
RENDSZER- ÉS IRÁNYÍTÁSTECHNIKA

HÁZI FELADAT

Réda Vince – Z697LX

1. táblázat. Házi feladat kódja

ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
36	4,063	40,827	0,05

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. október 22.

Tartalomjegyzék

1. BDC motor leírása	3
a. A BDC motor hatásvázlata	3
b. A feszültség – szögsebesség átviteli függvény felírása	3
c. A feszültség – áram átviteli függvény felírása	4
d. A terhelőnyomaték – szögsebesség átviteli függvény felírása	5
e. A terhelőnyomaték – áram átviteli függvény felírása	5
2. BDC motor vizsgálata	7
a. Szögsebességválasz a névleges feszültségre	7
b. Áram kimenet a névleges feszültség hatására	8
c. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására	8
3. PI szabályzó tervezése	10
a. A zárt szabályozási kör egyenletei	10
b. Stabilitás a körerősítés függvényében	11
c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék	11
d. Súlyfüggvény	12
e. Átmeneti függvény	12
4. PD szabályzó tervezése	13
a. A zárt szabályozási kör egyenletei	13
b. Stabilitás a körerősítés függvényében	13
c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék	13
d. Súlyfüggvény	14
e. Átmeneti függvény	15
5. Zavaró jel PI szabályozóval (Szorgalmi feladat)	16
6. Zavaró jel PD szabályozóval (Szorgalmi feladat)	17

Az egyenáramú motor paraméterei

2. táblázat. A motor és a hajtómű paraméterei

Név	Jelölés	Katalógus-beli érték	SI-beli érték
armatúra ellenállás	R_a	11,1 Ω	11,1 Ω
armatúra induktivitás	L_a	1,52 mH	$1,52 \cdot 10^{-3}$ H
nyomatékállandó	k_m	58,2 $\frac{\text{mNm}}{\text{V}}$	0,0582 $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$
sebességállandó	k_s	164 $\frac{\text{rpm}}{\text{V}}$	17.17 $\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}$
elektromos állandó	k_e	0,006097 $\frac{\text{V}}{\text{rpm}}$	0.05822 $\frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$
forgórész tehetetlenségi nyomatéka	J_a	44,6 gcm^2	$4,46 \cdot 10^{-6}$ kgm^2
névleges szögsebesség	ω_n	4430 rpm	463.91 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
névleges áramerősség	i_n	0,804 A	0,804 A
névleges feszültség	u_n	36 V	36 V

1. BDC motor leírása

a. A BDC motor hatásvázlata

Legyen

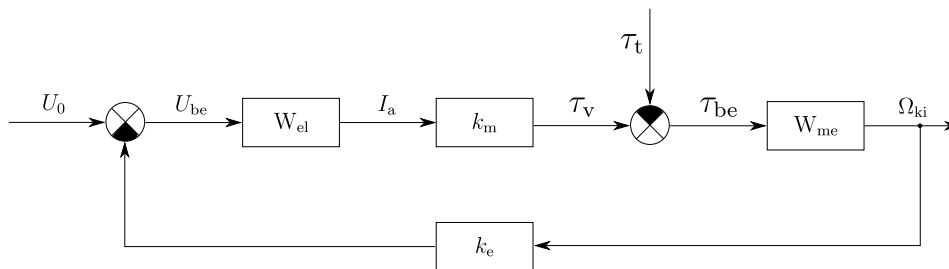
$$W_{el} = \frac{1}{R_a + L_a s} \quad (1)$$

az elektromos kör átviteli függvénye, és

$$W_{me} = \frac{1}{b + J_a s} \stackrel{b=0}{=} \frac{1}{J_a s} \quad (2)$$

a mechanikai kör átviteli függvénye.

Ekkor a rendszer hatásvázlatát az 1. ábra mutatja. U_0 a motorra kapcsolt feszültség, amelyből levonjuk a szögsebességgel arányos feszültséget. Az így kapott feszültség, U_{be} esik az ellenálláson. W_{el} az armatúra ellenállás és tekercs admittanciája, amelyre rákapcsolva U_{be} -t megkapjuk az armatúra áramot. A motor nyomatékát a k_m szorzó adja, a $\tau_v = k_m I_a$ egyenlet alapján, amihez előjelesen hozzáadjuk a külső terhelést. Az így kapott összes nyomatékot a W_{me} -vel szorozva kapjuk meg a motor szögsebességét, Ω_{ki} -t, ami tartalmazza a forgórész tehetetlenségi nyomatékát, valamint a csapágysúrlódást is, amit most elhanyagolunk. $\Omega_{ki} k_e$ adja a feszültséget, amit ki kell vonnunk a kapocsfeszültségből.



1. ábra. Hatásvázlat

b. A feszültség – szögsebesség átviteli függvény felírása

Vegyük az 1. ábrát, és legyen $\tau_t = 0$.

