# DIKTAT PRAKTIKUM
# KOMPUTASI NUMERIK


**LABORATORIUM KOMPUTER**

**PROGRAM STUDI FISIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS PADJADJARAN**


**2023**

# DAFTAR ISI

# Modul – 1

# Deret Taylor

## 1.1. Tujuan

Mahasiswa diharapkan mampu merubah suatu bentuk persamaan matematis ke dalam deret Taylor. Selain itu, mahasiswa juga diharapkan mampu membuat program yang mengimplementasikan deret Taylor.

## 1.2. Teori

Metode numerik merupakan penyelesaian persamaan matematis secara pendekatan/aproksimasi karena penyelesaian secara analitis (eksak) belum dapat atau sulit untuk dipecahkan. Solusi yang dihasilkan dalam metode numerik akan berupa suatu nilai dan bukan merupakan suatu bentuk fungsi. Salah satu dasar yang digunakan untuk melakukan pendekatan secara numerik adalah deret Taylor.

Jika diketahui sebuah fungsi $f(x)$ (misalnya $sin\,x$ atau $ln(\cos^2 x)$), dapatkah kita merepresentasikan fungsi tersebut sebagai deret pangkat dalam $x$ atau, lebih umumnya dalam $x - a$? Bentuk umum dari deret Taylor dituliskan pada Persamaan 1.1.

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1.1)$$

Sebuah fungsi tidak dapat direpresentasikan oleh lebih dari satu deret pangkat dalam $x - a$. Representasi deret pangkat dari sebuah fungsi dalam $x - a$ disebut deret Taylor. Jika $a = 0$, maka deret yang bersesuaian disebut dengan deret Maclaurin. Apabila suatu $x_i$memiliki nilai, maka deret tersebut dapat digunakan untuk memprediksi nilai $x_{i+1}$. Nilai dari fungsi pada titik yang baru $f(x_{i+1})$ akan dianggap mendekati nilai fungsi pada titik yang lama $f(x_i)$. Prediksi dengan suku pertama disebut pendekatan orde nol. Apabila digunakan pendekatan hingga suku kedua, maka bentuk yang diperoleh seperti Persamaan 1.2.

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + E \qquad (1.2)$$

dengan E merupakan kesalahan perhitungan.

Penyelesaian secara numerik merupakan metode pendekatan yang hasilnya diharapkan mendekati penyelesaian secara analitik. Perbedaan hasil diantara kedua hal tersebut dapat dikatakan sebagai kesalahan atau *error* yang dituliskan dalam bentuk lain, yaitu pada Persamaan 1.3.

$$\varepsilon = Nilai\ sesungguhnya\ (NS) - Nilai\ Pendekatan\ (NP) \tag{1.3}$$

Istilah yang sering digunakan dalam perhitungan numerik adalah kesalahan relatif. Persamaan 1.4merupakan perumusan kesalahan relatif yang akan lebih sering digunakan sebagai pembatas dalam menghentikan proses iterasi atau tingkat kesalahan relatif yang diinginkan. Tingkat kesalahan relatif yang kecil akan menentukan akurasi dari hasil perhitungan pendekatan.

$$\varepsilon_r = \frac{NP_{baru} - NP_{lama}}{NP_{baru}} \tag{1.4}$$

## 1.3. Percobaan

Lakukan ekspansi deret Taylor/Maclaurin dari beberapa fungsi di bawah ini dan buatlah program untuk menghitungnya.

a. $f(x) = sin\ x$ di sekitar $x = 0$ dengan tingkat kesalahan $\varepsilon = 0.0000001$
b. $f(x) = ln\ x$ di sekitar $x = 1$ hingga suku ke-8
c. $f(x) = e^x$ di sekitar $x = 0$ dengan tingkat kesalahan $\varepsilon = 0.000000001$

Beberapa hal yang perlu dipelajari sebelum praktikum:

- Mengetahui istilah-istilah berikut: *round-off error*, *truncation error*, dan *progressive error*
- Mamahami alasan mengapa deret Taylor menjadi salah satu komponen utama dalam penyelesaian masalah menggunakan metode numerik

## 1.4. Tugas Akhir

1. Mengapa metode numerik menjadi penting untuk dipelajari? Padahal hasil yang dihasilkan dari metode tersebut masih memiliki kesalahan. Jelaskan!
2. Hampiri persamaan berikut, yaitu

$$f(x) = -0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

   Untuk $0 \leq x \leq 1$ menggunakan deret Taylor sampai suku ke-0, suku ke-1, suku ke-2, suku ke-3 dan suku ke-4 dengan menggunakan nilai nol sebagai basis bilangan. Bandingkan hasil pendekatan numerik dengan hasil perhitungan analitik, hitung error numeriknya.

3. Hitung fungsi

$$f(x) = \ln\,(\cos(x)$$

   di titik x = π/4 dengan pendekatan deret Taylor sampai suku ke-2, suku ke-3 dan suku ke-4. Bandingkan hasilnya dengan hasil perhitungan kalkulator dan tentukan error numeriknya

# Modul – 2

# Solusi Persamaan Non-linier

## 2.1. Tujuan

Mahasiswa diharapkan mampu menemukan solusi persamaan non-linier menggunakan metode terbuka dan tertutup, mengetahui bagaimana menentukan laju konvergensi setiap metode, serta mengetahui perbedaan dan cara penggunaan setiap metode.

## 2.2. Teori

Persamaan non-linier banyak digunakan dalam bidang teknik maupun sains. Secara umum, semua persamaan pada permasalahan dalam bentuk ini akan diubah menjadi bentuk $f(x) = 0$, dengan $f$ yang merupakan bentuk fungsi non-linier dari variabel x. Contoh dari bentuk fungsi non-linier adalah :

a. $y = f(x) = x^2 + 2x^3 + 2 = 0$
b. $y = f(x) = \frac{20.98}{x} = 0$

Bentuk umum dari $f(x) = 0$ merupakan persamaan dengan variabel tunggal yaitu $x$. Akan tetapi, persamaan non-linier juga dapat terdiri dari variabel ganda (multivariabel) atau lebih dari satu variabel. Nilai dari x pada persamaan $f(x) = 0$ merupakan penyelesaian dari persamaan tersebut yang kemudian disebut sebagai akar persamaan. Sebagai contoh, bentuk persamaan kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ mempunyai akar-akar persamaan dengan bentuk penyelesaian secara analitis dengan menggunakan Persamaan 2.1

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

Metode penyelesaian akar-akar persamaan secara komputasi numerik dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu metode tertutup dan metode terbuka. Setiap metode memiliki karakteristik penggunaan masing-masing serta memiliki kelebihan tersendiri.

