisce w al partner che il matchin gli assegna, e w preferisce m al partner che gli assegna il matching.**
  * **Algoritmo di Gale-Shapley**:
    · **Prima Iterazione:** Alla prima iterazione ogni uomo si propone alla donna che preferisce. Ogni donna considera tutte le proposte che ha ricevuto e dice: **FORSE**: all'uomo che prescerisce tra quelli che le si sono proposti, **NO**: a tutti gli altri uomini che le si sono proposti. Le donne che hanno ricevuto una proposta a cui hanno risposto "Forse" sono temporaneamente fidanzate.
    · **Iterazioni successive:**Ogni uomo non fidanzato si propone alla donna che preferisce, tra quello che non lo hanno già rifiutato. La donna esamina tutte le proposte fino ad ora ricevute e risponde con **FORSE** all'uomo che preferisce e **NO** a tutti gli altri. Ciò vuol dire che la donna può cambiare fidanzato e un uomo non può essere mollato.
    · **Conslusione:** Si itera fino a quando tutte le donne sono temporaneamente fidanzate. Questi fidanzamenti sono il matching finale M proposto dall'algoritmo. Si termina in n^2 iterazioni Ad ogni iterazione, tranne quella finale, almeno un uomo viene rifiutato: cancella la donna che lo ha rifiutato dalla sua graduatoria.
    · **Considerazioni:**
      1. **Il Matching è stabile.**
      2. Se una donna è temporaneamente fidanzata a una certa iterazione, lo sarà anche nell'iterazione successiva e con un uomo non peggiore in graduatoria.
    · **Variante:** Se nell'algoritmo di Gale-Shapley avessero scelto le donne, avremmo identificato un diverso matching stabile.
- **Mercati Utilità trasferibile**:
  * **Gioco**:Ci sono n agenti in grado di produrre un certo bene. Per produrre questo bene,ogni agente dispone di un insieme di risorse l che può utilizzare per produrre il bene e ha una propria funzione di produzione che restituisce la quaantità di bene che l'agente è in grado di produrre a partire dal vettore di risorse w_i. In maniera formale, ogni agente dispone di un vettore di risorse $w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^l) \in$ $mathbfR_+$ e ha una sua funzione di produzione f_i ch associa al suo input w_i una quantità prodotta $f(w_i)$ del bene. In questo mercato, gli agenti posso essere interessati a cooperare: se i vettori di risorse sono complementari, può essere utile scambiarsi delle risorse e si vuole massimizzare l'utilità che trarrà dalla produzione del bene.
  * **Modellazione:**Il gioco viene modellato come gioco cooperativo: l'insieme dei giocatori coincide con quello degli agenti. Supponiamo che la coalizione S possa allocare in qualcunque modo tra gli agenti in S le risorse complessi vamente disponbili: $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$
  * **Svolgimento:** Il problema deve essere formulato in termini di problema di ottimizzazione. Indichiamo con $z_i \in R$ il vettore delle risorse assegnato all'agente i con il corrispondente **vincolo di ammissibilità**: $sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i$.
    Occorre quindi risolvere il problema:
    $$v(S) = max \sum_{i \in S} f_i(z_i) \tag{1}$$
    $$\sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i \tag{2}$$
    $$z_i \geq 0 \tag{3}$$
    Questo problema ha sempre soluzione dato che la funzione obiettivo è continua su insieme chiuso e limitato.
  * **Funzione di utilità**: la funzione di utilità è **Superadditiva**.
  * Ogni mercato con utilità trasferibile ha un nucleo non vuoto.

-ESERCIZI-

Strategia Mista:

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & S1 & S2 & S3 & S4 \\ s1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ s2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ s3 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ s4 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie per il primo e il secondo giocatore:
$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\ldots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = \frac{1}{2}, \xi_1^3 = 0, \xi_1^4 = 0$; $(iii): \xi_1^1 = \frac{1}{2}, \xi_1^2 = 0, \xi_1^3 = \frac{1}{2}, \xi_1^4 = 0$;
$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\ldots,4$; $(jj): \xi_2^1 = \frac{1}{2}, \xi_2^2 = 0, \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{1}{2}$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{3}, \xi_2^2 = \xi_2^3 = 0, \xi_2^4 = \frac{2}{3}$.

1.1) **Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, chi la usa.**

	ξ_1^1	ξ_1^2	ξ_1^3	ξ_1^4	z	max z	ξ_2^1	ξ_2^2	ξ_2^3	ξ_2^4	w=-z	max w
i												
ii												
iii												

Per ξ_1^i: moltiplica il vettore per ogni colonna.
Per ξ_2^j: moltiplica il vettore per ogni riga della matrice.
1.1)**Quanto paga nel caso peggiore** G1 è max z, mentre G2 max(w):
1.2) **Qualcuna delle strategie è conservativa?** Sono le strategie per cui $z = w$.
1.3) **Individua Equilibri di Nash.** Incrocio delle strategie conservative; altrimenti non ve ne sono.
1.4) **Qual è il valore del gioco misto?** Il valore del gioco misto è quello per cui $z = w$ in generale. Altrimenti,**nei vero o falso**,coincide con l'interavallo $[-max(w), max(z)]$ cioè l'intervallo individuato dal valore delle strategie conservative.

Strategia Pura con variabile arbitraria IN FORMA DI COSTO

Esercizio 2 Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco in forma di costo, dove y è un numero razionale qualsiasi (positivo o negativo):

$$\begin{pmatrix} G1-G2 & D & E & F \\ A & -4, 10 & 6+2y, 12+4y & 5+2y, 8 \\ B & 10, 12 & 5, 8-4y & 6+2y, 12+4y \\ C & 8+8y, 6+2y & 7, -2y & 4, 2 \end{pmatrix}$$

Si consideri il gioco in sola *strategia pura.* **2.1** Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). *Giustificare la risposta illustrando i calcoli effettuati.* **2.2** Indicare quali sono, al variare di x, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). *Giustificare la risposta illustrando i calcoli effettuati.* **2.3** Porre $y = 0$. Indicare quali sono i punti di ottimo debole secondo Pareto (se ve ne sono). *Non giustificare risposta.*

Si prende il minimo.
2.1) **Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo e secondo giocatore.**

- Primo giocatore: occorre calcolare le best response per ogni strategia di G2, quindi si procede per colonna. In particolare, la best response è quella per cui il giocatore paga di meno.
  Nel calcolo delle best response bisogna calcolare ogni possibile combinazione, definendo così gli intervalli opportuni. La strategie risultante dall'intersezione delle varie best response è la strategia dominante
- Secondo giocatore: occorre calcolare le best response per ogni strategia di G1, quindi si procede per riga. In particolare, la best response è quella per cui il giocatore paga di meno (Nel caso di gioco antagonistico i valori della matrice devono essere considerati con il meno).
  Nel calcolo delle best response bisogna calcolare ogni possibile combinazione, definendo così gli intervalli opportuni. La strategie risultante dall'intersezione delle varie best response è la strategia dominante.

