
RENDSZER- ÉS IRÁNYÍTÁSTECHNIKA

MÁSODIK HÁZI FELADAT

Réda Vince – Z697LX

1. táblázat. Házi feladat kódja

ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
36 V	60°	10%	3%	50 ms

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. november 16.

Tartalomjegyzék

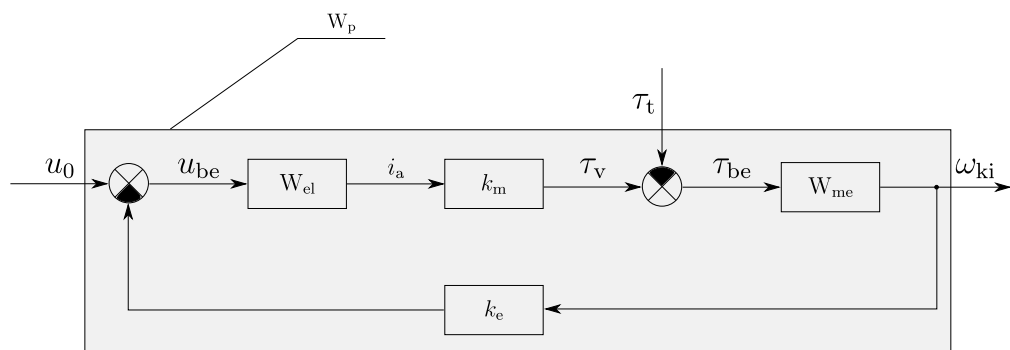
1. PI szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel	4
a. P és I paraméterek számítása	4
b. Egységugrás válasz	5
c. Állandósult szögsebesség	6
2. PD szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel	7
a. P és D paraméterek számítása	7
b. Egységugrás válasz	8
c. Állandósult szögsebesség	9
3. PI pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel	10
a. P és I paraméterek számítása	10
b. Egységugrás válasz	11
c. Állandósult szögsebesség	12
4. PID pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel	13
a. P, I és D paraméterek számítása	13
b. Egységugrás válasz	14
c. Állandósult szögsebesség	15
5. Szögsebesség szabályozás állapotvisszacsatolással	16
a. Pólusok számítása	16

A második házi feladat a tárgyhoz kapcsolódó első házi feladat folytatása. A rendszer paramétereit és egyenleteit ott tárgyaltam, amelyeket itt fel fogok használni.

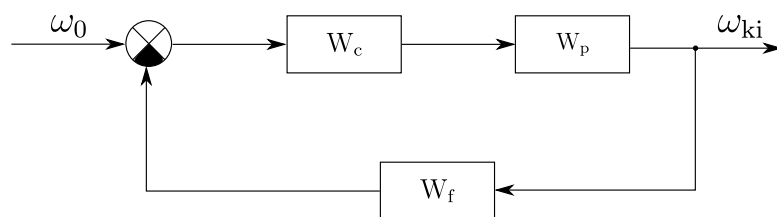
Az egyenáramú motor paramétereit

2. táblázat. A motor és a hajtómű paramétereit

Név	Jelölés	Katalógus-beli érték	SI-beli érték
armatúra ellenállás	R_a	11,1 Ω	11,1 Ω
armatúra induktivitás	L_a	1,52 mH	$1,52 \cdot 10^{-3}$ H
nyomatékállandó	k_m	58,2 $\frac{\text{mNm}}{\text{V}}$	0,0582 $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$
sebességállandó	k_s	164 $\frac{\text{rpm}}{\text{V}}$	17,17 $\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}$
elektromos állandó	k_e	0,006097 $\frac{\text{V}}{\text{rpm}}$	0,05822 $\frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$
forgórész tehetetlenségi nyomatéka	J_a	44,6 gcm^2	$4,46 \cdot 10^{-6}$ kgm^2
névleges szögsebesség	ω_n	4430 rpm	463,91 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
névleges áramerősség	i_n	0,804 A	0,804 A
névleges feszültség	u_n	36 V	36 V



(a) A motor hatásvázlata



(b) A szabályozott rendszer hatásvázlata

1. ábra. A rendszer és a visszacsatolt kör hatásvázlatai

1. PI szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel

a. P és I paraméterek számítása

Az 1b. ábra mutatja a rendszerünket, ahol a W_c szabályzó átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{1 + sT_1}{sT_1} \quad (1)$$

alakú. T_1 -vel a motor legnagyobb időállandóját ejtjük ki, tehát ezt válasszuk $T_1 = T_1 = 0,0145$ s értékűre, az első házi feladatban kiszámoltak alapján.