### 2.2.1. Metode Tertutup

Salah satu jenis dari metode tertutup adalah metode *bisection*. Tahap pertama metode *bisection* adalah menetapkan nilai sembarang a dan b sebagai batas segmen nilai fungsi yang dicari. Batasan a dan b memberikan harga bagi fungsi $f(x)$ untuk $x = a$ dan $x = b$. Langkah selanjutnya adalah memeriksa apakah $f(a) \times f(b) < 0$. Apabila terpenuhi syarat tersebut, berarti terdapat akar fungsi dalam segmen tinjauan.

Dengan rumusan $m = \frac{a+b}{2}$, diperiksa apakah nilai mutlak $f(m) < 10^{-6}$ (batas simpangan kesalahan). Jika benar, nilai $x = m$ adalah solusi yang dicari. Jika tidak, ditetapkan batasan baru dengan mengganti nilai $b = m$ apabila $f(a) \times f(m) < 0$, dan mengganti $a = m$ bila $f(a) \times f(m) > 0$. Begitu seterusnya hingga kondisi $f(m) < 10^{-6}$ terpenuhi.

Dalam proses perulangan, khususnya menentukan nilai $f(x) \approx 0$, suatu kriteria untuk menghentikan proses tersebut akan diperlukan. Kriteria tersebut antara lain:

1. Jumlah iterasi maksimum.
2. Tingkat kesalahan maksimum atau nilai $f(x)$ minimum.

### 2.2.2. Metode Terbuka

#### a. Metode Iterasi Titik Tetap

Metode ini menawarkan pencarian akar-akar persamaan dari persamaan non-linier dengan metode iterasi. Tahap pertama metode ini adalah menyusun persamaan $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$. Lalu, bentuklah menjadi prosedur iterasi $x_{r+1} = g(x_r)$ dan tebaklah sebuah nilai awal $x_0$, lalu hitung nilai $x_1$, $x_2$, $x_3$, …, yang akan konvergen ke akar sejati $s$ sehingga $f(s) = 0$ dan $s = g(s)$ atau diperoleh hasil yang divergen. Kondisi berhentinya iterasi dinyatakan bila memenuhi Persamaan 2.2 atau Persamaan 2.3 jika menggunakan perumusan kesalahan relatif.

$$|x_{r+1} - x_r| < \epsilon \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}}\right| < \epsilon \tag{2.3}$$

Sebagai contoh, untuk mendapatkan akar persamaan $x^3 - 3x - 20 = 0$, langkah pertama yang dilakukan adalah mengubah persamaan dalam bentuk $x = g(x)$. Perubahan ini dapat dilakukan melalui empat cara :

1. $x = (3x + 20)^{1/3}$
2. $x = (x^3 - 20)/3$
3. $x = 20/(x^2 - 3)$
4. $x = \left(3 + \frac{20}{x}\right)^{1/2}$

Semua persamaan di atas harus diuji secara numerik yang akan menghasilkan solusi yang sama dengan persamaan $x^3 - 3x - 20 = 0$.

### b. Metode Newton-Raphson

Salah satucara untuk menentukan akar persamaan non-linier adalah dengan menggunakan metode Newton-Raphson yang dasarnya menggunakan uraian deret Taylor. Pada mulanya, nilai awal $x_i$ akan diperkirakan, kemudian titik tersebut dipotongkan dengan kurva dari persamaan non-linier yang diketahui. Selanjutnya garis singgung ditarik dari titik tersebut sehingga memotong sumbu x di titik $x_{i+1}$. Garis singgung tersebut pada dasarnya merupakan tangen atau *slope* pada titik yang ditentukan sebelumnya. *Slope* merupakan turunan pertama dari $f(x_i)$ sehingga hubungan yang didapatkan adalah

$$f'(x) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})} \tag{2.4}$$

Apabila Persamaan 2.4 diatur kembali, akan menghasilkan Persamaan 2.5 yang disebut dengan persamaan Newton-Raphson.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.5}$$

## 2.3. Percobaan

Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk menentukan solusi dari persamaan non-linier berikut menggunakan metode *Bisection*, iterasi titik tetap, dan Newton-Raphson :

a. $x^2 - 3x - 10 = 0$ untuk $-1 \leq x \leq 1$

b. $\sin(x) = 0$ untuk $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

c. $x^3 - 3x - 20 = 0$ untuk $1 \leq x \leq 4$

d. $e^{-2x} - 4x$ untuk $0 \leq x \leq 1$

e. $xe^{-x} + \cos(2x)$ untuk $0 \leq x \leq 1$ dan $1 \leq x \leq 2$ dan $-1 \leq x \leq 1$

## 2.4. Tugas Akhir

1. Turunkan Persamaan 2.5 mengunakan pendekatan deret Taylor.
2. Hitunglah berapa iterasi yang diperlukan untuk mencapai konvergensi dalam mencari solusi persamaan $x^2 - 3x - 10 = 0$ menggunakan metode *Bisection* dengan tingkat kesalahan yang diperbolehkan bernilai $10^{-3}$ serta nilai $a = 1$ dan $b = 3{,}5$. Bandingkan dengan hasil yang didapat jika dikerjakan secara analitik menggunakan Persamaan 2.1
3. Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk menentukan solusi dari persamaan non-linier pada bagian Percobaan menggunakan metode Secant dan Regula Falsi.
4. Buatlah tabel perbandingan untuk metode *Bisection*, iterasi titik tetap, Newton-Raphson, Secant, dan Regula Falsidalam menentukan solusi persamaan $e^{-2x} - 4x = 0$ dengan parameter yang sama (*error*, toleransi, batas/tebakan awal, dan hasilnya apakah konvergen/divergen)untuk setiap metode. Sertakan pula jumlah langkah/jumlah iterasiyang terjadi saat melakukan proses perhitungan. Kemudian buatlah analisa berdasarkan tabel tersebut.

