
RENDSZER- ÉS IRÁNYÍTÁSTECHNIKA

HÁZI FELADAT

Réda Vince – Z697LX

1. táblázat. Házi feladat kódja

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
36	4,063	40,827	0,05

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. október 22.

Tartalomjegyzék

1. BDC motor leírása	3
a. A BDC motor hatásvázlata	3
b. A feszültség – szögsebesség átviteli függvény felírása	3
c. A feszültség – áram átviteli függvény felírása	4
d. A terhelőnyomaték – szögsebesség átviteli függvény felírása	4
e. A terhelőnyomaték – áram átviteli függvény felírása	5
2. BDC motor vizsgálata	6
a. Szögsebességválasz a névleges feszültségre	6
b. Áram kimenet a névleges feszültség hatására	7
c. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására	7
3. PI szabályzó tervezése	9
a. A zárt szabályozási kör egyenletei	9
b. Stabilitás a körerősítés függvényében	10
c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék	10
d. Súlyfüggvény	11
e. Átmeneti függvény	11
4. PD szabályzó tervezése	12
a. A zárt szabályozási kör egyenletei	12
b. Stabilitás a körerősítés függvényében	12
c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék	12
d. Súlyfüggvény	13
e. Átmeneti függvény	14
5. Zavaró jel PI szabályozóval (Szorgalmi feladat)	15
6. Zavaró jel PD szabályozóval (Szorgalmi feladat)	16

Megjegyzések:

- Ahol nincs kiírva mértékegység, ott az SI értendő.
- Az egységugrás függvényt $\theta(t)$ -vel jelölöm.

Az egyenáramú motor paraméterei

2. táblázat. A motor és a hajtómű paraméterei

Név	Jelölés	Katalógus-beli érték	SI-beli érték
armatúra ellenállás	R_a	11,1 Ω	11,1 Ω
armatúra induktivitás	L_a	1,52 mH	$1,52 \cdot 10^{-3}$ H
nyomatékállandó	k_m	58,2 $\frac{\text{mNm}}{\text{V}}$	0,0582 $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$
sebességállandó	k_s	164 $\frac{\text{rpm}}{\text{V}}$	17,17 $\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}$
elektromos állandó	k_e	0,006097 $\frac{\text{V}}{\text{rpm}}$	0,05822 $\frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$
forgórész tehetetlenségi nyomatéka	J_a	44,6 gcm^2	$4,46 \cdot 10^{-6}$ kgm^2
névleges szögsebesség	ω_n	4430 rpm	463,91 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
névleges áramerősség	i_n	0,804 A	0,804 A
névleges feszültség	u_n	36 V	36 V

1. BDC motor leírása

a. A BDC motor hatásvázlata

Legyen

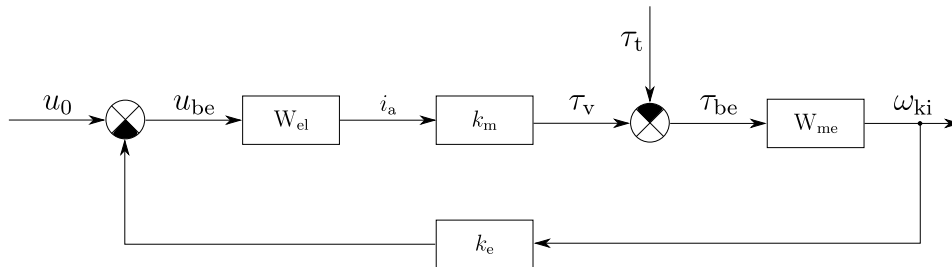
$$W_{el} = \frac{1}{R_a + L_a s} \quad (1)$$

az elektromos kör átviteli függvénye, és

$$W_{me} = \frac{1}{b + J_a s} \stackrel{b=0}{=} \frac{1}{J_a s} \quad (2)$$

a mechanikai kör átviteli függvénye.

Ekkor a rendszer hatásvázlatát az 1. ábra mutatja.



1. ábra. Hatásvázlat

b. A feszültség – szögsebesség átviteli függvény felírása

Vegyük az 1. ábrát, és legyen $\tau_t = 0$.

Az előrecsatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_o = W_{el} k_m W_{me}, \quad (3)$$

és

$$W_f = k_e. \quad (4)$$

A zárthurkú átviteli függvény

$$W_{u_0 \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (5)$$

A $W_{u_0 \rightarrow \omega_{ki}}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (6)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (7)$$

Az időállandók a pólusok reciprokanak negáltjai:

$$T_1 = \frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (8)$$

$$T_2 = -\frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (9)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{u_0 \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{1}{k_e} = 17,1762 \quad (10)$$

c. A feszültség – áram átviteli függvény felírása

Az előreccsatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_o = W_{el}, \quad (11)$$

és

$$W_f = k_m k_e W_{me}. \quad (12)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{u_0 \rightarrow i_a} = \frac{J_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (13)$$

