
RENDSZER- ÉS IRÁNYÍTÁSTECHNIKA

MÁSODIK HÁZI FELADAT

Réda Vince – Z697LX

1. táblázat. Házi feladat kódja

ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
36 V	60°	10%	3%	50 ms

Mechatronika, Optika és Gépészeti Informatika Tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020. november 18.

Tartalomjegyzék

1. PI szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel	4
a. P és I paraméterek számítása	4
b. Egységugrás válasz	5
c. Állandósult szögsebesség	5
2. PD szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel	6
a. P és D paraméterek számítása	6
b. Egységugrás válasz	7
c. Állandósult szögsebesség	7
3. PI pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel	8
a. P és I paraméterek számítása	8
b. Egységugrás válasz	9
c. Állandósult szögsebesség	10
4. PID pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel	11
a. P, I és D paraméterek számítása	11
b. Egységugrás válasz	12
c. Állandósult szögsebesség	13
5. Szögsebesség szabályozás állapotviszacsatolással	14
a. Pólusok számítása	14
b. A szabályozó mátrix számítása	15
c. Ugrásfüggvény	15
d. Állandósult érték	16

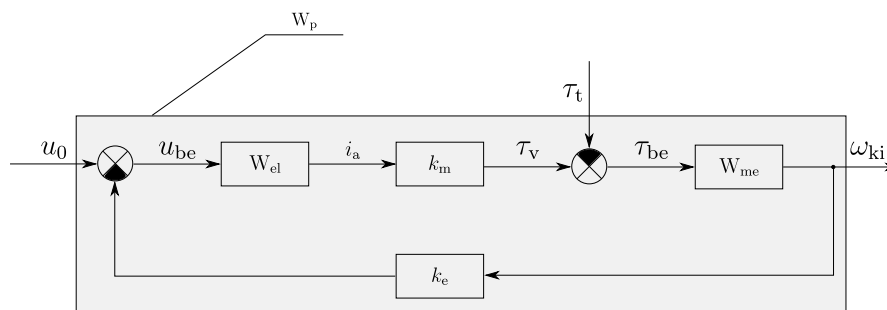
e.	Alapkompenzáció számítása	16
f.	Alapjelkompenzált ugrásválasz	17
g.	Állandósult érték	17
h.	Statikus alapjelkompenzáció	17
i.	Statikus alapjelkompenzált ugrásválasz	18
j.	Állandósult érték	18
6.	Szögsebesség szabályozás állapotvisszacsatolással	19
a.	Pólusok számítása	19
b.	A szabályozó mátrix számítása	20
c.	Ugrásfüggvény	20
d.	Állandósult érték	21
e.	Alapkompenzáció számítása	21
f.	Alapjelkompenzált ugrásválasz	22
g.	Állandósult érték	22
h.	Statikus alapjelkompenzáció	22
i.	Statikus alapjelkompenzált ugrásválasz	23
j.	Állandósult érték	23

A második házi feladat a tárgyhoz kapcsolódó első házi feladat folytatása. A rendszer paramétereit és egyenleteit ott tárgyaltam, amelyeket itt fel fogok használni.

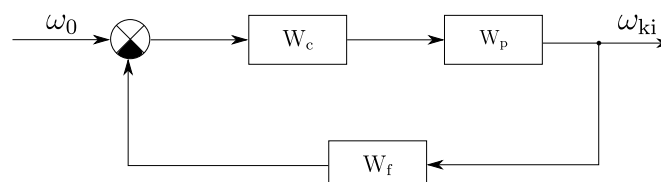
Az egyenáramú motor paramétereit

2. táblázat. A motor és a hajtómű paramétereit

Név	Jelölés	Katalógus-beli érték	SI-beli érték
armatúra ellenállás	R_a	11,1 Ω	11,1 Ω
armatúra induktivitás	L_a	1,52 mH	$1,52 \cdot 10^{-3}$ H
nyomatékállandó	k_m	58,2 $\frac{\text{mNm}}{\text{V}}$	0,0582 $\frac{\text{Nm}}{\text{V}}$
sebességállandó	k_s	164 $\frac{\text{rpm}}{\text{V}}$	17,17 $\frac{\text{rad}}{\text{Vs}}$
elektromos állandó	k_e	0,006097 $\frac{\text{V}}{\text{rpm}}$	0,05822 $\frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$
forgórész tehetetlenségi nyomatéka	J_a	44,6 gcm^2	$4,46 \cdot 10^{-6}$ kgm^2
névleges szögsebesség	ω_n	4430 rpm	463,91 $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$
névleges áramerősség	i_n	0,804 A	0,804 A
névleges feszültség	u_n	36 V	36 V



(a) A motor hatásvázlata



(b) A visszacsatolt rendszer hatásvázlata

1. ábra. A szakasz és a teljes rendszer hatásvázlatai

1. PI szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel

a. P és I paraméterek számítása

Az 1b. ábra mutatja a rendszerünket, ahol a W_c szabályzó átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{1 + sT_1}{sT_1} \quad (1)$$

alakú. T_1 -vel a motor legnagyobb időállandóját ejtjük ki, tehát ezt válasszuk $T_1 = T_1 = 0,0145$ s értékűre, az első házi feladatban kiszámoltak alapján.

Az előrevezető ág átviteli függvénye ekkor leegyszerűsödik:

$$W_x = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} P \frac{1 + sT_1}{sT_1} = \frac{\Psi P}{T_1} \frac{1}{s(1 + sT_2)}, \quad (2)$$

ahol T_1 és T_2 a szabályozott szakasz időállandója, Ψ a nullfrekvenciás erősítés.

Most írjuk fel a fáziskésést az $s = j\omega$ helyettesítéssel.