# Modul – 3

# Metode Iterasi Untuk Sistem Persamaan Linier

## 4.1. Tujuan

Mahasiswa diharapkan mampu menentukan solusi dari sistem persamaan linier menggunakan metode iterasi serta mampu membedakan penggunaan metode langsung dan metode tidak langsung dalam menentukan solusi persamaan linier. Selain itu, mahasiswa juga diharapkan mampu menentukan laju konvergensi dari metode iterasi yang digunakan.

## 4.2. Teori

Sistem persamaan linier (SPL) terdiri dari banyak persamaan, metode langsung seperti eliminasi Gauss menjadi tidak efisien jika digunakan dalam perhitungan komputasi karena ukuran matriks yang besar. Untuk permasalahan seperti ini, metode iterasi menjadi lebih efisien untuk digunakan dalam perhitungan komputasi. Bentuk umum dari SPL ditunjukkan oleh Persamaan 4.1.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Persamaan 4.1 dapat juga dinyatakan dalam bentuk matriks menjadi Persamaan 4.2

$$Ax = b \tag{4.2}$$

dengan $A$ merupakan matriks yang terdiri dari koefisien-koefisien pada SPL dan berukuran $n \times n$, $x$ merupakan matriks vektor yang merupakan solusi dari SPL, serta matriks $b$ yang terdiri dari nilai-nilai pada sisi kanan SPL. Elemen-elemen pada matriks $A$ dan vektor$b$mempunyai nilai yang didapat dari formulasi permasalahan sedangkan elemen-elemen pada vektor$x$ merupakan jawaban permasalahan yang harus dihitung.

Metode iterasi melibatkan sebuah proses yang mengonversi sistem $Ax = b$ menjadi sistem ekuivalen $x = Tx + c$, untuk matriks $T$ dan vektor$c$ yang tetap. Metode ini diawali dengan aproksimasi awal $x^{(0)}$ untuk mencapai solusi $x$ dengan menggenerasi vektor barisan $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ yang konvergen terhadap $x$, atau dapat ditulis

$$x^k = Tx^{k-1} + c, untuk\ setiap\ k = 1, 2, 3, \dots \tag{4.3}$$

Persamaan 4.3 dapat didekomposisi menjadi Persamaan 4.4.

$$A = L + D + U \tag{4.4}$$

dengan $L$ merupakan matriks *lower triangular* dengan nilai nol pada diagonal, $D$ merupakan matriks diagonal dengan elemen yang tidak nol, dan $U$ merupakan matriks *upper triangular* dengan nilai nol pada elemen diagonalnya.

### 4.2.1. Metode Iterasi Jacobi

Metode iterasi Jacobi dilakukan dengan mengubah Persamaan 4.2 menjadi Persamaan 4.3 dengan terlebih dahulu didekomposisikan matriks $A$ sesuai dengan Persamaan 4.4. Metode ini dapat ditulis dalam bentuk matriks menjadi Persamaan 4.5.

$$x^k = D^{-1}(L + U)x^{k-1} + D^{-1}b, dengan\ k = 1, 2, \dots \tag{4.5}$$

Secara komponen, Persamaan 4.5 dapat ditulis menjadi Persamaan 4.6.

$$x_i^k = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j - b_i\right), untuk\ i = 1, 2, \dots, n \tag{4.6}$$

Norm yang sering digunakan adalah $l_\infty$ norm. Sedangkan kriteria konvergensi untuk metode iterasi ditunjukkan oleh Persamaan 4.7.

$$\rho(T) < 1 \tag{4.7}$$

dengan$\rho(T)$ menyatakan spektral radius dari matriks $T$.

### 4.2.2. Metode Iterasi Gauss-Seidel

Metode ini merupakan perbaikan dari metode iterasi Jacobi yang dianggap memiliki laju konvergen yang lambat. Metode ini dapat dilakukan dengan cara yang sama pada metode Iterasi Jacobi, namun dengan mengubah Persamaan 4.5 menjadi Persamaan 4.8.

$$x^k = (D-L)^{-1}Ux^{k-1} + (D-L)^{-1}b, dengan\ k = 1, 2, \ldots \quad (4.8)$$

Secara umum, Persamaan 4.8 dapat ditulis menjadi Persamaan 4.9.

$$x_i^k = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^k - b_i\right), untuk\ i = 1, 2, \ldots, n \quad (4.9)$$

### 4.2.3. Successive Over Relaxation (SOR)

Metode ini diperoleh dengan cara mengekstrapolasi metode iterasi Gauss-Seidel sehinga muncul faktor relaksasi $\omega$. Secara matriks, metode ini dapat dituliskan dalam Persamaan 4.10.

$$x^k = (D-\omega L)^{-1} + [\omega U + (1-\omega)D]x^{k+1} + \omega(D-\omega L)^{-1}b \quad (4.10)$$

Jika nilai $\omega = 1$, maka metode ini akan kembali menjadi metode iterasi Gauss-Seidell.

## 4.3. Percobaan

Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk menentukan solusi persamaan linier dari persamaan-persamaan berikut menggunakan metode Iterasi Jacobi, Gauss-Seidel, dan SOR :

a. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 - 6x_2 &= 9 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} -3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

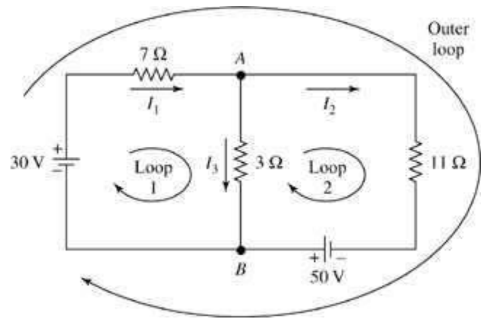
c. $$\begin{aligned} a + 3b - c + 0.3d &= 28 \\ b - 9.8c &= 12 \\ 3a - 4b + 2c &= -2 \\ 1.4a - 2.4c &= 3 \end{aligned}$$

### 4.4. Tugas Akhir

1. Selidiki perbedaan norm jika diaplikasikan pada Percobaan untuk metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel.
2. Apa yang akan terjadi jika kita menggunakan metode SOR untuk menyelesaikan Percobaan dengan nilai $\omega > 2$atau $\omega < 0$?
3. Hitung solusi dari sistem persamaan linier di bawah ini menggunakan cara analitik (eliminasi/substitusi). Lalu hitung solusi dari sistem persamaan linier di bawah menggunakan iterasi Jacobi hingga iterasi ke-2.

$$-3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

4. Tentukan besar masing-masing arus listrik ($I_1$, $I_2$, dan $I_3$) pada rangkaian dibawah ini, dengan menggunakan sistem persamaan linier.