A $W_{u_0 \rightarrow i_a}$ pólusai:

$$p_1 = -\frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (14)$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (15)$$

Az időállandók a pólusok reciprokanak negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (16)$$

$$T_2 = \frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (17)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése $A_{u_0 \rightarrow i_a} = 0$.

d. A terhelőnyomaték – szögsebesség átviteli függvény felírása

Az előreccsatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_o = -W_{me}, \quad (18)$$

és

$$W_f = -k_m k_e W_{el}. \quad (19)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{\tau_l \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{R_a + L_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (20)$$

A $W_{u_0 \rightarrow i_a}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (21)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (22)$$

Az időállandók a pólusok reciprokának negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (23)$$

$$T_2 = \frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (24)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{\tau_1 \rightarrow \omega_{ki}} = -\frac{R_a}{k_m k_e} = -3275,9 \quad (25)$$

e. A terhelőnyomaték – áram átviteli függvény felírása

Az előreccatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_o = W_{me} k_e W_{el}, \quad (26)$$

és

$$W_f = k_m. \quad (27)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{\tau_1 \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{R_a + L_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (28)$$

A $W_{u_0 \rightarrow i_a}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (29)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (30)$$

Az időállandók a pólusok reciprokának negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (31)$$

$$T_2 = \frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (32)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{\tau_1 \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{1}{k_m} = 17,1821 \quad (33)$$

2. BDC motor vizsgálata

a. Szögsebességválasz a névleges feszültségre

Az 1.b. részfeladatban meghatározott átviteli függvényt fogjuk megvizsgálni. A bemenőjel

$$X = \frac{u_n}{s}, \quad (34)$$

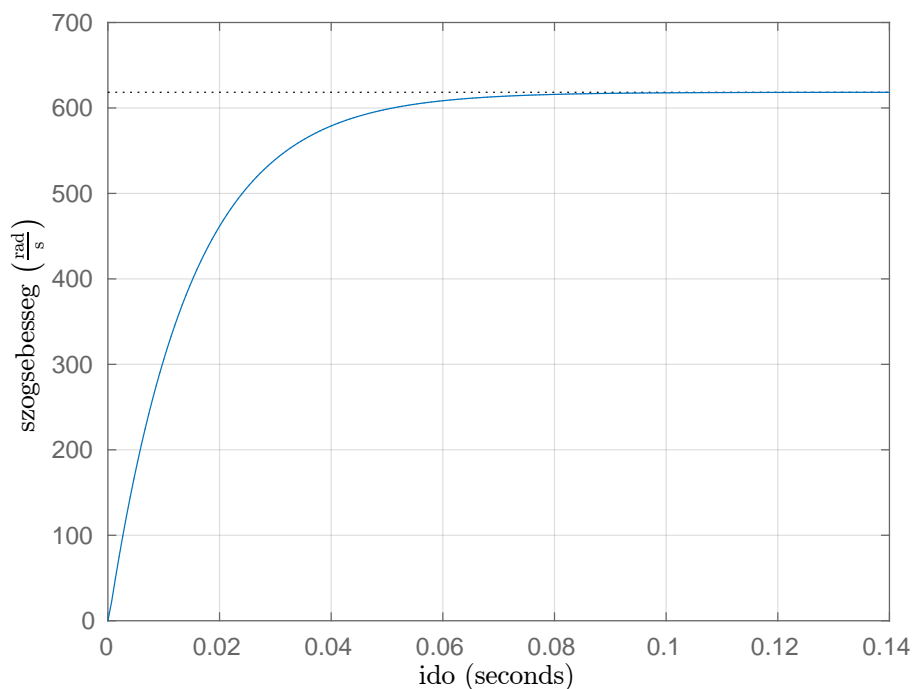
ez az egységugrás függvény Laplace-transzformáltja felnagyítva a névleges feszültségre. A kimenőjel Laplace-transzformáltja

$$Y = W_{u_0 \rightarrow \omega_{ki}} X = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \frac{u_n}{s} \quad (35)$$

Ezt inverz Laplace-transzformálva megkapjuk a szögsebesség válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 618.34 - 618.34 e^{-3651.3 t} (\cosh(3582.2 t) + 1.0193 \sinh(3582.2 t)) \quad (36)$$

amit a 2. ábra mutat.