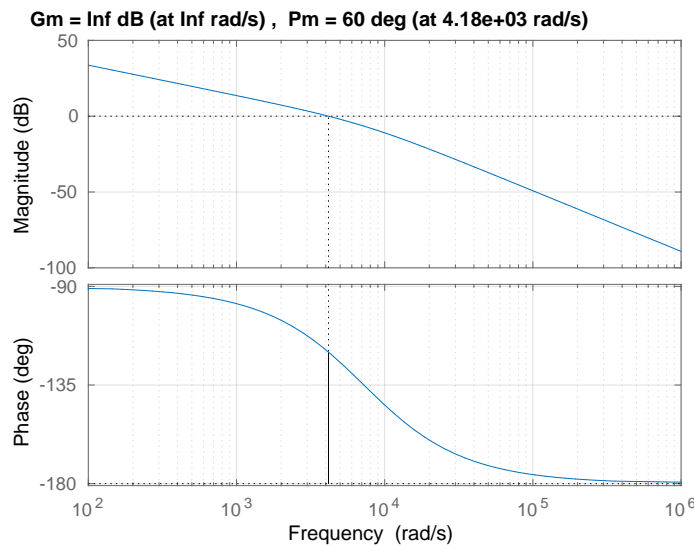
$$\varphi(\omega) = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\text{integráló tag miatt}} - \underbrace{\arctg(T_2\omega)}_{\text{kisebbik időállandó}}. \quad (3)$$

A megadott fázistartalék $\varphi_t = \vartheta_1 = 60^\circ$. A következő egyenlet megoldása adja a vágási körfrekvenciát:

$$\varphi_t = \varphi(\omega_c) + \pi \Rightarrow \omega_c = 4176,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (4)$$

Ha ω_c a vágási körfrekvencia, definíció szerint $|W_x(\omega_c)| = 1$. Ez alapján $P = 4,0709$.

A MATLAB-ban található margin függvény segítségével ellenőrizzük a számolást, amit a 2. ábra igazol.



2. ábra. Szabályozott rendszer Bode-diagramja

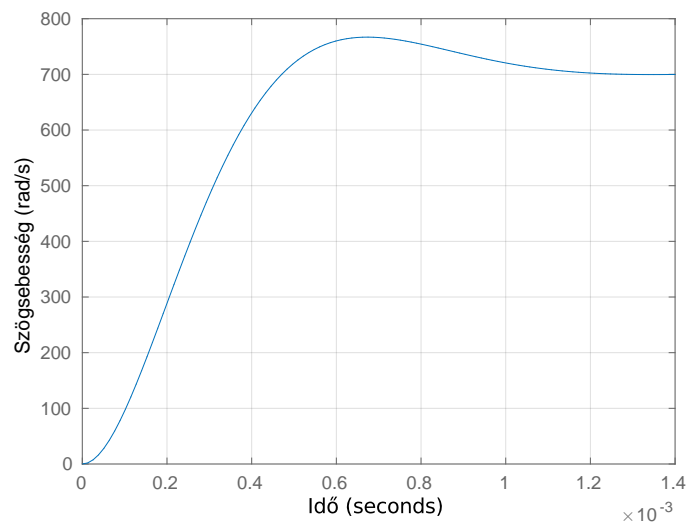
b. Egységugrás válasz

Az előrevezető ág W_x , a zárt kör átviteli függvénye ebből

$$W_{cl} = \frac{W_x}{1 + W_x}, \quad (5)$$

mivel a visszacsatoló ágban $W_{fb} = 1$. Ezt meg kell szorozni az $\omega_{ref} = 4430 \text{ rpm} = 705.0564 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ referencia szögsebességgel.

A PI-szabályozott rendszer egységugrás-válaszát a MATLAB-os `step` függvény adja meg.



3. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{ref}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{cl}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 705,0564$.

2. PD szabályzó tervezése pólus-zérus kiejtéssel

a. P és D paraméterek számítása

Az 1b. ábra mutatja a rendszerünket, ahol a W_c szabályzó átviteli függvénye

$$W_c = P \frac{1 + sT_D}{1 + snT_D} \quad (6)$$

alakú. T_D -vel a motor második legnagyobb időállandóját ejtjük ki,

tehát ezt válasszuk $T_D = T_2 = 1,3825 \cdot 10^{-4}$ s értékűre, az első házi feladatban kiszámoltak alapján.

Az előrevezető ág átviteli függvénye ekkor leegyszerűsödik:

$$W_x = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} P \frac{1 + sT_2}{1 + snT_D} = \frac{\Psi P}{(1 + sT_1)(1 + snT_2)}, \quad (7)$$

ahol T_1 és T_2 a szabályozott szakasz időállandója, Ψ a nullfrekvenciás erősítés.

Most írjuk fel a fáziskésést az $s = j\omega$ helyettesítéssel.

