# Blocco 1

## Fatto

Se $A \subset B$ possiamo esprimere $B$ come $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ da cui deriva $P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$

Se $A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$

- $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
- $\overline{A} = \overline{A} \cap \Omega = \overline{A} \cap (B \cup \overline{B}) = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
- $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

## Teorema

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

con $A_1$ e $A_2$ non incompatibili

## Proposizione

- $P(A_1) = 0 \implies P(A_1 \cap A_2) = 0,\ P(A_1 \cup A_2) = P(A_2)$
- $P(A_1) = 1 \implies P(A_1 \cap A_2) = P(A_2),\ P(A_1 \cup A_2) = 1$

## Indipendenza

Siano $A$ e $B$ eventi di $\mathscr{F}$. Si dicono indipendenti se risulta:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Se $P(A) = 0$ o $P(A) = 1$, dato un altro evento $B$ si ha che $A$ e $B$ sono indipendenti.

Se $A$ e $B$ sono indipendenti allora:

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})$ anche per più eventi

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

## Probabilità condizionata

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \cdot \frac{N(\Omega)}{N(B)}$$

## Teorema

1. $P(A|B) \geq 0\ \forall A \in \mathscr{F}$
2. $P(\Omega|B) = 1$
3. Se $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ è una successione di eventi incompatibili di $\mathscr{F}$, allora

   $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall\ i, j < 1, 2, \dots$ con $i \neq j$ allora

   $$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n | B = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n|B)\right)$$

## Osservazione

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

## Proposizione

Se $A$ e $B$ sono eventi di $\mathscr{F}$ con $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$ allora

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(A|B) = P(A)$
3. $P(B|A) = P(B)$

## Legge delle alternative

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme completo di alternative e sia $A$ un evento di $\mathscr{F}$. Risulta:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{k} P(A|B_n)P(B_n)$$

Esempio per due: $P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})$

## Teorema

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme di alternative per l'evento $B \in \mathscr{F}$ e sia $A$ un evento di $\mathscr{F}$. La probabilità $A$ condizionata da $B$ è esprimibile come

$$P(A|B) = \sum_{n=1}^{k} P(A|B_n)P(B_n|B)$$

## Legge di Bayes

Sia $\{B_n : n = 1, 2, \dots, k\}$ un insieme di eventi incompatibili di $\mathscr{F}$: $P(B_n > 0)$ per $n = 1, 2, \dots, k$ e sia $A \in \mathscr{F}$ un evento con $P(A) > 0$.

Se $A \subset \bigcup_{n=1}^{k} B_n$ per $n = 1, 2, \dots, k$ si ha

$$P(B_n|A) = \frac{P(B_n)P(A|B_n)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i)P(A|B_i)}$$

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)} = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)P(B_i)}$$



# Blocco 2

## Funzione di distribuzione

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Altre probabilità che $x$ appartenga a un qualsiasi Boreliano:

1. $P(X < x) = F_X(x^-)$
2. $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$
3. $P(x_1 < X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1)$
4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$
5. $P(x_1 \leq X < x_2) = F_X(x_2^-) - F_X(x_1^-)$
6. $P(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1^-)$
7. $P(X > x) = 1 - F_X(x)$
8. $P(X \geq x) = 1 - F_X(x^-)$

## Variabili aleatorie discrete

$$P(X \in S_x) = \sum_{r:x_r \in S_x} P(X = X_r) = 1$$

$P(X = x_r)$ definisce la funzione di probabilità

$$p_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} p_n & x = x_n (n = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La funzione di distribuzione può essere espressa come

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{n:x_n \leq x} pn \ (x \in \mathbb{R})$$

## Variabili aleatorie assolutamente continue

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy$$

$f_X(y) =$ densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

### Proprietà

- $P(X = x) = 0$
- $f_X(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$
- $P(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(x)dx$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx = F_X(b) - F_X(a)$
- $P(X \in B) = \int_{B} f_X(z)dz$

## Valore medio

Variabile aleatoria discreta:

$$E(X) = \sum_{r:x_r \in S} x_r p_X(x_r)$$

Variabile aleatoria assolutamente continua:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

## Momenti di una variabile aleatoria

Momento di ordine $n$:

$$\mu_n = E(X^n) \implies \mu_n = \sum_{r:x_r \in S} x_r^n p_X(x_r)$$

Momento centrale:

$$\overline{\mu_n} = E[(X - E(X))^n] \implies$$
$$\overline{\mu_n} = \sum_{r:x_r \in S} (x_r - \mu_1)^n p_X(x_r)$$

## Varianza

$$Var(x) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{r:x_r \in S} (x_r - \underbrace{\mu_1}_{\text{media}})^2 p_X(x_r)$$

## Variabili aleatorie discrete (distribuzione uniforme)

Sia $x = 1, 2, \dots, n$ tutti con la stessa probabilità $X \sim \mathscr{U}_d(n)$

$$P_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{k}{n} & k \leq x < k + 1 \ (k = 1, \dots, n - 1) \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