2. ábra. Szögsebesség válasz a névleges feszültségre

A kezdeti és az állandósult szögsebesség a végérték tételek segítségével számolható:

$$\omega(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (37)$$

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 618,34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (38)$$

A motor adatlapja a terhelés nélküli szögsebességet 5860 rpm = 613.66 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -nek adja meg. A számított 0.76 %-os relatív hiba numerikus hibáknak tudható be.

b. Áram kimenet a névleges feszültség hatására

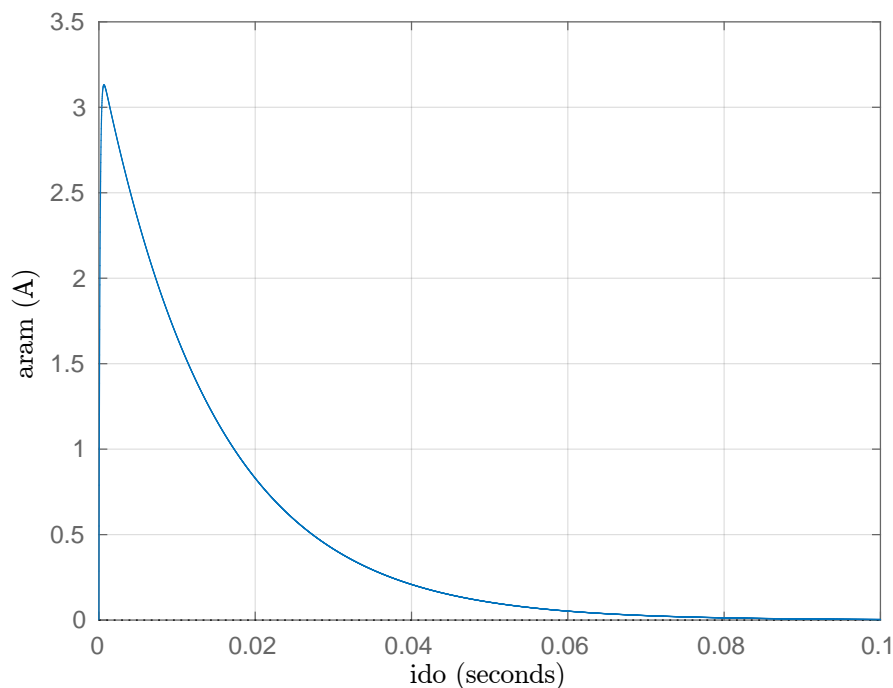
Az 1.c. részfeladatban meghatározott átviteli függvényt fogjuk megvizsgálni. A kimenőjel Laplace-transzformáltja

$$Y = W_{u_0 \rightarrow i_a} X = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \frac{u_n}{s} \quad (39)$$

Ezt inverz Laplace-transzformálva megkapjuk a szögsebesség válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 3.3058 e^{-69.098 t} - 3.3058 e^{-7233.5 t} \quad (40)$$

amit a 3. ábra mutat.



3. ábra. Áram kimenet a névleges feszültség hatására

A kezdeti és az állandósult áram a végérték tételek segítségével számolható:

$$i_a(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY = 0 \text{ A} \quad (41)$$

$$i_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 0 \text{ A} \quad (42)$$

c. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására

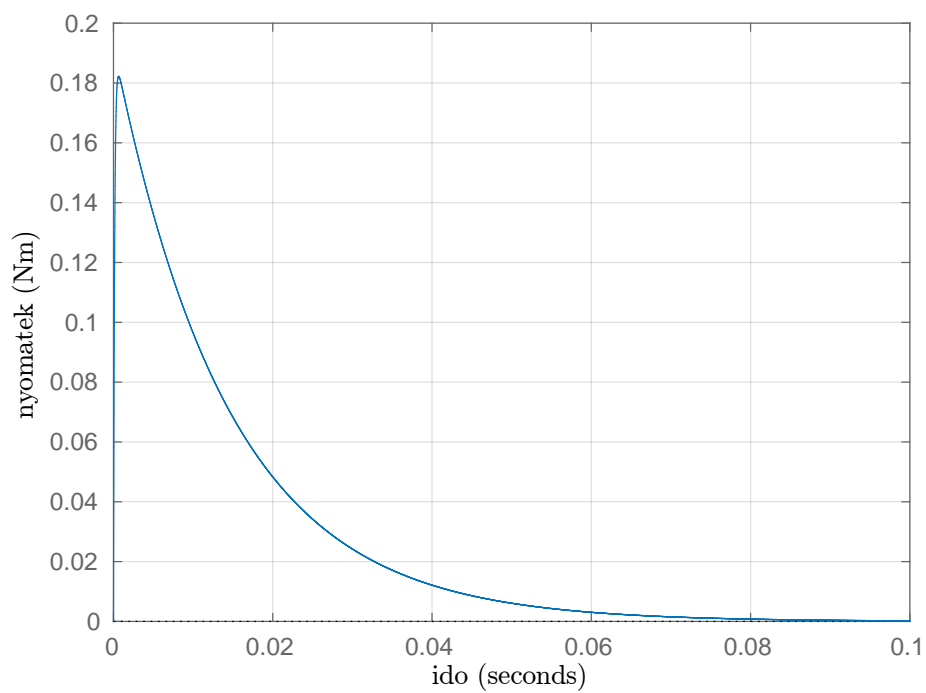
A DC motor egyenletei alapján

$$\tau_v = k_m i_a \quad (43)$$

A kimenőjel időfüggvénye:

$$y(t) = k_m y_{i_a}(t) = 0.18911 e^{-6.9145 t} - 0.18911 e^{-7295.7 t} \quad (44)$$

amit a 4. ábra mutat.



