Probleemoplossend Denken II

Oplossingen Oefeningen

Stijn Lievens

Professionele Bachelor in de Toegepaste Informatica

Inhoudsopgave

Deel I

Kansrekening

HOOFDSTUK 1

Gebeurtenissen en hun kansen

1.3.1 Oefeningen

1. Een dobbelsteen wordt éénmaal opgegooid. Geef de volgende gebeurtenissen door opsomming:
   a) er werd een even getal gegooid;
   b) er werd een priemgetal gegooid;
   c) er werd een even getal of een priemgetal gegooid;
   d) er werd een even getal en een priemgetal gegooid.
2. Er wordt tweemaal gegooid met een dobbelsteen. Omschrijf de volgende gebeurtenissen:
   a) er wordt 1 gegooid bij de eerste worp;
   b) de twee worpen vertonen hetzelfde aantal ogen;
   c) het minimum van de worpen is drie.
3. Geef de volgende gebeurtenissen voor het experiment in Voorbeeld 1.11:
   a) er zijn juist vijf worpen nodig;
   b) er zijn hoogstens vijf worpen nodig;
   c) er zijn minstens vijf worpen nodig.

1.3.2 Oplossingen

1. Voor dit experiment geldt uiteraard dat $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   a) $A = \{2, 4, 6\}$

   b) $B = \{2, 3, 5\}$ (Merk op: 1 is geen priemgetal)

   c) $C = A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

   d) $D = A \cap B = \{2\}$

2. In dit geval is $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   a) Dit zijn alle koppels waarvoor de eerste component een 1 is:

   $$\begin{aligned} A &= \big\{(1, j) \mid j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\} \\ &= \big\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\big\} \end{aligned}$$

   b) Dit zijn alle koppels waarvoor de eerste en tweede component gelijk zijn:

   $$\begin{aligned} B &= \big\{(j, j) \mid j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big\} \\ &= \big\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\big\} \end{aligned}$$

   c) Dit zijn alle koppels waarvoor er minstens één drie is en de andere component is minstens zo groot. Dit kunnen we eenvoudig uitdrukking m.b.v. de min-operator.

   $$\begin{aligned} C &= \big\{(i, j) \mid \min(i, j) = 3 \text{ en } (i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2\big\} \\ &= \big\{(3, j) \mid j \in \{3, 4, 5, 6\}\big\} \cup \big\{(i, 3) \mid i \in \{3, 4, 5, 6\}\big\} \\ &= \{(3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}. \end{aligned}$$

3. Met de notatie uit het voorbeeld vinden we:

   a) $A = \{\omega_5\}$

   b) $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$

   c) $C = \overline{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}} = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \ldots\}$

1.4.2 Oefeningen

1. Men gooit éénmaal met een eerlijke dobbelsteen.
   a) Wat is de kans op een even getal?
   b) Wat is de kans op een oneven getal?
   c) Wat is de kans op een priemgetal?
2. Wat is de kans om met twee dobbelstenen meer dan acht te gooien?
3. Een duistere urne bevat 6 blauwe en 4 rode bollen die verder identiek zijn. Men trekt één na één, twee bollen uit de urne met teruglegging van de getrokken bol. Wat is de kans dat men twee blauwe bollen heeft getrokken?
4. Wat is de kans om bij de Belgische lotto zes juiste cijfers te hebben? Er zitten 45 ballen in de trommel en er worden er zes getrokken zonder teruglegging.
5. Als huishoudens groepen mensen zijn die samenleven, dan vindt men voor de kansen op het aantal leden van een huishouden respectievelijk:

Omvang	1	2	3	4	5	6	7 of meer
Kans	$0,236$	$0,320$	$0,181$	$0,156$	$0,069$	$0,024$	$0,014$

   Het kleine aantal huishoudens met meer dan 7 leden werd samengevoegd in de laatste categorie. Wat is de kans dat er meer dan twee mensen in een huishouden zijn?
6. Een toegangscode tot een (amateurs) computersysteem bestaat uit drie letters die door een randomgenerator worden toegewezen.
   a) Wat is de kans dat een code wordt toegewezen zonder de letter x?
   b) Wat is de kans dat een code wordt toegewezen waarvan alle letters verschillend zijn?
7. Bij een vervalst muntstuk is $\mathbb{P}(K) = 6/10$. Wat is dan de kans op "munt"?

8. Veronderstel dat
$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$
met
$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{3}{10}, \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{2}{10}, \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{10}, \mathbb{P}(\omega_4) = \frac{1}{10} \text{ en } \mathbb{P}(\omega_5) = \frac{3}{10}.$$
Wat is $\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\})$?