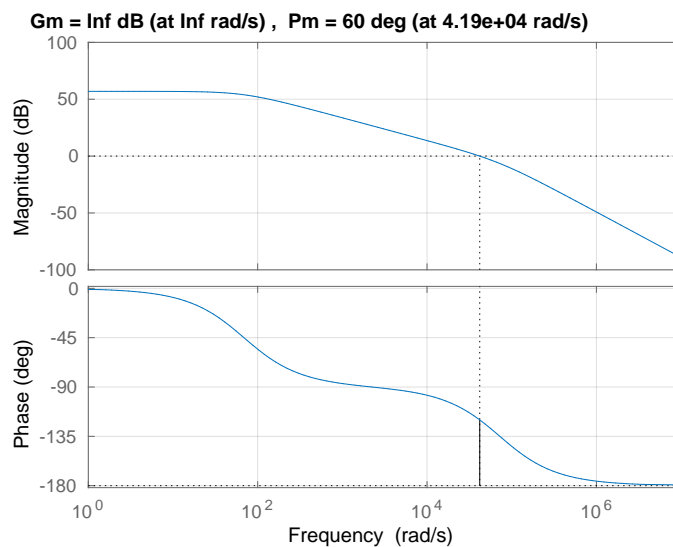
$$\varphi(\omega) = - \underbrace{\arctg(T_1 \omega)}_{\text{nagyobbik időállandó}} - \underbrace{\arctg(nT_2 \omega)}_{\text{szűrő időállandó}}. \quad (8)$$

A megadott fázistartalék most is $\varphi_t = \vartheta_1 = 60^\circ$. A következő egyenlet megoldása adja a vágási körfrekvenciát:

$$\varphi_t = \varphi(\omega_c) + \pi \Rightarrow \omega_c = 41920 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (9)$$

Ha ω_c a vágási körfrekvencia, definíció szerint $|W_x(\omega_c)| = 1$. Ez alapján $P = 40,9024$.

A MATLAB-ban található margin függvény segítségével ellenőrizzük a számolást, amit a 2. ábra igazol.



4. ábra. Szabályozott rendszer Bode-diagramja

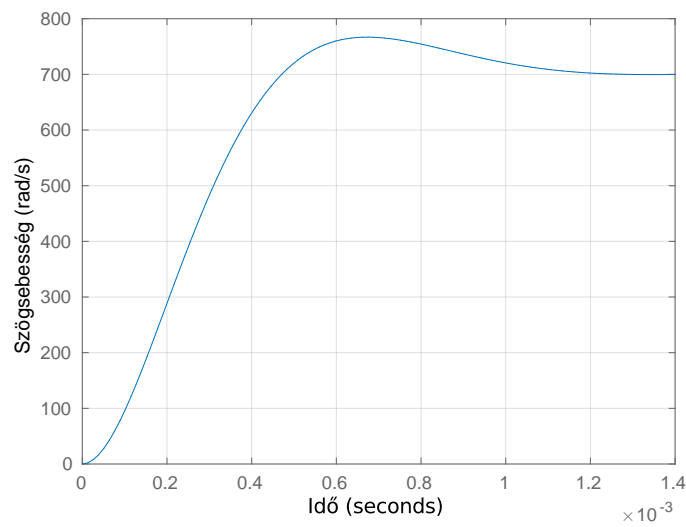
b. Egységugrás válasz

Az előrevezető ág W_x , a zárt kör átviteli függvénye ebből

$$W_{cl} = \frac{W_x}{1 + W_x}, \quad (10)$$

mivel a visszacsatoló ágban $W_{fb} = 1$. Ezt meg kell szorozni az $\omega_{ref} = 4430 \text{ rpm} = 705.0564 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ referencia szögsebességgel.

A PI-szabályozott rendszer egységugrás-válaszát a MATLAB-os `step` függvény adja meg.



5. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

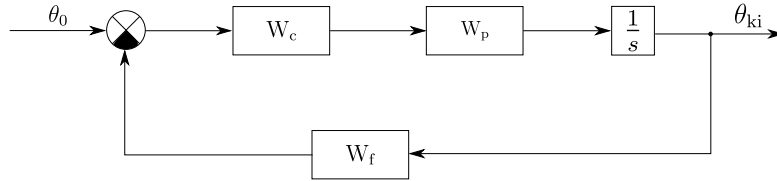
A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{ref}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{cl}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 704,0542$.

3. PI pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel

a. P és I paraméterek számítása

A DC motor szögsebességének integrálásával kapjuk meg annak pozícióját. A módosított hatásvázlatot a 6. ábra mutatja.



6. ábra. Pozíció-szabályzott DC motor hatásvázlata

Írjuk fel az előrevezető ág átviteli függvényét:

$$W_x = W_c W_p \frac{1}{s} = \frac{\Psi P (T_1 s + 1)}{s^2 (T_1 s + 1) (T_2 s + 1)}, \quad (11)$$

ahol Ψ a szabályozott szakasz erősítése.

Ezután írjuk fel a fázistolást a körfrekvencia függvényében:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg(T_1 \omega) - \arctg(T_2 \omega) + \arctg(T_1 \omega). \quad (12)$$

Ennek a függvénynek a szélsőértékét keressük. Ehhez tegyük nullává a deriváltat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} - \frac{T_2}{T_2^2 \omega^2 + 1} - \frac{T_1}{T_1^2 \omega^2 + 1} = 0. \quad (13)$$

Ebből megkaptunk egy ω_c értéket, ami T_1 -től függ. Ezt helyettesítsük be a fázistartalékhoz tartozó képletbe, ami kiadja T_1 -t és ezáltal ω_c numerikus értékét is:

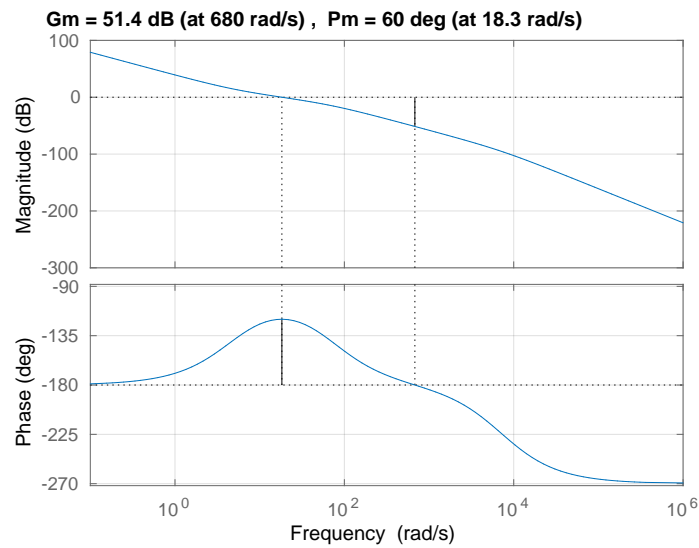
$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c). \quad (14)$$