4. ábra. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására

A kezdeti és az állandósult nyomaték analóg módon számolható:

$$\tau_v(0) = k_m 0 \text{ A} = 0 \text{ Nm} \quad (45)$$

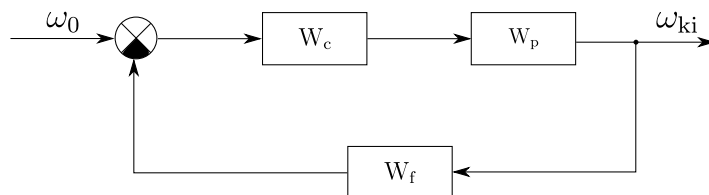
$$\tau_v(\infty) = k_m 0 \text{ A} = 0 \text{ Nm} \quad (46)$$

3. PI szabályzó tervezése

Ebben a feladatban a motorra egy PI szabályzót kapcsolunk, melynek átviteli függvénye

$$W_c = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad (47)$$

valamint a rendszer hatásvázlatát az 5. ábra mutatja.

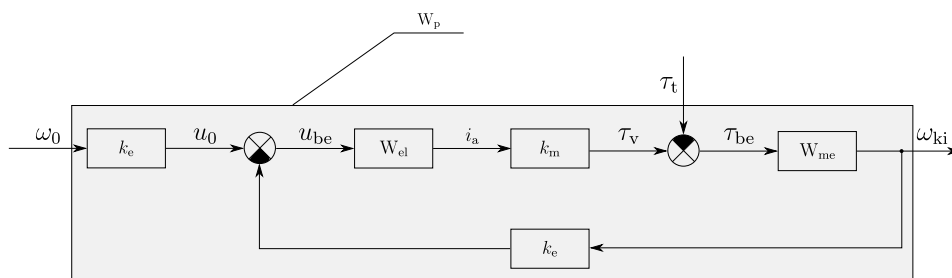


5. ábra. PI-szabályozott rendszer hatásvázlata

A motort egyetlen átviteli függvénnyel írjuk le, a 6. ábrának megfelelően. Ezt irányított szakasznak hívjuk, és kifejtve a

$$W_p = k_e W_{u_0 \rightarrow \omega_{ki}} = \frac{k_e k_m}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (48)$$

alakot kapja. A visszacsatoló ág üres, tehát $W_f = 1$.



6. ábra. A motor átviteli függvénye W_p

Az integráló tag időállandóját a szabályozott szakasz legnagyobb időállandójával tesszük egyenlővé. Ez a 8. egyenlet alapján $T_I = 0,0145$ s.

a. A zárt szabályozási kör egyenletei

Jelöljük az előrevezető ág átviteli függvényét W_o -val. A zárt szabályozási kör átviteli függvénye

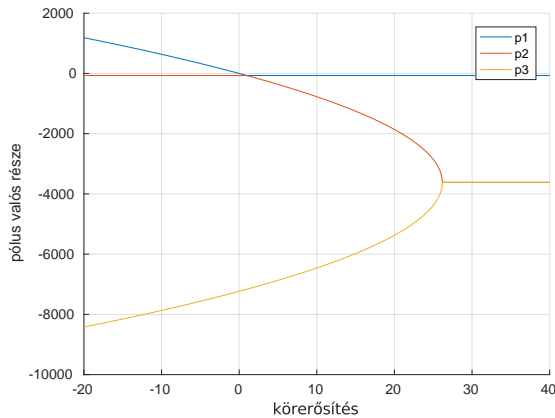
$$W_x = \frac{W_o}{1 + W_o} = \frac{P k_e k_m (T_I s + 1)}{P k_e k_m + J_a L_a T_I s^3 + J_a R_a T_I s^2 + T_I k_e k_m s + P T_I k_e k_m s} \quad (49)$$

A zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete az 53. egyenlet nevezője, ami nullával egyenlő.

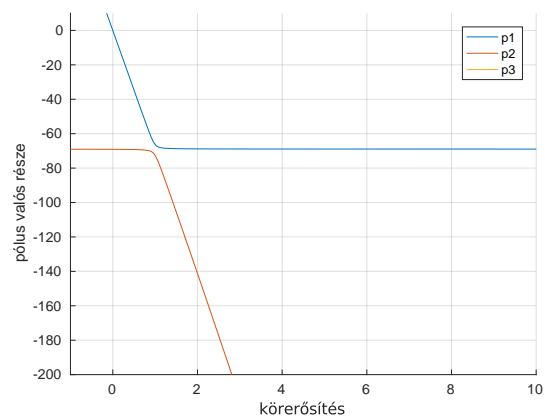
$$P k_e k_m + J_a L_a T_I s^3 + J_a R_a T_I s^2 + T_I k_e k_m s + P T_I k_e k_m s = 0. \quad (50)$$

b. Stabilitás a körerősítés függvényében

Rajzoljuk ki a pólusok valós részeit a körerősítés függvényében. A 7. ábrán jól látszik, hogy minden pozitív P értékre a pólusok negatív része valós, tehát a rendszer stabil.