2.2)**Indicare al variare di x gli equilibri di Nash**: Occorre verificare in ogni stato della matrice variazioni unilaterali (G1 scorre per riga (A-B-C), G2 scorre per colonna (D-E-F)) se i giocatori migliorano il proprio payoff. Se entrambi i giocatori non migliorano il payoff, allora è un equilibrio di Nash.
Questa discussione, se presenta un parametro variabile), deve essere effettuata discutendo i vari casi.
In altro modo, posso calcolarli dalle bestrespone: se lo stato dell'equilibrio di Nash ha la strategia di G1 e G2 appartenere alle rispettive best response. 2.3) **Porre y=0, Indicare quali sono i punti di ottimo debole secondo Pareto**: Si pone x=0. A questo punto in ogni stato del gioco occorre verificare se entrambi i giocatori migliorano il payoff (G1-per riga; G2-per colonna). Se entrambi i giocatori non migliorano il payoff, allora è un ottimo debole secondo Pareto.
2.4)**Esiste un valore di x per cui il gioco è strettamente competitivo:** Presi due stati x' e x" non devo trovare uno stato (anche non dipendente da x) in cui entrambi i giocatori migliorano il payoff. **Strategia Pura con variabile arbitraria in FORMA DI UTILITà**:

> **Esercizio 4** Considera il seguente gioco non cooperativo con 2 giocatori, il bar *A* e il bar *B*. I due bar trattano un unico, identico prodotto: la birra alla spina nel formato 0.25 lt. Ciascuno dei due bar può scegliere di vendere la singola birra a tre prezzi diversi: 2, 2+α, 5 euro, dove α è un numero razionale tale che $0 < \alpha < 3$ (è possibile che i giocatori scelgano lo stesso prezzo). Si prevede che ogni mese ci sarà una domanda di 6000 birre da parte di turisti, che si dividono equamente tra il bar *A* e il bar *B* senza guardare il prezzo, e una domanda di 4000 birre da parte di persone del luogo, che scelgono il bar che vende la birra al prezzo minore e si dividono equamente tra i due bar nel caso essi scelgano lo stesso prezzo.
>
> Indicare quali sono le strategie dominanti e gli equilibri di Nash al variare di α. Dire infine se ci sono valori di α per cui esistono equilibri di Nash che sono anche ottimi secondo Pareto. *Giustificare le risposte illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

Questo esercizio si svolge esattamente come il problema precedente con la differenza che si può dividere il quantitativo del bene venduto per mille e deve essere poi moltiplicato per il prezzo con cui A,B vendono il prodotto. Inoltre, bisogna cercare il massimo.
Variazione ρ:

> **Esercizio 3** Si consideri la seguente variazione del gioco ρ. I giocatori sono 4 e il valore di ogni coalizione con due o meno giocatori è 0; il valore di ogni coalizione con 3 giocatori è 2ρ e il valore della grande coalizione è 1. Esistono valori di ρ per cui il nucleo del gioco è non vuoto? *Se la risposta è no, è sufficiente scrivere no; se la risposta è si, è sufficiente indicare quali sono i valori di ρ e una soluzione nel nucleo per ognuno di tali valori.*

In questo esercizio, se i valori di Shapley non sono dati (come in questo caso) occorre scriverli:

$$\begin{aligned}&N = 4\\&v(S) = 0 \quad se \quad |S| \leq 2\\&v(S) = 2\rho \quad se \quad |S| = 3\\&v(S) = 1 \quad Grande\ coalizione \quad |S| = 4\end{aligned}$$

Per verificare che il nucleo è non vuoto occorre impostare il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned}&max\ \alpha_i\\&\sum_{i\in S}\alpha_i \geq v(S) \quad \forall S \in N_p\end{aligned}$$

Il cui problema duale:

$$\begin{aligned}&max\ \lambda_s\\&\sum_{S\in N_{p:i\in S}} \lambda_s = 1 \quad \forall i \in N\\&\lambda \geq 0\end{aligned}$$

Le α_i sono le combinazioni dei giocatori:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1\\&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\rho\\&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 2\rho\\&\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\rho\\&\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 2\rho\end{aligned}$$

Dai vincoli si ottiene:$3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \geq 8\rho \to \rho \leq \frac{3}{8}$.
Una soluzione del nucleo è dato da un vettore che rispetta le condizioni. Per esempio:$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
Valore di Shapley:

Esercizio 4 In un parlamento siedono 9 deputati. Quattro di questi deputati provengono dalla regione A, quattro dalla regione B e uno dalla regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una coalizione Q che contiene almeno due deputati di A, almeno due deputati di B e il deputato di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. *Illustrare i calcoli e/o le considerazioni necessari a individuare i valori di Shapley, ovvero il motivo per cui tale valore non esiste.*

$$\begin{cases} N \ giocatori; \\ n_1 \ di \ A \\ n_2 \ di \ B \\ n_3 \ di \ C \\ etc\ldots \end{cases} \qquad \text{Legge approvata se almeno } n_{11} \ di \ A, n_{22} \ di \ B, n_{33} \ di \ C$$

Una coalizione è dummy se non contribuisce all'approvazione della legge. Il suo valore di Shapley è 0.
Se una coalizione è determinante, il suo valore di Shapley è 1 mentre i restanti sono 0.
Come primo passo occorre valutare la SuperAdditività della funzione: nel caso in cui la somma dei deputati necessari alla coalizioni per far valutare la legge è minore di $\frac{N}{2}$, allora la funzione non è super additiva e non è possibile calcolare il valore di Shapley. In altre parole, non deve esistere un'altra coalizione disgiunta che mi permette di far approvare la legge.
Occorre partire dal deputato con il numero di deputati minore. i.e.C e valutare quando è determinante,
Se si hanno 2 o più partiti con lo stesso numero di deputati, allora i valori di Shapley sono uguali $S_A(v) = S_B(v)$

- C determinante: tutte le combinazioni che vanno da $n_1 1$ a n_1 per A, $n_2 2$ a n_2 per B, e $n_3 3$ an_3 per C.
  Si deve prestare attenzione a quando C è determinante. Quindi non occorre fare casi aggiuntivi quando,per esempio 1C per approvare la legge e ci sono 2 deputati di C
  Indichiamo per notazione con i, j, k quanti deputati vengono presi per formare la coalizione. Quindi:

$$S_C(v) = \frac{\sum_{Tutte \ le \ coalizioni} \binom{n_1}{n_{11}+i}\binom{n_2}{n_{22}+j}(i+j)!(N-n_{11}-i-n_{22}-j-1)(\mathbf{(N\text{-}1)!} \ se \ richiede \ una \ qualsiasi \ combinazione \ i.e. \ almeno \ 8 \ deputati)}{N!}$$