Az előrecsatoló és visszacsatoló átítviteli függvényei

$$W_x = W_{el} k_m W_{me}, \quad (3)$$

és

$$W_f = k_e. \quad (4)$$

A zárthurkú átviteli függvény

$$W_{U_0 \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{W_x}{1 + W_x W_f} = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (5)$$

A $W_{U_0 \rightarrow \Omega_{ki}}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (6)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (7)$$

Az időállandók a pólusok reciprokának negáltjai:

$$T_1 = \frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (8)$$

$$T_2 = -\frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (9)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{U_0 \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{1}{k_e} = 17,1762 \quad (10)$$

c. A feszültség – áram átviteli függvény felírása

Az előreccatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_x = W_{el}, \quad (11)$$

és

$$W_f = k_m k_e W_{me}. \quad (12)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{U_0 \rightarrow I_a} = \frac{J_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (13)$$

A $W_{U_0 \rightarrow I_a}$ pólusai:

$$p_1 = -\frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (14)$$

$$p_2 = \frac{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2J_a L_a} \quad (15)$$

Az időállandók a pólusok reciprokának negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (16)$$

$$T_2 = \frac{2J_a L_a}{\sqrt{J_a(J_a R_a^2 - 4L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (17)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése $A_{U_0 \rightarrow I_a} = 0$.

d. A terhelőnyomaték – szögsebesség átviteli függvény felírása

Az előreccsatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_x = -W_{me}, \quad (18)$$

és

$$W_f = -k_m k_e W_{el}. \quad (19)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{\tau_i \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{R_a + L_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (20)$$

A $W_{U_0 \rightarrow I_a}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (21)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (22)$$

Az időállandók a pólusok reciprokának negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (23)$$

$$T_2 = \frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a} = 0,0145 \text{ s} \quad (24)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{\tau_i \rightarrow \Omega_{ki}} = -\frac{R_a}{k_m k_e} = -3275,9 \quad (25)$$

e. A terhelőnyomaték – áram átviteli függvény felírása

Az előreccsatoló és visszacsatoló át átviteli függvényei

$$W_x = W_{me} k_e W_{el}, \quad (26)$$

és

$$W_f = k_m. \quad (27)$$

A zárt hurkú átviteli függvény

$$W_{\tau_i \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{R_a + L_a s}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (28)$$

A $W_{U_0 \rightarrow I_a}$ pólusai:

$$p_1 = \frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} - J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (29)$$

$$p_2 = -\frac{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m)} + J_a R_a}{2 J_a L_a} \quad (30)$$

Az időállandók a pólusok reciprokanak negáltjai:

$$T_1 = -\frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m) - J_a R_a}} = 1,3825 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (31)$$

$$T_2 = \frac{2 J_a L_a}{\sqrt{J_a (J_a R_a^2 - 4 L_a k_e k_m) + J_a R_a}} = 0,0145 \text{ s} \quad (32)$$

A rendszer nullfrekvenciás erősítése

$$A_{\tau_i \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{1}{k_m} = 17,1821 \quad (33)$$

2. BDC motor vizsgálata

a. Szögsebességválasz a névleges feszültségre

Az 1.b. részfeladatban meghatározott átviteli függvényt fogjuk megvizsgálni. A bemenőjel

$$X = \frac{u_n}{s}, \quad (34)$$

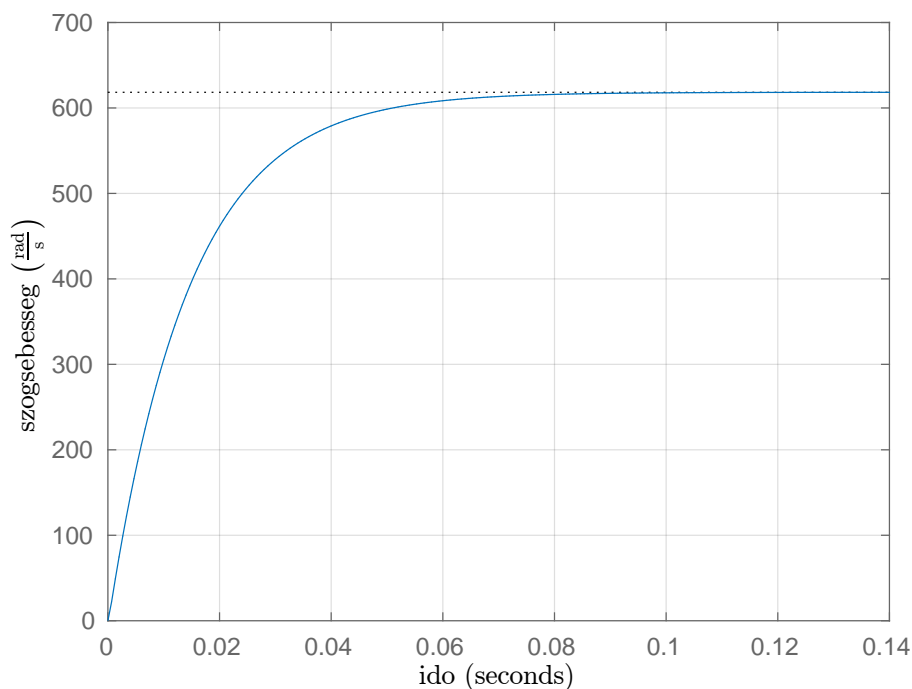
ez az egységugrás függvény Laplace-transzformáltja felnagyítva a névleges feszültségre. A kimenőjel Laplace-transzformáltja

$$Y = W_{U_0 \rightarrow \Omega_{ki}} X = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \frac{u_n}{s} \quad (35)$$

Ezt inverz Laplace-transzformálva megkapjuk a szögsebesség válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 618.34 - 618.34 e^{-3651.3 t} (\cosh(3582.2 t) + 1.0193 \sinh(3582.2 t)) \quad (36)$$

amit a 2. ábra mutat.