(a) Lényeges P értékek

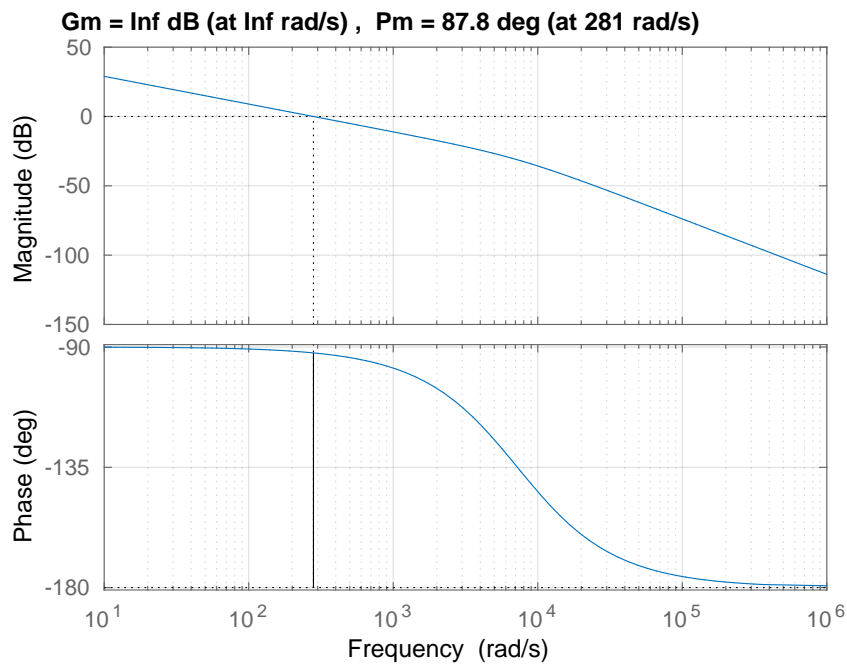


(b) 0 körüli P -k

7. ábra. Pólusok valós része a körerősítés függvényében

c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék

Válasszuk a körerősítést $P = \vartheta_2 = 4,063$ -re. Ennek a rendszernek a Bode-diagramját mutatja a 8. ábra. A margin függvényt használva megkapjuk a fázistartalékot, ami $\varphi_m = 87.8^\circ$.

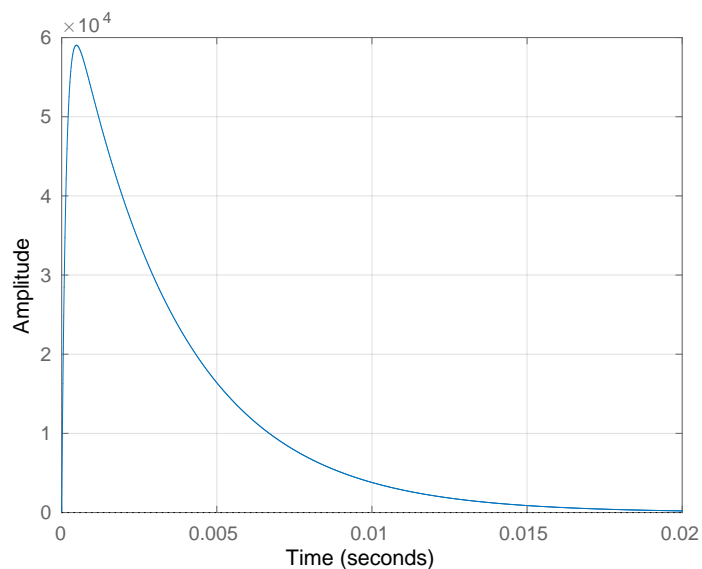


8. ábra. Szabályozási kör Bode-diagramja

d. Súlyfüggvény

A súlyfüggvényt könnyen kirajzolhatjuk az impulse függvénnyel. Az alapjel a névleges szögsebesség fele, vagyis

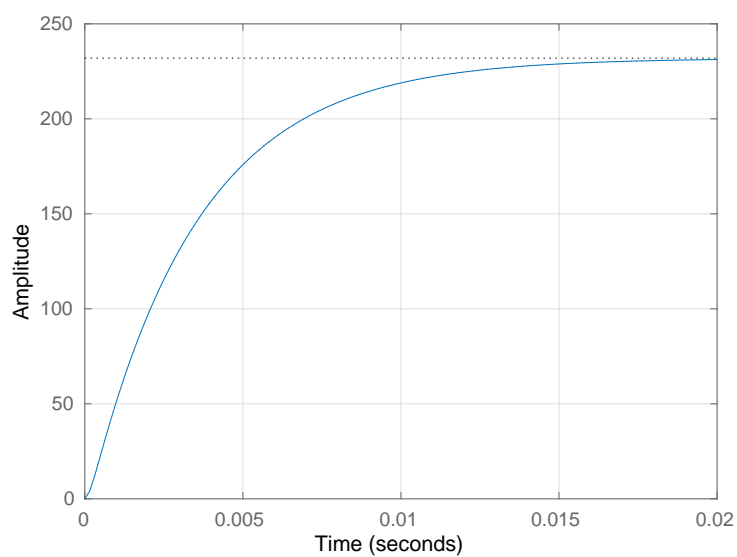
$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{2} = 231.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (51)$$