- Effettuare per gli altri deputati lo stesso ragionamento,tranne l'ultimo,con l'accortezza di considerare 1 deputato in meno nel conteggio delle permutazioni, poiché inserito da noi..
- Per calcolare l'ultimo valore di Shapley conviene utilizzare:

$$S_j(v) = \frac{1 - \sum_i n_i * S_i(v)}{n_j}$$

- **Caso Particolare:**

  Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) In un parlamento siedono 11 deputati, di cui 5 provengono da una regione A, 5 da una regione B e uno da una regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore vota una stretta maggioranza di tutti deputati (quindi almeno 6) che includa necessariamente il deputato C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato, oppure spiegare perché non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

  È possibile modellare il gioco come un gioco cooperativo perché la funzione di utilità è superadditiva. Il valore di Shapley del deputato di C è pari a

$$S_c(v) = \frac{6 \cdot 10!}{11!} = \frac{6}{11}.$$

  I deputati di A e B sono indistinguibili (per via dell'assioma deli giocatori indifferenti). Il loro valore è quindi pari a:

$$S_{na}(v) = \frac{1 - \frac{6}{11}}{10} = \frac{1}{22}.$$

Mercato di utilità:

Esercizio 2 Consideriamo la produzione di un certo bene da parte di due agenti A e B in un mercato ad utilità trasferibile. L'agente A (risp. B) dispone di un vettore di risorse $w_A = (w_A^1, w_A^2) = (4,3)$ (risp. $w_B = (w_B^1, w_B^2) = (2,5)$) e di una funzione di produzione $f^1(w_A) = 2w_A^1 + 4w_A^2$ (risp. $f^2(w_B) = 3w_B^1 + 2w_B^2$). Formalizzare la situazione descritta come un gioco in cui i due cooperino per la produzione del bene e determinare un'imputazione nel nucleo di tale gioco. *Giustificare la risposta illustrando sinteticamente i calcoli effettuati.*

Si deve calcolare l'utilità delle singole coalizioni:

$$v(A) = f^1(w_A) = 2 * w_A^1 + 4 * w_A^2 = 2 * 4 + 4 * 3 = 20$$
$$v(B) = f^2(w_A B) = 2 * w_B^1 + 4 * w_B^2 = 3 * 2 + 2 * 5 = 16$$

Inoltre, occorre calcolare l'utilità della/delle coalizioni miste impostando il seguente problema in cui si pone $z_A = w_A, z_B = w_B$:

$$
\begin{aligned}
&max\ v(\{A,B\}) = f^1(z_A) + f^2(z_B) \\
&z_A^1 + z_B^1 = w_A^1 + w_B^1 = 4 + 2 \\
&z_A^2 + z_B^2 = w_A^2 + w_B^2 = 3 + 5 \\
&z_A^1, z_A^2, z_B^1, z_B^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Per risolvere questo problema si esplicitano z_A^1, z_A^2 oppure z_B^1, z_B^2 e s sostituiscono nella funzione obiettivo e nei vincoli. Ottenendo:

$$
\begin{aligned}
&max\ v(\{A,B\}) \\
&0 \geq z_A^1 \leq w_A^1 + w_B^1 = 4 + 2 \\
&' \geq z_A^2 \leq w_A^2 + w_B^2 = 3 + 5
\end{aligned}
$$

Per calcolare il valore, si devono sostituire le combinazioni dei vincoli sulle variabili appena ottenute e se ne prende il massimo. In questo caso, si devono sostituire (0,0),(6,0),(0,8),(8,0).
Il nucleo del gioco sarò:

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : \alpha(1) \geq v(\{A\}), \alpha(2) \geq v(\{B\}, \alpha(1) + \alpha(2) = max(v(\{A,B\})))\}$$

Bisogna fornire una imputazione del nucleo fornendo (α_1, α_2) che soddisfano le equazioni del nucleo.
Stable Marriage: Può iniziare da entrambi: uomo/donna. Si pongono gli uomini/donne nel seguente modo:

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

Preferenze	Uomini	Collegamenti	Donne	Preferenze
, , ,	U_1		D_1	, , ,
, , ,	U_2		D_2	, , ,
, , ,	U_3		D_3	, , ,
, , ,	U_4		D_4	, , ,

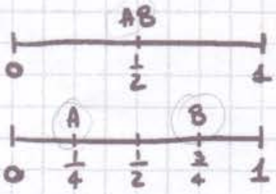
1. Scrivi le preferenze nelle caselle;
2. Collega le prime preferenze degli uomini (donne) all'uomo/donna corrispondente;
3. In caso di conflitti, chi viene scelto(uomo se parte la donna o viceversa), risponde con forse solo alla preferenza più alta;
4. Chi è stato rifiutato al passo precedente cancella la preferenza nella sua lista, sceglierà la donna/uomo in base alla sua lista delle preferenze;
5. In ogni passo si aggiornano le preferenze cancellandole in caso di rifiuto;
6. Si va avanti finché non si ha un matching stabile.

- **Matching Stabile**: Si cerchia la preferenza data e per migliorare il matching dato, si deve provare a formare un nuovo matching guardando a sinistra delle preferenze;
- **Matching non stabile data/e coalizione**:Si cerchia la preferenza data e per migliorare il matching dato, si deve provare a formare un nuovo matching guardando a destra delle preferenze;
- **Completamento graduatoria per matching**:In base al numero di iterazioni che vogliamo, posiziona più conflitti possibili affinché, scorrendo tra le preferenze si arrivi a quella desiderata dopo un numero adatto di iterazioni.

GIOCHI NON COOPERATIVI - Esempi classe

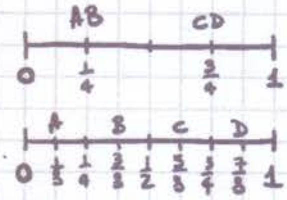
lunedì 23 novembre 2020 17:52

- HOTELLING → No str dom

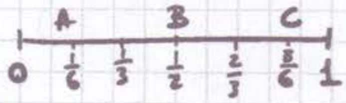


Eq. Nash

Ottimo



No E.N.



