Teoria dei Giochi – Prova del 25 Luglio 2018
CONSEGNARE ESCLUSIVAMENTE QUESTO FOGLIO
NGR$\equiv$ Non Giustificare la Risposta

Cognome, Nome, Numero di Matricola: ______________________________

Esercizio 1 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff del primo giocatore per un gioco antagonistico in forma di minimizzazione:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -7 & 4 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considera l'*estensione in strategia mista* del gioco e le seguenti strategie rispettivamente per il primo e il secondo giocatore:

$(i): \xi_1^i = \frac{1}{4}\ \forall i = 1,\dots,4$ $(ii): \xi_1^1 = \frac{1}{4}, \xi_1^2 = 0$, $\xi_1^3 = \frac{1}{8}$, $\xi_1^4 = \frac{5}{8}$; $(iii): \xi_1^1 = \xi_1^2 = \frac{1}{8}$ e $\xi_1^3 = \xi_1^4 = \frac{3}{8}$

$(j): \xi_2^j = \frac{1}{4}\ \forall j = 1,\dots,4$; $(jj): \xi_2^1 = 0$, $\xi_2^2 = \frac{1}{8}$, $\xi_2^3 = \frac{1}{2}, \xi_2^4 = \frac{3}{8}$; $(jjj): \xi_2^1 = \frac{1}{8}$, $\xi_2^2 = \xi_2^3 = \frac{3}{8}$ e $\xi_2^4 = \frac{1}{8}$

1.1. Per ciascuna di queste strategie, indica quanto paga, nel caso peggiore, il giocatore che la usa. **NGR**

Rispettivamente: (i) $\frac{5}{4}$; (ii) $-\frac{7}{8}$; (iii) $\frac{7}{8}$; (j) $\frac{3}{2}$; (jj) $\frac{7}{8}$; (jjj) $\frac{7}{4}$.

1.2 Qualcuna delle strategie fornite è conservativa? *Indicare le eventuali strategie conservative, oppure scrivere che non ve ne sono.* **NGR**

Per il primo giocatore la strategia (ii) è conservativa; per il secondo giocatore la strategia (jj) è conservativa.

1.3 È possibile individuare qualche equilibrio di Nash in strategia mista? *Indicare gli eventuali equilibri, oppure scrivere che non si può individuarne.* **NGR**

L'incrocio delle strategie conservative determina un equilibrio di Nash.

1.4 Qual è il valore del gioco misto? *Indicare il valore, oppure scrivere che non si può individuarlo.* **NGR**

Il valore del gioco è $-\mathbf{\frac{7}{8}}$.

Esercizio 2 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) Si consideri la seguente matrice dei payoff per un gioco con due giocatori in forma di minimizzazione, dove x è un numero intero (positivo o negativo):

$$\begin{pmatrix} 3,5 & 8,6 & 7,5+x \\ 5,4 & 2,6 & 6,4+x \\ 4-x,2 & 7,5 & 8,3-x \end{pmatrix}$$

Considera innanzitutto il gioco in *strategia pura*.

2.1 Indicare quali sono, al variare di x, le strategie debolmente dominanti per il primo giocatore (se ve ne sono), e le strategie debolmente dominanti per il secondo (se ve ne sono). **NGR**

Il primo giocatore non ha strategie debolmente dominanti. Per il secondo giocatore, la prima strategia è debolmente dominante per $x \in [0,1]$.

2.2 Indicare quali sono, al variare di x, le strategie conservative per il primo giocatore (se ve ne sono) e le strategie conservative per il secondo (se ve ne sono). **NGR**

Per il primo giocatore, la seconda e paga 6 nel caso peggiore. Per il secondo giocatore, la prima per $x \leq -2$ pagando 5, la terza per $x \in [-2,-1]$ pagando $3-x$, la terza per $x \in [-1,0]$ pagando $5+x$ e infine la prima per $x \geq 0$ pagando 5.

2.3 Indicare quali sono, al variare di x, gli equilibri di Nash del gioco (se ve ne sono). **NGR**

L'incrocio tra la prima strategia per il primo giocatore e la prima strategia per il secondo giocatore determina un equilibrio di Nash per $x \in [0,1]$.

L'incrocio tra la seconda strategia per il primo giocatore e la terza strategia per il secondo giocatore determina un equilibrio di Nash per $x \leq 0$.

L'incrocio tra la terza strategia per il primo giocatore e la prima strategia per il secondo giocatore determina un equilibrio di Nash per $x = 1$.