# Modul – 4

# Nilai dan Vektor Eigen

## 3.1. Tujuan

Mahasiswa diharapkan mampu menghitung nilai dan vektor eigen dari suatu matriks bujursangkar menggunakan metode pangkat (*Power Method*) dan metode pangkat inversi (*Invers Power Method*).

## 3.2. Teori

Nilai eigen atau nilai karakteristik dan vektor eigen atau vektor karakteristik yang sesuai dari suatu matriks $N \times N$yaitu A didefinisikan sebagai nilai skalar $\lambda$ dan vektor $\boldsymbol{v}$yang bukan nol dan memenuhi Persamaan 3.1

$$Av = \lambda v \leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0 \; (v \neq 0) \tag{3.1}$$

dengan$(\lambda, \boldsymbol{v})$ disebut sebagai pasangan eigen danada sejumlah N pasangan eigen dari matriks $N \times N$. Bagaimana cara menentukan nilai eigen? Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan, yaitu :

a. Agar Persamaan 3.1 berlaku untuk matriks bukan nol $\boldsymbol{v}$, matriks $[A - \lambda I]$ harus bersifat singular. Artinya, nilai determinan dari matriks $[A - \lambda I]$harus bernilai 0.
b. Determinan dari matriks $[A - \lambda I]$ merupakan deret polynomial derajat N dalam bentuk $\lambda$.

Hal yang pertama kali harus dilakukan untuk menghitung nilai eigen $\lambda_i$ adalah menemukan solusi dari persamaan karakteristik seperti pada Persamaan 3.2.

$$|A - \lambda I| = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{3.2}$$

Lalu substitusikan nilai$\lambda_i$, satu per satu, kedalam Persamaan 3.1 untuk menentukan vektor eigen $\boldsymbol{v_i}$.

### 3.2.1. Metode Pangkat (Power Method)

Secara teoritis, metode pangkat dapat dijelaskan sebagai berikut :

- Untuk matriks persegi A yang berukuran $N \times N$ mempunyai nilai eigen $\lambda_1$, $\lambda_2$, …, $\lambda_N$ dimana $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_N|$ dengan N vektor eigen bebas $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, …, $\boldsymbol{v}_N$, maka ada suatu vektor $\boldsymbol{v}$ yang dapat dituliskan sebagai penjumlahan dari vektor-vektor eigen tersebut.

$$\boldsymbol{v} = C_1\boldsymbol{v}_1 + C_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + C_N\boldsymbol{v}_N = \sum_{i=1}^{N} C_i\boldsymbol{v}_i \tag{3.3}$$

Dengan mengalikan kedua sisi Persamaan 3.3 dengan $A, A^2, A^3, \dots, A^k$dan menggunakan $Av_i = \lambda_i v_i,\ i\ =\ 1, 2, \dots, N$, kita bisa peroleh Persamaan 3.4.

$$A^k\boldsymbol{v} = y^{(k)} = \sum_{i=1}^{N} C_i\lambda_i^k\boldsymbol{v}_i \tag{3.4}$$

Faktorkan nilai eigen terbesar $\lambda_i^k$ keluar

$$A^k\boldsymbol{v} = y^{(k)} = \lambda_1^k\sum_{i=1}^{N} C_i\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k\boldsymbol{v}_i \tag{3.5}$$

Tetapi karena $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ untuk $i\ =\ 1, 2, \dots, N$, jika $k \to \infty$maka $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^k \to 0$dan Persamaan 3.5berubah menjadi Persamaan 3.6.

$$A^k\boldsymbol{v} = y^{(k)} = \lambda_1^k C_1\boldsymbol{v}_1 \tag{3.6}$$

Pada Persamaan 3.6 dengan menggunakan $C_1\ =\ 1$ dapat diekspresikan $C_1\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v_1}$, sehingga diperoleh Persamaan 3.7 untuk nilai salah satu vektor eigen.

$$A^k\boldsymbol{v_1} = y^{(k)} = \lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 \tag{3.7}$$

Setelah $y^{(k)}$ dihitung, $\lambda_1^k$ diambil dari nilai elemen terbesar vektor $y^{(k)}$ sehingga $\boldsymbol{v}_1$ akan mempunyai sebuah elemen unitas. Proses ini terus diulang hingga memenuhi kondisi rasio perbedaan nilai eigen lebih kecil dari toleransi yang diinginkan sesuai dengan Persamaan 3.8.

$$\lambda_1 = \frac{y^{k+1}}{y^k} < \epsilon \tag{3.8}$$

### 3.2.2. Metode Pangkat Inversi (Invers Power Method)

Tujuan dari penggunaan metode pangkat inversi adalah untuk menentukan nilai eigen terkecil dengan menerapkan metode pangkat pada matriks $A^{-1}$. Metode ini digunakan pada kasus dimana matriks A bersifat non singular dan tidak memiliki nilai eigen bernilai nol. Asal pemikiran dari metode ini adalah Persamaan 3.9

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \rightarrow A^{-1}\boldsymbol{v} = \lambda^{-1}\boldsymbol{v} \tag{3.9}$$

Ini berarti bahwa matriks invers $A^{-1}$memiliki nilai-nilai eigen yang merupakan kebalikan dari nilai-nilai eigen matriks A.

$$\lambda_N = \frac{1}{nilai\ eigen\ terbesar\ dari\ A^{-1}} \tag{3.10}$$

### 3.2.3. Spektral Radius

Spektral radius $\rho(A)$ dari matriks $A$ definisikan degan Persamaan 3.11.

$$\rho(A) = \max|\lambda| \tag{3.11}$$

## 3.3. Percobaan

Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk menentukan nilai dan vektor eigen menggunakan metode pangkat serta metode pangkat inversi untuk matriks-matriks berikut:

a. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 20 & -4 & 8 \\ -40 & 8 & -20 \\ -60 & 12 & -26 \end{bmatrix}$

### 3.4. Tugas Akhir

1. Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk mencari invers dari sebuah matriks $3 \times 3$.
2. Hitung nilai dan vektor eigen dari semua matriks yang terdapat pada bagian Percobaan secara analitik menggunakan bantuan persamaan karakteristik.
3. Bagaimana cara menentukan semua nilai eigen dari matriks A yang berukuran $3 \times 3$? (Sebagai catatan: metode pangkat hanya menghitung nilai eigen terbesar sedangkan metode pangkat inversi hanya menghitung nilai eigen terkecil. Bagaimana jika kita ingin menghitung nilai eigen diantara nilai eigen terbesar dan terkecil?) Buatlah program dengan menggunakan bahasa Python untuk menghitung semua nilai eigen dari matriks A yang berukuran $3 \times 3$. (untuk mengujinya bisa menggunakan Matriks dari percobaan di atas)

# Modul – 5

# Interpolasi

## 5.1. Tujuan

Mahasiswa diharapkan mampu menentukan solusi dari permasalahan interpolasi dengan menggunakan metode Polinomial, Lagrange, dan *Newton Forward Difference*, serta mampu membedakan penyelesaian masalah dengan metode interpolasi dan ekstrapolasi.