POLLUTION

$|N| = m$ player $X_i = \{1, 0\}$ $\forall i \in N$

$$c_i = \alpha x_i + \sum_{j \in N} \beta(1 - x_j)$$
$$= (\alpha - \beta) x_i + \beta + \underbrace{\sum_{j \neq i} \beta(1 - x_j)}_{=t}$$
$$= (\alpha - \beta) x_i + t$$

$$\min c_i \rightarrow \begin{cases} x_i^* = 1 & \text{se } \alpha \leq \beta \\ x_i^* = 0 & \text{se } \alpha \geq \beta \end{cases}$$

TRAGEDY

$|N| =$ player $X_i = \{0 \leq x_i \leq 1\}$ $i \in N$

$$c_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \sum_{j \in N} x_j \geq 1 \\ x_i \left(1 - \sum_{j \in N} x_j\right) & \text{se } \sum_{j \in N} x_j < 1 \end{cases}$$

$$c_i = x_i \left(1 - x_i - \sum_{j \neq i} x_j\right) = x_i(1 - x_i - t) = -x_i^2 + x_i(1 - t)$$

$$\min c_i \rightarrow \frac{\partial c_i}{\partial x_i} = -2x_i + 1 - t = 0 \quad \boxed{x_i^* = \frac{1-t}{2}} \text{ dom}$$

$|N| = m$ player $X_i = \{C, L\}$

$Q = \{\text{player } x_i = C\}$, $|Q| = q$

$$c_i = \begin{cases} 3 & \text{se } x_i = C \text{ e } q = m \\ 2 & \text{se } x_i = L \\ 1 & \text{se } x_i = C \text{ e } q < m \end{cases}$$

No str dom, $q = m$ ottimo Pareto

- $q = m$ è Eq. Nash: sia $i \in Q$: $c_i = 3$, se i passa da C a L $c_i = 2$, quindi peggiora
- $q = m-1$ non è EN: sia $i \notin Q$: $c_i = 2$, se i passa da L a C $c_i = 3$, quindi migliora
- $1 \leq q \leq m-2$ non è EN: sia $i \in Q$: $c_i = 1$, se i passa da C a L $c_i = 2$ migliora
- $q = 0$ è Eq. Nash: sia $i \in N$ $c_i = 2$, se passa da L a C $c_i = 1$, quindi peggiora

---

PRISONER

Costo	S	C
S	2, 2	5, 1
C	1, 5	4, 4

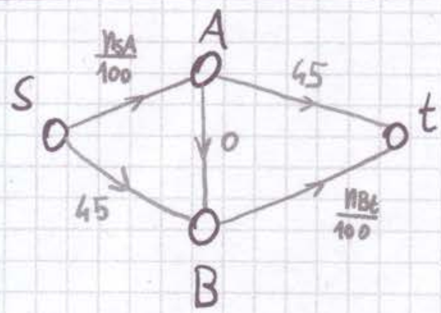
C : str debol. dominante

(C, C) : Eq. Nash

(S, S) (S, C) (C, S) : ottimi deboli Pareto

BRAESS

TUTTI SU sABt, ALTRIMENTI SI DIVIDONO.



$n_{SA} = \#$cars $S \rightarrow A$

$n_{Bt} = \#$ // $B \rightarrow t$

$N = 4000 = n_{SA} + n_{Bt}$

MATRICE PAYOFF - Esempio

domenica 15 novembre 2020 18:50

$|N| = 2$ player

G1 (colonne), G2 (righe)

Costo	A	B	C
D	$6+y, 3+y$	$6, -y$	$4, 2$
E	$4, 4$	$3-y, 6+y$	$3, 3$
F	$5+y, -2y$	$5, 4$	$-y, 5$

1) Eq. Nash

MI MUOVO SULLA COLONNA

DA
G1: $\begin{cases} 6+y \le 4 \\ 6+y \le 5+y \end{cases}$ → $\boxed{\text{MAI}}$
G2: $\begin{cases} 3+y \le -y \\ 3+y \le 2 \end{cases}$

CONTROLLO SE TUTTE DISEQUAZ SONO RISPETTA

MI MUOVO SULLA RIGA

EB $\begin{cases} 3-y \le 5 \\ 6+y \le 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} y \ge -2 \\ y \le -3 \end{matrix}$ $\quad$ $\boxed{\text{MAI}}$

EC $\begin{cases} 3 \le -y \\ 3 \le 6+y \end{cases}$ $\quad$ $\boxed{\begin{matrix} y \le -3 \\ y \ge -3 \end{matrix}}$ OK $\quad$ $\boxed{y = -3}$

FA $\begin{cases} 5+y \le 6+y \\ 5+y \le 4 \\ -2y \le 4 \end{cases}$ $\quad$ $\boxed{\begin{matrix} \forall y \\ y \le -1 \\ y \ge -2 \end{matrix}}$ OK! $\quad$ $\boxed{y \in [-2, -1]}$

FB $\begin{cases} 5 \le 3-y \\ 4 \le -2y \end{cases}$ $\quad$ $\boxed{\begin{matrix} y \le -2 \\ y \le -2 \end{matrix}}$ OK $\quad$ $\boxed{y \le -2}$

OK: → EQ. NASH

2) Str. dominanti:

P1) E $\begin{cases} 4 \le 5+y \\ 3-y \le 5 \\ 3 \le -y \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} y \ge -1 \\ y \ge -2 \\ y \le -3 \end{matrix}$ $\quad$ $\boxed{\text{MAI}}$

F $\begin{cases} 5+y \le 4 \\ 5 \le 3-y \\ -y \le 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} y \le -1 \\ y \le -2 \\ y \ge -3 \end{matrix}$ $\quad$ $\boxed{y \in [-3, -2]}$

P2) B $\begin{cases} -y \le 3+y \\ -y \le 2 \\ 6+y \le 3 \\ 4 \le -2y \end{cases}$ $\quad$ $\begin{matrix} y \ge -3/2 \\ y \ge -2 \\ y \le -3 \\ y \le -2 \end{matrix}$ $\quad$ $\boxed{\text{MAI}}$

P1 ELEMENTI SULLA RIGA ≤ DI QUELLI SULLE COLONNE

P2 ELEMENTI SULLE COLONNE ≤ DI QUELLI SULLE RIGHE.

3) $y = 0$

Costo	A	B	C	max
D	$\cancel{6, 3}$	$6, 0$	$4, 2$	6
E	$\cancel{4, 4}$	$\cancel{3, 6}$	$3, 3$	4
F	$5, 0$	$\cancel{5, 4}$	$0, 5$	5
max	4	6	5	

min (delle righe): 4

min (delle colonne): 4

PRENDO IL MAX DALLE RIGHE E POI IL MIN PER IDENTIFICARE STRAT. CONSERVATIVA DEL 1° GIOCA

COME PRIMA MA INDIVIDUO STRATEGIE CONSERVATIVE DEL 2° GIOCATORE

Ottimi secondo Pareto:
DB, DC
EC, FA
FC

P1 str cons. E

P2 str cons. A

MATRICE PAYOFF ⟶ STRATEGIE PURE/ MISTE

Poiché il gioco è simmetrico, il suo valore in strategia mista è sicuramente 0. Quindi sono conservative tutte quelle strategie che fanno pagare nel caso peggiore 0

Poiché $z\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\right) = w\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,\frac{2}{4}\right)$, si conclude che $\xi_1 = \left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5},0\right)$ è conservativa per il 1° player e $\xi_2 = \left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,\frac{2}{4}\right)$ è conservativa per il 2° player. Segue che il loro incrocio determina un Eq. Nash e che il valore del gioco è z^*