Az előrevezető ág átviteli függvénye ekkor leegyszerűsödik:

$$W_x = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} P \frac{1 + sT_1}{sT_1} = \frac{\Psi P}{T_1} \frac{1}{s(1 + sT_2)}, \quad (2)$$

ahol T_1 és T_2 a szabályozott szakasz időállandója, Ψ a nullfrekvenciás erősítés.

Most írjuk fel a fáziskésést az $s = j\omega$ helyettesítéssel.

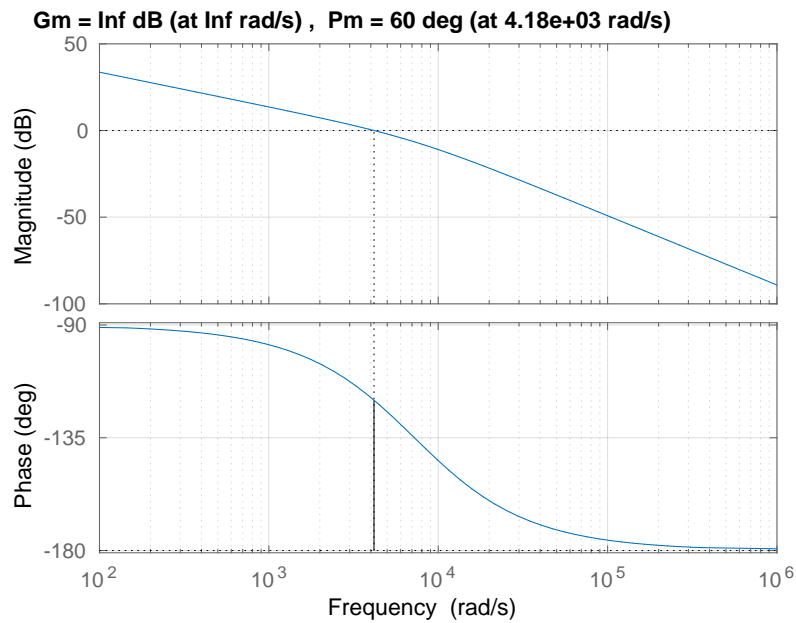
$$\varphi(\omega) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\text{integráló tag miatt}} - \underbrace{\arctg(T_2\omega)}_{\text{kisebbik időállandó}}. \quad (3)$$

A megadott fázistartalék $\varphi_t = \vartheta_1 = 60^\circ$. A következő egyenlet megoldása adja a vágási körfrekvenciát:

$$\varphi_t = \varphi(\omega_c) + \pi \Rightarrow \omega_c = 4176,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4)$$

Ha ω_c a vágási körfrekvencia, definíció szerint $|W_x(\omega_c)| = 1$. Ez alapján $P = 4,0709$.

A MATLAB-ban található `margin` függvény segítségével ellenőrizzük a számolást, amit a 2. ábra igazol.