9. Twee zijden van een dobbelsteen dragen het cijfer 1, drie dragen het cijfer 2 en één zijde het cijfer 3. Wat is de kans op een oneven getal als men aanneemt dat elke zijde even waarschijnlijk is?

10. Men vervalst een dobbelsteen zodanig dat de kans op een bepaald cijfer evenredig is met dit cijfer.

    a) Geef de elementaire kansen.
    b) Wat is de kans op een even getal?
    c) Wat is de kans op een oneven getal?
    d) Wat is de kans op een priemgetal?
    e) Wat is de kans op een even getal of een priemgetal?
    f) Wat is de kans op een oneven priemgetal?

11. Een doos bevat 10 lampen. Bij vergissing worden 4 afgekeurde lampen mee verpakt. Men neemt lukraak drie lampen uit de doos. Wat is $\mathbb{P}(\omega_i)$ waarbij ω_i de elementaire gebeurtenis voorstelt dat exact i met $0 \leq i \leq 3$ van de drie gekozen lampen defect zijn?

12. Hoe luidt de algemene uitgebreide somregel voor drie gebeurtenissen? Geef m.a.w. een uitdrukking voor
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3).$$
Kun je de formule veralgemenen tot n gebeurtenissen?

13. Aan de Hogeschool Gent mogen (moeten?) 500 studenten 3 keuzevakken kiezen. Van de 500 studenten volgen er 320 cursus A, 190 volgen cursus B en 280 volgen cursus C. Er zijn 80 studenten die A en B volgen, 200 die A en C volgen terwijl 60 studenten B en C volgen.

    Bereken de kans dat een willekeurig gekozen student

a) de drie cursussen volgt;

b) A volgt maar niet B;

c) C volgt maar niet B;

d) A of C volgt maar niet B;

e) A volgt maar B noch C.

1.4.3 Oplossingen

1. We weten reeds dat $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   a) De gebeurtenis is $A = \{2, 4, 6\}$. M.b.v. de formule van Laplace vinden we
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

   b) We vinden onmiddellijk:
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   c) De gevraagde gebeurtenis is $C = \{2, 3, 5\}$ en dus volgt m.b.v. de formule van Laplace
   $$\mathbb{P}(C) = \frac{\#(C)}{\#(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. De gevraagde gebeurtenis is (met i en j natuurlijke getallen)
   $$\begin{aligned} A &= \{(i, j) \,|\, 1 \leq i, j \leq 6 \text{ en } i + j > 8\} \\ &= \{(6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (5,4), (5,5), (5,6), (4,5), (4,6), (3,6)\}. \end{aligned}$$
   Aangezien natuurlijk geldt dat $\#(\Omega) = 36$ volgt uit de formule van Laplace dat de gevraagde kans gegeven wordt door
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

3. Er geldt dat $\#(\Omega) = 10 \times 10 = 100$. Aangezien er 6 blauwe bollen zijn er 36 combinaties waarbij de eerste bol blauw is *en* de tweede bol ook blauw is. De gevraagde kans is dus
   $$\mathbb{P}(2 \text{ blauwe ballen}) = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}.$$

4. Het aantal mogelijke uitkomsten bij de lotto is gelijk aan het aantal deelverzamelingen van 6 elementen uit een verzameling van 45 elementen. Dit is de definitie van
$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{6! \times (45-6)!} = \frac{45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$
Aangezien er slechts één winnende combinatie is, is de kans dus
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{winst bij lotto}) &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41 \times 40} \\ &= \frac{1}{8145060} \approx 0.0000001227\end{aligned}$$

5. Laat # het aantal mensen in een huishouden voorstellen. Dan vinden we
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\# > 2) &= 1 - \mathbb{P}(\# \leq 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\# = 1) - \mathbb{P}(\# = 2) \\ &= 1 - 0.236 - 0.320 = 0.444\end{aligned}$$

6. a) We trekken een willekeurige code van 3 letters. De uitkomstensruimte is m.a.w. de verzameling van alle codes met 3 letters en er geldt
$$\#(\Omega) = 26 \times 26 \times 26 = 26^3.$$
Als we A alle codes noemen zonder de letter x, dan zien we op dezelfde manier dat
$$\#(A) = 25 \times 25 \times 25 = 25^3,$$
waaruit dan aangezien alle codes even waarschijnlijk zijn onmiddellijk volgt dat
$$\mathbb{P}(A) = \frac{25^3}{26^3} \approx 0.889.$$

   b) Noem B alle codes met drie verschillende letters. Om alle codes van B te creëren is het alsof we trekken *zonder* teruglegging en dus is
$$\#(B) = 26 \times 25 \times 24$$
waaruit dan volgt dat
$$\mathbb{P}(B) = \frac{26 \times 25 \times 24}{26 \times 26 \times 26} = \frac{25 \times 6}{13 \times 13} = \frac{150}{169} \approx 0.8876.$$