1. Riporto la mat di payoff del gioco in forma di costo

	2	12	24	19	max
3	-1	-1	-1	1	1
4	1	-1	-1	1	1
8	1	1	-1	1	1
16	1	-1	1	1	1
38	1	-1	-1	1	1
min	-1	-1	-1	1	

min $1 = \tilde{C}_1$

max $1 = -\tilde{C}_2$

SE TUTTI UGUALI GUARDA RIGA + CONVENIEN

• STR. DOMINANTI

1.1. Per P1 giocare 3 é una str. debolmente dominante

Per P2 giocare 19 é una str. debolmente dominante

• STR. CONSERVATIVE

1.2. Per P1 sono tutte str conservative

Per P2 giocare 19 é una str conservativa

• VALORE DEL GIOCO + EQ. NASH

1.3. Poiché $\tilde{C}_1 = -\tilde{C}_2$, il valore del gioco é 1

Sono Eq. Nash: (3,19); (4,19); (8,19); (16,19); (38,19)

• STRATEGIA MISTA

1.4. I PL per individuare la str. conservativa per il 1° e il 2° player sono risp:

$$\begin{cases} \min z \\ z \geq \sum_{i=1}^{5} \xi_1^i c_{ij} \quad j = 1,\dots 4 \\ \sum_{i=1}^{5} \xi_1^i = 1 \\ \xi_1^i \geq 0 \quad i = 1,\dots 5 \end{cases}$$

PER COLONNA

$$\begin{cases} \max w \\ w \leq \sum_{j=1}^{4} c_{ij} \xi_2^j \quad i = 1,\dots 5 \\ \sum_{j=1}^{4} \xi_2^j = 1 \\ \xi_2^j \geq 0 \quad j = 1,\dots 4 \end{cases}$$

PER RIGA

- Il valore ottimo in corrispondenza di $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i$ é 1. Quindi se il 1° player utilizza questa strategia paga in media nel caso peggiore 1.
- Il valore ottimo in corrispondenza di $\xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j$ é $-\frac{1}{2}$. Quindi se il 2° player utilizza questa strategia paga in media nel caso peggiore $\frac{1}{2}$.

1.5 La str. $\xi_1^i = \frac{1}{5}\ \forall i$ é conservativa per il 1° player. Infatti usando questa str. paga al più 1 che é proprio il valore del gioco

1.6 Oltre agli Eq. Nash del gioco puro, abbiamo nuovi equilibri dati dalla strategia conservativa sopra trovata incrociata con quelle pure determinate prima.

1.7. Il valore del gioco misto é uguale a quello puro, quindi 1.

BEST RESPONSE FUNCTIONS - Esempio

domenica 15 novembre 2020 11:44

- Player 1 : $X_1 = \{x_1 \geq 0\}$, $c_1(x_1, x_2) = x_1(x_2 - x_1)$

Fissata con $\bar{x}_2 \in X_2$ la strategia del player 2 allora abbiamo $c_1(x_1, \bar{x}_2) = x_1(\bar{x}_2 - x_1)$

Definiamo la Best Response Function del player 1 :

$$b_1(\bar{x}_2) = \left\{ x_1 \in X_1 : x_1 = \arg \max_{x_1 \in X_1} x_1(\bar{x}_2 - x_1) \right\}$$

Calcoliamo il max tramite l'annullamento del gradiente, in quanto funz. quadratica convessa :

$$\frac{\partial c_1(x_1, \bar{x}_2)}{\partial x_1} = \bar{x}_2 - 2x_1 = 0 \longrightarrow b_1(\bar{x}_2) = \left\{ \frac{\bar{x}_2}{2} \right\}$$

- Player 2 : $X_2 = \{x_2 \geq 0\}$, $c_2(x_1, x_2) = x_2(1 - x_1 - x_2)$

Fissata $\bar{x}_1 \in X_1$ la strategia del player 1 $\rightarrow c_2(\bar{x}_1, x_2) = x_2(1 - \bar{x}_1 - x_2)$

Analogamente a prima definiamo la Best Response Function

$$b_2(\bar{x}_1) = \left\{ x_2 \in X_2 : x_2 = \arg \max_{x_2 \in X_2} x_2(1 - \bar{x}_1 - x_2) \right\}$$

$$\frac{\partial c_2(\bar{x}_1, x_2)}{\partial x_2} = 1 - \bar{x}_1 - 2x_2 = 0 \longrightarrow b_2(\bar{x}_1) = \left\{ \frac{1 - \bar{x}_1}{2} \right\}$$

Quindi risolvendo il seguente sistema otteniamo gli Eq. Nash

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} \\ x_2 = \frac{1 - x_1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{x_2}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5} \\ x_2 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$\rightarrow \exists !$ Eq. Nash con $x^* = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

- Possiamo concludere a priori l'esistenza di almeno un Eq. Nash poiché gli insiemi X_1 e X_2 sono convessi e compatti , e le funzioni c_1 e c_2 sono continuamente differenziabili e convesse nelle rispettive variabili

POSSIBILI CROCETTE - DEFINIZIONI / OSSERVAZIONI

· Gioco NON cooperativo:

- se finito $\exists$ str conservativa, se infinito non è detto
- a priori non è detto $\exists$ str. dominante e $\exists$ Eq. Nash, ma $\exists$ sempre ottimo secondo Pareto
- Str. dominante è conservativa, NO viceversa
- Incrocio di str. dominanti è Eq. Nash, in generale NO viceversa

· Gioco ANTAGONISTA PURO:

- Eq. Nash sono punti di sella della funz $C_1(x_1, x_2)$
- Tutti gli stati sono ottimi secondo Pareto
- Valore del gioco $\in [-\tilde{C}_2, \tilde{C}_1]$
- $-\tilde{C}_2 \leq \tilde{C}_1$, quindi $\tilde{C}_1$ e $\tilde{C}_2$ NON possono essere entrambi negativi
- Se $\tilde{C}_1 = -\tilde{C}_2$, l'incrocio delle str conservative è Eq. Nash
- gioco fair se il valore $= 0$
- il valore di un gioco simmetrico può essere solo 0 o può non esistere
- Se $\exists$ str. dominante, questa definisce il valore del gioco

· Gioco ANTAGONISTA MISTO:

- Gioco puro antagonista finito $\rightarrow$ gioco misto è antagonista infinito
- $\exists$ sempre Eq. Nash e ha sempre un valore $\in [-\tilde{C}_2, \tilde{C}_1]$
- Se puro matr antisimmetrica, $\tilde{C}_1(\xi_1)$ e $\tilde{C}_2(\xi_2)$ sono sempre NON-negativi
- In str. mista la migliore risposta è una strategia pura

PURO $\rightarrow$ MISTO

- Valore gioco puro, se esiste, è uguale al valore del gioco misto
- Eq. Nash del puro, se esistono, sono Eq. Nash anche nel misto
- Str dominanti del puro, se esistono, sono str dominanti anche nel misto
- Str. conservative del puro NON è detto siano conservative nel misto
- Str. conservative del puro sono conservative nel misto se danno Eq. Nash

POSSIBILI CROCETTE

Affinché una strategia mista sia conservativa, indicando il valore del gioco con v, deve accadere o che si possa determinare un match oppure:

- Se $\xi_1 : \tilde{C}_1(\xi_1) = v$.
- Se $\xi_2 : -\tilde{C}_2(\xi_2) = v$.