9. ábra. A zárt szabályozási kör impulzusválasza

e. Átmeneti függvény

Az átmeneti függvényt a step függvény adja meg. Az alapjel itt is a névleges szögsebesség fele.



10. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

4. PD szabályzó tervezése

Az 5. ábrában a W_c szabályzót cseréljük ki egy PD szabályzóra, melynek átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{T_D s + 1}{n T_D s + 1}. \quad (52)$$

A deriváló tag időállandóját a szabályozott szakasz második legnagyobb időállandójának célszerű megválasztani, ami $T_D = 1,3825 \cdot 10^{-4}$. Továbbá $n = \vartheta_3 = 40,827$ adott.

a. A zárt szabályozási kör egyenletei

Jelöljük az előrevezető ág átviteli függvényét W_o -val. A zárt szabályozási kör átviteli függvénye

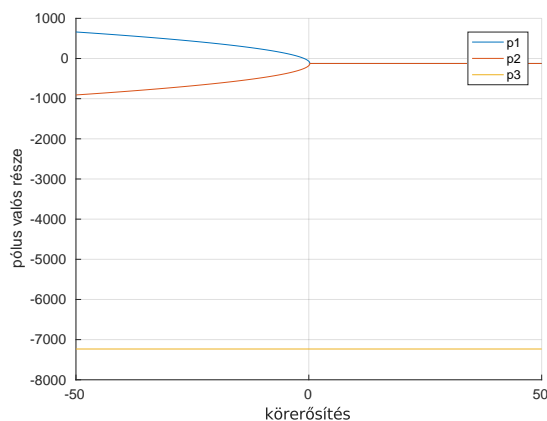
$$W_x = \frac{W_o}{1 + W_o} = \frac{P k_e k_m (T_D s + 1)}{\left(\frac{P k_e k_m (T_D s + 1)}{(T_D n s + 1) (J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m)} + 1 \right) (T_D n s + 1) (J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m)} \quad (53)$$

A zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete az 53. egyenlet nevezője, ami nullával egyenlő.

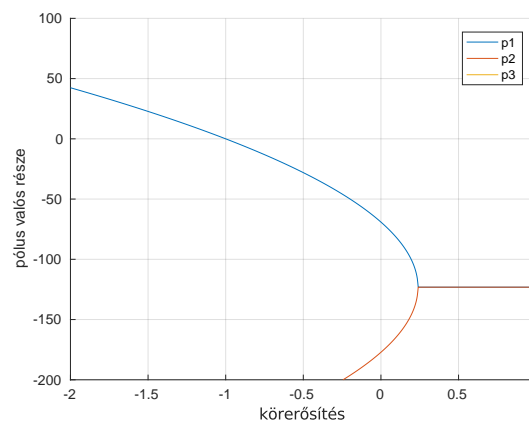
$$k_e k_m + J_a R_a s + P k_e k_m + J_a L_a s^2 + P T_D k_e k_m s + T_D k_e k_m n s + J_a L_a T_D n s^3 + J_a R_a T_D n s^2 = 0 \quad (54)$$

b. Stabilitás a körerősítés függvényében

Rajzoljuk ki a pólusok valós részeit a körerősítés függvényében. A 11. ábrán látható, hogy minden $P > 0$ értékre a pólusok negatív része valós, tehát a rendszer stabil.