Ebből $T_1 = 0,204$ s, és $\omega_c = 18,2783 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Már csak a P körerősítést kell meghatároznunk, ami ugyanúgy történik mint az első feladatban:

$$|W_x(\omega_c)| = 1 \Rightarrow P = 5,2163. \quad (15)$$

Ellenőrizzük, hogy a fázistartalék tényleg 60° -e a margin függvénnyel.

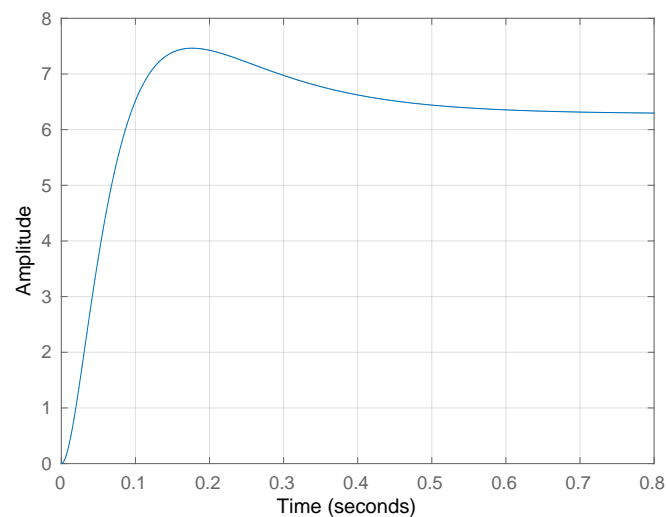


7. ábra. Pozíció-szabályzott rendszer Bode-diagramja, fázistartalék feltüntetve

Ez teljesül.

b. Egységugrás válasz

Egy kör fordulatszám szabályozása esetén a bemenet Laplace-transzformáltja $X = \frac{2\pi}{s}$, a kimenet ebből $Y = W_{cl}X$. Ezt a szokásos step függvény ki is rajzolja nekünk időtartományban, amit a 8. ábra mutat.



8. ábra. PI egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

Az előző részfeladatban kiszámolt kimenetet felhasználva az állandósult szög érték: $\theta_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 6,2832 \text{ rad.}$

Az állandósult hiba a PI szabályzótól vártan zérus.

4. PID pozíció szabályozás szimmetrikus optimum módszerrel

a. P, I és D paraméterek számítása

Az előző feladatból a szabályzót változtassuk meg egy PID kontrollerre:

$$W_c = P \frac{(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + nT_D)}. \quad (16)$$

Válasszuk meg a deriváló tag időállandóját úgy, hogy az kiejtse a szabályozott szakasz egyik pólusát, tehát legyen $T_D = T_2$.

Írjuk fel az előrevezető ág átviteli függvényét:

$$W_x = W_c W_p \frac{1}{s} = \frac{P}{s^2} \frac{(1 + T_I s) \cancel{(1 + T_D s)}}{1 + nT_D s} \frac{\Psi}{(1 + sT_1) \cancel{(1 + sT_2)}} \quad (17)$$

ahol Ψ a szabályozott szakasz erősítése.

Ezután írjuk fel a fázistolást a körfrekvencia függvényében:

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg(T_1 \omega) - \arctg(nT_D \omega) + \arctg(T_1 \omega). \quad (18)$$

Ennek a függvénynek a szélsőértékét keressük. Ehhez tegyük nullává a deriváltat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega} = \frac{T_1}{(T_1 \omega)^2 + 1} - \frac{nT_D}{(T_D \omega)^2 + 1} - \frac{T_1}{(T_1 \omega)^2 + 1} = 0. \quad (19)$$

Ebből megkaptunk egy ω_c értéket, ami T_1 -től függ. Ezt helyettesítsük be a fázistartalékhoz tartozó képletbe, ami kiadja T_D -t és ezáltal ω_c numerikus értékét is:

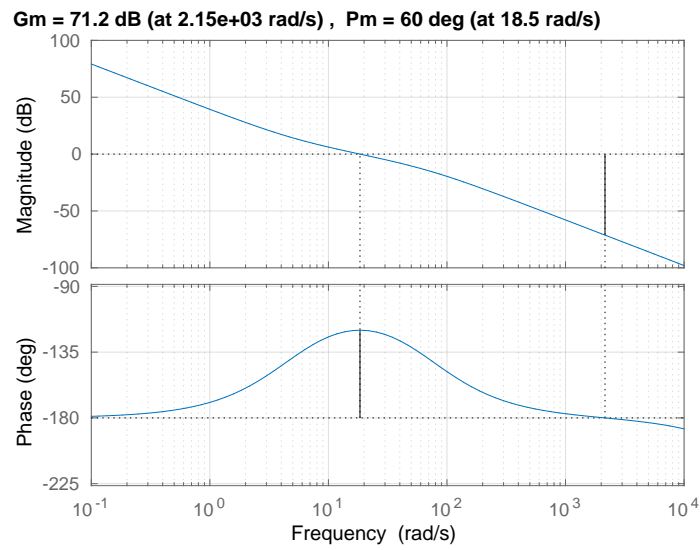
$$\varphi_t = \pi + \varphi(\omega_c). \quad (20)$$

Ebből $T_1 = 0,2022$ s, és $\omega_c = 18,4589 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Már csak a P körerősítést kell meghatároznunk, ami ugyanúgy történik mint az első feladatban:

$$|W_x(\omega_c)| = 1 \Rightarrow P = 5,3159. \quad (21)$$

Ellenőrizzük, hogy a fázistartalék tényleg 60° -e a margin függvénnyel.