Sono equilibri di Nash in SM tutti quelli trovati in SP, più SE IL GIOCO PURO HA VALORE gli incroci delle strategie conservative pure con quelle miste.

Se il gioco è antagonistico e simmetrico, il valore sarà 0 e in SM saranno sempre $\tilde{C}_1, \hat{C}_2 \geq 0$.

Se delle strategie pure individuano il valore del gioco, si conservano nel passaggio puro → misto. Loro incroci con strategie miste conservative determinano altri EN.

Se in strategia pura si individuano str. dominanti, queste saranno pure conservative e individueranno il valore del gioco.

MECCANISMI D'ASTA

lunedì 16 novembre 2020 08:59

$|N| = n$ player

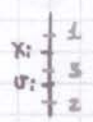
$X_i = \mathbb{R}_+$ offerta $\qquad c_i = \begin{cases} v_i - p & \text{se } i \text{ vince} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

v_i = valore assegnato

- PRIMO PREZZO $\rightarrow$ Non ci sono str. debol. dominanti: perché quanto offro determina quanto pago

- SECONDO PREZZO $\rightarrow$ $x_i = v_i$ è str. debol. dominante

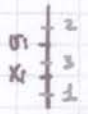
1) $x_i > v_i$: 1) se $x' > x_i$ perdo e $c_i = 0$, per vincere dovrei offrire $x_i > x'$, ma con $c_i < 0$



2) se $x' < v_i$ vinco e $c_i > 0$

3) se $v_i < x' < x_i$ vinco e $c_i < 0$, offrendo $x_i \leq v_i$ migliorerei il playoff $c_i = 0$

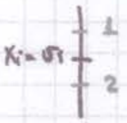
2) $x_i < v_i$: 1) se $x' < x_i$ vinco e $c_i > 0$



2) se $x' > v_i$ perdo e $c_i = 0$, per vincere dovrei offrire $x_i > x' > v_i$ con $c_i < 0$

3) se $x_i < x' < v_i$ perdo e $c_i = 0$, offrendo $x_i = x' + \varepsilon < v_i$ migliorerei il mio playoff $c_i > 0$

3) $x_i = v_i$: 1) se $x' > x_i$ perdo e $c_i = 0$, per vincere dovrei offrire $x_i > x'$, ma con $c_i < 0$



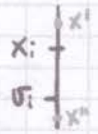
2) se $x' < x_i$ vinco e $c_i > 0$

$\rightarrow$ Debolmente dominante $x_i = v_i$

- SECONDO PREZZO VARIAZIONE $\quad p = \frac{1}{3}$ della 2° offerta più alta $\rightarrow$ str. dominante $x_i = 3v_i$

- TERZO PREZZO

1) $x_i > v_i$ $\rightarrow$ No dominante

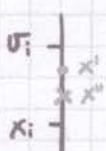


se $x' > x_i > v_i$ e $x'' < v_i$, perdo l'asta e $c_i = 0$

offrendo $x_i > x'$ vincerebbe l'asta e pagherebbe $p = x'' < v_i$

quindi con $c_i > 0$

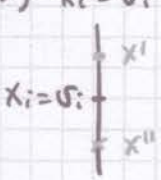
2) $x_i < v_i$



1) $x'' < x' < v_i$, i perde l'asta e $c_i = 0$

offrendo $x' < x_i < v_i$ vincerebbe l'asta e $c_i > 0$

3) $x_i = v_i$ $\quad$ No str dominante



se $x' > v_i$ e $x'' < v_i$, i perde l'asta e $c_i = 0$

offrendo $x_i > x'$, i vince l'asta e $c_i > 0$

GIOCHI ANTAGONISTICI

lunedì 16 novembre 2020 10:10

- Gioco ANTAGONISTICO : gioco con 2 player a somma zero $C_1(x_1,x_2) = -C_2(x_1,x_2)$
  \+ Simmetrico : matrice dei playoff è antisimmetrica $c_{ii} = 0$, $c_{ij} = -c_{ji}$

- x^* è Eq. Nash per un gioco antagonistico $\iff$
  i) $\sup_{x_2} \inf_{x_1} C_1(x_1,x_2) = \inf_{x_1} C_1(x_1,\tilde{x}_2)$ $\tilde{x}_2$ str cons. per 2°
  ii) $\inf_{x_1} \sup_{x_2} C_1(x_1,x_2) = \sup_{x_2} C_1(\tilde{x}_1,x_2)$ $\tilde{x}_1$ str cons per 1°
  iii) $\sup_{x_2} \inf_{x_1} C_1(x_1,x_2) = \inf_{x_1} \sup_{x_2} C_1(x_1,x_2)$ $C_1(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) = -C_2(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2)$

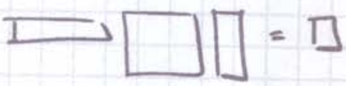
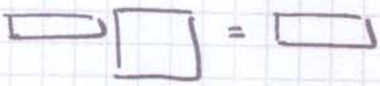
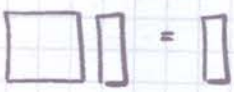
- Rettangolarità : Siano (x_1^*,x_2^*) e (y_1^*,y_2^*) Eq. Nash anche (x_1^*,y_1^*) e (x_2^*,y_2^*)

- Gioco STRETTAMENTE COMPETITIVO :
  presi due stati: x' e x'', $C_1(x') \geq C_1(x'')$ e $C_2(x') \leq C_2(x'')$

- L'estensio in str. MISTA di un gioco antagonista finito è anch'esso un gioco antagonista, ma infinito

$$z^* = \begin{cases} \min z \\ z \geq \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i c_{ij} \quad j=1,\dots m_2 \\ \sum_{i=1}^{m_1} \xi_1^i = 1 \\ \xi_1^i \geq 0 \quad i=1,\dots m_1 \end{cases} \equiv \quad w^* = \begin{cases} \max w \\ w \leq \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} \xi_2^j \quad i=1,\dots m_1 \\ \sum_{j=1}^{m_2} \xi_2^j = 1 \\ \xi_2^j \geq 0 \quad j=1,\dots m_2 \end{cases}$$