2. ábra. Szabályozott rendszer Bode-diagramja

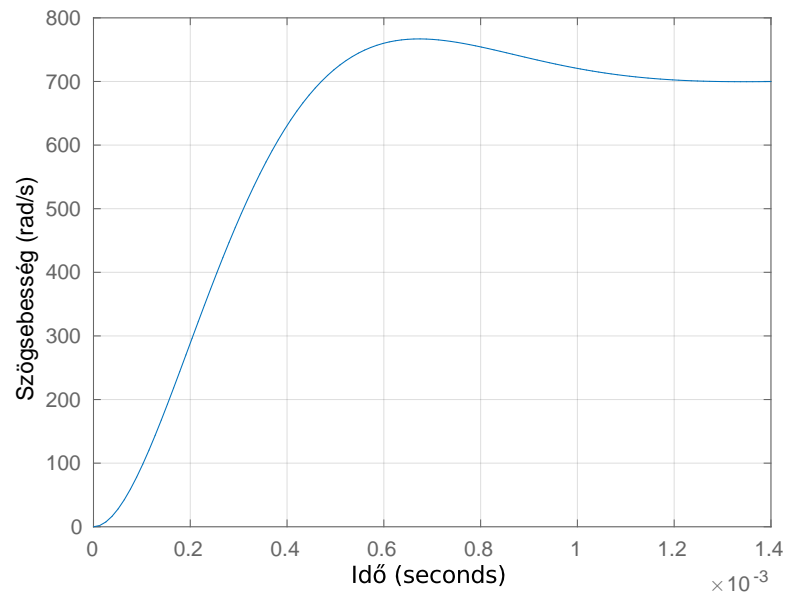
b. Egységugrás válasz

Az előrevezető ág W_x , a zárt kör átviteli függvénye ebből

$$W_{cl} = \frac{W_x}{1 + W_x}, \quad (5)$$

mivel a visszacsatoló ágban $W_{fb} = 1$. Ezt meg kell szorozni az $\omega_{ref} = 4430 \text{ rpm} = 705.0564 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ referencia szögsebességgel.

A PI-szabályozott rendszer egységugrás-válaszát a MATLAB-os `step` függvény adja meg.



3. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{\text{ref}}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{\text{cl}}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 705,0564$.

2. PD szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel

a. P és D paraméterek számítása

Az 1b. ábra mutatja a rendszerünket, ahol a W_c szabályzó átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{1 + sT_D}{1 + snT_D} \quad (6)$$

alakú. T_D -vel a motor második legnagyobb időállandóját ejtjük ki,

tehát ezt válasszuk $T_D = T_2 = 1,3825 \cdot 10^{-4}$ s értékűre, az első házi feladatban kiszámoltak alapján.

Az előrevezető ág átviteli függvénye ekkor leegyszerűsödik:

$$W_x = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} P \frac{1 + sT_2}{1 + snT_D} = \frac{\Psi P}{(1 + sT_1)(1 + snT_2)}, \quad (7)$$

ahol T_1 és T_2 a szabályozott szakasz időállandója, Ψ a nullfrekvenciás erősítés.

Most írjuk fel a fáziskésést az $s = j\omega$ helyettesítéssel.

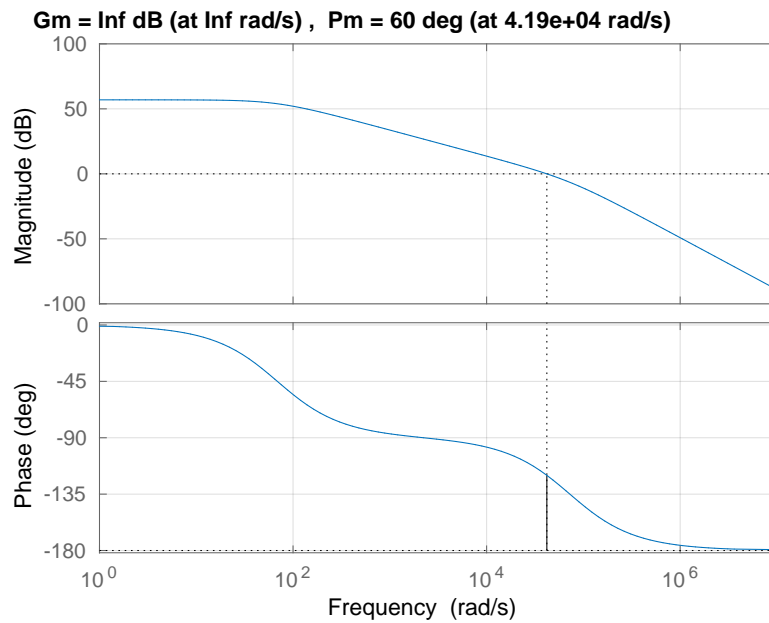
$$\varphi(\omega) = - \underbrace{\arctg(T_1 \omega)}_{\text{nagyobbik időállandó}} - \underbrace{\arctg(nT_2 \omega)}_{\text{szűrő időállandó}}. \quad (8)$$

A megadott fázistartalék most is $\varphi_t = \vartheta_1 = 60^\circ$. A következő egyenlet megoldása adja a vágási körfrekvenciát:

$$\varphi_t = \varphi(\omega_c) + \pi \Rightarrow \omega_c = 41920 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (9)$$

Ha ω_c a vágási körfrekvencia, definíció szerint $|W_x(\omega_c)| = 1$. Ez alapján $P = 40,9024$.