2. ábra. Szögsebesség válasz a névleges feszültségre

A kezdeti és az állandósult szögsebesség a végérték tételek segítségével számolható:

$$\omega(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (37)$$

$$\omega(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 618,34 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (38)$$

A motor adatlapja a terhelés nélküli szögsebességet 5860 rpm = 613.66 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ -nek adja meg. A számított 0.76 %-os relatív hiba numerikus hibáknak tudható be.

b. Áram kimenet a névleges feszültség hatására

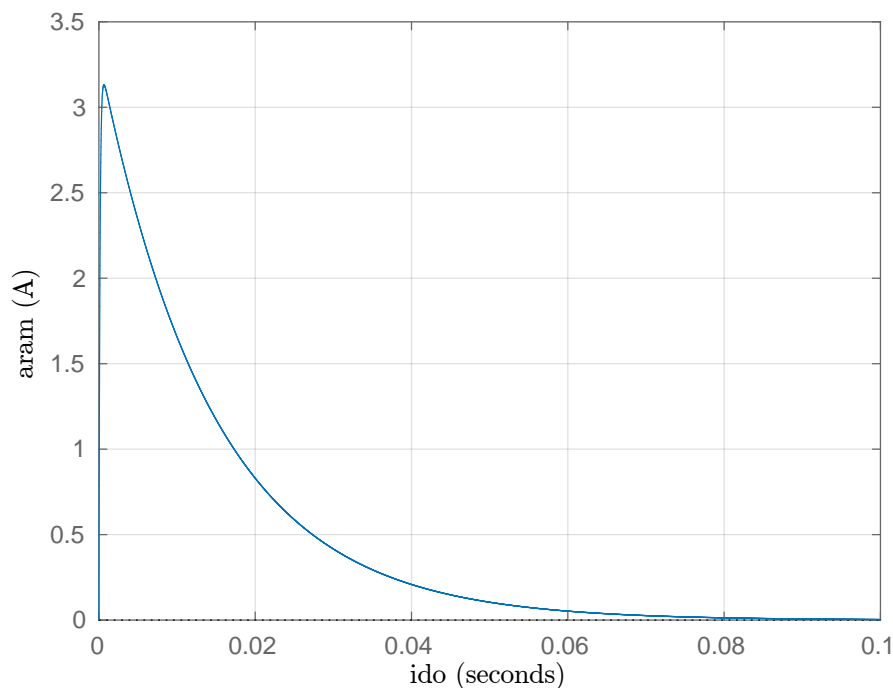
Az 1.c. részfeladatban meghatározott átviteli függvényt fogjuk megvizsgálni. A kimenőjel Laplace-transzformáltja

$$Y = W_{U_0 \rightarrow I_a} X = \frac{k_m}{L_a J_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \frac{u_n}{s} \quad (39)$$

Ezt inverz Laplace-transzformálva megkapjuk a szögsebesség válasz időfüggvényét:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = 3.3058 e^{-69.098 t} - 3.3058 e^{-7233.5 t} \quad (40)$$

amit a 3. ábra mutat.



3. ábra. Áram kimenet a névleges feszültség hatására

A kezdeti és az állandósult áram a végérték tételek segítségével számolható:

$$I_a(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY = 0 \text{ A} \quad (41)$$

$$I_a(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 0 \text{ A} \quad (42)$$

c. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására

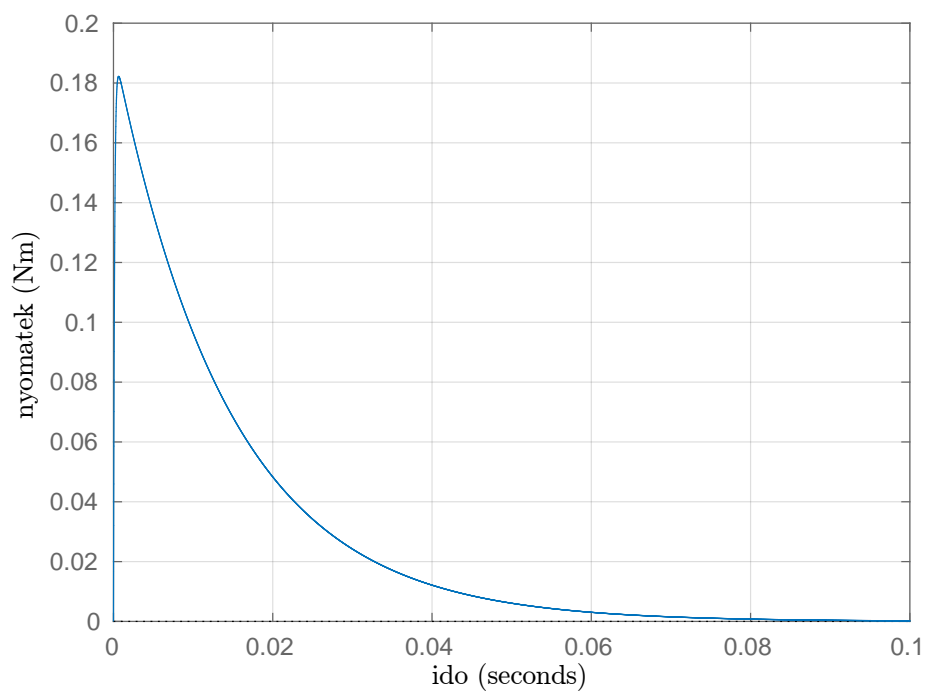
A DC motor egyenletei alapján

$$\tau_v = k_m I_a \quad (43)$$

A kimenőjel időfüggvénye:

$$y(t) = k_m y_{I_a}(t) = 0.18911 e^{-6.9145 t} - 0.18911 e^{-7295.7 t} \quad (44)$$

amit a 4. ábra mutat.



4. ábra. Nyomaték kimenet a névleges feszültség hatására

A kezdeti és az állandósult nyomaték analóg módon számolható:

$$\tau_v(0) = k_m 0 \text{ A} = 0 \text{ Nm} \quad (45)$$

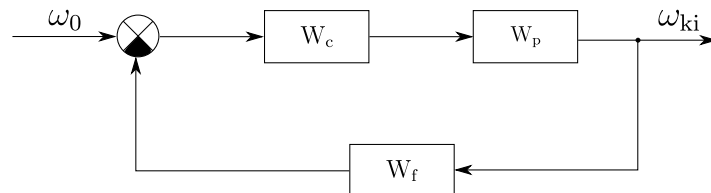
$$\tau_v(\infty) = k_m 0 \text{ A} = 0 \text{ Nm} \quad (46)$$

3. PI szabályzó tervezése

Ebben a feladatban a motorra egy PI szabályzót kapcsolunk, melynek átviteli függvénye

$$W_c = P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad (47)$$

valamint a rendszer hatásvázlatát az 5. ábra mutatja.

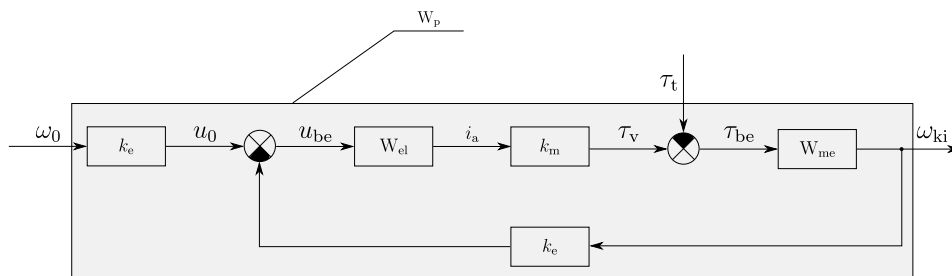


5. ábra. PI-szabályozott rendszer hatásvázlata

A motort egyetlen átviteli függvénnyel írjuk le, a 6. ábrának megfelelően. Ezt irányított szakasznak hívjuk, és kifejtve a

$$W_p = k_e W_{U_0 \rightarrow \Omega_{ki}} = \frac{k_e k_m}{J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m} \quad (48)$$

alakot kapja. A visszacsatoló ág üres, tehát $W_f = 1$.



6. ábra. A motor átviteli függvénye W_p

Az integráló tag időállandóját a szabályozott szakasz legnagyobb időállandójával tesszük egyenlővé. Ez a 8. egyenlet alapján $T_I = 0,0145$ s.

a. A zárt szabályozási kör egyenletei

Jelöljük az előrevezető ág átviteli függvényét W_x -val. A zárt szabályozási kör átviteli függvénye

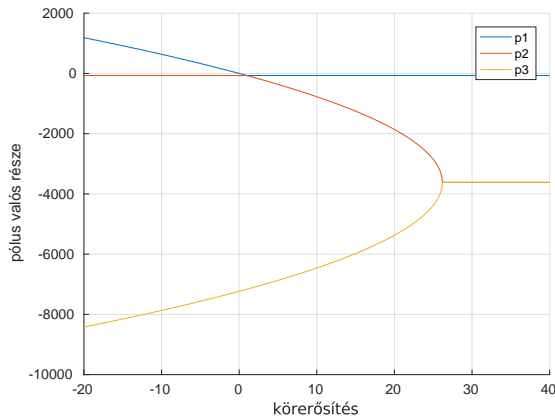
$$W_o = \frac{W_x}{1 + W_x} = \frac{P k_e k_m (T_I s + 1)}{P k_e k_m + J_a L_a T_I s^3 + J_a R_a T_I s^2 + T_I k_e k_m s + P T_I k_e k_m s} \quad (49)$$

A zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete az 53. egyenlet nevezője, ami nullával egyenlő.

