

Formulario CPSM

Antonio

Giugno 2023

Blocco 1

Assiomi della probabilità

1. $P(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Se $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ è una successione di eventi incompatibili di \mathcal{F} , cioè una famiglia di eventi di \mathcal{F} tale che:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j < 1, 2, \dots \text{ con } i \neq j \text{ allora}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

Fatto 1

Se $A \subset B$ possiamo esprimere B come $B = A \cup (\bar{A} \cap B)$ da cui deriva $P(B) = P(A) + P(\bar{A} \cap B)$

Fatto 2

Se $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

Fatto 3

- $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$
- $\bar{A} = \bar{A} \cap \Omega = \bar{A} \cap (B \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$
- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Disuguaglianza di Boole

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

Teorema

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ con A_1 e A_2 non incompatibili

Proposizione

- $P(A_1) = 0 \implies P(A_1 \cap A_2) = 0, P(A_1 \cup A_2) = P(A_2)$
- $P(A_1) = 1 \implies P(A_1 \cap A_2) = P(A_2), P(A_1 \cup A_2) = 1$

Indipendenza

Siano A e B eventi di \mathcal{F} . Si dicono indipendenti se risulta:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Se $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$, dato un altro evento B si ha che A e B sono indipendenti.

Se A e B sono indipendenti:

1. A e \bar{B} lo sono
2. \bar{A} e B lo sono
3. \bar{A} e \bar{B} lo sono

Se A e B sono indipendenti allora:

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) \text{ anche per più eventi}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \cdot \frac{N(\Omega)}{N(B)}$$

Teorema

1. $P(A|B) \geq 0 \forall A \in \mathcal{F}$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Se $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ è una successione di eventi incompatibili di \mathcal{F} , allora

$$A_i \cap A_j = \emptyset \forall i, j < 1, 2, \dots \text{ con } i \neq j \text{ allora}$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n | B\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n | B)$$

Osservazione

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Proposizione

Se A e B sono eventi di \mathcal{F} con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ allora

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(A|B) = P(A)$
3. $P(B|A) = P(B)$

Legge delle alternative

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme completo di alternative e sia A un evento di \mathcal{F} . Risulta:

$$P(A) = \sum_{n=1}^k P(A|B_n)P(B_n)$$

Esempio per due: $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

Teorema

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme di alternative per l'evento $B \in \mathcal{F}$ e sia A un evento di \mathcal{F} . La probabilità A condizionata da B è esprimibile come

$$P(A|B) = \sum_{n=1}^k P(A|B_n)P(B_n|B)$$

Legge di Bayes

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme di eventi incompatibili di \mathcal{F} : $P(B_n > 0)$ per $n = 1, 2, \dots, k$ e sia $A \in \mathcal{F}$ un evento con $P(A) > 0$.

Se $A \subset \bigcup_{n=1}^k B_n$ per $n = 1, 2, \dots, k$ si ha

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_{i=1}^k P(A|B_i)P(B_i)}$$

Blocco 2

Variabili aleatorie

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$
- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$

Funzione di distribuzione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Altre probabilità che x appartenga a un qualsiasi Boreliano:

1. $P(X < x) = F_X(x^-)$
2. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
3. $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1)$
4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
5. $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1^-)$
6. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$
7. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
8. $P(X \geq x) = 1 - F_X(x^-)$

Variabili aleatorie discrete

$$P(X \in S_x) = \sum_{r: x_r \in S_x} P(X = x_r) = 1$$

$P(X = x_r)$ definisce la funzione di probabilità

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_n & x = x_n (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione di distribuzione può essere espressa come

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n: x_n \leq x} p_n \quad (x \in \mathbb{R})$$

Variabili aleatorie assolutamente continue

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

$f_X(y)$ = densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Proprietà

- $P(X = x) = 0$
- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- $P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(x) dx$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X \in B) = \int_B f_X(z) dz$

Valore medio

Variabile aleatoria discreta:

$$E(X) = \sum_{r: x_r \in S} x_r p_X(x_r)$$

Variabile aleatoria assolutamente continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Momenti di una variabile aleatoria

Momento di ordine n :

$$\mu_n = E(X^n) \implies \mu_n = \sum_{r: x_r \in S} x_r^n p_X(x_r)$$

Momento centrale:

$$\overline{\mu_n} = E[(X - E(X))^n] \implies \overline{\mu_n} = \sum_{r: x_r \in S} (x_r - \mu_1)^n p_X(x_r)$$

Varianza

$$Var(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{r: x_r \in S} (x_r - \underbrace{\mu_1}_{\text{media}})^2 p_X(x_r)$$

Variabili aleatorie discrete (distribuzione uniforme)

Sia $x = 1, 2, \dots, n$ tutti con la stessa probabilità $X \sim \mathcal{U}_d(n)$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{n} & k \leq x < k+1 \ (k = 1, 2, \dots, n-1) \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Se $n = 1$ allora è una distribuzione degenere e vale