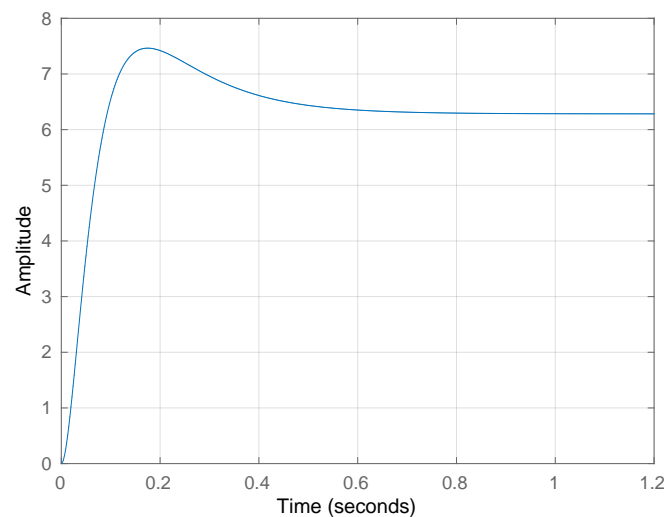


9. ábra. PID pozíció-szabályzott rendszer Bode-diagramja, fázistartalék feltüntetve

Ez teljesül.

b. Egységugrás válasza

Egy kör fordulat szabályozása esetén a bemenet Laplace-transzformáltja $X = \frac{2\pi}{s}$, a kimenet ebből $Y = W_{cl}X$. Ezt a szokásos step függvény ki is rajzolja nekünk időtartományban, amit a 10. ábra mutat.



10. ábra. PID egységugrás-válasz

c. Állandósult szögsebesség

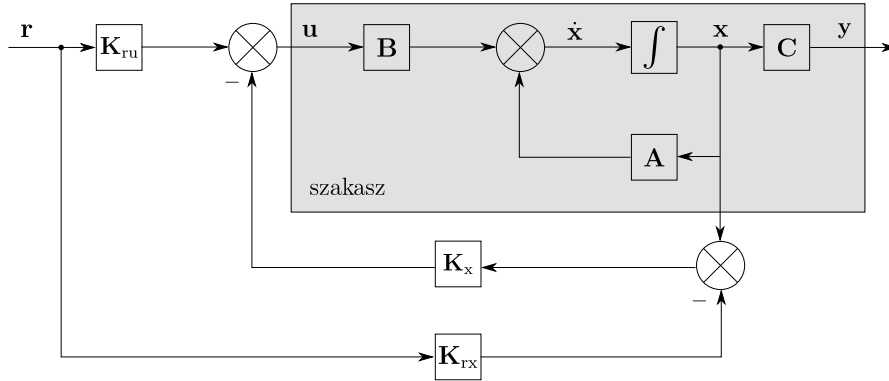
Az előző részfeladatban kiszámolt kimenetet felhasználva az állandósult szög érték: $\theta_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 6,2832^\circ$.

Az állandósult hiba a PID szabályzótól vártan zérus.

5. Szögsebesség szabályozás állapotvisszacsatolással

a. Pólusok számítása

Írjuk át a rendszerünket állapotteres alakra, valamint a W_c kontrollert cseréljük le a K_x , K_{rx} és K_{ru} állapotvisszacsatoló és alapjelkompenzáló mátrixokra. A D és K_{rx} mátrix esetünkben zérus, és K_{ru} egységnyi.



11. ábra. Állapotter modell hatásvázlata

A rendszer átviteli függvény formában van megadva:

$$W_p = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\Psi}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} = \frac{\frac{\Psi}{T_1 T_2}}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}}. \quad (22)$$

Írjuk át ezt állapotter modellre, irányíthatósági kanonikus alakra:

$$Y = \frac{\frac{\Psi}{T_1 T_2}}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}} U \quad (23)$$

$$X := \frac{1}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}} U \Rightarrow \quad (24)$$

$$u = \ddot{x} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{x} + \frac{1}{T_1 T_2} x \Rightarrow \quad (25)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (26)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\Psi}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \mathbf{u} \quad (27)$$

A feladatkiírás alapján a domináns időállandó $\tilde{T}_1 = 50 \text{ ms} = 0,05 \text{ s}$ kell hogy legyen.

Az átviteli függvény karakterisztikus egyenlete legyen adott a következő alakban

$$p(s) = s^2 + a_1 s + a_0 s. \quad (28)$$

A túllövés a ξ csillapítástól függ, amelyek adottak, így ki tudjuk számítani a kívánt a_1 és a_0 együtthatókat.

$$\tilde{T}_1 = \sqrt{\frac{1}{a_0}} \Rightarrow a_0 = 400 \quad (29)$$

$$\Delta v = 0,1 = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \xi = 0,5911 \quad (30)$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \Rightarrow a_1 = 23,6462 \quad (31)$$

Tehát $a_0 = 400$ és $a_1 = 23,65$.

b. A szabályozó mátrix számítása

A visszacsatolás miatt

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (33)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x) \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} \quad (34)$$

Ebben a feladatrészben tehát a referencia bemenetre nézve a bemeneti mátrix nem változik, az új rendszer-mátrix pedig $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x$. A \mathbf{K}_x mátrixot a kívánt pólusok alapján kell megválasztani a következőképpen. a kívánt pólusok legyenek.