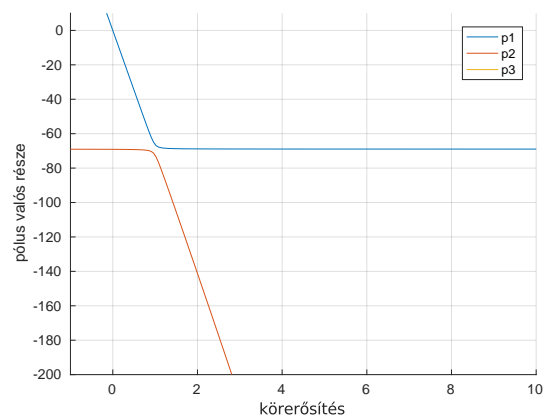
$$P k_e k_m + J_a L_a T_I s^3 + J_a R_a T_I s^2 + T_I k_e k_m s + P T_I k_e k_m s = 0. \quad (50)$$

b. Stabilitás a körerősítés függvényében

Rajzoljuk ki a pólusok valós részeit a körerősítés függvényében. A 7. ábrán jól látszik, hogy minden pozitív P értékre a pólusok negatív része valós, tehát a rendszer stabil.



(a) Lényeges P értékek

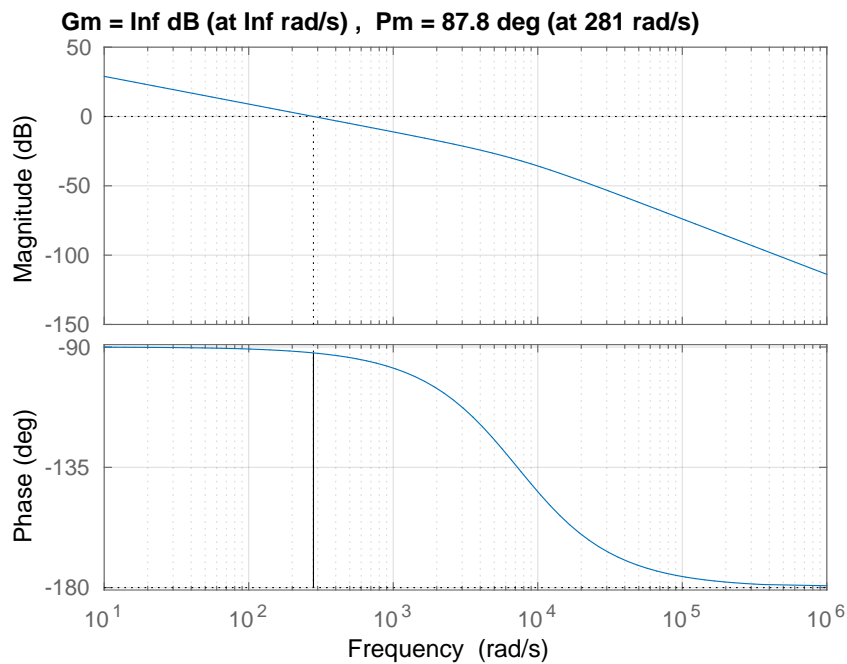


(b) 0 körüli P -k

7. ábra. Pólusok valós része a körerősítés függvényében

c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék

Válasszuk a körerősítést $P = \vartheta_2 = 4,063$ -re. Ennek a rendszernek a Bode-diagramját mutatja a 8. ábra. A margin függvényt használva megkapjuk a fázistartalékot, ami $\varphi_m = 87.8^\circ$.

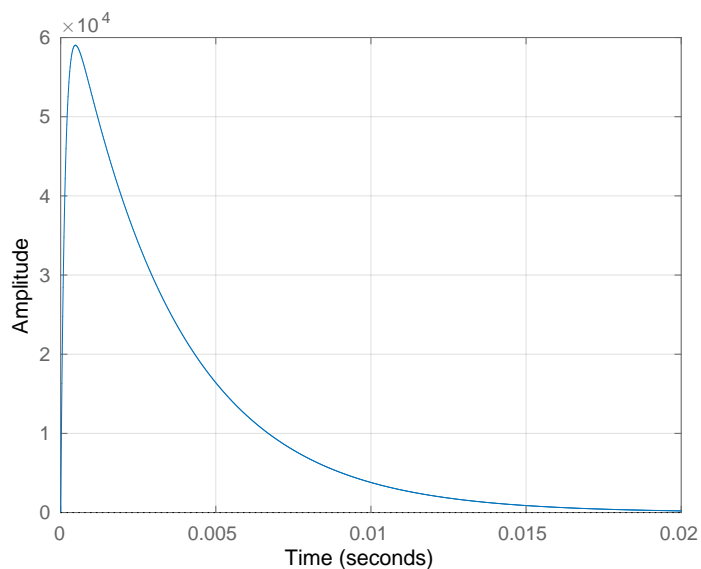


8. ábra. Szabályozási kör Bode-diagramja

d. Súlyfüggvény

A súlyfüggvényt könnyen kirajzolhatjuk az impulse függvénnyel. Az alapjel a névleges szögsebesség fele, vagyis

