1) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (5x_1(t)^2 + 3x_2(t)^2 - 6x_1(t)x_2(t) + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = 2(x_1 - x_2) + u \end{cases} \tag{1}$$

a) Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = x_1 - x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (1). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

b) Ripetere il punto a) per la legge di controllo $u = 2x_1 - x_2$.

c) Ripetere il punto a) per la legge di controllo $u = 4x_1 - x_2$.

2) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \frac{1}{2}(1 - x_2^2)x_1 + x_2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \tag{2}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = -2x_1x_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (2). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

3) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t))dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \dot{x} = Ax + Bu \tag{3}$$

con $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $u = (u_1, u_2)$. Le matrici A, B, Q, R sono definite come

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = (u_1, u_2) = (-x_1, -x_2)$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (3). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.

4) Si consideri il seguente problema di controllo ottimo:

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty (z_1(t)^2 - 2z_1(t)z_2(t) + z_2(t)^2 + u(t)^2)dt \right\}, \qquad s.t. \qquad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - z_1 \\ \dot{z}_2 = -\frac{3}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_1^2 z_2 - \frac{1}{2}z_1^3 + z_1 u \end{cases} \tag{5}$$

Verificare che la legge di controllo in retro-azione $u = z_1^2 - z_1z_2$ sia la soluzione del problema di controllo ottimo (5). In caso contrario, dire se esiste un differente *costo corrente* significativo per il quale il controllo sopra citato sia la soluzione ottima. Motivare tutti i passaggi.