A MATLAB-ban található `margin` függvény segítségével ellenőrizzük a számolást, amit a 2. ábra igazol.



4. ábra. Szabályozott rendszer Bode-diagramja

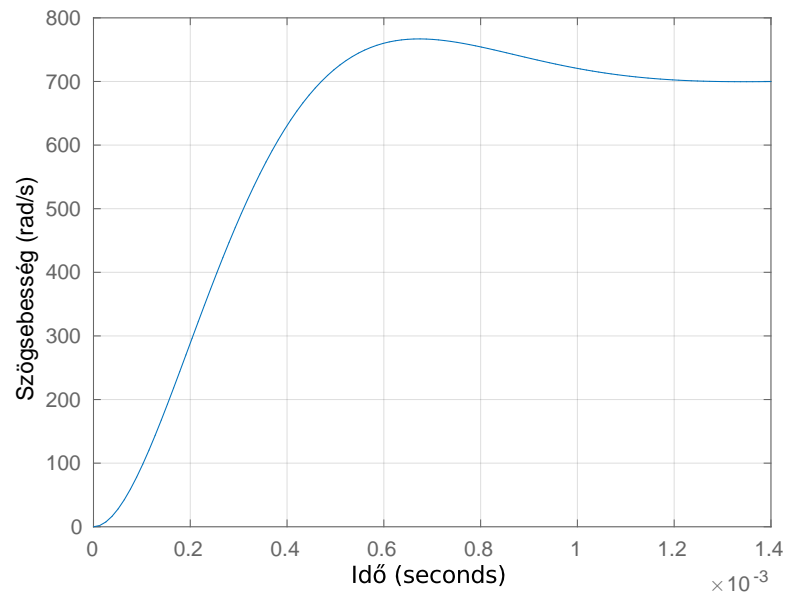
b. Egységugrás válasz

Az előrevezető ág W_x , a zárt kör átviteli függvénye ebből

$$W_{cl} = \frac{W_x}{1 + W_x}, \quad (10)$$

mivel a visszacsatoló ágban $W_{fb} = 1$. Ezt meg kell szorozni az $\omega_{ref} = 4430 \text{ rpm} = 705.0564 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ referencia szögsebességgel.

A PI-szabályozott rendszer egységugrás-válaszát a MATLAB-os `step` függvény adja meg.



5. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

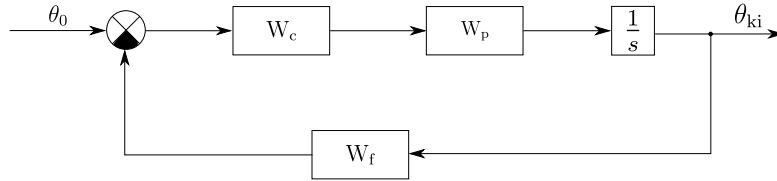
A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{\text{ref}}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{\text{cl}}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 704,0542$.

3. PI pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel

a. P és I paraméterek számítása

A DC motor szögsebességének integrálásával kapjuk meg annak pozícióját. A módosított hatásvázlatot a 6. ábra mutatja.



6. ábra. Pozíció-szabályzott DC motor hatásvázlata

Írjuk fel az előrevezető ág átviteli függvényét:

$$W_x = W_c W_p \frac{1}{s} = \frac{\Psi P (T_1 s + 1)}{s^2 (T_1 s + 1) (T_2 s + 1)}, \quad (11)$$

ahol Ψ a szabályozott szakasz erősítése.

