Equazione di HJB e condizioni sufficienti di ottimalità

a.a. 2020/2021

Mario Sassano

Dipartimento di Ingegneria Civile e Ingegneria Informatica
Università di Roma Tor Vergata

Nelle lezioni precedenti

- Abbiamo definito un problema di controllo ottimo per sistemi non lineari a tempo continuo, ovvero un Problema di Bolza
- Abbiamo introdotto il concetto di Funzione Valore
- Abbiamo visto che la Funzione Valore deve **necessariamente** soddisfare l'equazione alle derivate parziali di Hamilton-Jacobi-Bellman

Vogliamo dimostrare che l'equazione di HJB fornisce anche condizioni sufficienti di ottimalità: "se una funzione $\hat{V}$ risolve la HJB, allora è la Funzione Valore"

Teorema

Supponiamo che la funzione $\hat{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabile con continuità, risolva la HJB, ovvero

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \hat{V}}{\partial t}(x,t) & = \min\limits_u \left\{ \ell(x,u,t) + \dfrac{\partial \hat{V}}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) \right\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [t_0, T] \\ \hat{V}(x,T) & = m(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

e supponiamo che il minimo (del termine di destra) sia raggiunto per

$$\hat{u} = \arg\min_u \left\{ \ell(x,u,t) + \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) \right\}, \forall x, \forall t$$

Allora $\hat{V}(x_0, t_0)$ è il **costo ottimo** e $\hat{u}(t)$ è il **controllo ottimo** ◇

Se $\hat{V}$ risolve HJB e $\hat{u}$ raggiunge il minimo del termine di destra di HJB, allora lungo la traiettoria $\hat{x}(t)$ corrispondente al controllo $\hat{u}(t)$, $t \geq 0$, a partire dalla condizione iniziale $\hat{x}(t_0) = x_0$, si ha

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(\hat{x}(t), t) = \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(\hat{x}(t), t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) \tag{1}$$

Ricordando poi che

$$\frac{d}{dt}\hat{V}(\hat{x}(t), t) = \frac{\partial}{\partial x}\hat{V}(\hat{x}(t), t) f(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \frac{\partial}{\partial t}\hat{V}(\hat{x}(t), t)$$

l'equazione (1) può essere scritta come

$$0 = \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) + \frac{d}{dt}\hat{V}(\hat{x}(t), t)$$

Integrando tra t_0 e T otteniamo

$$0 = \int_{t_0}^{T} \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t) dt + \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\hat{V}(\hat{x}(t), t) dt$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{t_0}^{T} \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)dt + \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\hat{V}(\hat{x}(t), t)dt \\
&= \int_{t_0}^{T} \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)dt + \hat{V}(\hat{x}(T), T) - \hat{V}(\hat{x}(t_0), t_0) \\
&= \underbrace{\int_{t_0}^{T} \ell(\hat{x}(t), \hat{u}(t), t)dt + m(\hat{x}(T))}_{J(\hat{u})} - \hat{V}(x_0, t_0)
\end{aligned}
$$

ottenute grazie al Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale e alle **condizioni al contorno** di HJB ($\hat{V}(x, T) = m(x), \ \forall x$)

Abbiamo dunque dimostrato che

$$\hat{V}(x_0, t_0) = J(\hat{u})$$

Per concludere dobbiamo confrontare questo costo con quello di qualsiasi altra u...

Ripetiamo i passaggi della slide 3 per un generico u (che dunque **non** raggiunge il minimo del termine di destra di HJB), con $x(t)$ traiettoria corrispondente a $u(t)$ da $x(t_0) = x_0$

$$-\frac{\partial \hat{V}}{\partial t}(x(t), t) \leq \ell(x(t), u(t), t) + \frac{\partial \hat{V}}{\partial x}(x(t), t) f(x(t), u(t), t) \tag{2}$$

L'equazione (2) può essere scritta come

$$0 \leq \ell(x(t), u(t), t) + \frac{d}{dt}\hat{V}(x(t), t)$$

Integrando tra t_0 e T otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{t_0}^{T} \ell(x(t), u(t), t)dt + \int_{t_0}^{T} \frac{d}{dt}\hat{V}(x(t), t)dt \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{T} \ell(x(t), u(t), t)dt + m(x(T))}_{J(u)} - \hat{V}(x_0, t_0) \end{aligned}$$

Quindi $\hat{V}(x_0, t_0) \leq J(u)$, che combinato con la slide 4 $\Rightarrow J(\hat{u}) = \hat{V}(x_0, t_0) \leq J(u), \ \forall u$ $\square$

Consideriamo il caso in cui sono presenti vincoli sul controllo

$$\begin{cases} \min\limits_{u} & \int_{t_0}^{T} \ell(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + m(x(T)) \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \ x(t_0) = x_0 \\ & u(t) \in \mathcal{U}, t \in [t_0, T] \end{cases}$$

L'intera teoria resta valida con una piccola modifica

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial V^\star}{\partial t}(x,t) & = \min\limits_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \ell(x,u,t) + \dfrac{\partial V^\star}{\partial x}(x,t) f(x,u,t) \right\}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [t_0, T] \\ V^\star(x,T) & = m(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Esempio: svuotare un serbatoio (1/2)