2.4 Poni $x = 0$ e considera quindi il gioco in *strategia mista*. Senza effettuare calcoli e utilizzando solo le risposte precedenti, fornire dei valori di a e b per i quali l'affermazione seguente è vera: il valore del gioco è certamente compreso nell'intervallo $[a,b]$. *Scegliere a e b in modo che l'ampiezza dell'intervallo* $[a,b]$ *sia la minima possibile.* **NGR**

$[-5,6]$

Esercizio 3 (Tempo risoluzione stimato: 20 min) In un parlamento siedono 10 deputati di cui 6 provengono da una regione A, 3 da una regione B e 1 da una regione C. Una legge viene approvata se e solo se a suo favore votano congiuntamente: la maggioranza dei deputati di A (quindi almeno 4), la maggioranza dei deputati di B (quindi almeno 2) e il deputato di C. Determinare il valore di Shapley di ciascun deputato oppure spiegare perchè non è possibile determinarlo. Giustificare la risposta.

Consideriamo il deputato della regione C. Esso è determinante se e solo se: è in decima posizione; è in nona posizione: è in ottava posizione e nelle ultime due posizioni ci sono 2 deputati di A oppure 1 deputato di A e 1 di B; è in settima posizione e nelle ultime tre posizioni ci sono 2 deputati di A e 1 deputato di B. Svolgendo i calcoli, si ottene un valore di $\frac{29}{84}$ per il deputato di C.

Consideriamo un deputato della regione B. Esso è determinante se e solo se: è in nona posizione e in decima posizione c'è un altro deputato di B: è in ottava posizione e nelle ultime due posizioni ci sono 1 deputato di A e 1 di B; è in settima posizione e nelle ultime tre posizioni ci sono 2 deputati di A e 1 deputato di B. Svolgendo i calcoli, si ottene un valore di $\frac{23}{252}$ per un deputato di B.

Consideriamo infine un deputato della regione A (naturalmente potremmo inferirne il valore dall'assioma della razionalità collettiva, ma procediamo altrimenti). Esso è determinante se e solo se: è in ottava posizione e nelle ultime due posizioni ci sono due deputati di A; è in settima posizione e nelle ultime tre posizioni ci sono 2 deputati di A e 1 deputato di B. Svolgendo i calcoli, si ottiene un valore di $\frac{4}{63}$ per un deputato di B.

Esercizio 4 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Si consideri il seguente gioco con insieme dei giocatori $N = \{A,B,C,D\}$. Ogni giocatore $i \in N$ deve scegliere un numero da un insieme X_i. In particolare, vale: $X_A = \{1,2,3\}$, $X_B = \{2,3,4\}$, $X_C = \{3,4,1\}$ e $X_D = \{4,1,2\}$. Il payoff di ciascun giocatore è determinato come segue:

- se esattamente tre giocatori scelgono uno stesso numero, ognuno di essi riceve un euro dal giocatore che ha scelto il numero diverso;
- se due giocatori scelgono uno stesso numero a e gli altri due giocatori scelgono un altro numero b (quindi $a \neq b$) non ci sono vincitori e il payoff di ogni giocatore è 0;
- se due giocatori scelgono uno stesso numero a e gli altri due giocatori scelgono rispettivamente un numero b e un numero c, con $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$, ognuno dei giocatori che hanno scelto a riceve un euro da ciascuno degli altri due giocatori;
- se i giocatori scelgono quattro numeri diversi, non ci sono vincitori e il payoff di ogni giocatore è 0.

Indicare quali sono gli equilibri di Nash del gioco, se ve ne sono. **NGR**

Sono equilibri di Nash tutti e soli gli stati in cui tre giocatori scelgono uno stesso numero.

Esercizio 5 (Tempo risoluzione stimato: 15 min) Una spiaggia è lunga 1 km e i bagnanti sono distribuiti su tutta la sua lunghezza in modo uniforme. Una barlady A e ua barman B possono entrambi aprire un proprio chiosco sulla spiaggia e possono entrambi scegliere dove posizionare il chiosco (eventualmente anche nello stesso punto, cioè uno affianco all'altro). I due chioschi sono comunque non distinguibili e ogni bagnante si recherà semplicemente al chiosco più vicino, e naturalmente sia A che B vogliono massimizzare il numero di bagnanti serviti presso il proprio chiosco. Procedendo in modo intuitivo e senza giustificare la risposta, dire:

5.1 Esistono per A o B strategie debolmente dominanti, e in caso quali sono? **NGR** No, a ogni giocatore conviene sempre mettersi subito a sinistra o subito a destra dell'altro.

5.2 Esistono equilibri di Nash e in caso quali sono? **NGR** Si quello entrambi i giocatori si mettono al centro della spiaggia.

5.3 Supponete ora di essere voi i gestori della spiaggia e di poter decidere dove posizionare i chioschi. Da un lato volete minimizzare la distanza (attesa) che un bagnante deve percorrere per raggiungere il chiosco più vicino, dall'altra volete garantire che il numero (atteso) di bagnanti che si servono presso i due chioschi sia lo stesso. Dove posizionereste i due chioschi? **NGR** La cosa migliore sarebbe posizionare i chioschi a $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ della spiaggia: in questo modo, ogni bagnante deve percorrere, in media, 125 metri per raggiungere un chiosco. Si noti che invece all'equilibrio di Nash ogni bagnante deve percorrere, in media, 250 metri per raggiungere un chiosco!