Ezután írjuk fel a fázistolást a körfrekvencia függvényében:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg(T_1 \omega) - \arctg(T_2 \omega) + \arctg(T_1 \omega). \quad (12)$$

Ennek a függvénynek a szélsőértékét keressük. Ehhez tegyük nullává a deriváltat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} - \frac{T_2}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \frac{T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} = 0. \quad (13)$$

Ebből megkaptunk egy ω_c értéket, ami T_1 -től függ. Ezt helyettesítsük be a fázistartalékhoz tartozó képletbe, ami kiadja T_1 -t és ezáltal ω_c numerikus értékét is:

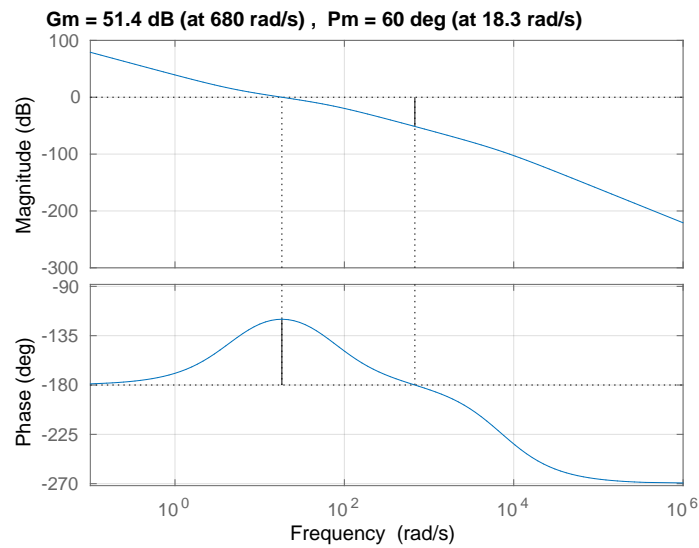
$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c). \quad (14)$$

Ebből $T_1 = 0,204$ s, és $\omega_c = 18,2783 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Már csak a P körerősítést kell meghatároznunk, ami ugyanúgy történik mint az első feladatban:

$$|W_x(\omega_c)| = 1 \Rightarrow P = 5,2163. \quad (15)$$

Ellenőrizzük, hogy a fázistartalék tényleg 60° -e a margin függvénnyel.

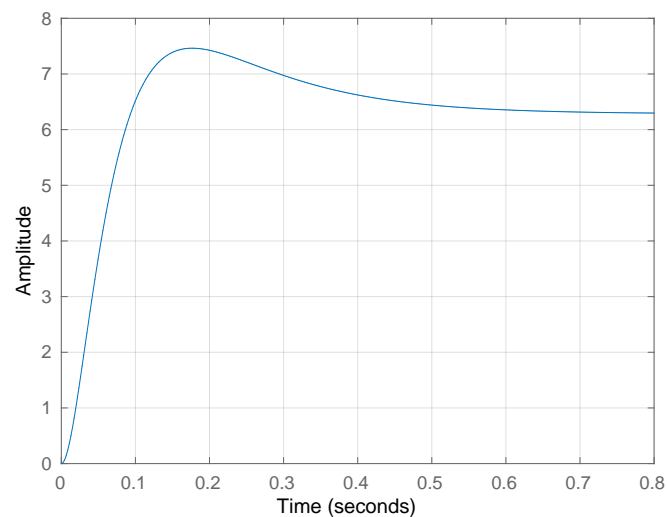


7. ábra. Pozíció-szabályzott rendszer Bode-diagramja, fázistartalék feltüntetve

Ez teljesül.

b. Egységugrás válasz

Egy kör fordulatszám szabályozása esetén a bemenet Laplace-transzformáltja $X = \frac{2\pi}{s}$, a kimenet ebből $Y = W_{cl}X$. Ezt a szokásos step függvény ki is rajzolja nekünk időtartományban, amit a 8. ábra mutat.



8. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

Az előző részfeladatban kiszámolt kimenetet felhasználva az állandósult szög érték: $\theta_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 6,2832 \text{ rad}$.

Az állandósult hiba a PI szabályzótól vártan zérus.