7. Met de “natuurlijke” betekenis van de letters:

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(\overline{K}) = 1 - \mathbb{P}(K) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{2}{5}.$$

8. Uit de somregel volgt dat

$$\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}) = \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5) = \frac{3}{5}.$$

9. Noem ω_i de gebeurtenis “er werd i gegooid”, dan is $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ met

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{2}{6}, \quad \mathbb{P}(\omega_2) = \frac{3}{6}, \quad \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{6}.$$

Nu volgt dat

$$\mathbb{P}(\text{oneven getal}) = \mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_3\}) = \mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{2}.$$

10. Laat ω_i de gebeurtenis “er wordt i gegooid ” voorstellen.

a) Uit de opgave volgt dat

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \alpha \times i,$$

voor een nog onbekende factor α. Aangezien er moet gelden dat

$$\sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\omega_i) = 1,$$

volgt er gemakkelijk dat $\alpha = \dfrac{1}{21}$ en

$$\mathbb{P}(\omega_i) = \frac{i}{21}.$$

De overige onderdelen zijn nu allemaal gemakkelijk te beantwoorden m.b.v. de somregel.

b) $\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = \dfrac{4}{7}$

c) $\mathbb{P}(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) = \dfrac{3}{7}$ (ook te berekenen m.b.v. het complement)

d) $\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_3, \omega_5\}) = \dfrac{10}{21}$

e) $\mathbb{P}(\overline{\omega_1}) = 1 - \mathbb{P}(\omega_1) = \dfrac{20}{21}$

f) $\mathbb{P}(\{\omega_3, \omega_5\}) = \dfrac{8}{21}$

11. We kiezen 3 lampen uit een doos met 10 lampen. De volgorde waarin de lampen worden gekozen is niet belangrijk. Het aantal mogelijke uitkomsten is m.a.w.

$$\#(\Omega) = \binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$$

Het aantal manieren om nul afgekeurde lampen te kiezen is het aantal manieren om 3 lampen te kiezen uit de 6 niet-afgekeurde lampen, namelijk

$$\#(\omega_0) = \binom{6}{3} = 20,$$

en dus is

$$\mathbb{P}(\omega_0) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

Op hoeveel manieren kunnen we 1 afgekeurde lamp kiezen en 2 niet-afgekeurde lampen? We moeten 1 lamp kiezen uit de 4 afgekeurde lampen *en* 2 lampen uit de 6 niet-afgekeurde lampen:

$$\binom{4}{1} \times \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$$

en dus

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Om dezelfde wijze is het aantal manieren om twee afgekeurde lampen (uit de 4 afgekeurde lampen) te kiezen en 1 niet-afgekeurde lamp (uit de zes niet-afgekeurde lampen):

$$\binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36,$$

en dus

$$\mathbb{P}(\omega_2) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

Tenslotte is het aantal manieren om 3 afgekeurde lampen te kiezen

$$\binom{4}{3} = 4,$$

waaruit volgt

$$\mathbb{P}(\omega_3) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}.$$

Merk op dat inderdaad (zoals vereist wordt) geldt dat

$$\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{3}{10} + \frac{1}{30} = 1.$$

12. Wanneer we de waarschijnlijkheid

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

wensen te bepalen, dan kunnen we (net zoals voor twee gebeurtenissen) starten met

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3).$$

Echter, nu hebben we elementen van de doorsnede $A_1 \cap A_2$ dubbel geteld (net zoals bij de unie van twee gebeurtenissen). Hetzelfde geldt echter voor de doorsnedes $A_1 \cap A_3$ en $A_2 \cap A_3$, dus moeten we hun waarschijnlijkheden in mindering brengen:

$$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3).$$

Op dit moment hebben we echter de doorsnede $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ drie keer in mindering gebracht (zodat we deze op dit moment geen enkele keer hebben geteld). Dat kunnen we herstellen door $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ terug in meerdering te brengen. We vinden dus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &\quad - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

13. Laat A, B en C de verzamelingen voorstellen van de studenten die de respectievelijke cursussen volgen. Dat weten we uit de opgave dat

$$\#(A) = 320, \quad \#(B) = 190 \quad \text{en} \quad \#(C) = 280.$$

Verder weten we ook

$$\#(A \cap B) = 80, \quad \#(A \cap C) = 200 \quad \text{en} \quad \#(B \cap C) = 60.$$

Aangezien er in totaal 500 studenten zijn volgt nu onmiddelijk (m.b.v. de formule uit de vorige oefening) dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 50.$$