## 5.2. Teori

Interpolasi digunakan untuk menghubungkan titik data diskrit dengan cara yang dapat diterima sehingga seseorang bisa mendapatkan perkiraan yang beralasan dari suatu titik data diantara data-data yang diberikan. Kurva yang dibentuk oleh proses interpolasi akan selalu melewati seluruh titik data yang ada.

Sebagai ilustrasi, terdapat data tentang jumlah penduduk pada suatu daerah dalam kurun waktu 1950 hingga 2000 dengan pengambilan data setiap 10 tahun. Hal itu dijelaskan pada Tabel 5.1

**Tabel 5.1** Jumlah penduduk di daerah X pada tahun 1950-2000

| Tahun | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Jumlah Penduduk | 34.704 | 69.168 | 97.115 | 148.442 | 211.707 | 264.002 |

Jika dilihat berdasarkan tabel data di atas, akan muncul pertanyaan yang baru bagaimana jika kita ingin mengetahui jumlah penduduk pada tahun 1955 atau pada tahun 1998? Bila hubungan fungsional antara kedua variabel, tahun dan jumlah penduduk, diketahui maka masalah ini tentunya mudah untuk diselesaikan. Tetapi pada umumnya hubungan tersebut tidak diketahui atau bila diketahui maka hanya dalam bentuk umumnya saja dimana koefisien-koefisien dari hubungan fungsional itu tetap tidak diketahui. Dalam situasi seperti ini, biasanya yang dapat dilakukan untuk menentukan solusi permasalahan tersebut adalah menggunakan metode interpolasi. Dengan kata lain, interpolasi mengijinkan kita untuk membuat suatu fungsi pendekatan yang mampu merepresentasikan hubungan antara variabel bebas dan variabel terikat secara pasti. Fungsi pendekatan itu dapat berupa fungsi polynomial maupun fungsi trigonometri. Dasar pemilihan fungsi pendekatan tersebut dapat ditetapkan dengan teorema Weierstrass:

**Teorema I**

Bagi setiap fungsi $f(x)$ kontinu dalam suatu interval $[a,b]$, maka dapat dinyatakan dalam interval tersebut suatu fungsi polynomial $P_n(x)$ dengan suatu derajat ketelitian tertentu sedemikian rupa sehingga $|f(x) - P(x)| < \epsilon$ untuk setiap nilai x dalam $[a,b]$ dimana $\epsilon$ merupakan bilangan positif.

**Teorema II**

Setiap fungsi $f(x)$kontinu periodik$2\pi$ dapat disajikan dalam bentuk fungsi seri trigonometri hingga $g(x) = a_0 + a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots + b_n \cos nx$ dengan $|f(x) - g(x)| < \delta$ untuk $x$ dalam interval $[a,b]$ dimana $\delta$ merupakan bilangan positif.

### 5.2.1. Interpolasi Polinomial dan Polinomial Taylor

Salah satu teknik interpolasi yang sering digunakan untuk menghampiri suatu fungsi kontinu adalah interpolasi polynomial yang dirumuskan dengan Persamaan 5.1.

$$P_n(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \tag{5.1}$$

dengan$n$merupakan bilangan integer non-negatif dan $a_o, a_1, \ldots, a_n$ merupakan konstanta riil.

### 5.2.2. Interpolasi Lagrange

Apabila pengamatan data tidak berjarak sama atau interval antar variabel bebas tidak seragam, perumusan interpolasi yang digunakan mengacu pada penurunan rumusan oleh Lagrange. Polinomial Lagrange dapat dinyatakan dalam bentuk Persamaan 5.2.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \cdots + a_n L_n(x) \tag{5.2}$$

Dengan

$$a_i = f(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

## 5.3. Percobaan

1. Untuk fungsi $f(x)$ di bawah ini dengan diketahui data $x_0 = 0, x_1 = 0.6, x_2 = 0.9$, gunakan interpolasi polynomial derajat satu dan dua untuk menghampiri nilai $f(0.45)$. Buatlah dalam program dengan menggunakan bahasa Python.
    1. $f(x) = \sin x$
    2. $f(x) = \frac{\ln(2x+3)}{2x^2}$
    3. $f(x) = e^x + \sqrt{(2x+1)}$
    4. $f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$

2. Gunakan metode Interpolasi Lagrange derajat satu, dua dan tiga untuk memprediksi populasi daerah "X" sesuai dengan Tabel 5.1 pada tahun 1945, 1955, 1965, 1975, 1985, 1995, 2005.

## 5.4. Tugas Akhir

Buatlah program menggunakan bahasa Python untuk soal-soal yang ada pada Percobaan dengan menggunakan metode *Newton Forward Difference*.

# Modul – 6

# Regresi

## 6.1. Tujuan

Mahasiswa mampu mengaproksimasi suatu kelompok data dengan pendekatan suatu fungsi menggunakan metode regresi.

