Metodo del Subdifferenziale e applicazioni

Nel mio lavoro di tesi ho studiato il metodo del subdifferenziale, un metodo matematico utilizzato nell'ambito dell'ottimizzazione lineare per la ricerca del minimo di una funzione. In particolare mi sono concentrata su funzioni convesse e non lisce.

Ho condotto un'analisi sulla velocità di convergenza di tale metodo che trova diverse applicazioni nel contesto dell'apprendimento automatico.

In questo contesto, infatti, l'obiettivo è costruire un modello a partire da alcuni campioni di cui si dispone, i dati osservati che indicheremo con (x_i, y_i), dove x_i sono gli input del modello e y_i i rispettivi output.

Il modello viene addestrato sui dati osservati e lo scopo finale è quello di minimizzare l'errore di approssimazione sui dati non osservati: nel momento in cui viene dato in input al modello un valore $\tilde{x_i}$ su cui lo stesso non è stato addestrato, denotando con $\hat{y_i}$ il valore reale atteso associato a $\tilde{x_i}$ e con $\tilde{y_i}$ l'output del modello, si vuole minimizzare lo scarto tra $\tilde{y_i}$ e $\hat{y_i}$.

Il grado di accuratezza del modello è descritto da una funzione parametrica ℓ chiamata loss function. Questa funzione quantifica quindi l'errore tra le predizioni del modello e i valori reali attesi; tipicamente è convessa e questo è il motivo per cui si considerano funzioni convesse.

Ci si riduce perciò alla risoluzione di un problema di minimo che consiste nella ricerca del minimo della loss function.

Ho inoltre implementato il metodo su Matlab e l'ho testato su diverse funzioni, riportando nel mio lavoro di tesi il tempo di convergenza e il numero di iterazioni compiute del metodo.

Di seguito le nozioni necessarie per presentare il risultato sulla velocità di convergenza del Metodo del Subdifferenziale su funzioni non lisce.

Definizione 1, FUNZIONE CONVESSA

Una funzione F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è **convessa** se per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni t $\in [0, 1]$, vale la seguente disuguaglianza

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y).$$

Se la disuguaglianza vale in senso stretto, F si dice fortemente convessa.

Definizione 2, SUBDIFFERENZIALE di una FUNZIONE CONVESSA in un punto x del DOMINIO di F

Data F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa, fissato $x \in \mathbb{R}^n$, si definisce **subdifferenziale** di F in x l'insieme

$$\partial F(x) = \{r \in \mathbb{R}^n \mid F(x) + r \cdot (\hat{x} - x) \leq F(\hat{x}),\ \textit{per ogni}\ \hat{x} \in \mathbb{R}^n\}\,.$$

Chiaramente se F è differenziabile in x, $\partial F(x)$ è formato da un unico punto, $\nabla F(x)$.

In alcuni casi, $\partial F(x)$ è formato da più elementi, per esempio se F avesse un punto angoloso in x.

IL METODO

Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Si supponga di voler trovare $\hat{x} \in \mathbb{R}^d$ tale che

$$\hat{x} = \min_{x \in \mathbb{R}^d} F(x)$$

Passo 1. Si sceglie $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Per ogni $i \geq 1$ si ponga

$$x_i = x_{i-1} - \gamma_i z_{i-1} \tag{0.0.1}$$

dove $z_{i-1} \in \partial F(x_{i-1})$.

Chiaramente, se F è differenziabile, z_{i-1} coincide con $\nabla F(x_{i-1})$ e il metodo prende il nome di Metodo del Gradiente.

Passo 2. Come scegliere γ_i? Si possono usare diversi modi:

<u>costante</u>: si può scegliere una sequenza del passo costante in cui si assegna lo stesso valore $\gamma := \gamma_i$ a ogni passo dell'algoritmo.

Il vantaggio di questa scelta potrebbe essere la facilità di implementazione, tuttavia non è sempre detto sia il più efficiente in termini di velocità di convergenza. In alcuni casi, una sequenza "dinamica" del passo γ_i potrebbe avere una convergenza più rapida. Tuttavia, se si ha una approfondita conoscenza del problema e si osserva che un certo valore γ_0 funziona "sufficientemente bene" per la buona riuscita dell'algoritmo, si può optare per selezionare $\gamma_i = \gamma_0$ per ogni i.

Quando si arresta l'algoritmo?

Anche l'arresto dell'algoritmo può variare seconda del problema specifico. Alcune delle strategie più comuni per determinare quando arrestare l'algoritmo sono:

- numero massimo di iterazioni: si fissa un numero massimo di iterazioni oltre il quale l'algoritmo si arresta.

- convergenza della funzione obiettivo: si fissa una soglia $\epsilon > 0$ e si controlla la variazione della funzione obiettivo: se la differenza tra i valori della funzione obiettivo tra due iterazioni consecutive è inferiore alla soglia predefinita ϵ, l'algoritmo si arresta.

Per esempio, nei test implementati su matlab, ho scelto di dare una tolleranza in input e la convergenza al minimo delle funzioni test è stata abbastanza rapida.

Definizione 3, FUNZIONI B-LIPTSCHITZ

Data $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ si dice che è **B-Liptschitz-continua** se per ogni x, $y \in \mathbb{R}^d$ vale che

$$|F(x) - F(y)| \leq B||x - y||_2$$

Lemma

Data $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ B-Liptschitz-continua e convessa; sia $z \in \partial F(x)$.

Allora $||z||_2 \leq B$.

Dimostrazione

Sia $z \in \partial F(x)$.

Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, $F(y) - F(x) \geq z \cdot (y - x)$.

Si scelga $y = x + tz$, $t \geq 0$.