4. PID pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel

a. P, I és D paraméterek számítása

Az előző feladatból a szabályzót változtassuk meg egy PID kontrollerre:

$$W_c = P \frac{(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + nT_D s)}. \quad (16)$$

Válasszuk meg a deriváló tag időállandóját úgy, hogy az kiejtse a szabályozott szakasz egyik pólusát, tehát legyen $T_D = T_2$.

Írjuk fel az előrevezető ág átviteli függvényét:

$$W_x = W_c W_p \frac{1}{s} = \frac{P}{s^2} \frac{(1 + T_I s) \cancel{(1 + T_D s)}}{1 + nT_D s} \frac{\Psi}{(1 + sT_1) \cancel{(1 + sT_2)}} \quad (17)$$

ahol Ψ a szabályozott szakasz erősítése.

Ezután írjuk fel a fázistolást a körfrekvencia függvényében:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg(T_1 \omega) - \arctg(nT_D \omega) + \arctg(T_1 \omega). \quad (18)$$

Ennek a függvénynek a szélsőértékét keressük. Ehhez tegyük nullává a deriváltat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{T_1}{(T_1 \omega)^2 + 1} - \frac{nT_D}{(T_D \omega)^2 + 1} - \frac{T_1}{(T_1 \omega)^2 + 1} = 0. \quad (19)$$

Ebből megkaptunk egy ω_c értéket, ami T_1 -től függ. Ezt helyettesítsük be a fázistartalékhoz tartozó képletbe, ami kiadja T_D -t és ezáltal ω_c numerikus értékét is:

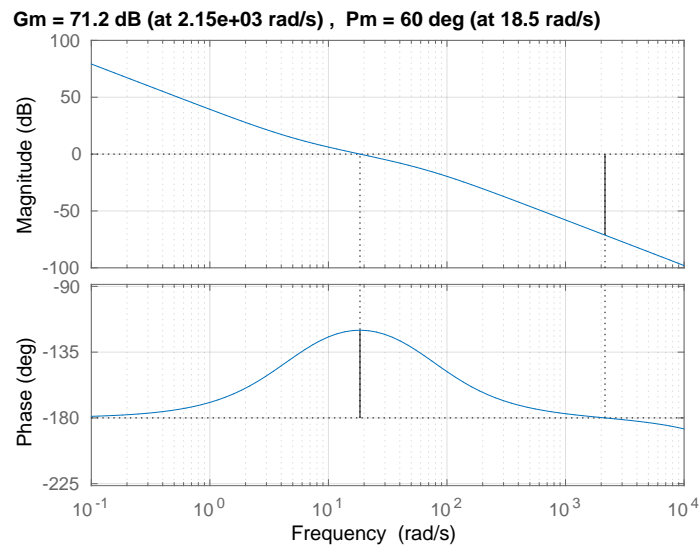
$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c). \quad (20)$$

Ebből $T_1 = 0,2022$ s, és $\omega_c = 18,4589 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Már csak a P körerősítést kell meghatároznunk, ami ugyanúgy történik mint az első feladatban:

$$|W_x(\omega_c)| = 1 \Rightarrow P = 5,3159. \quad (21)$$

Ellenőrizzük, hogy a fázistartalék tényleg 60° -e a margin függvénnyel.

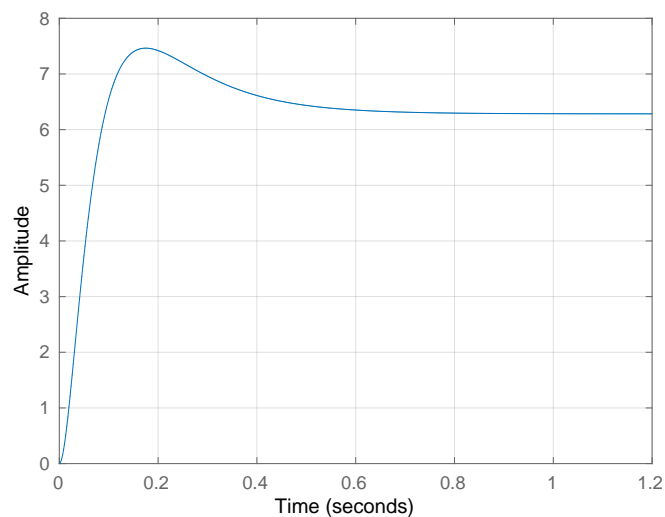


9. ábra. PID pozíció-szabályzott rendszer Bode-diagramja, fázistartalék feltüntetve

Ez teljesül.

b. Egységugrás válasz

Egy kör fordulat szabályozása esetén a bemenet Laplace-transzformáltja $X = \frac{2\pi}{s}$, a kimenet ebből $Y = W_{cl}X$. Ezt a szokásos step függvény ki is rajzolja nekünk időtartományban, amit a 10. ábra mutat.