Voor elk van de 7 verschillende gebieden in het Venn-diagram van A, B en C weten we nu (of kunnen we eenvoudig afleiden) hoeveel elementen het bevat. Het beantwoorden van de verschillende vragen is nu eenvoudig.

a) $\mathbb{P}(3 \text{ cursussen}) = \dfrac{50}{500}$

b) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A \setminus (A \cap B)) = \dfrac{320 - 80}{500} = \dfrac{240}{500}$

c) $\mathbb{P}(C \setminus B) = \mathbb{P}(C \setminus (C \cap B)) = \dfrac{280 - 60}{500} = \dfrac{220}{500}$

d) $\mathbb{P}((A \cup C) \setminus B) = \dfrac{310}{500}$

e) $\mathbb{P}(A \setminus (B \cup C)) = \dfrac{90}{500}$

1.5.1 Oefeningen

1. Een vaas bevat 20 witte en 30 zwarte bollen. Men trekt willekeurig drie bollen uit de vaas. Bereken de kans om 3 witte bollen te trekken

   a) met teruglegging;

   b) zonder teruglegging.

2. De kans dat van een koppel de man nog leeft over 10 jaar is 1/4. De kans dat de vrouw dan nog leeft is 1/3. (De gegevens komen uit zogenaamde *sterftetafels*, een veel gebruikt instrument in het gebied van de (levens)verzekeringen.) Bereken de kans dat

   a) beiden nog leven over 10 jaar;

   b) ten minste één van de twee nog leeft over 10 jaar;

   c) geen van beiden nog leeft;

   d) alleen de vrouw nog leeft.

   Welke veronderstelling heb je gemaakt tijdens je berekeningen?

3. Doos A bevat 8 onderdelen, waarvan er 3 defect zijn. Doos B bevat 5 onderdelen, waarvan er 2 stuk zijn. Men neemt lukraak een onderdeel uit elke doos.

   a) Wat is de kans dat beide onderdelen intact zijn?

   b) Wat is de kans dat juist één van de twee onderdelen defect is?

   c) Als juist één van de twee onderdelen defect is, wat is dan de kans dat het defecte stuk uit doos A komt?

4. De kansen dat 3 boogschutters een bepaald doelwit raken zijn respectievelijk $1/6, 1/4$ en $1/3$. Iedere boogschutter schiet één keer naar het doel.

   a) Wat is de kans dat juist 1 van de 3 het doel raakt?

   b) Als juist 1 schutter het doel raakte, wat is dan de kans dat het de eerste schutter was?

5. Ga het volgende formeel na: als A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn, dan zijn ook $\overline{A}$ en B onafhankelijke gebeurtenissen.

   Hieruit volgt dan ook onmiddellijk dat A en $\overline{B}$ onafhankelijk zijn als A en B onafhankelijk zijn. Hetzelfde geldt dan uiteraard voor $\overline{A}$ en $\overline{B}$.

6. Veronderstel dat A en B gebeurtenissen zijn waarvoor $\mathbb{P}(A) = 1/4$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$ en $\mathbb{P}(B) = p$.

   a) Bereken p als men ervan uitgaat dat A en B onafhankelijk zijn.

   b) Bereken p als $B \subset A$.

7. Veronderstel dat A en B onafhankelijke gebeurtenissen zijn met $\mathbb{P}(A) = 1/2$ en $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/3$. Bereken dan

   a) $\mathbb{P}(B)$;

   b) $\mathbb{P}(A \mid B)$;

   c) $\mathbb{P}(\overline{B} \mid A)$.

8. Een boekhouder die het beleid nakijkt van een bedrijf op het vlak van verkopen op krediet stelt vast dat van de 500 klanten er 20% een balans hebben van meer dan 750 EUR, de anderen hebben 750 EUR of minder. Qua duurtijd van de rekeningen hebben 30% van de rekeningen meer dan 3 maanden open gestaan, de andere minder. Van degene die meer

dan drie maanden open stonden waren er 20% met een balans van meer dan 750 EUR. We kunnen dit in tabelvorm weergeven:

		A	A′	
		$>$ 750 EUR	$\leq$ 750 EUR	Totaal
B	$\leq$ 3 maand	70	280	350
B′	$>$ 3 maand	30	120	150
	Totaal	100	400	500

a) Hoeveel elementen bevat Ω?

b) Wat is de kans dat een willekeurig gekozen balans minder is dan 750 EUR en meer dan 3 maanden open stond? Bepaal deze kans, gebruikmakend van voorwaardelijke kansen.

c) Ga formeel na dat A en B' onafhankelijke gebeurtenissen zijn.

d) Bereken $\mathbb{P}(A \cup B)$ op twee manieren, eerst uit de tabelwaarden en dan met de algemene somregel.