(i) Dalla definizione di subdifferenziale si ha $F(x+tz)-F(x) \geq z\cdot(x+tz-x) = z\cdot tz = t\|z\|_2^2$.

(ii) Dall'ipotesi di B-Liptschitz-continuità si ha $F(x+tz) - F(x) \leq B\|tz\|_2 = Bt\|z\|_2$.

cioè $t\|z\|_2^2 \leq F(x+tz) - F(x) \leq Bt\|z\|_2$

Da cui $t\|z\|_2^2 \leq Bt\|z\|_2$, cioè la tesi.

Teorema

Data $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ B-Liptschitz-continua e convessa; sia x^* un punto di minimo per F tale che $||x_0 - x^*||_2 \leq D$, si ponga $\gamma_i := \frac{D}{B\sqrt{i}}$. Per ogni $i \geq 0$, si verifica che

$$\min_{0\leq k\leq i-1} F(x_k) - F(x^*) \leq DB\frac{2 + log(i)}{2\sqrt{i}} \qquad (0.0.2)$$

Dimostrazione

Si consideri

$$||x_i - x^*||_2^2$$

Ricordiamo che nella definzione del metodo, z_{i-1} è un qualsiasi elemento di $\partial F(x_{i-1})$; in realtà, una buona scelta, ricordando lo scopo finale dell'algoritmo, cioè quello di minimizzare la quantità $||x_i - x^*||_2^2$, sarebbe quella di considerare l'elemento di norma minima.

In ogni caso, ai fini della dimostrazione, la stima ottenuta sarà la seguente:

$$||x_i - x^*||_2^2 = ||x_{i-1} - \gamma_i z_{i-1} - x^*||_2^2 = ||x_{i-1} - x^*||_2^2 + \gamma_i^2 ||z_{i-1}||_2^2 - 2\gamma_i z_{i-1}^T \cdot (x_i - x^*) \quad (0.0.3)$$

A questo punto, ricordando la definizione di subdifferenziale e tenendo a mente l'ipotesi di B-Liptschitz continuità, si ottiene

$$||z_{i-1}||_2 \leq \frac{|F(x) - F(x_{i-1})|}{||x - x_{i-1}||_2} \leq B$$

Sostituendo in 0.0.3, si ottiene

$$||x_i - x^*||_2^2 \leq ||x_{i-1} - x^*||_2^2 + \gamma_i^2 B^2 - 2\gamma_i [F(x_{i-1}) - F(x^*)] \qquad (0.0.4)$$

Si riscriva la 0.0.4 in questo modo

$$\gamma_i[F(x_{i-1}) - F(x^*)] \leq \frac{1}{2}\left(||x_{i-1} - x^*||_2^2 - ||x_i - x^*||_2^2\right) + \frac{1}{2}\gamma_i^2 B^2 \tag{0.0.5}$$

La 0.0.5 vale per ogni i, quindi si considera la somma finita

$$\sum_{k=1}^{i} \gamma_k[F(x_{k-1}) - F(x^*)] \leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{i}\left(||x_{k-1} - x^*||_2^2 - ||x_k - x^*||_2^2\right) + \frac{1}{2}B^2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k^2 \tag{0.0.6}$$

Si osserva che la prima somma finita del termine a destra equivale a

$$\sum_{k=1}^{i}\left(||x_{k-1} - x^*||_2^2 - ||x_k - x^*||_2^2\right) = ||x_0 - x^*||_2^2 - ||x_i - x^*||_2^2 \leq ||x_0 - x^*||_2^2 \tag{0.0.7}$$

cioè

$$\sum_{k=1}^{i} \gamma_k[F(x_{k-1}) - F(x^*)] \leq ||x_0 - x^*||_2^2 + \frac{1}{2}B^2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k^2 \tag{0.0.8}$$

Dividendo ambo i membri per $\sum_{k=1}^{i}\gamma_k$ si ottiene

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{i}\gamma_k}\sum_{k=1}^{i} \gamma_k[F(x_{k-1}) - F(x^*)] \leq \frac{||x_0 - x^*||_2^2}{2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k} + B^2\frac{\sum_{k=1}^{i}\gamma_k^2}{2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k} \tag{0.0.9}$$

Il termine di sinistra nella 0.0.9 è una media pesata quindi si avrà che

$$\min_{0\leq k\leq i-1} F(x_{k-1}) - F(x^*) \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^{i}\gamma_k}\sum_{k=1}^{i} \gamma_k[F(x_{k-1}) - F(x^*)] \tag{0.0.10}$$

Si ponga $\gamma_k = \frac{D}{B\sqrt{k}}$ in 0.0.10 e si osservi che:

(1) $\sum_{k=1}^{i}\gamma_k = \frac{D}{B}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{D}{B}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{D}{B}\sqrt{i} \iff \frac{1}{\sum_{k=1}^{i}\gamma_k} \leq \frac{B}{D\sqrt{i}}$

(2) $\sum_{k=1}^{i}\gamma_k^2 = \frac{D^2}{B^2}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k} = \frac{D^2}{B^2}\left[1 + \sum_{k=2}^{i}\frac{1}{k}\right] \leq \frac{D^2}{B^2}\left[1 + \int_1^i \frac{1}{k}dk\right] = \frac{D^2}{B^2}\left[1 + log(i)\right]$

Maggiorando come in 0.0.9, si ottiene

$$\min_{0\leq k\leq i-1} F(x_{k-1}) - F(x^*) \leq \frac{1}{2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k}\left[D^2 + B^2\sum_{k=1}^{i}\gamma_k^2\right] \leq \frac{B}{2D\sqrt{i}}\left[D^2 + B^2\frac{D^2}{B^2}\left(1 + log(i)\right)\right]$$

$$= \frac{BD}{2\sqrt{i}} \left[2 + log(i)\right]$$