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Blocco 3

Vettori aleatori

- $\{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{F}$
- $\{\omega \in \Omega : (X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n)\} = \bigcap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x_i\} \in \mathcal{F}$

Funzione di distribuzione congiunta o marginale

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vettore aleatorio $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} F_{X_1, \dots, X_n}(X_1, \dots, X_n) &= \\ P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) &= \\ P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1, \dots, X_n(\omega) \leq x_n\}) & \end{aligned}$$

Vettori aleatori

Consideriamo un vettore aleatorio bidimensionale

$$F_{X,Y} = P(X \leq x, Y \leq y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Vettori aleatori discreti

$$\exists S = S_1 \times S_2, \text{ con } S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}, S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$$

$$P[(X, Y) \in S] = 1$$

$$\{\omega \in \Omega : (X(\omega), Y(\omega)) \in S\} = \bigcup_{\{i: x_i \in S_1\}} \bigcup_{\{j: y_j \in S_2\}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}$$

$$\text{quindi per l'incompatibilit\`a} = \sum_{\{i: x_i \in S_1\}} \sum_{\{j: y_j \in S_2\}} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

Funzione di probabilit\`a congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} p_{i,j} & x = x_i, y = y_j \quad (i, j = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$P\{(X, Y) \in D\} = \sum_{(x,y) \in D} P_{X,Y}(x, y)$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\{i: x_i \leq x\}} \sum_{\{j: y_j \leq y\}} p_{i,j} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Funzioni di probabilit\`a marginali

$$\{Y = y\} = \bigcup_{i: x_i \in S_1} \{X = x_i, Y = y\}$$

$$\{X = x\} = \bigcup_{j: y_j \in S_2} \{X = x, Y = y_j\}$$

$$p_Y(y) = \sum_{\{i: x_i \in S_1\}} p_{X,Y}(x_i, \underbrace{y}_{\text{fissata}}) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$p_X(x) = \sum_{\{j: y_j \in S_2\}} p_{X,Y}(\underbrace{x}_{\text{fissata}}, y_j) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Da $P_{X,Y}(x, y)$ ricaviamo le due funzioni e non viceversa

Vettori aleatori assolutamente continui

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^x du \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u,v) dv$$
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\delta^2}{\delta_x \delta_y} F_{X,Y}(x,y)$$

Proprietà

$$f_{X,Y}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v) dv = 1$$

$$P\{(X,Y) \in D\} = \int_D f_{X,Y}(u,v) dv$$

Densità di probabilità marginali

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v) dv \right] du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,v) du \right] dv \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,v) dv \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u,y) du \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Indipendenza vettori aleatori

Siano X_1, \dots, X_n si ha

$$P(X_1 \in B, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in B_n)$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) =$$
$$P(X_1 \leq x_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

Indipendenza vettori aleatori discreti

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot p_{X_n}(x_n)$$

Indipendenza vettori aleatori continui

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

Valore medio e momento

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variabile aleatoria e $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = g(X)$

1. Se X è discreta

$$E[g(x)] = \sum g(x) p_X(x) = \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} g(x_1, \dots, x_n) P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

2. Se X è assolutamente continua

$$E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

Teorema

$$X = (X_1, \dots, X_n) \wedge c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \implies E(c_1 X_1 + \dots + c_n X_n) = c_1 E(X_1) + \dots + c_n E(X_n)$$

- Se le componenti $X = X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti
 - $E(X_1, \dots, X_n) = E(X_1) \cdot \dots \cdot E(X_n)$
 - $Var(X_1, \dots, X_n) = E(X_1^2) \cdot \dots \cdot E(X_n^2) - [E(X_1)]^2 \cdot \dots \cdot [E(X_n)]^2$

Momento misto di ordine i, j

$$\mu_{i,j} = E(X^i Y^j)$$

Momento misto centrale di ordine i, j

$$\overline{\mu}_{i,j} = E[(X - E(X))^i (Y - E(Y))^j]$$

- Se $i = 0$
 - $\mu_{0,j} = E(Y^j), \overline{\mu}_{0,j} = E[(Y - E(Y))^j]$
- Se $j = 0$
 - $\mu_{i,0} = E(X^i), \overline{\mu}_{i,0} = E[(X - E(X))^i]$

Covarianza

$$Cov(X, Y) = \overline{\mu_{1,1}} = E[(X - E(X)) - (Y - E(Y))]$$

Sia (X, Y) un vettore aleatorio

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(aX + b, cY + d) = ac Cov(X, Y)$
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Se (X, Y) sono indipendenti allora $Cov(X, Y) = 0$ (non vale il viceversa)

Coefficiente di correlazione

$$\varrho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$
$$|\varrho(X, Y)| \leq 1$$

Valore medio utile

$$E(X_1 \cdot \dots \cdot X_n) = \sum_{x_1 \in S_1} \dots \sum_{x_n \in S_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$