1.5.2 Oplossingen

1. Stel door A_i de gebeurtenis voor dat de i-de bol wit is. In beide gevallen wordt gevraagd wat $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ is.

   a) Wanneer de bollen worden teruggelegd zijn de gebeurtenissen A_i onafhankelijk en vinden we

   $$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2)\,\mathbb{P}(A_3) = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

   b) Zonder teruglegging gebruiken we de kettingregel:

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\\ &= \frac{20}{50} \times \frac{19}{49} \times \frac{18}{48},\end{aligned}$$

   waarbij $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)$ volgt uit het feit dat de vaas nu nog 49 bollen bevat waarvan we *weten* dat er nog slechts 19 witte zijn (want de eerste getrokken bal was wit). Analoog voor de kans $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$.

2. We nemen aan de overlevingskansen van de man en de vrouw *onafhankelijk* zijn. Stel de gebeurtenis "de man leeft nog" voor door A, terwijl B gebruikt wordt voor "de vrouw leeft nog".

   a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$

   b) Deze gebeurtenis is het complement van "geen van beiden leeft nog". We vinden dat de gevraagde kans dus is

   $$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= 1 - (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{3}) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Dit kan ook (weliswaar langer) berekend worden als

   $$\mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big).$$

   c) Dit werd in vorig puntje reeds berekend als zijnde $\dfrac{1}{2}$.

   d) Enkel de vrouw leeft nog is $\overline{A} \cap B$. De waarschijnlijkheid van deze gebeurtenis is:

   $$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}.$$

3. Stel door A (resp. B) de gebeurtenis voor dat het onderdeel uit doos A (resp. B) intact is. We weten dat

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{8} \quad \text{en} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{5}.$$

   a) Wegens onafhankelijkheid van A en B vinden we onmiddellijk dat

   $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{8}.$$

   b) Juist één onderdeel defect is de gebeurtenis

   $$\big(A \cap \overline{B}\big) \cup \big(\overline{A} \cap B\big).$$

Dit is een unie van twee disjuncte gebeurtenissen en dus vinden we via de somregel dat

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big) &= \mathbb{P}(A\cap\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)\\
&= \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B)\\
&= \frac{5}{8}\times\frac{2}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}\\
&= \frac{19}{40}.
\end{aligned}$$

c) De volgende voorwaardelijke kans wordt gevraagd:

$$\mathbb{P}(\overline{A}\mid \text{juist één defect}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{A}\cap \text{juist één defect})}{\mathbb{P}(\text{juist één defect})}$$

De noemer is reeds gekend uit vorig puntje. We herschrijven de gebeurtenis uit de teller nu:

$$\begin{aligned}
&\overline{A}\cap\big((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)\big)\\
&\quad= \big(\overline{A}\cap(A\cap\overline{B})\big)\cup\big(\overline{A}\cap(\overline{A}\cap B)\big) && \text{distributiviteit}\\
&\quad= \emptyset\cup(\overline{A}\cap B) && \text{idempotentie doorsnede}\\
&\quad= \overline{A}\cap B && \text{neutraal elem unie}
\end{aligned}$$

De kans $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$ wordt onmiddellijk berekend als $\frac{9}{40}$.
De gevraagde waarschijnlijkheid is dus

$$\mathbb{P}(\overline{A}\mid \text{juist één defect}) = \frac{9/40}{19/40} = \frac{9}{19}.$$

4. Deze opgave is eigenlijk een veralgemening van de vorige oefening naar drie gebeurtenissen. Laat S_i de gebeurtenis voorstellen dat schutter i het doel raakt.

   a) De gebeurtenis "juist één schutter raakt het doel" kan geschreven worden als

$$(S_1\cap\overline{S_2}\cap\overline{S_3})\cup(\overline{S_1}\cap S_2\cap\overline{S_3})\cup(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap S_3)$$

Dit is een unie van drie elkaar twee aan twee uitsluitende gebeurtenissen, en dus kunnen we de somregel toepassen:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big((S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) \cup (\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}) \cup (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3)\big)\\
&\quad = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) + \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3)\\
&\quad = \mathbb{P}(S_1)\,\mathbb{P}(\overline{S_2})\,\mathbb{P}(\overline{S_3}) + \mathbb{P}(\overline{S_1})\,\mathbb{P}(S_2)\,\mathbb{P}(\overline{S_3}) + \mathbb{P}(\overline{S_1})\,\mathbb{P}(\overline{S_2})\,\mathbb{P}(S_3)\\
&\quad = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}\\
&\quad = \frac{31}{72}.
\end{aligned}$$

b) De volgende voorwaardelijke kans wordt gevraagd:

$$\mathbb{P}(S_1 \,|\, \text{juist één raak}) = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap \text{juist één raak})}{\mathbb{P}(\text{juist één raak})}$$