(a) Lényeges P értékek

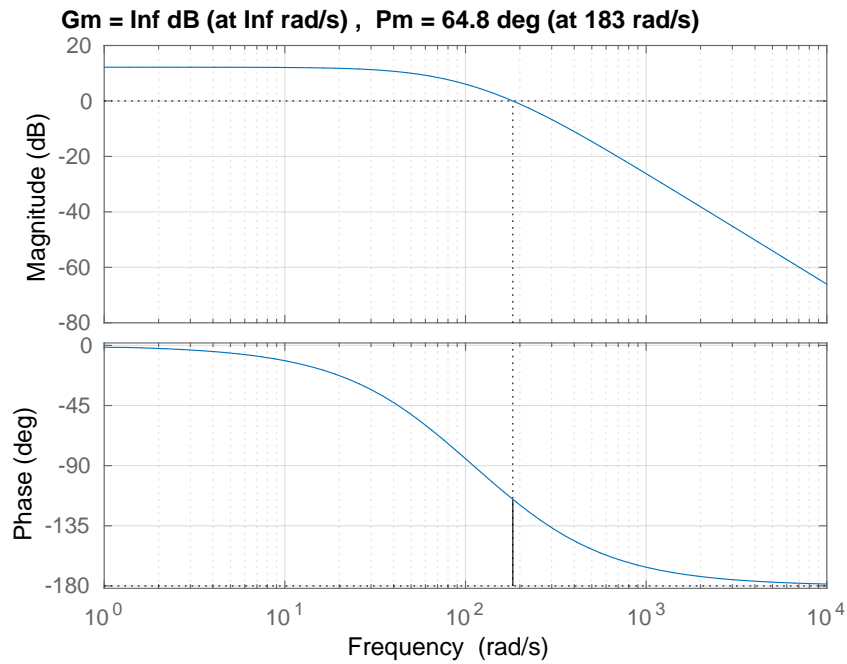


(b) 0 körüli P -k

11. ábra. Pólusok valós része a körerősítés függvényében

c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék

Válasszuk a körerősítést $P = \vartheta_4 = 0,05$ -re. Ennek a rendszernek a Bode-diagramját mutatja a 12. ábra. A margin függvényt használva megkapjuk a fázistartalékot, ami $\varphi_m = 64.8^\circ$.

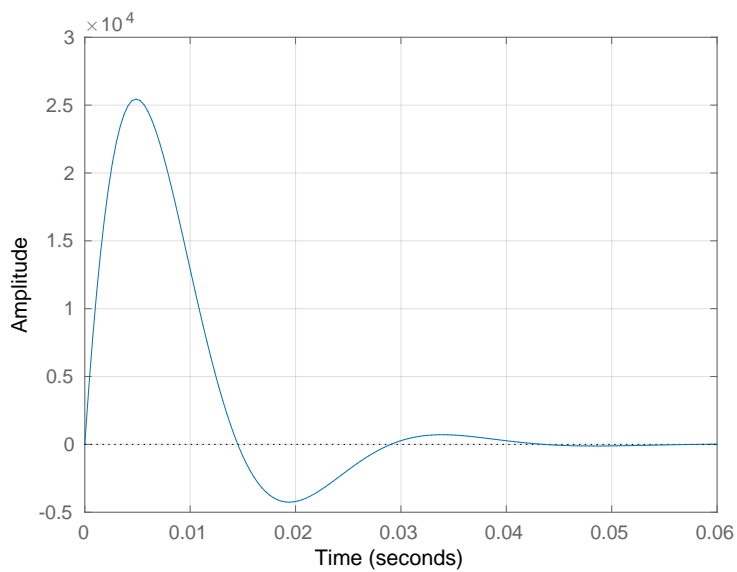


12. ábra. Szabályozási kör Bode-diagramja

d. Súlyfüggvény

A súlyfüggvényt könnyen kirajzolhatjuk az impulse függvénnyel. Az alapjel a névleges szögsebesség fele, vagyis

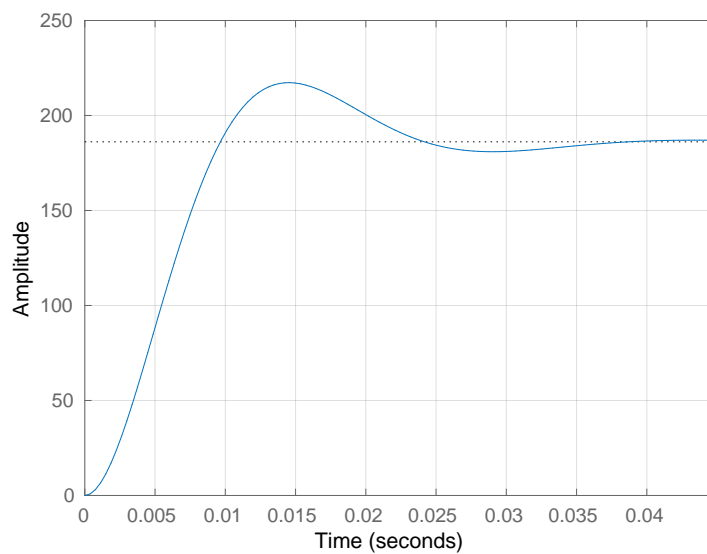
$$\omega_0 = \frac{\omega_n}{2} = 231.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (55)$$



13. ábra. A zárt szabályozási kör impulzusválasza

e. Átmeneti függvény

Az átmeneti függvényt a `step` függvény adja meg. Az alapjel itt is a szögsebesség fele.



14. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

5. Zavaró jel PI szabályozóval (Szorgalmi feladat)

Mivel a rendszerünk lineáris, ezért a két bemenetet kezelhetjük függetlenül.

