Consideriamo il modello del pendolo inverso descritto da:

$$M\ddot{s} + F\dot{s} - u = d_1$$
$$\ddot{\phi} - \frac{g}{L}\sin(\phi) + \frac{1}{L}\ddot{s}\cos(\phi) = 0$$

Lo stato $x(t)$ è espresso dal seguente vettore:

$$x(t) = \begin{vmatrix} s(t) \\ \dot{s}(t) \\ \phi(t) \\ \dot{\phi}(t) \end{vmatrix}$$

Consideriamo come ingresso di controllo $u(t) = \mathcal{N}(t)$

Possiamo riscrivere le equazioni della dinamica:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u + \frac{1}{M}d_1$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{g}{l}\sin(x_3) - \frac{1}{l}\cos(x_3)\left(-\frac{F}{M}x_2 + \frac{1}{M}u + \frac{1}{M}d_1\right)$$

Inoltre poiché i segnali $s(t)$ e $\phi(t)$ sono misurabili possiamo considerare come uscita del sistema:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_3$$

Passiamo ora ad analizzare il sistema esogeno.

Il segnale $s(t)$ deve inseguire il riferimento $r(t) = a\sin(\omega t)$ da cui:

$$\dot{r} = \omega \cdot a\cos(\omega t) = v$$
$$\dot{v} = -\omega^2 \cdot a\sin(\omega t) = -\omega^2 \cdot r$$

È presente inoltre un disturbo costante non noto $d_1(t)$:

$$\dot{d}_1(t) = 0$$

Quindi il sistema esogeno è:

$$\dot{d} = Sd = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r \\ v \\ d_1 \end{vmatrix}$$

con $d = |r, v, d_1|^T$

Andiamo ora a calcolare i punti di equilibrio con $u(t)=0$ e $d_1(t)=0$. Per farlo bisogna imporre la seguente condizione

$$f(x_e, 0) = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$-F/M \, x_2 = 0$$

$$x_4 = 0$$

$$\frac{g}{L} \sin(x_3) + \frac{F}{ML} \cos(x_3) x_2 = 0$$

Si ottiene quindi che i punti di equilibrio sono: $x_e = \begin{vmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Passiamo ora a linearizzare il sistema intorno al punto di equilibrio

$$A = \frac{\partial F(x_e, 0)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -F/M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{F}{ML} & g/L & 0 \end{vmatrix} \qquad B = \frac{\partial F(x_e, 0)}{\partial u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1/M \\ 0 \\ -1/ML \end{vmatrix}$$

$$P = \frac{\partial f(x_e, 0)}{\partial d} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/M \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/ML \end{vmatrix} \qquad C = \frac{\partial h(x_e, 0)}{\partial x} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$Q = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

con il segnale d'errore $e(t) = s(t) - r(t)$ derivato dalla relazione

$e = \tilde{C}x + \tilde{Q}d$ con $\tilde{C} = |1 \quad 0 \quad 0 \quad 0|$

$\tilde{Q} = |-1 \quad 0 \quad 0|$

Tutte le dimostrazioni delle ipotesi che seguiranno sono presenti nello script MATLAB.

Regolazione in full information

1) $\sigma(S) \subset \mathbb{C}^{\geq 0}$

2) (A, B) è raggiungibile

3) il lemma di Hautus verificato

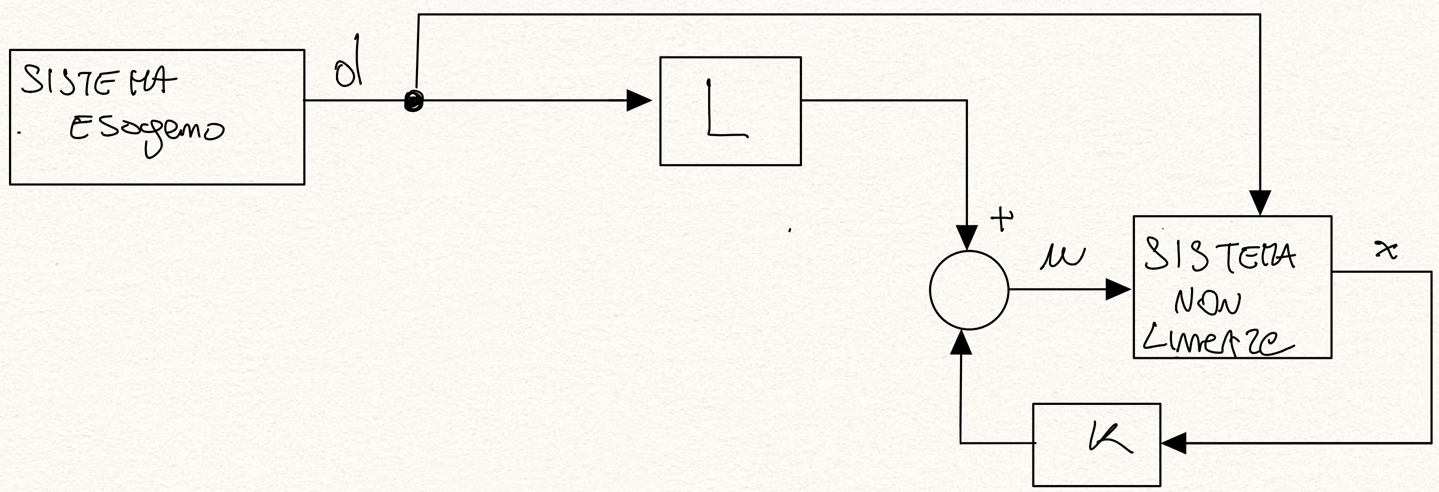
4) il sistema $\dot{x} = (A + BK)x$ è asintoticamente stabile

5) ricavate matrici Π, Γ

6) $L = \Gamma - K\Pi$

Unendo questi 6 punti troviamo la legge di controllo

$$u = Kx + Ld$$



Regolazione in Error Feedback

1) $\sigma(S) \subset \mathbb{C}^{\geq 0}$

2) (A, B) è raggiungibile

3) (A_{OBS}, C_{OBS}) è osservabile

Il problema della regolazione in Error Feedback è risolvibile <=> lo è in full information. Tale condizione è stata verificata in precedenza