$$\tilde{p}(s) = s^2 + a_1 s + a_0 \quad (35)$$

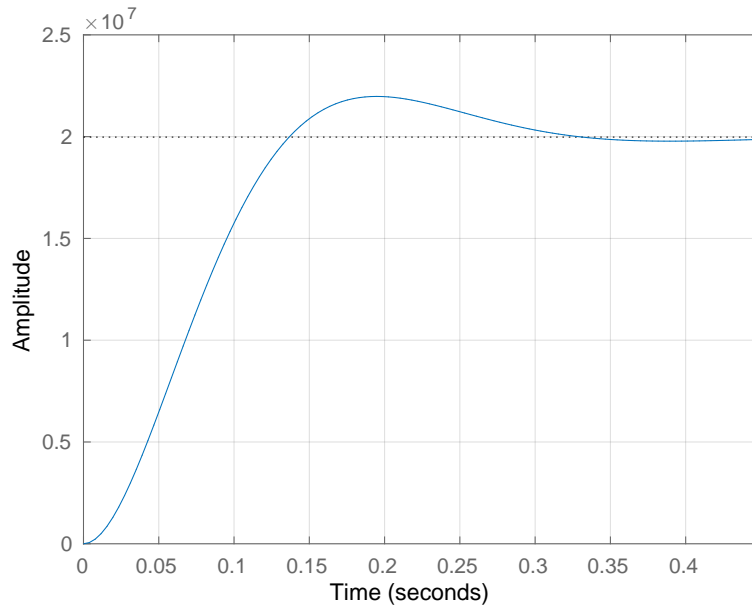
$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} - k_1 & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Ebből a keresett mátrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,98 \cdot 10^5 & -7278,6 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

c. Ugrásfüggvény

Az üresjáratú szögsebesség $\omega_{\text{load}} = 5860 \text{ rpm} = 932.648 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Az ugrásválaszt a rendszermátrixok ismeretében a MATLAB `step` függvénye rajzolja ki.



12. ábra. A rendszer ugrásválasza

d. Állandósult érték

Az állapottér rendszerünket írjuk vissza MATLAB segítségével átviteli függvény alakra (W_{cl}), amivel könnyen tudunk állandósult értéket számolni. A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{noload}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{cl}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 2 \cdot 10^7$.

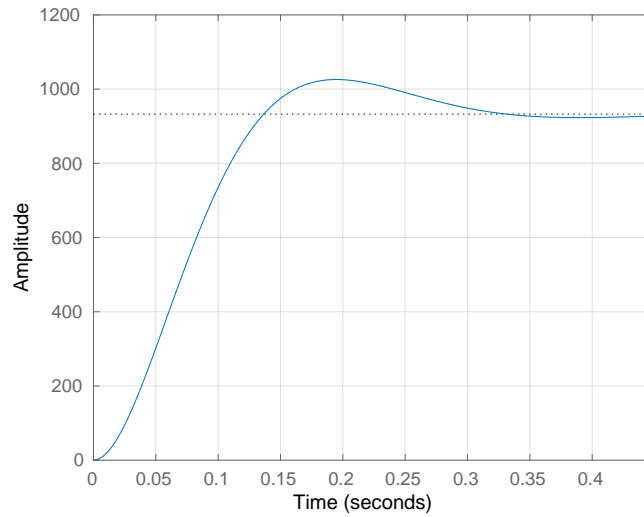
e. Alapkompenzáció számítása

Ha nincs statikus alapjelkompenzáció, vagyis $K_{rx} \equiv 0$, akkor éljünk a $K_{ru} := K_r$ jelöléssel, az érthetőség kedvéért.

Most állítsuk be a K_r mátrixot úgy, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y = r$ igaz legyen. Ezt a következő összefüggés adja meg:

$$K_r = - \left(C \tilde{A}^{-1} B \right)^{-1} = \left[4,6684 \cdot 10^{-5} \right]. \quad (38)$$

f. Alapjelkompenzált ugrásválasz



13. ábra. A rendszer ugrásválasza alapjelkompenzálással

g. Állandósult érték

A 6.d. részfeladathoz hasonló módon járunk el. A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 932,648$.

h. Statikus alapjelkompenzáció

Most legyen K_{rx} nullától különböző. Ekkor

$$\begin{bmatrix} K_{rx} \\ K_{ru} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,17 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0,0582 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

i. Statikus alapjelkompenzált ugrásválasz

Írjuk fel a rendszer átviteli függvényét r -től y -ig.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} - \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (40)$$

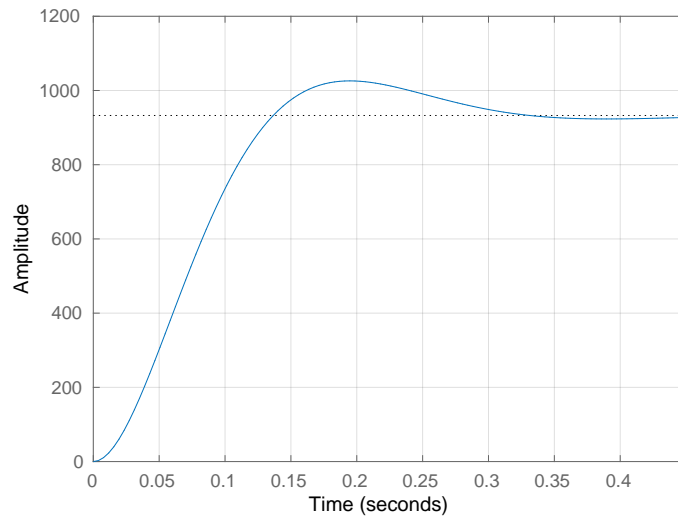
$$\mathbf{x} = \frac{1}{s} (\mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A} \mathbf{x}) \quad (41)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{s} (\mathbf{B} (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x) \mathbf{x}) \quad (42)$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{s} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x) \right)^{-1} \frac{1}{s} \mathbf{B} (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} \quad (43)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} = \boxed{\frac{400}{s^2 + 23,646s + 400}} \quad (44)$$

Az egységugrás válasz ebből a szokásos módon számítható.