Legyen a referencia feszültség bemenet Laplace-transzformáltja $U_\omega = \frac{\omega_n}{2s}$, a zavarójel pedig legyen egy τ_0 nagyságú ugrásfüggvény időben eltolva T_0 -al, ami elvileg végtelen: $U_\tau = \frac{\tau_0}{s} e^{-T_0 s}$.

A rendszer szögsebesség válasza ezekre a bemenetekre kiszámítható a hatásvázlat segítségével.

$$Y = W_p U_p + W_{p\tau} U_\tau \quad (56)$$

$$U_p = W_c (U_0 - Y) \quad (57)$$

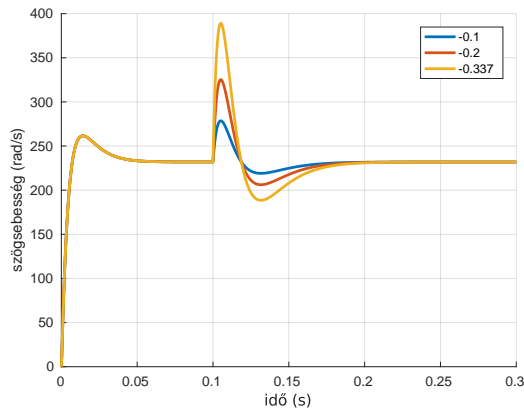
$$Y = \frac{W_p W_c U_0 + W_{p\tau} U_\tau}{W_p W_c + 1} \quad (58)$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \quad (59)$$

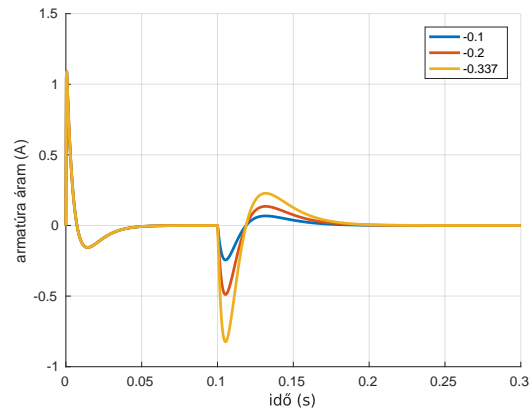
A szögsebességből az áram az alábbiak szerint számolható:

$$i_a(s) = k_e W_{el} (U_0 - Y_\omega) \quad (60)$$

Ezeknek az egyenleteknek a behelyettesített változatát nem írom ki, mert nagyon hosszú és csúnya, de a MATLAB kódban megtalálható.



(a) Szögsebesség válasz



(b) Áram válasz

15. ábra. Különböző amplitúdókra adott válasz

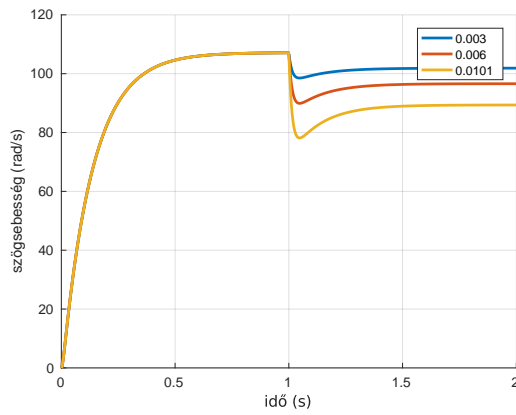
A maximális terhelőnyomaték

$$\tau_t^{\max} = \pm 0,337 \text{ Nm} \quad (61)$$

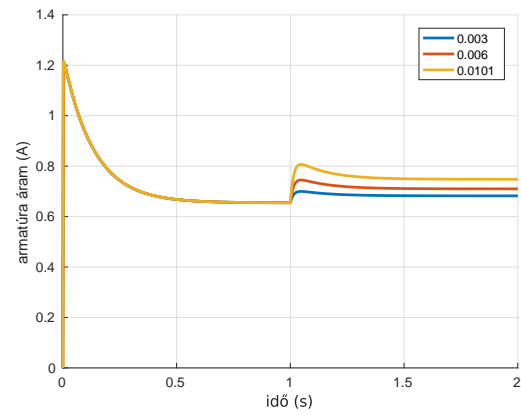
Bár az első tranziens közben az áram meghaladja a névleges áramot, az állandósult állapot után kezdünk vizsgálni, feltettük hogy a kezdeti áramot túlélte a motor.

6. Zavaró jel PD szabályozóval (Szorgalmi feladat)

A levezetés az 5. feladatéhoz analóg módon történik annyi különbséggel, hogy W_c nem PI, hanem PD szabályzó.



(a) Szögsebesség válasz



(b) Áram válasz

16. ábra. Különböző amplitúdókra adott válasz

A maximális terhelőnyomaték

$$\tau_t^{\max} = \pm 0,0101 \text{ Nm} \quad (62)$$

Hivatkozások

[1] DC motor adatlapja

<https://www.maxongroup.com/maxon/view/product/motor/dcmotor/amax/amax32/236671>