Se $n = 1$ allora è una distribuzione degenere e vale

$$E(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$Var(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

# Blocco 3

## Funzione di distribuzione congiunta o marginale

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vettore aleatorio $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$

$$F_{X_1,\dots,X_n}(X_1, \dots, X_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = P(\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \le x_1, \dots, X_n(\omega) \le x_n\})$$

## Vettori aleatori discreti

$$\exists\ S = S_1 \times S_2, \text{ con } S_1 = \{x_1, \dots, x_n\}, S_2 = \{y_1, \dots, y_n\}$$

$$P[(X, Y) \in S] = 1$$

$$\sum_{\{i:x_i \in S_1\}} \sum_{\{j:y_j \in S_2\}} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

### Funzione di probabilità congiunta

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} p_{i,j} & x = x_i, y = y_j \ (i, j = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{\{i:x_i \le x\}} \sum_{\{j:y_j \le j\}} p_{i,j}\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

### Funzioni di probabilità marginali

$$p_Y(y) = \sum_{\{i:x_i \in S_1\}} p_{X,Y}(x_i, \underbrace{y}_{\text{fissata}})\ \forall\ y \in \mathbb{R}$$

$$p_X(x) = \sum_{\{j:y_j \in S_2\}} p_{X,Y}(\underbrace{x}_{\text{fissata}}, y_j)\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

Da $P_{X,Y}(x, y)$ ricaviamo le due funzioni e non viceversa

## Vettori aleatori assolutamente continui

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} du \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) dv$$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\delta^2}{\delta_x dy} F_{X,Y}(x, y)$$

### Proprietà

$$f_{X,Y}(x, y) \ge 0\ \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv = 1$$

### Densità di probabilità marginali

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[ \int_{\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) dv \right] du\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \left[ \int_{\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, v) du \right] dv\ \forall\ y \in \mathbb{R}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, v) dv\ \forall\ x \in \mathbb{R}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(u, y) du\ \forall\ y \in \mathbb{R}$$

## Indipendenza vettori aleatori

Siano $X_1, \dots, X_n$ si ha

$$P(X_1 \in B, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot\ \dots\ \cdot P(X_n \in B_n)$$

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = P(X_1 \le x_1) \cdot\ \dots\ \cdot P(X_n \le x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot\ \dots\ \cdot F_{X_N}(x_n)$$

### Indipendenza vettori aleatori discreti

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{X_1}(x_1) \cdot\ \dots\ \cdot p_{X_n}(x_n)$$

### Indipendenza vettori aleatori continui

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot\ \dots\ \cdot f_{X_n}(x_n)$$

## Valore medio e momento

Sia $X = (X_1, \dots, X_n)$ una variabile aleatoria e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ Y = g(X)$

1. Se $X$ è discreta

$$E[g(x)] = \sum g(x) p_X(x) = \sum_{x_1 \in S_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n} g(x_1, \dots, x_n) \cdot P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$

2. Se $X$ è assolutamente continua

$$E[g(x)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \dots, x_n) \cdot f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$



## Teorema

$X = (X_1, \dots, X_n) \land c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \implies E(c_1 X_1 + \dots + c_n X_n) = c_1 E(X_1) + \dots + c_n E(X_n)$

- Se le componenti $X = X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti
  - $E(X_1, \dots, X_n) = E(X_1) \cdot\ \dots\ \cdot E(X_n)$
  - $Var(X_1, \dots, X_n) = E(X_1^2) \cdot\ \dots\ \cdot E(X_n^2) - [E(X_1)]^2 \cdot\ \dots\ \cdot [E(X_n)]^2$

## Momento misto di ordine $i, j$

$$\mu_{i,j} = E(X^i Y^j)$$

## Momento misto centrale di ordine $i, j$

$$\overline{\mu_{i,j}} = E[(X - E(X))^i (Y - E(Y))^j]$$

- Se $i = 0$
  - $\mu_{0,j} = E(Y^j),\ \overline{\mu_{0,j}} = E[(Y - E(Y))^j]$
- Se $j = 0$
  - $\mu_{i,0} = E(X^i),\ \overline{\mu_{i,0}} = E[(X - E(X))^i]$

## Covarianza

$Cov(X, Y) = \overline{\mu_{1,1}} = E[(X - E(X)) - (Y - E(Y))]$

Sia $(X, Y)$ un vettore aleatorio

- $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$
- $Cov(aX + b, cY + d) = acCov(X, Y)$
- $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Se $(X, Y)$ sono indipendenti allora $Cov(X, Y) = 0$ (non vale il viceversa)

## Coefficiente di correlazione

$$\varrho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)\,Var(Y)}} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

$$|\varrho(X, Y)| \le 1$$

## Valore medio utile

$$E(X_1 \cdot\ \dots\ \cdot X_n) = \sum_{x_1 \in S_1} \cdots \sum_{x_n \in S_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$$