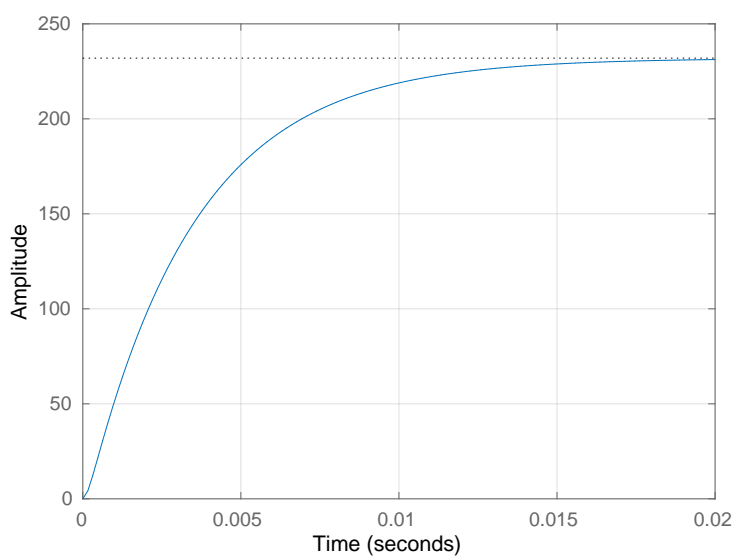
$$\Omega_0 = \frac{\omega_n}{2} = 231.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (51)$$



9. ábra. A zárt szabályozási kör impulzusválasza

e. Átmeneti függvény

Az átmeneti függvényt a step függvény adja meg. Az alapjel itt is a névleges szögsebesség fele.



10. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

4. PD szabályzó tervezése

Az 5. ábrában a W_c szabályzót cseréljük ki egy PD szabályzóra, melynek átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{T_D s + 1}{n T_D s + 1}. \quad (52)$$

A deriváló tag időállandóját a szabályozott szakasz második legnagyobb időállandójának célszerű megválasztani, ami $T_D = 1,3825 \cdot 10^{-4}$. Továbbá $n = \vartheta_3 = 40,827$ adott.

a. A zárt szabályozási kör egyenletei

Jelöljük az előrevezető ág átviteli függvényét W_x -val. A zárt szabályozási kör átviteli függvénye

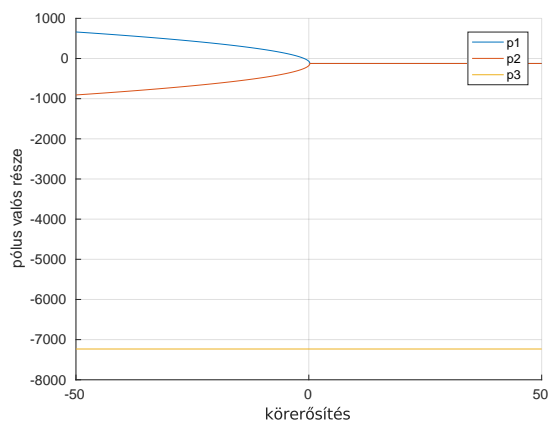
$$W_o = \frac{W_x}{1 + W_x} = \frac{P k_e k_m (T_D s + 1)}{\left(\frac{P k_e k_m (T_D s + 1)}{(T_D n s + 1) (J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m)} + 1 \right) (T_D n s + 1) (J_a L_a s^2 + J_a R_a s + k_e k_m)} \quad (53)$$

A zárt szabályozási kör karakterisztikus egyenlete az 53. egyenlet nevezője, ami nullával egyenlő.

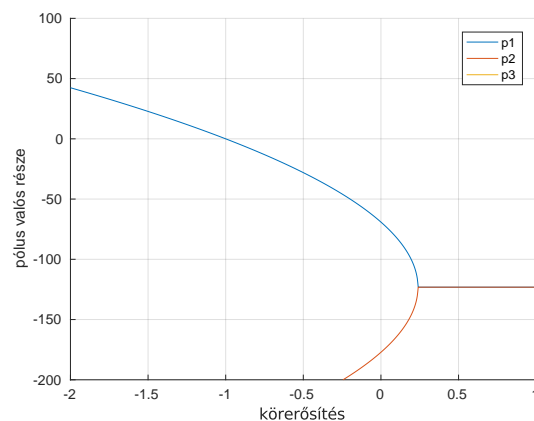
$$k_e k_m + J_a R_a s + P k_e k_m + J_a L_a s^2 + P T_D k_e k_m s + T_D k_e k_m n s + J_a L_a T_D n s^3 + J_a R_a T_D n s^2 = 0 \quad (54)$$

b. Stabilitás a körerősítés függvényében

Rajzoljuk ki a pólusok valós részeit a körerősítés függvényében. A 11. ábrán látható, hogy minden $P > 0$ értékre a pólusok negatív része valós, tehát a rendszer stabil.