Consideriamo il seguente problema di controllo ottimo

Termine di Mayer

$$\begin{cases} \min\limits_{u} & \frac{1}{2}x(T)^2 \\ & \dot{x}(t) = u(t),\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \\ & -1 \leq |u(t)| \leq 1, t \in [0, T] \end{cases}$$

Condizioni Iniziali

L'equazione di HJB associata è

$$-\frac{\partial V^\star}{\partial t} = \min_{|u|\leq 1}\left\{\frac{\partial V^\star}{\partial x}u\right\}, \quad \boxed{V^\star(x, T) = \frac{1}{2}x^2}$$

Applico definizione degli appunti 6.6. Questa è la condizione al contorno che mi definisce il costo terminale

Considerando il vincolo su u, nell'equazione HJB il meglio che possiamo fare è *cambiare* il segno di $\partial V^\star/\partial x$ e renderlo *negativo*, ovvero

Corrisponde a <\hat>u

$$u^\star = -sign\left(\frac{\partial V^\star}{\partial x}\right)$$

Quindi, la funzione $V^\star$ deve soddisfare

$$-\frac{\partial V^\star}{\partial t} = -sign\left(\frac{\partial V^\star}{\partial x}\right)\frac{\partial V^\star}{\partial x} = -\left|\frac{\partial V^\star}{\partial x}\right|$$

Proviamo con la funzione

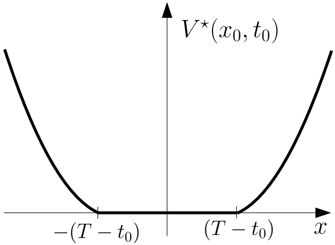
$$V^\star(x,t) = \frac{1}{2}\left(\max\{0, |x| - (T-t)\}\right)^2$$

Le sue derivate sono

$$\frac{\partial V^\star}{\partial t} = \max\{0, |x| - (T-t)\}$$

$$\frac{\partial V^\star}{\partial x} = \max\{0, |x| - (T-t)\} sign(x)$$

$$\Rightarrow sign\left(\frac{\partial V^\star}{\partial x}\right) = sign(x)$$



L'equazione HJB diventa

$$0 = \max\{0, |x| - (T-t)\} - sign(x)\left(\max\{0, |x| - (T-t)\} sign(x)\right)$$
$$= (1 - sign(x)^2)\max\{0, |x| - (T-t)\}$$

Quindi, il controllo ottimo è $u^\star = -sign(x)$ e il sistema ottimo a ciclo chiuso è $\dot{x}^\star = -sign(x^\star)$, $x^\star(t_0) = x_0$

Supponiamo che sia il sistema che il costo corrente siano **stazionari**

$\Rightarrow f(x,u),\ f(0,0) = 0$

$\Rightarrow \ell(x,u),\ \ell(0,0) = 0$

Supponiamo che non sia presente un **costo terminale**, $m(x) = 0\ \forall x$

Dunque, consideriamo il Problema di Controllo Ottimo

$$\begin{cases} \min\limits_{u} & \int_{t_0}^{\infty} \ell(x(\tau),u(\tau))d\tau \\ & \dot{x}(t) = f(x(t),u(t)),\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il minimo costo ottenibile non dipende dal tempo iniziale: Funzione Valore $V(x)$

L'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman diventa

$$\begin{cases} 0 & = \min\limits_{u}\left\{\ell(x,u) + \dfrac{\partial V^{\star}}{\partial x}(x) f(x,u)\right\},\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & = V^{\star}(0), \end{cases}$$

(Ex1) Scrivere l'equazione HJB del seguente problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \min\limits_{u} & \dfrac{1}{2}\int_0^T (x_1(\tau)^2 + u(\tau)^2)d\tau + \dfrac{1}{2}x_2(T)^2 \\ & \dot{x}_1 = x_1^2 + x_2, \\ & \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 u \end{cases}$$

(Ex2) Dato il problema di controllo ottimo

$$\begin{cases} \min\limits_{u} & \dfrac{1}{2}\int_0^\infty (2x_1(\tau)^2 + 3x_2(\tau)^2 + u(\tau)^2)d\tau \\ & \dot{x}_1 = -x_1 - x_2, \\ & \dot{x}_2 = x_1 + u \end{cases}$$

verificare se $u = -x_2$ sia il controllo ottimo

(Ex3) Dato il problema di controllo ottimo in (Ex2), dire se $u = -2x_2$ sia il controllo ottimo, altrimenti determinare un costo *modificato* e *significativo* (ovvero, semi-definito o definito positivo) per cui $u = -2x_2$ sia ottima

Nelle prossime lezioni...

Siamo interessati a studiare problemi di controllo ottimo per sistemi lineari a tempo continuo con indice di costo quadratico

Prossimi passi:

- Cerchiamo di determinare casi in cui l'equazione di HJB si semplifica
- Nel caso di sistemi lineari e indici di costo quadratici l'equazione di HJB passa da un'equazione alle derivate parziali ad un'equazione alle derivate ordinarie
- Determiniamo la soluzione in forma chiusa di un problema di controllo ottimo lineare quadratico