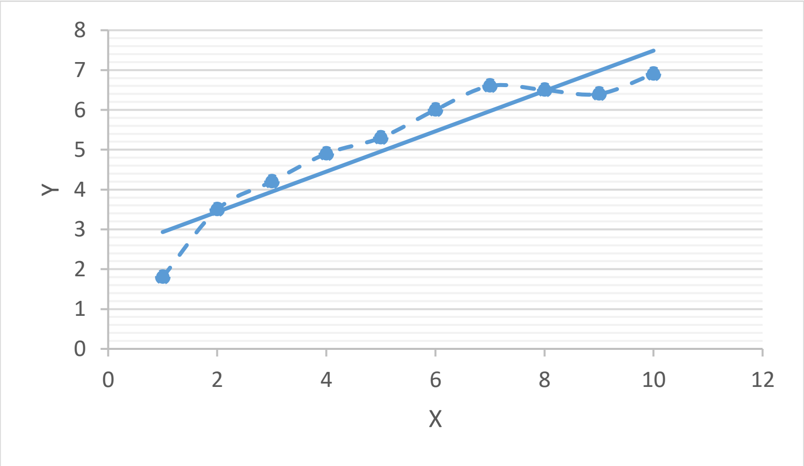
## 6.2. Teori

Regresi adalah teknik pencocokan kurva yang dilakukan untuk mengaproksimasi suatu kelompok data berketilitian rendah dengan suatu fungsi. Contoh data berketelitian rendah adalah hasil pengamatan, percobaan di laboratorium atau data statistik.

**Tabel 6.1** Contoh data hasil percobaan

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Y | 1.8 | 3.5 | 4.2 | 4.9 | 5.3 | 6 | 6.8 | 6.5 | 6.4 | 6.9 |

Jika data di dalam tabel 6.1 diplotkan ke dalam grafik, maka dapat terlihat hubungan antara variabel x dan y cenderung memiliki hubungan yang *linier*.




**Gambar 6.1.** Grafik hubungan y terhadap x pada data Tabel 6.1

Garis putus-putus pada grafik diatas merupakan hasil dari interpolasi, sedangkan garis lurus merupakan hasil dari regresi. Bagaimana bentuk fungsi yang cocok untuk mewakili tren data tersebut? Bagaimana *error* yang dihasilkan oleh fungsi yang kita buat dalam mengaproksimasi data tersebut?

Salah satu pendekatan dalam menentukan approksimasi linier terbaik dengan cara meminimasi penjumlahan kuadrat *error* yang dihasilkan antara nilai $y_i$ dengan kurva linier yang dibuat

$$E(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - (a_1 x_i + a_0)|^2 \tag{6.1}$$

Pendekatan ini disebut dengan metoderegresi kuadrat terkecil. Untuk menentukan konstanta-konstanta $a_0$ dan $a_1$ kita gunakan pendekatan turunan parsial Persamaan 6.1 terhadap masing-masing konstanta, lalu kita set persamaan tersebut sama dengan nol. Persamaan terakhir yang diperoleh disebut dengan persamaan normal. Dengan cara ini kitaakan bertemu kembali dengan masalah aljabar linier seperti dalam percobaan Metnum-4. Adakalanya aproksimasi linier bukan merupakan aproksimasi terbaik. Oleh karena itu digunakan aljabar polinum seperti pada Persamaan 5.1, sehingga Persamaan 6.1 akan berubah menjadi Persamaan 6.2, yang merupakan formulasi umum untuk menghitung *error* pada metoderegresi kuadrat terkecil.

$$E(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{N} |y_i - P_n(x_i)|^2 \tag{6.2}$$

Dari Persamaan 6.2 dapat pula kita turunkan persamaan normal untuk pendekatan Regresi Kuadrat Terkecil untuk polinom derajat ke n.

## 6.3. Percobaan

1. Gunakan aproksimasi linier menggunakan metode regresi kuadrat terkecil untuk mencocokan kurva dengan data pada tabel 6.1.
2. Amati kurva yang dihasilkan apabila pendekatan kurva tabel 6.1 menggunakan metode regresi kuadrat terkecil untuk polinom derajat 2.
3. Plot kurva yang dihasilkan oleh percobaan 1 dan 2
4. Aproksimasi data pada tabel 6.2 di bawah ini menggunakan metode regresi kuadrat terkecil untuk polinom derajat 1, 2 dan 3. Plot data beserta polinomnya.

**Tabel 6.2.** Data percobaan

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.3 | 1.5 | 1.9 | 2.1 |
| 2.54 | 2.21 | 2.18 | 2.6 |

## 6.4. Tugas Akhir

1. Tentukan $a_t$, $b_t$ dan fungsi dari data pada Tabel 6.1 dengan perhitungan analitik!
2. Turunkan persamaan normal untuk metode regresi kuadrat terkecil untuk polinom derajat ke-n
3. Buat program untuk menyelesaikan contoh kasus yang diberikan oleh asisten! Plot kurvanya!

| Jam Kerja | 73 | 50 | 128 | 170 | 87 | 108 | 135 | 69 | 148 | 132 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Produksi | 30 | 20 | 60 | 80 | 40 | 50 | 60 | 30 | 70 | 60 |

# Modul – 7

# Integrasi Numerik

## 7.1. Tujuan

Mahasiswa mampu menghitung integral secara numerik suatu fungsi menggunakan metode segiempat, trapesium, titik tengah dan simpson.

## 7.2. Teori

### 7.2.1. Metode Trapesium

Metode trapesium merupakan metode integrasi numerik yang diturunkan melalui interpolasi linier yang dituliskan dengan Persamaan 7.1.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + E \tag{7.1}$$

Metode ini mengaproksimasi suatu fungsi dengan pendekatan trapesium, dalam Persamaan 7.1 terlihat bahwa suatu fungsi *f* (*x*) dihampiri dengan perhitunganluas trapesium. Persamaan 7.1 merupakan formulasi integrasi numerik menggunakan satu buah trapesium, dengan demikian *error E* yang dihasilkan cukup besar. Oleh karena itu Persamaan 7.1 diperluas, sehingga jumlah trapesium yang digunakan sebanyak *N* buah, shingga persamaan 7.1 berubah menjadi Persamaan 7.2.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{j=1}^{N-1} f(a+jh) + f(b)\right] + E \tag{7.2}$$

dengan$h = \frac{b-a}{N}$

### 7.2.2. Metode Simpson

Metode ini diturunkan melalui polinom Newton orde dua yang dirumuskan melalui Persamaan 7.3.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4\sum_{j=1(ganjil)}^{N-1} f(a+jh) + 2\sum_{j=2(genap)}^{N-2} f(a+jh) + f(b)\right] + E(7.3)$$

Persamaan 7.3 merupakan formulasi Simpson 1/3 dimana penjumlahan pertama dikhususkan untuk *i* yang ganjil dan penjumlahan kedua untuk *i* genap. Metode ini hanya berlaku untuk nilai *N* genap, dan nilai *h*yang sama dengan yang dirumuskan pada metode trapesium. Kekurangan metode Simpson 1/3 yang hanya berlaku untuk $N$ genap diperbaiki oleh metode Simpson 3/8 yang dirumuskan sebagai berikut:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] + E \tag{7.4}$$

dengan $h = \frac{b-a}{3}$. Persamaan 7.4 hanya berlaku untuk satu interval saja. Jika interval data yang digunakan lebih dari satu, persamaan 7.4 harus diubah ke dalam bentuk umum persamaan metode Simpson 3/8. Metode simpson 3/8 berlaku untuk nilai *N* berupa bilangan kelipatan 3.