Net als in de vorige oefening kan je nu inzien dat

$$S_1 \cap \big((S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) \cup (\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}) \cup (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3)\big) = S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$$

Zodat het gevraagde nu eenvoudig volgt:

$$\frac{\mathbb{P}(S_1 \cap \text{juist één raak})}{\mathbb{P}(\text{juist één raak})} = \frac{\mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3})}{\mathbb{P}(\text{juist één raak})} = \frac{6/72}{31/72} = \frac{6}{31}.$$

5. Er is gegeven dat $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$. We wensen te bewijzen dat $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B)$.

   We weten dat $B = B \cap \Omega = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ en dus

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}).$$

   (Dit is de wet van de totale waarschijnlijkheid.) Omdat gegeven is dat A en B onafhankelijk zijn weten we dus dat

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A})\\
&\iff \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})\\
&\iff \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap \overline{A})\\
&\iff \mathbb{P}(\overline{A})\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap B)
\end{aligned}$$

   Dit is net wat we wilden bewijzen.

6. a) Als A en B onafhankelijk zijn dan is

$$\frac{1}{6} = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \times p \iff p = \frac{2}{3}.$$

   b) Als $B \subset A$ dan is $A \cap B = B$ en dus is $p = \dfrac{1}{6}$.

7. a) Uit de onafhankelijkheid van A en B volgt dat $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$ en hieruit volgt onmiddellijk dat $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{3}$.

   b) Voor onafhankelijke gebeurtenissen A en B met strikt positieve kansen geldt dat $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ en dus is het antwoord hier $1/2$.

   c) Idem als hierboven vinden we $\mathbb{P}(\overline{B} \mid A) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{1}{3}$.

8. a) Er zijn 500 klanten dus $\#(\Omega) = 500$.

   b) We vinden

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A' \cap B') &= \mathbb{P}(B')\,\mathbb{P}(A' \mid B') \\ &= \mathbb{P}(B')(1 - \mathbb{P}(A \mid B')) \\ &= \frac{3}{10} \times (1 - \frac{2}{10}) = \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

   c) We moeten aantonen dat $\mathbb{P}(A \cap B') = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B')$. Uit de tabel zien we dat

$$\mathbb{P}(A \cap B') = \frac{30}{500} = \frac{3}{50},$$

   terwijl ook volgt dat

$$\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B') = \frac{100}{500} \times \frac{150}{500} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{50}.$$

   Dit bewijst het gestelde.

   d) Uit de tabel zien we dat alle elementen behalve de 120 rechts onderaan tot $A \cup B$ behoren, en dus kunnen we besluiten dat

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{380}{500} = \frac{19}{25}.$$

Als we de algemene somregel toepassen vinden we:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) \\
&= \frac{1}{5} + \frac{7}{10} - \frac{1}{5} \times \frac{7}{10} \\
&= \frac{10 + 35 - 7}{50} \\
&= \frac{19}{25}.
\end{aligned}$$

1.5.3 Oefeningen

1. In het domein "De Visput" heeft 28% van de wandelaars juist één hond mee. Van deze wandelaars-met-één-hond zijn 45% mannen en 55% vrouwen. Verder blijken mannen de voorkeur te geven aan een grote (macho) hond: 70% van de mannen gaat op stap met een grote hond en slechts 30% heeft een kleinere hond bij. Vrouwen verkiezen een kleinere hond: 75% van de vrouwen gaat op stap met een kleine hond en slechts 25% holt achter een grote hond aan. Als je één kleine hond tegenkomt, bepaal dan de kans dat zijn baas een vrouw is.

2. Veronderstel dat op een multiple choice examen de volgende situatie zich voordoet. Ofwel weet een student het antwoord met 100% zekerheid, ofwel weet hij het antwoord helemaal niet, en dan gokt hij. Veronderstel dat de kans dat een student het antwoord weet gelijk is aan p, en dat er m mogelijke antwoorden zijn per vraag.

   a) Wat is de waarschijnlijkheid dat indien het antwoord op een bepaalde vraag correct is, de student het antwoord ook daadwerkelijk wist?

   b) Wat wordt deze waarschijnlijkheid als het aantal antwoorden oneindig wordt?