ξ_1^* str conservativa 1° $\qquad$ ξ_2^* str conservativa 2°

- $C_1(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^T C \xi_2$ 
- $\tilde{C}_1(\xi_1) = \max_{x_2 \text{ pure}} \xi_1^T C$  $\rightarrow$ max
- $-\tilde{C}_2(\xi_1) = \min_{x_1 \text{ pure}} C \xi_2^T$  $\rightarrow$ min

GIOCHI COOPERATIVI

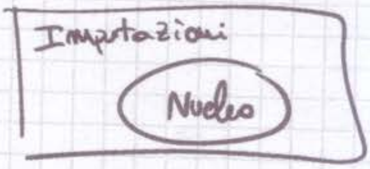
martedì 17 novembre 2020 09:12

Gioco cooperativo (N, v) , $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}_+$ con $v(\emptyset) = 0$

- Super-additività : $\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \emptyset \quad v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$
  $\forall Q \subseteq N$ con Q_i partz. di $Q \quad \sum_{i=1}^{h} v(Q_i) \leq v(Q)$

- Imputazioni = $\{ \alpha \in \mathbb{R}^m : \alpha_i \geq v(\{i\}) \ \forall i \in N, \ \sum_{i \in N} \alpha_i = v(N) \}$

- Nucleo = $\{ \alpha \in \mathbb{R}^m : \sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S) \ \forall S \subset N, \ \sum_{i \in N} \alpha_i = v(N) \}$



- Il Nucleo é <u>NON</u> vuoto se :

$$P \begin{cases} \min \sum_{i \in N} \alpha_i \\ \sum_{i \in S} \alpha_i \geq v(S) \ \forall S \in N_P \end{cases} \qquad z^* \leq v(N)$$

$$D \begin{cases} \max \sum_{S \in N_P} \lambda_S v(S) \\ \sum_{\substack{S \in N_P : \\ i \in S}} \lambda_S = 1 \quad \forall i \in N \\ \lambda_S \geq 0 \end{cases} \qquad \omega^* \leq v(N)$$

λ: vettore bilanciato

Gioco ρ : $v(\emptyset) = 0$, $v(S) = 0 \quad |S| = 1$
$0 < \rho < 1 \quad v(S) = \rho \quad |S| = 2 \quad , v(N) = 1$

P) $\min \sum \alpha_i$
$$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \geq \rho \\ \alpha_1 + \alpha_3 \geq \rho \\ \alpha_2 + \alpha_3 \geq \rho \end{cases} \to \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geq \frac{3}{2}\rho$$
$z^* = \frac{3}{2}\rho \leq 1 \quad \boxed{\rho \leq \frac{2}{3}}$

D) $\min \sum \lambda_S v(S)$
$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_{13} &= 1 \\ \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_{23} &= 1 \\ \lambda_3 + \lambda_{13} + \lambda_{23} &= 1 \end{aligned} \to \begin{aligned} &\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ &\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{23} = 1/2 \end{aligned}$$
$\omega^* = \frac{3}{2}\rho$

- Equivalenza Giochi INESSENZIALI
  i) Additività : $\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \emptyset \quad v(S) + v(T) = v(S \cup T)$
  ii) $\sum_{i=1}^{m} v(\{i\}) = v(N)$
  iii) Il Nucleo é <u>NON</u> vuoto ed é costituito da un'imputazione $\alpha_i = v(\{i\})$

- MERCATI

N player, $w_i \in \mathbb{R}^l$ risorse e $f_i(w)$ produzione (concava) $\to$ Definire v

- $v(\emptyset) = 0$ e $v(\{i\}) = f_i(w_i)$
- $\forall S \subseteq N \quad v(S) = \begin{cases} \max \sum_{i \in S} f_i(z_i) \\ \sum_{i \in S} z_i = \sum_{i \in S} w_i \\ z_i \geq 0 \quad \forall i \in S \end{cases} \to$ per costruzione v é super-additiva

$N = \{A, B\}$

$w_A = (3,2)$, $f_A(w) = w_1 + 3w_2$

$w_B = (1,4)$, $f_B(w) = 2w_1 + w_2$

$v(\emptyset) = 0$

$v(A) = f_A(w_A) = 9$

$v(B) = f_B(w_B) = 6$

$$v(N) = \begin{cases} \max z_{A,1} + 3z_{A,2} + 2z_{B,1} + z_{B,2} \\ z_{A,1} + z_{B,1} = w_{A,1} + w_{B,1} = 4 \\ z_{A,2} + z_{B,2} = w_{A,2} + w_{B,2} = 6 \\ z_A, z_B \geq 0 \end{cases}$$

SHAPLEY

lunedì 23 novembre 2020 19:01

Shapley - Assiomi

1) Razionalità collettiva : $\sum_{i\in N} \alpha_i = v(N)$ $\ulcorner$ RAZ. INDIVIDUALE: $\alpha_i \geq v(\{i\}), \forall i \in N$ $\lrcorner$

2) Dummy player : $i \in N \quad \forall T \subset N : i \notin T \quad v(T \cup \{i\}) = v(T) \Rightarrow \alpha_i = 0$

3) Giocatori indifferenti : $i,j \in N \quad \forall T \subset N : i,j \in T \quad v(T\cup\{i\}) = v(T\cup\{j\}) \Rightarrow \alpha_i = \alpha_j$

4) Linearità : siano u, v funz. super-additive $\alpha_i(u) + \alpha_i(v) = \alpha_i(u+v)$

Funz. Shapley soddisfa tutti gli assiomi e restituisce un'imputazione (<u>No</u> nucleo)

$$S_i(v) = \frac{1}{n!} \sum_{p\in P} \left(v(A_i^p) - v(A_i^p \setminus \{i\})\right) \qquad S_i(v) = \sum_{T \subseteq N : i \in T} \frac{(|T|-1)! \cdot (n-|T|)!}{n!} \left(v(T) - v(T\setminus\{i\})\right)$$

permutazioni coalizioni

$N = \{1,2,3\}$

$i=1$

1	2	3	$0-0=0$
1	3	2	$0-0=0$
2	1	3	$p-0=p$
2	3	1	$1-p=1-p$
3	1	2	$p-0=p$
3	2	1	$1-p=1-p$

$S_i(v) = \frac{1}{3!}(p+1-p+p+1-p) = \frac{1}{3}$

$|T| = 1 \rightarrow \frac{0!\,2!}{3!} = \frac{1}{3}$

$|T| = 2 \rightarrow \frac{1!\,1!}{3!} = \frac{1}{6}$

$|T| = 3 \rightarrow \frac{2!\,0!}{3!} = \frac{1}{3}$

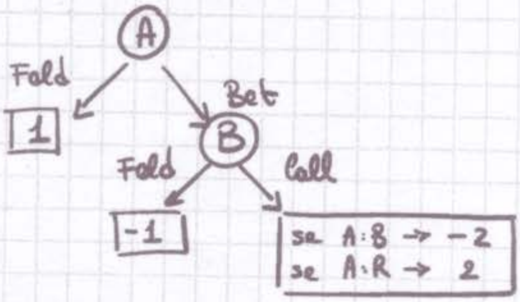
1	$0-0=0$	
12	$p-0=p$	$\cdot\frac{1}{6}$
13	$p-0=p$	$\cdot\frac{1}{6}$
123	$1-p$	$\cdot\frac{1}{3}$