## 7.3. Percobaan

1. Aproksimasi integral-integral berikut menggunakan metode trapesium dengan nilai $N \in \{2,4,6,8,16,32,64\}$
   a. $\int_{-2}^{2} xe^{2x}\ dx$
   b. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$
   c. $\int_0^2 \frac{xsin(x)}{(x-1)^2}\ dx$
2. Ulangi percobaan no.1 dengan menggunakan metode Simpson 1/3
3. Ulangi percobaan no.1 dengan menggunakan metode Simpson 3/8

## 7.4. Tugas Akhir

1. Laju seorang penerjun payung selama melayang di udara setelah payungnya mengembang adalah

   $$v(t) = \frac{gm}{c}\ [1 - e^{-c\,t/m}]$$

   dimana $g = 9{,}8\, ms^{-2}$ adalah percepatan gravitasi, $m = 68{,}1\, kg$ adalah massa penerjun, $c = 12{,}5\ kg.s^{-1}$ adalah hambatan oleh udara. Berapa jarak yang ditempuh oleh penerjun tersebut selama 10 detik? Jarak yang ditempuh penerjun dapat dihitung dengan menggunakan hubungan

$$h = \int_0^t v(t)\,dt$$

buatlah program menggunakan bahasa Python dengan metode yang telah dipelajari pada modul ini.

2. Bandingkan hasil percobaan untuk metode trapesium, simpson 1/3, dan simpson 3/8.
3. Diberikan tabel sebagai berikut :

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0.25 | 0.8 |
| 0.625 | 0.6 |
| 0.75 | 0.57 |
| 0.875 | 0.53 |
| 1 | 0.5 |

Bagaimana cara mencari integral dari data dengan interval yang tidak seragam seperti pada tabel di atas?

# Modul – 8

# Diferensiasi Numerik

## 8.1. Tujuan

Mahasiswa mampu mendiferensiasi numerik suatu fungsi dengan menggunakan metode aproksimasi beda hingga.

## 8.2. Teori

Diferensiasi numerik adalah proses perhitungan turunan fungsi dari data suatu fungsi. Untuk beberapa kasus, suatu fungsi memiliki bentuk yang rumit sehingga perhitungan dengan cara analitik merupakan pekerjaan yang tidak praktis. Namun fungsi tersebut dapat kita cari turunannya dengan pendekatan numerik, salah satu metodenya adalah metode aproksimasi beda hingga.

Metode aproksimasi beda hingga untuk menentukan turunan suatu fungsi didasari oleh ekspansi deret Taylor dari suatu fungsi *f(x)* disekitar titik *x*. Dari ekspansi deret taylor akan diperoleh Persamaan 8.1 – 8.3

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) \tag{8.1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(x) \tag{8.2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{6} f'''(x) \tag{8.3}$$

Persamaan 8.1 merupakan persamaan untuk *forward difference* orde pertama. Persamaan 8.2 merupakan persamaan untuk *backward difference* orde pertama. Persamaan 8.3 merupakan persamaan untuk *central difference* orde pertama. Dimana suku kedua pada ruas kanan persamaan-persamaan ini merupakan *error* pemotongan. Untuk orde kedua atau orde yang lebih tinggi, ekspansi deret taylor dapat digunakan kembali.

## 8.3. Percobaan

1. Hitung turunan pertama dari fungsi $f(x) = \sin^4(3 - 2x)$ pada $x = 1$ dengan nilai $h \in \{0.001, 0.005, 0.05, 0.1, 0.5\}$ untuk setiap metode. Hitung pula *error* yang dihasilkan.
2. Hitung turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{\sin 3x}{x \cos 2x}$ pada $x = 1$ dengan nilai $h \in \{0.001, 0.005, 0.05, 0.1, 0.5\}$ untuk setiap metode. Hitung pula *error* yang dihasilkan.

## 8.4. Tugas Akhir

1. Selidiki apa yang terjadi apabila *step size h* (intervalnya) berbeda.
2. Sebuah mobil dengan massa $1200\ kg$ melaju dengan kecepatan yang berubah-ubah. Diperoleh data jarak yang ditempuh mobil terhadapa waktu sebagai berikut:

| t (s) | x (m) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.1 | 2 |
| 0.25 | 2.8 |
| 0.38 | 3.5 |
| 0.56 | 4 |

   Tentukan impuls yang terjadi yang dihasilkan mobil saat $t = 0, 0.25,$ dan $0.56$.
3. Dalam kondisi seperti apa setiap metode dapat digunakan?
4. Bandingkan hasil yang diperoleh dari semua metode yang digunakan untuk mencari nilai turunan.

# Modul – 9

# Persamaan Diferensial Biasa

## 9.1. Tujuan

Dalam modul ini mahasiswa diharapkan mampu memecahkan masalah persamaan diferensial biasa menggunakan metode Euler dan Runge – Kutta.

## 9.2. Teori

Kasus persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan salah satu kasus yang sering dijumpai dalam bidang sains maupun teknik. Persamaan diferensial biasa menggambarkan suatu bentuk persamaan matematis yang mengandung turunan dari suatu fungsi terhadap satu variabel bebas. Secara sederhana, persamaan diferensial biasa dapat dituliskan sebagai berikut

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(y,t) \qquad\qquad y(0) = y_0 \tag{9.1}$$

Dalam Persamaan 9.1 turunan pertama dari $y$ diketahui sebagai fungsi $f(y,t)$ yang merupakan fungsi dari $y$ dan $t$ dengan $y(0) = y_0$ merupakan nilai awalnya. Untuk menghitung fungsi $y$ yang tidak diketahui maka kita dapat secara langsung mengintegrasi secara numerik Persamaan 9.1. Akan tetapi bila $f$ merupakan fungsi dari $y$ maka proses integrasi menjadi berbeda.