(a) Lényeges P értékek

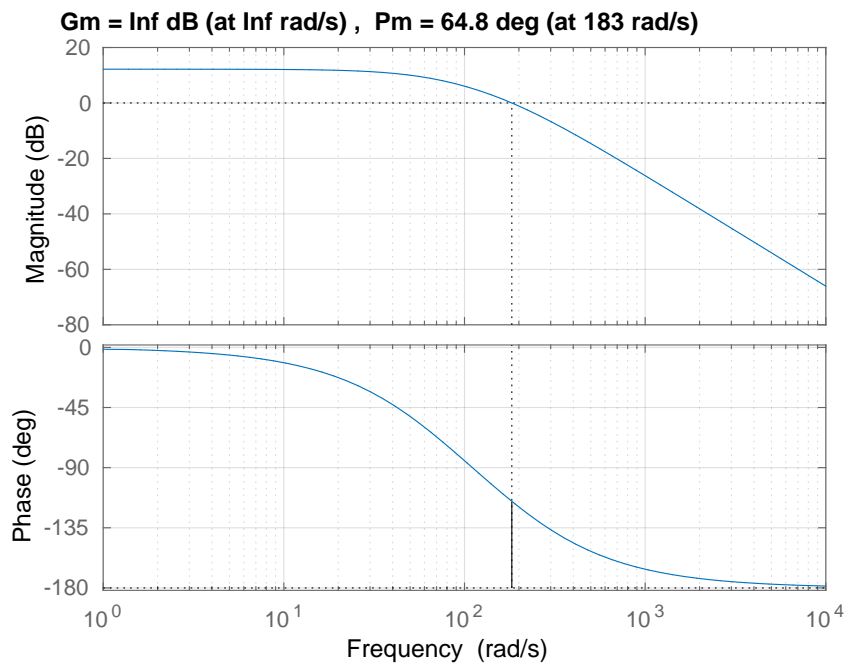


(b) 0 körüli P -k

11. ábra. Pólusok valós része a körerősítés függvényében

c. Megadott körerősítés esetén Bode-diagram és fázistartalék

Válasszuk a körerősítést $P = \vartheta_4 = 0,05$ -re. Ennek a rendszernek a Bode-diagramját mutatja a 12. ábra. A margin függvényt használva megkapjuk a fázistartalékot, ami $\varphi_m = 64.8^\circ$.

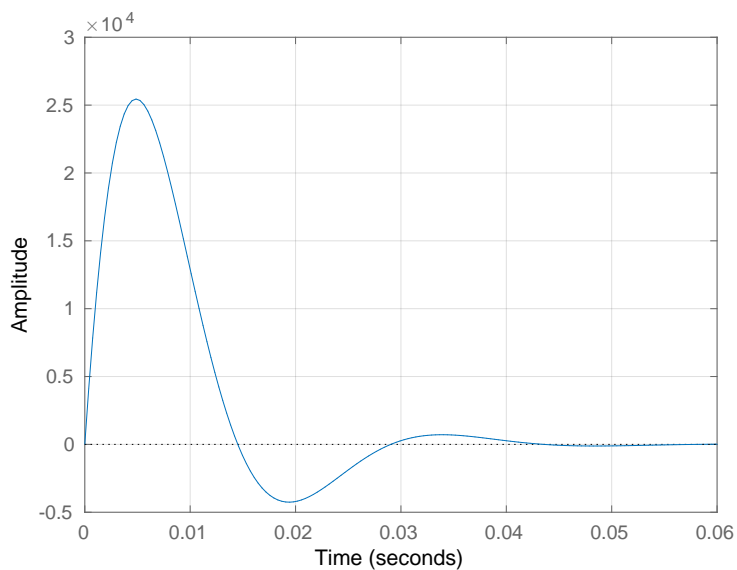


12. ábra. Szabályozási kör Bode-diagramja

d. Súlyfüggvény

A súlyfüggvényt könnyen kirajzolhatjuk az impulse függvénnyel. Az alapjel a névleges szögsebesség fele, vagyis

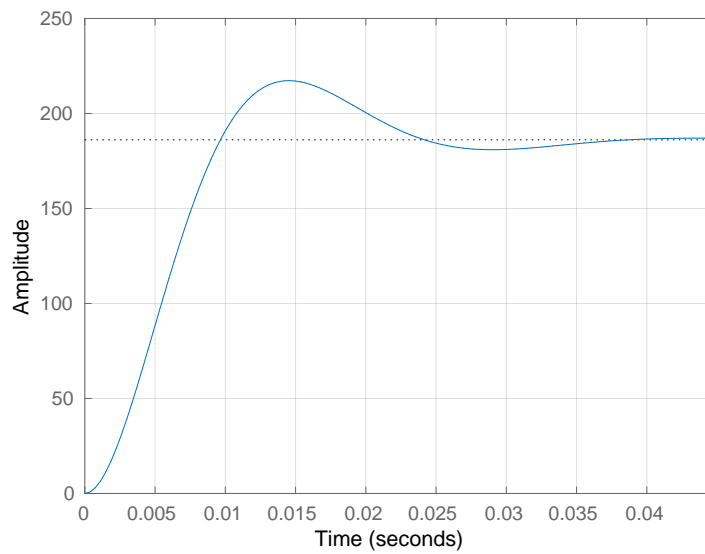
$$\Omega_0 = \frac{\omega_n}{2} = 231.96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (55)$$



13. ábra. A zárt szabályozási kör impulzusválasza

e. Átmeneti függvény

Az átmeneti függvényt a step függvény adja meg. Az alapjel itt is a szögsebesség fele.



14. ábra. A zárt szabályozási kör átmeneti függvénye

5. Zavaró jel PI szabályozóval (Szorgalmi feladat)

Mivel a rendszerünk lineáris, ezért a két bemenetet kezelhetjük függetlenül.

Legyen a referencia feszültség bemenet Laplace-transzformáltja $U_\omega = \frac{\omega_n}{2s}$, a zavarójel pedig legyen egy τ_0 nagyságú ugrásfüggvény időben eltolva T_0 -al, ami elvileg végtelen: $U_\tau = \frac{\tau_0}{s} e^{-T_0 s}$.