10. ábra. PID egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

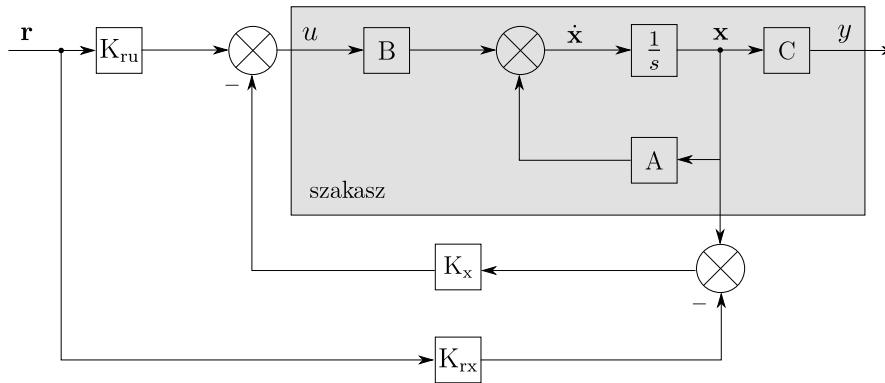
Az előző részfeladatban kiszámolt kimenetet felhasználva az állandósult szög érték: $\theta_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 6,2832^\circ$.

Az állandósult hiba a PID szabályzótól vártan zérus.

5. Szögsebesség szabályozás állapotvisszacsatolással

a. Pólusok számítása

Írjuk át a rendszerünket állapotteres alakra, valamint a W_c kontrollert cseréljük le a K_x és K_r állapotvisszacsatoló és alapjelkompenzáló mátrixokra. A D kimeneti mátrix esetünkben zérus, és egyenlőre az alapjelkompenzáló mátrix egységnyi.



11. ábra. Állapottér modell hatásvázlata

A rendszer átviteli függvény formában van megadva:

$$W_p = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\Psi}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}, \quad (22)$$

amelynek a pólusai $p_1 = -\frac{1}{T_1} = -68,97$ és $p_2 = -\frac{1}{T_2} = -7233,3$.

Írjuk át ezt állapottér modellre, irányíthatósági kanonikus alakra:

$$Y = \frac{\Psi}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} U \quad (23)$$

$$X := \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} U \Rightarrow \quad (24)$$

$$u = T_1 T_2 \ddot{x} + (T_1 + T_2)\dot{x} + x \Rightarrow \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u \quad (26)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \Psi & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D u \quad (27)$$

A feladatkiírás alapján a domináns időállandó $\tilde{T}_1 = 50 \text{ ms} = 0,05 \text{ s}$ kell hogy legyen. A másik pedig valami.

A visszacsatolás miatt

$$u = \mathbf{K}_r \mathbf{r} - \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{K}_r \mathbf{r} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (29)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x) \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{K}_r \mathbf{r} \quad (30)$$

Ebben a feladatrészben $\mathbf{K}_r \equiv \mathbf{I}$, tehát a referencia bemenetre nézve a \mathbf{B} bemeneti mátrix nem változik, az új rendszermátrix pedig $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x$. A \mathbf{K}_x mátrixot úgy kell megválasztani, hogy az új rendszermátrix sajátértékei a kívánt pólusok legyenek.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} & \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{T_1 T_2} - k_1 & \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - k_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = k_1 - \frac{1}{T_1 T_2} = 0 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{T_1 T_2} \quad (32)$$

Hivatkozások

[1] DC motor adatlapja

<https://www.maxongroup.com/maxon/view/product/motor/dcmotor/amax/amax32/236671>