### 9.2.1. Metode Forward Euler

Metode Forward Euler ini diturunkan melalui deret Taylor (lihat modul 7), bila ditulis kembali menggunakan pendekatan *forward difference*, maka metode Euler dapat ditulis menjadi Persamaan 9.2

$$y_n' \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \tag{9.2}$$

Seringkali Persamaan 9.2 ditulis dalam bentuk Persamaan 9.3

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(y_n, t_n) \tag{9.3}$$

dengan h menyatakan interval waktu. Untuk memecahkan Persamaan 9.1, maka Persamaan 9.3 diselesaikan secara rekursif sampai dengan akhir interval waktu $t$. Selain itu Persamaan 9.2 dapat dinyatakan dalam bentuk *backward difference*. Meskipun metode forward Euler sangat sederhana, namun kita harus hati-hati terhadap dua kemungkinan *error* yang muncul, pertama adalah *error* dalam pemotongan deret (*truncation error*) dan yang kedua adalah konstanta waktu yang berharga negatif.Hal ini bisa kita atasi dengan menggunakan nilai $h$ yang sangat kecil sekali.

### 9.2.2. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Metode ini merupakan metode yang cukup handal dalam menyelesaikan masalah persamaan diferensial biasa. Beberapa pendahulunya seperti metode RK orde 1,2 dan 3, telah ditutupi oleh metode RK-4, karena metode ini mempunyai orde akurasi yang lebih tinggi dibandingkan yang lainnya. Metode RK-4 diturunkan melalui pendekatan integral Simpson 1/3 atau 3/8. Melalui integral Simpson 1/3 maka metode RK-4 dapat ditulis menjadi Persamaan 9.4.

$$k_1 = hf(y_n, t_n)$$

$$k_2 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(y_n + \frac{1}{2}h, t_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(y_n + h, t_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \tag{9.4}$$

## 9.3. Percobaan

1. Diketahui PDB sebagai berikut:
   a. $\frac{dy}{dt} = 5\exp(-0.2t^2) - y^2$ dengan $y(0) = 0$
   b. $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 1$ dengan $y(0) = 1$
   c. $\frac{dy}{dt} + 10y = \exp(-t)$ dengan $y(0) = 5$

   Tentukan $y(0.1)$ menggunakan metode Forward Euler! Gunakan variasi $h \in \{0.01 ; 0.001 ; 0.0001\}$

2. Selesaikan persoalan no. 1 untuk menentukan $y(0.1)$ menggunakan metode RK-4! Kemudian bandingkan hasilnya dengan metode Forward Euler.
3. Apabila diketahui suatu fungsi diferensial dengan nilai awal $y_0$ pada titik $t_0$, bagaimana cara menentukan nilai $y$ pada suatu titik $t$ yang terletak sebelum $t_0$ $(t < t_0)$? Metode apa yang digunakan dan turunkan rumusnya!

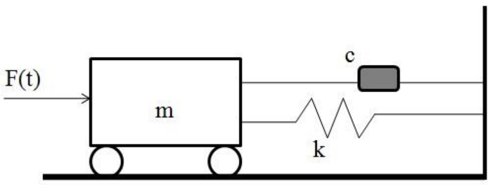
## 9.4. Tugas Akhir

1. Jelaskan mengapa nilai $h$ sangat berpengaruh terhadap error yang dihasilkan!

$$\frac{dy}{dt} = 4t^3 + t^2 + 10t + 7$$

Selesaikan persamaan diferensial biasa di atas secara analitik!

2. Pergerakan suatu sistem massa, pegas dan *damper* mengalami pergerakan setelah gaya aktuasi *F(t)* diberikan seperti gambar dibawah ini.




Jika persamaan pergerakan oleh massa ini diberikan oleh hukum Newton berupa persamaan:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + F(t)$$

Jika $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, $m = 5000\,kg$, $c = 5000 Ns/m$, $k = 50000 N/m$ dan gaya aktuasi sebesar $5000\ N$ untuk $0 \le t \le 1$ detik dan $0\ N$ untuk $t > 1$ detik. Maka hitunglah pergerakan dari massa benda selama 10 detik !

3. $\frac{dy}{dt} = 1 + y\exp(-t)$ dengan $y(1) = 10$ dan $h \in \{0.1 ; 0.01\}$ . Tentukan nilai $y(0)$!

# Modul – 10

# Proyek

## 10.1. Tujuan

Mahasiswa mampu menyelesaikan masalah dalam Fisika melalui pendekatan solusi numerik.

## 10.2. Percobaan

Buatlah program numerik yang dapat menyelesaikan permasalahan fisika. Percobaan pada modul ini dilakukan dalam dua pertemuan. Permasalahan yang diajukan akan dipresentasikan di hadapan asisten pada pertemuan pertama. Jika tidak disetujui maka praktikan perlu mencari topik baru untuk dijadikan kajian pada proyek ini dan dipresentasikan pada waktu yang disepakati. Jika telah disetujui maka praktikan akan membuat program dan program yang telah dibuat akan dipresentasikan pada pertemuan kedua. Proyek ini dikerjakan secara berkelompok yang diatur oleh asisten. Masalah yang diajukan harus menggunakan metode numerik yang telah diajarkan selama kuliah/praktikum dan TIDAK BOLEH SAMA antara satu kelompok dengan kelompok lainnya. Laporan proyek dikumpulkan pada pertemuan ketiga dengan systematika sebagai berikut :

1. Pendahuluan
   - 1.1. Latar Belakang
   - 1.2. Rumusan Masalah
   - 1.3. Tujuan
2. Teori Dasar
   - 1.1. Tinjauan pustaka secara fisika
   - 1.2. Tinjauan pustaka secara metode numerik
2. Deskripsi program
3. Flowchart
4. Pembahasan (program, tampilan, analisa)
5. Kesimpulan
6. Daftar Pustaka

# Daftar Pustaka

1. Sasongko, Setia Budi. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta : Andi Offset.
2. Kosasih, P. Buyung. 2006. *Komputasi Numerik, Teori dan Aplikasi.* Yogyakarta : Andi Offset.
3. Purcell, Varberg, Rigdon. 2003. *Kalkulus Jilid 2 Edisi Kedelapan* (Terjemahan). Jakarta : Erlangga.
4. Frank Ayres dan Elliot Mendelson. 2006. *Schaum's Outlines, Kalkulus Edisi Keempat* (terjemahan). Jakarta : Erlangga.