14. ábra. A rendszer ugrásválasza statikus alapjelkompenzációval

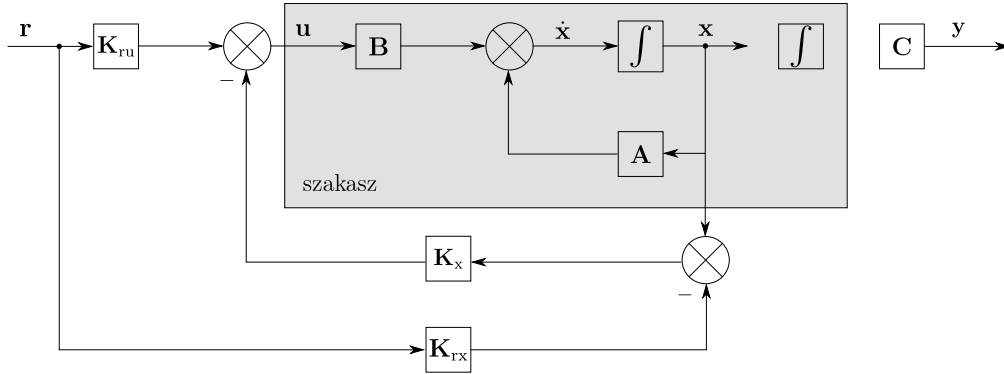
j. Állandósult érték

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 932,648$.

6. Szögsebesség szabályozás állapotvisszacsatolással

a. Pólusok számítása

Írjuk át a rendszerünket állapotteres alakra, valamint a W_c kontrollert cseréljük le a K_x , K_{rx} és K_{ru} állapotvisszacsatoló és alapjelkompenzáló mátrixokra. A D és K_{rx} mátrix esetünkben zérus, és K_{ru} egységnyi.



15. ábra. Állapotter modell hatásvázlata

A rendszer átviteli függvény formában van megadva:

$$W_p = \frac{\Psi}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} = \frac{\Psi}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1} = \frac{\frac{\Psi}{T_1 T_2}}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}}. \quad (45)$$

Írjuk át ezt állapotter modellre, irányíthatósági kanonikus alakra:

$$Y = \frac{\frac{\Psi}{T_1 T_2}}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}} U \quad (46)$$

$$X := \frac{1}{s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2}} U \Rightarrow \quad (47)$$

$$u = \ddot{x} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \dot{x} + \frac{1}{T_1 T_2} x \Rightarrow \quad (48)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (49)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\Psi}{T_1 T_2} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \mathbf{u} \quad (50)$$

A feladatkiírás alapján a domináns időállandó $\tilde{T}_1 = 50 \text{ ms} = 0,05 \text{ s}$ kell hogy legyen.

Az átviteli függvény karakterisztikus egyenlete legyen adott a következő alakban

$$p(s) = s^2 + a_1 s + a_0 s. \quad (51)$$

A túllövés a ξ csillapítástól függ, amelyek adottak, így ki tudjuk számítani a kívánt a_1 és a_0 együtthatókat.

$$\tilde{T}_1 = \sqrt{\frac{1}{a_0}} \Rightarrow a_0 = 400 \quad (52)$$

$$\Delta v = 0,1 = \exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \Rightarrow \xi = 0,5911 \quad (53)$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}} \Rightarrow a_1 = 23,6462 \quad (54)$$

Tehát $a_0 = 400$ és $a_1 = 23,65$.

b. A szabályozó mátrix számítása

A visszacsatolás miatt

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (55)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (56)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x) \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{r} \quad (57)$$

Ebben a feladatrészben tehát a referencia bemenetre nézve a bemeneti mátrix nem változik, az új rendszer-mátrix pedig $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_x$. A \mathbf{K}_x mátrixot a kívánt pólusok alapján kell megválasztani a következőképpen. a kívánt pólusok legyenek.

$$\tilde{p}(s) = s^2 + a_1 s + a_0 \quad (58)$$

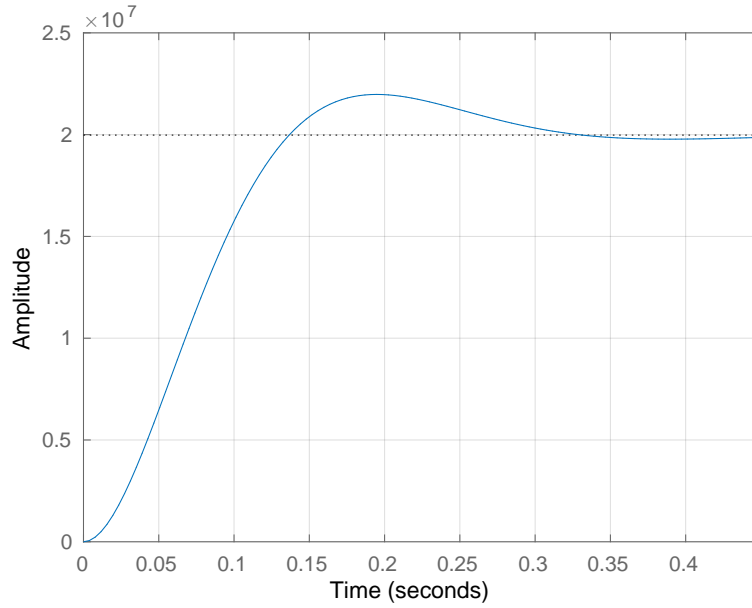
$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_1 T_2} - k_1 & -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} - k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Ebből a keresett mátrix

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,98 \cdot 10^5 & -7278,6 \end{bmatrix}. \quad (60)$$

c. Ugrásfüggvény

Az üresjáratú szögsebesség $\omega_{\text{load}} = 5860 \text{ rpm} = 932.648 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Az ugrásválaszt a rendszermátrixok ismeretében a MATLAB `step` függvénye rajzolja ki.