$\Big\} = \frac{1}{3}$

- È possibile modellare il gioco come un gioco coperativo perché la funzione di utilità è super-additiva
- Non è possibile modellare il gioco come un gioco coperativo perché la funzione di utilità NON è super additiva. Infatti esistono due coalizioni disgiunte a valore 1, quella formata da ... e quella formata da ...
- Dall'assioma della razionalità collettiva segue che $S_j(v) = \frac{1 - m_i \cdot S_i(v)}{m_j}$
- $S_i(v) = \frac{\#\text{ perm. in cui } A_i^p \text{ vince e } A_i^p - \{i\} \text{ perde}}{n!} = \frac{\#\text{"1-0"}}{n!}$. $\ulcorner (n-1)! \lrcorner$
- Se v monotona e $\exists S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset : v(S) = v(T) = 1 \Rightarrow v$ è superadditiva.
- BONDAREVA-SHAPLEY: Il nucleo è non vuoto $\Leftrightarrow \forall \lambda$ bilanciato: $\sum_{S \in N_p} \lambda_S v(S) \leq v(N)$

BLUFF

lunedì 30 novembre 2020 09:43



	Call	Fold
Bet B Bet R	0	-1
Bet B Fold R	$-\frac{1}{2}$	0

$$\begin{cases} \min z \\ z \geq -1/2\, \xi_1^2 \\ z \geq -\xi_1^1 \\ \xi_1^1 + \xi_1^2 = 1 \\ \xi_1^1, \xi_1^2 \geq 0 \end{cases}$$

$\xi_1^2 = 1 - \xi_1^1$

$z \geq -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi_1^1$

$z \geq -\xi_1^1$

$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi_1^1 = -\xi_1^1 \quad \frac{3}{2}\xi_1^1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\xi_1^1 = \frac{1}{3}} \quad \boxed{\xi_1^2 = \frac{2}{3}} \quad z^* = -\frac{1}{3}$

1/6 delle volte : Bet R → BLUFF

$$\begin{cases} \max w \\ w \leq -\xi_2^2 \\ w \leq -\frac{1}{2}\xi_2^1 \\ \xi_2^1 + \xi_2^2 = 1 \\ \xi_2^1, \xi_2^2 \geq 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \xi_2^2 = 1 - \xi_2^1$

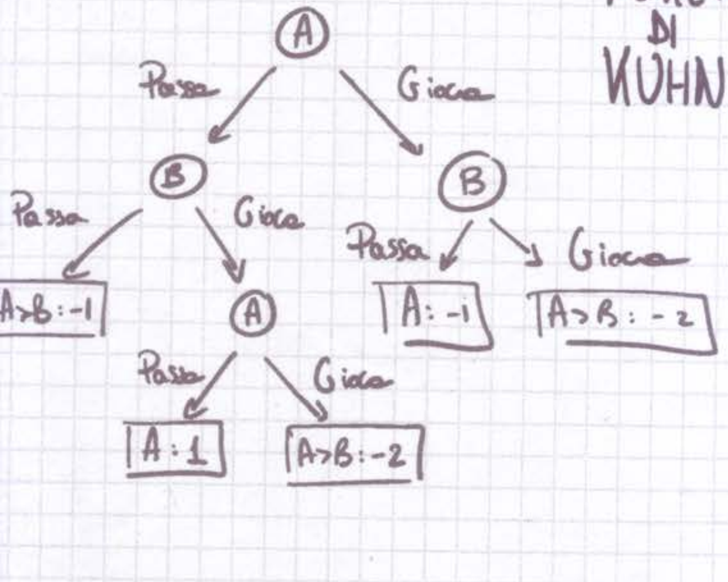
$w \leq -1 + \xi_2^1$

$w \leq -\frac{1}{2}\xi_2^1$

$-1 + \xi_2^1 = -\frac{1}{2}\xi_2^1 \quad \frac{3}{2}\xi_2^1 = 1$

$\boxed{\xi_2^1 = \frac{2}{3}} \quad \boxed{\xi_2^2 = \frac{1}{3}} \quad w^* = -\frac{1}{3}$

POKER DI KUHN



GIOCO RHO

$\longrightarrow$ MAI ADDITIVA

mercoledì 18 novembre 2020 12:16

$N = \{1,2,3\}$

$v(S) = 0 \ , \ |S| = 1$

$v(S) = \rho \ , \ |S| = 2$

$v(N) = 1$

- Additività: $\forall S,T : S \cap T = \emptyset \rightarrow v(S) + v(T) = v(S \cup T)$

$v(\{1\}) + v(\{2\}) = v(\{1,2\}) \qquad 0+0=\rho$

$v(\{1\}) + v(\{1,2\}) = v(\{1,2,3\}) \qquad 0+\rho=1$

$\boxed{\text{MAI}}$

- Super-additività: $\forall S,T : S \cap T = \emptyset \quad v(S)+v(T) \le v(S \cup T)$

$v(\{1\}) + v(\{2\}) \le v(\{1,2\}) \qquad 0 \le \rho$

$v(\{1\}) + v(\{2,3\}) \le v(\{1,2,3\}) \qquad \rho \le 1$

$\boxed{0 \le \rho \le 1}$

$$\boxed{\begin{aligned} z^* &= \min \sum_{i \in N} \alpha_i \\ &\sum_{i \in S} \alpha_i \ge v(S) \quad \forall S \subset N \end{aligned}}$$

- Nucleo: è NON vuoto se $z^* \le v(N)$

$z^* = \min \ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \ge 0 \\ &\alpha_2 \ge 0 \\ &\alpha_3 \ge 0 \\ &\left.\begin{aligned} &\alpha_1 + \alpha_2 \ge \rho \\ &\alpha_1 + \alpha_3 \ge \rho \\ &\alpha_2 + \alpha_3 \ge \rho \end{aligned}\right\} \rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ge \frac{3}{2}\rho \end{aligned}$$

$z^* = \frac{3}{2}\rho \le 1$

$\boxed{\rho \le \frac{2}{3}}$

$w^* = \max \sum_{S \in N_0} v(S) \lambda_S$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_{12} &= 1 \\ \lambda_2 + \lambda_{12} &= 1 \\ \lambda_3 + \lambda_{23} &= 1 \\ \lambda_S &\ge 0 \end{aligned}$$