3. Een computer programma bestaat uit twee modules. De eerste module bevat een fout met waarschijnlijkheid 0.2; de tweede module is complexer en de waarschijnlijkheid dat deze een fout bevat is 0.4. Fouten in de twee modules zijn onafhankelijk van elkaar. Als er enkel een fout zit in de eerste module dan crasht het programma met waarschijnlijkheid 0.5. Voor de tweede module is dit 0.8. Wanneer beide

modules een fout bevatten, dan crasht het programma met 90% waarschijnlijkheid.

Bij uitvoering crasht het programma. Wat is de waarschijnlijkheid dat beide modules een fout bevatten?

1.5.4 Oplossingen

1. Laat K de gebeurtenis "de hond is klein" voorstellen terwijl V de gebeurtenis "de wandelaar is een vrouw" voorstelt. We zoeken:

$$\mathbb{P}(V \mid K).$$

Er is gegeven dat

$$\mathbb{P}(M) = 45\%, \quad \mathbb{P}(V) = 55\%, \quad \mathbb{P}(K \mid M) = 30\%, \quad \mathbb{P}(K \mid V) = 75\%.$$

Uit de regel van Bayes volgt dat:

$$\mathbb{P}(V \mid K) = \frac{\mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(K \mid V)}{\mathbb{P}(K)}.$$

We weten uit de gegevens dat

$$\mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(K \mid V) = 55\% \times 75\%,$$

terwijl uit de wet van totale kans volgt dat

$$\mathbb{P}(K) = \mathbb{P}(V)\,\mathbb{P}(K \mid V) + \mathbb{P}(M)\,\mathbb{P}(K \mid M) = 55\% \times 75\% + 45\% \times 30\%$$

en dus volgt

$$\mathbb{P}(V \mid K) = \frac{55 \times 75}{55 \times 75 + 45 \times 30} = \frac{55}{73} \approx 75.34\%.$$

De apriori kans om een vrouw met een hond te onmoeten was slechts 55%, maar het gegeven dat de hond klein is laat deze kans stijgen tot iets boven de 75%.

Opmerking: aangezien we alleen kijken naar wandelaars met een hond is het gegeven dat 28% van de wandelaars een hond bijheeft irrelevant.

2. Laat W de gebeurtenis voorstellen dat de student het antwoord weet, terwijl C de gebeurtenis voorstelt dat het antwoord correct is.

a) We zoeken:
$$\mathbb{P}(W \mid C).$$
Er is gegeven:
$$\mathbb{P}(W) = p.$$
Als de student het antwoord weet zal hij steeds correct antwoorden:
$$\mathbb{P}(C \mid W) = 1.$$
Als de student het antwoord niet weet moet hij gokken en heeft hij een kans van $1/m$ om het antwoord correct te hebben:
$$\mathbb{P}(C \mid \overline{W}) = \frac{1}{m}.$$
M.b.v. de regel van Bayes vinden we nu:
$$\mathbb{P}(W \mid C) = \frac{\mathbb{P}(W)\,\mathbb{P}(C \mid W)}{\mathbb{P}(C)}.$$
De teller is niets anders dan p, terwijl de noemer berekend wordt m.b.v. de wet van de totale kans:
$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(W)\,\mathbb{P}(C \mid W) + \mathbb{P}(\overline{W})\,\mathbb{P}(C \mid \overline{W}) = p + (1-p) \times \frac{1}{m},$$
waaruit (via eenvoudig rekenwerk) volgt dat
$$\mathbb{P}(W \mid C) = \frac{mp}{(m-1)p+1}.$$

b) Als we in het vorig antwoord het aantal antwoorden m zeer groot (oneindig) laten worden dan zien we dat
$$\mathbb{P}(W \mid C) = 1.$$
Dat is logisch: als het aantal antwoorden oneindig groot is heeft de student geen enkele kans meer om het antwoord correct te hebben door te gokken. Als het antwoord correct is weten we m.a.w. zeker dat de student het antwoord ook effectief wist.

3. We nemen waar dat het programma crasht (gebeurtenis C). Noem F_1 (respectievelijk F_2) de gebeurtenis dat module 1 (respectievelijk 2) een fout bevat.

We weten dat

$$\mathbb{P}(F_1) = 0.2 \quad \text{en} \quad \mathbb{P}(F_2) = 0.4.$$

Aangezien fouten in de twee modules onafhankelijk zijn van elkaar kunnen we gemakkelijk voor elk van de vier combinaties van mogelijke fouten bepalen wat die kans is door het product te berekenen van de individuele kansen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(F_1 \cap F_2) &= 0.08,\\
\mathbb{P}(\overline{F_1} \cap F_2) &= 0.32,\\
\mathbb{P}(F_1 \cap \overline{F_2}) &= 0.12,\\
\mathbb{P}(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) &= 0.48.
\end{aligned}$$

In de opgave zijn de volgende kansen expliciet gegeven:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \mid F_1 \cap \overline{F_2}) &= 50\%,\\
\mathbb{P}(C \mid \overline{F_1} \cap F_2) &= 80\%,\\
\mathbb{P}(C \mid F_1 \cap F_2) &= 90\%.
\end{aligned}$$

Impliciet zou het moeten duidelijk zijn dat

$$\mathbb{P}(C \mid \overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 0,$$

want als er geen fouten zijn dan kan (zal) het programma niet crashen.