16. ábra. A rendszer ugrásválasza

d. Állandósult érték

Az állapottér rendszerünket írjuk vissza MATLAB segítségével átviteli függvény alakra (W_{cl}), amivel könnyen tudunk állandósult értéket számolni. A bemenet legyen $X = \frac{\omega_{noload}}{s}$, a rendszer válasz $Y = W_{cl}X$.

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 2 \cdot 10^7$.

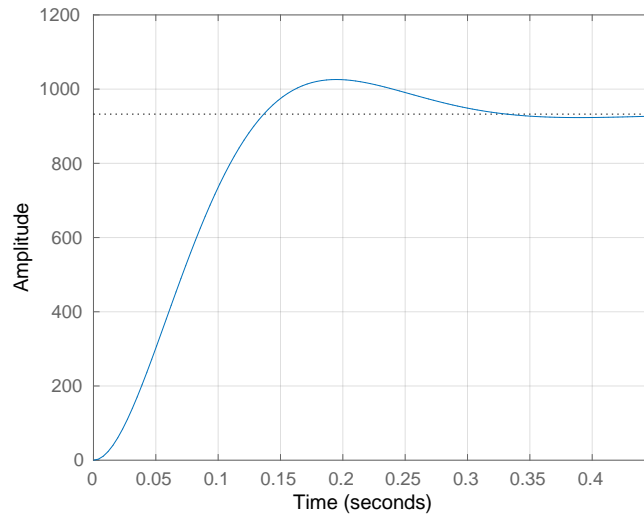
e. Alapkompenzáció számítása

Ha nincs statikus alapjelkompenzáció, vagyis $K_{rx} \equiv 0$, akkor éljünk a $K_{ru} := K_r$ jelöléssel, az érthetőség kedvéért.

Most állítsuk be a K_r mátrixot úgy, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} y = r$ igaz legyen. Ezt a következő összefüggés adja meg:

$$K_r = - \left(C \tilde{A}^{-1} B \right)^{-1} = \left[4,6684 \cdot 10^{-5} \right]. \quad (61)$$

f. Alapjelkompenzált ugrásválasz



17. ábra. A rendszer ugrásválasza alapjelkompenzálással

g. Állandósult érték

A 6.d. részfeladathoz hasonló módon járunk el. A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 932,648$.

h. Statikus alapjelkompenzáció

Most legyen \mathbf{K}_{rx} nullától különböző. Ekkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rx} \\ \mathbf{K}_{ru} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,17 \cdot 10^{-7} \\ 0 \\ 0,0582 \end{bmatrix}. \quad (62)$$

i. Statikus alapjelkompenzált ugrásválasz

Írjuk fel a rendszer átviteli függvényét r -től y -ig.

$$\mathbf{u} = (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} - \mathbf{K}_x \mathbf{x} \quad (63)$$

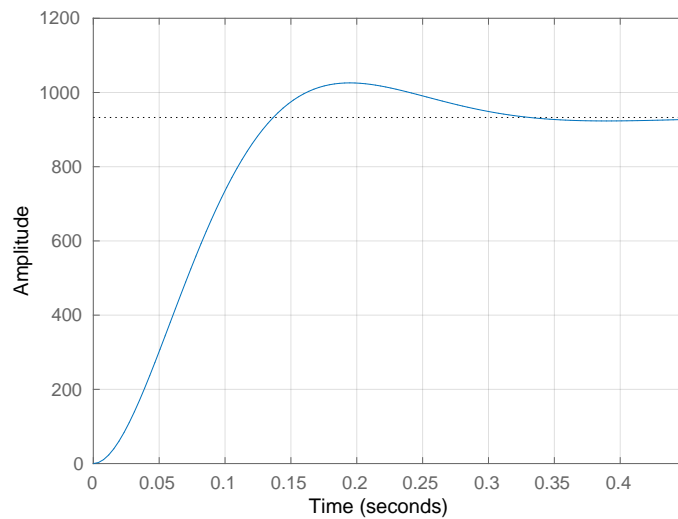
$$\mathbf{x} = \frac{1}{s} (\mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{A} \mathbf{x}) \quad (64)$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{s} (\mathbf{B} (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} + (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x) \mathbf{x}) \quad (65)$$

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{s} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{K}_x) \right)^{-1} \frac{1}{s} \mathbf{B} (\mathbf{K}_{ru} + \mathbf{K}_x \mathbf{K}_{rx}) \mathbf{r} \quad (66)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} = \boxed{\frac{400}{s^2 + 23,646s + 400}} \quad (67)$$

Az egységugrás válasz ebből a szokásos módon számítható.



18. ábra. A rendszer ugrásválasza statikus alapjelkompenzációval

j. Állandósult érték

A végérték-tétel alapján az állandósult szögsebesség $\omega_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} sY = 932,648$.

Hivatkozások

[1] DC motor adatlapja

<https://www.maxongroup.com/maxon/view/product/motor/dcmotor/amax/amax32/236671>