Formula di Rodriguez

La formula di Rodriguez consente di esprimere la rotazione di un sistema riferimento attorno ad un asse v attraverso rotazioni intorno ad x, y, z senza utilizzare il metodo di Laplace o il calcolo degli autovalori e autovettori.

Quindi, si vuole passare da un sistema di riferimeno R ad un sistema di riferimento $\hat{R}$ attraverso una matrice $R_v(\theta)$:

$$R \to \hat{R}$$
$$(1) \quad R_v(\theta) = R\, R_x(\theta)\, R^T$$

N.B.:La notazione c,s equivale rispettivamente a cos(ϑ), sin(ϑ).

In particolare, come prima scelta poniamo l'asse x del sistema di riferimento R concidente all'asse di rotazione v ed i restanti assi (y,z) formerando un sistema di riferimento destro. A tale scopo, ruotiamo il sistema di riferimento x di ϑ:

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(c-1) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} s$$

Inoltre, notiamo che:

i. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice identita $I \in \mathbb{R}^{3x3}$

ii. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice antrisimmetrica $\boldsymbol{S}(\frac{\pi}{2})$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \text{con } S_2\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{matrice antisimmetrica} \in \mathbb{R}^{2x2}$$

iii. La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è una matrice antisimmetrica $\mathbf{S}^2(\frac{\pi}{2})$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2^2(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \text{con } S_2^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{matrice antisimmetrica} \in \mathbb{R}^{2x2}$$

Quindi possiamo scrivere:

$$R_x(\theta) = I + S^2(1-c) + S\, s$$

Sostituendo nella (1):

$$R_v(\theta) = R\, R_x(\theta)\, R^T = I + S^2(v)\,(1-c) + S(v)\, s$$

si ottiene la formula di Rodriguez:

$$R_v(\theta) = I + S^2(v)\,(1-c) + S(v)\, s.$$

```
Maxima 5.44.0 http://maxima.sourceforge.net
using Lisp SBCL 2.0.0
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
```

Funzione per la costruzione di una matrice antisimmetrica $S_v(\theta)$

```
(%i1) skewMatrix(x):=block([res],
                          S:ident(3),
                          for i:1 thru 3 do
                          (
                          for j:1 thru 3 do
                             (
                               if i=j
                                  then S[i][j]:0
                               elseif j>i
                                  then (
                                 temp:(-1)^(j-i)*x[3-remainder(i+j,3)],
                                        S[i][j]:temp,
                                        S[j][i]:-temp

                                         )
                               )
                           ),
                           res:S
                           )
```

(%o1) $\text{skewMatrix}(x) := \textbf{block}\ ([\text{res}], S: \text{ident}(3), \textbf{for}\ i\ \textbf{thru}\ 3\ \textbf{do}\ \textbf{for}\ j\ \textbf{thru}\ 3\ \textbf{do}\ \textbf{if}\ i = j\ \textbf{then}\ (S_i)_j: 0\ \textbf{elseif}\ j > i\ \textbf{then}\ (\text{temp}: (-1)^{j-i}\, x_{3-\text{remainder}(i+j,3)}, (S_i)_j: \text{temp}, (S_j)_i: -\text{temp}), \text{res}: S)$

Funzione per il calcolo della formual di Rodriguez: $R_v(\theta) = I + S^2(v)\,(1-c) + S(v)\,s$

```
(%i2) rodriguez(y):=block([res],
                         I:ident(3),
                         S:skewMatrix(y),
                         res:I+S.S*(1-cos(theta))+S*sin(theta)
                         )
```

(%o2) $\text{rodriguez}(y) := \textbf{block}\ ([\text{res}], I: \text{ident}(3), S: \text{skewMatrix}(y), \text{res}: I + S \cdot S\,(1 - \cos(\vartheta)) + S \sin(\vartheta))$

Verifica della matrice di rotazione rispetto all'asse x:

```
(%i3) w:[1,0,0];
```

(%o3) $[1, 0, 0]$

```
(%i4) R[x](theta):=rodriguez(w);
```

(%o4) $R_x(\vartheta) := \text{rodriguez}(w)$

```
(%i5) R[x](theta);
```

(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ 0 & \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Verifica della matrice di rotazione rispetto all'asse x:

```
(%i6) t:[0,1,0]
```

(%o6) $[0,1,0]$

(%i7) `R[y](theta):=rodriguez(t)`

(%o7) $R_y(\vartheta):=\mathrm{rodriguez}(t)$

(%i8) `R[y](theta);`

(%o8) $$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & 0 & \sin(\vartheta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\vartheta) & 0 & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Verifica della matrice di rotazione rispetto all'asse z:

(%i9) `p:[0,0,1];`

(%o9) $[0,0,1]$

(%i10) `R[z](theta):=rodriguez(p);`

(%o10) $R_z(\vartheta):=\mathrm{rodriguez}(p)$

(%i36) `R[z](theta);`

(%o36) $$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) & 0 \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i37)