예제 8-3 고윳값과 고유벡터

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

Tip

$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$를 만족하는 λ를 찾고, 결정된 λ에 대해 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$를 만족하는 해 $\boldsymbol{x}$를 찾는다.

$$\lambda I - A = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ -3 & \lambda+6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda+6) - 9 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda-3)(\lambda+7) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = 3, \ -7$$

① $\lambda_1 = 3$일 때, $(3I - A)\boldsymbol{x} = 0$

$$3I - A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(R_2 \leftarrow 3R_1 + R_2)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

② $\lambda_2 = -7$일 때, $(-7I - A)\boldsymbol{x} = 0$

$$-7I - A = \begin{bmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cc|c} -9 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\left(R_2 \leftarrow -\frac{1}{3}R_1 + R_2\right)} \left[\begin{array}{cc|c} -9 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

예제 8-4 서로 다른 고윳값을 갖는 행렬

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Tip
특성방정식의 해인 고윳값을 찾고, 각 고윳값에 대한 고유벡터를 찾는다.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & -5 \\ 1 & \lambda-4 & 5 \\ 3 & -3 & \lambda+4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-6)(\lambda-4)(\lambda+4) + 3(5)(3) + (-5)(1)(-3) \\ &\quad -(-5)(\lambda-4)(3) - (\lambda-6)(5)(-3) - (3)(1)(\lambda+4) \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 \\ &= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) \end{aligned}$$

→ **고윳값 : 1, 2, 3**

① $\lambda_1 = 1$일 때, $(1I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$1I - A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -5 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = 0,\ x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = 2$일 때, $(2I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$2I - A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - 3x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $\lambda_3 = 3$일 때, $(3I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$$3I - A = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_2 = 0,\ x_3 = 0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

예제 8-5 중복된 고윳값을 갖는 행렬

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tip
특성방정식이 중근을 갖는 경우, 중근인 고윳값에 대한 고유벡터가 생성하는 공간의 기저벡터를 고유벡터로 선택한다.

$$\det(\lambda I - A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 3 & -1 \\ -1 & \lambda+2 & -1 \\ -1 & 3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$
$$=\lambda(\lambda-1)^2$$

➡ **고윳값 :** $\lambda_1=0,\ \ \lambda_2=\lambda_3=1$

① $\lambda_1=0$일 때, $(0I-A)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$

$$0I-A=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1-x_3=0,\ x_2-x_3=0$ ➡ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$일 때, $(1I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$1I - A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} &x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ &x_2 = s,\ \ x_3 = t \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 를 기저로 하는 공간에서 고유벡터 선택 가능

→ 고유벡터 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

예제 8-6 고유공간

다음 행렬 A의 고윳값 $\lambda=2$에 대한 고유공간을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}$$

Tip
고윳값에 대한 고유공간의 기저를 구한다.

고윳값 2에 대한 A의 고유벡터

$$2I-A=2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-1&6\\2&1&6\\2&-1&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1&-6\\-2&1&-6\\-2&1&-6\end{bmatrix}$$

$$(2I-A)\mathbf{x}=\mathbf{0} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c}-2&1&-6&0\\-2&1&-6&0\\-2&1&-6&0\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&6&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$2x_1-x_2+6x_3=0 \qquad x_2=s,\ x_3=t$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5s-3t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}$$

고윳값 $\lambda=2$에 대한 고유공간 $\quad span\left\{\begin{bmatrix}0.5\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

예제 8-7 **복소수 고윳값을 갖는 행렬**

다음 행렬 A의 고윳값과 고유벡터를 구하라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tip
고윳값 λ가 복소수인 경우에도 $(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$의 해로부터 고유벡터를 구한다.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

$\det(\lambda I - A) = 0$의 해 ➡ $\lambda_1 = 1 + 2i \quad \lambda_2 = 1 - 2i$

① $\lambda_1 = 1 + 2i$일 때, $(\lambda_1 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2i & -2 & 0 \\ 2 & 2i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ ➡ 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

② $\lambda_2 = 1 - 2i$일 때, $(\lambda_2 I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2i & -2 & 0 \\ 2 & -2i & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ ➡ 고유벡터는 $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$