A rendszer szögsebesség válasza ezekre a bemenetekre kiszámítható az 5. ábra segítségével. Legyen a W_p szögsebesség bemenete U_p , valamint a zavaró bemenet U_τ , $W_{p\tau}$ átviteli függvénnyel. Ezek kimeneteit össze lehet adni, így a rotor szögsebesség válasza Y lesz.

$$Y = W_p U_p + W_{p\tau} U_\tau \quad (56)$$

Most írjuk fel U_p -t a kimenet alapján.

$$U_p = W_c (U_0 - Y) \quad (57)$$

Behelyettesítve megkapjuk a keresett válaszfüggvényt:

$$Y = \frac{W_p W_c U_0 + W_{p\tau} U_\tau}{W_p W_c + 1}, \quad (58)$$

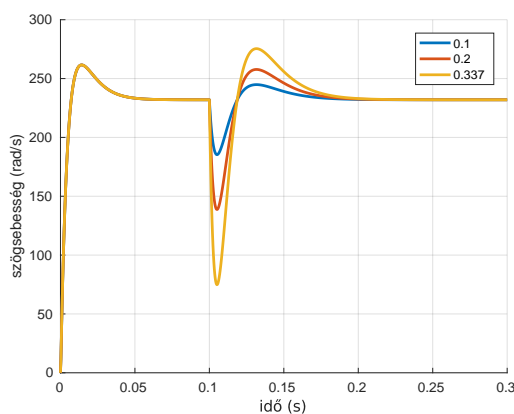
Ezt inverz Laplace-transzformálni kell, ezzel megkapjuk a kimenet időfüggvényét.

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \quad (59)$$

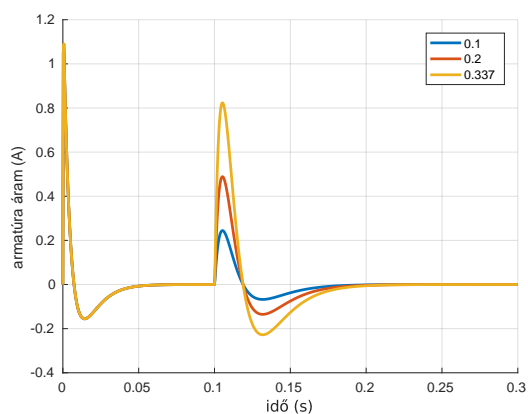
A szögsebességből az áram az alábbiak szerint számolható:

$$I_a(s) = k_e W_{el} (U_0 - Y_\omega) \quad (60)$$

Ezeknek az egyenleteknek a behelyettesített változatát nem írjuk ki, mert nagyon hosszú és csúnya, de a MATLAB kódban megtalálható.



(a) Szögsebesség válasz



(b) Áram válasz

15. ábra. Különböző amplitúdókra adott válasz

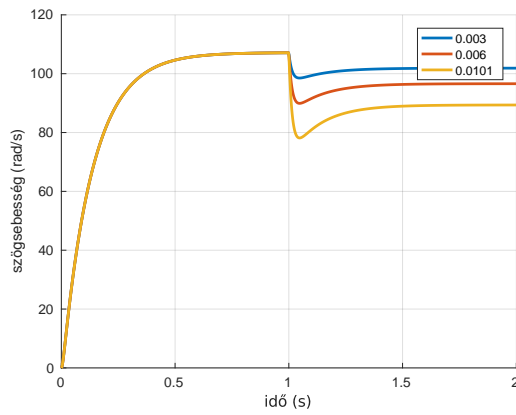
A maximális terhelőnyomaték

$$\tau_l^{\max} = \pm 0,337 \text{ Nm} \quad (61)$$

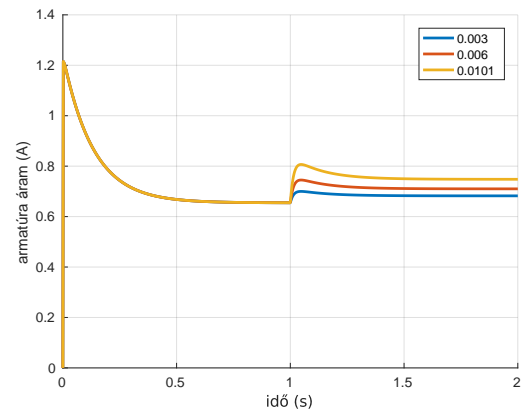
Bár az első tranziens közben az áram meghaladja a névleges áramot, az állandósult állapot után kezdünk vizsgálni, feltettük hogy a kezdeti áramot túlélte a motor.

6. Zavaró jel PD szabályozóval (Szorgalmi feladat)

A levezetés az 5. feladatéhoz analóg módon történik annyi különbséggel, hogy W_c nem PI, hanem PD szabályzó.



(a) Szögsebesség válasz



(b) Áram válasz

16. ábra. Különböző amplitúdókra adott válasz

A maximális terhelőnyomaték

$$\tau_t^{\max} = \pm 0,0101 \text{ Nm} \quad (62)$$

Hivatkozások

[1] DC motor adatlapja

<https://www.maxongroup.com/maxon/view/product/motor/dcmotor/amax/amax32/236671>