We zoeken nu

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \mid C).$$

M.b.v. de regel van Bayes vinden we dat

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \mid C) = \frac{\mathbb{P}(F_1 \cap F_2)\, \mathbb{P}(C \mid F_1 \cap F_2)}{\mathbb{P}(C)}.$$

De teller is reeds gekend (0.08×0.9) terwijl de noemer kan berekend worden met de wet van totale kans, nl.:

$$\mathbb{P}(C) = 0.48 \times 0 + 0.12 \times 0.5 + 0.32 \times 0.8 + 0.08 \times 0.9$$

Samen vindt men dan:

$$\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \mid C) = 0.1856$$

De apriori kans op een fout in beide modules was slechts 8% maar het bewijs dat het programma crasht heeft deze kans verhoogd tot iets meer dan 18%.

HOOFDSTUK **2**

Kans- of toevalsvariabelen

2.2.1 Oefeningen

1. Bij een dobbelspel met één dobbelsteen krijgt men het drievoud uitbetaald van het aantal ogen. Dit geeft aanleiding tot een kansvariabele X. Geef de uitkomstenverzameling Ω, f_X en F_X. Geef de grafiek van zowel f_X als F_X. Men spreekt van de DISCRETE UNIFORME VERDELING.

2. Men gooit een evenwichtig muntstuk op tot voor de eerste keer "munt" verschijnt. We noemen X het daartoe benodigde aantal worpen. Wat is het beeld van X? Geef $f_X(x)$ en $F_X(x)$. Schets hun grafiek. Hoe groot is de kans dat het aantal worpen minstens 3 en ten hoogste 6 bedraagt?

3. Bij een dobbelspel met twee eerlijke dobbelstenen noteert men X als de som van het aantal ogen. Onderzoek f_X en F_X.

4. Veronderstel dat het munstuk in Voorbeeld 2.2 zodanig vervalst is dat $\mathbb{P}(K) = 6/10$. Bepaal f_X en F_X.

2.2.2 Oplossingen

1. Noem ω_i (met $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$) de gebeurtenis "er werden i ogen gegooid". Dan is gegeven dat de toevalsveranderlijke X als volgt gedefinieerd is

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}\colon \omega_i \mapsto 3 \times i.$$

Het is dus onmiddellijk duidelijk dat

$$\text{bld}(X) = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}.$$

Bovendien geldt:

$$\mathbb{P}(X = 3 \times i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}),$$

omdat men bv. enkel 12 uitbetaald krijgt als men een 4 gooit. Omdat het een eerlijke dobbelsteen betreft geldt dat

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{6}.$$

Hieruit volgt onmiddellijk dat

x	3	6	9	12	15	18
$f_X(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

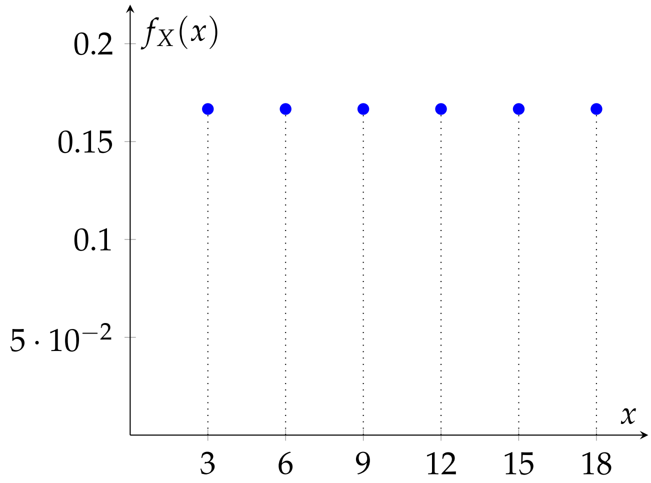
Omdat elk van de 6 mogelijkheden dezelfde waarschijnlijkheid heeft spreekt men van een *uniforme* discrete verdeling.

De kansverdelingsfunctie F_X is stuksgewijs constant en maakt telkens een sprong van $1/6$ in de punten 3, 6, 9, 12, 15, 18. In symbolen wordt dit:

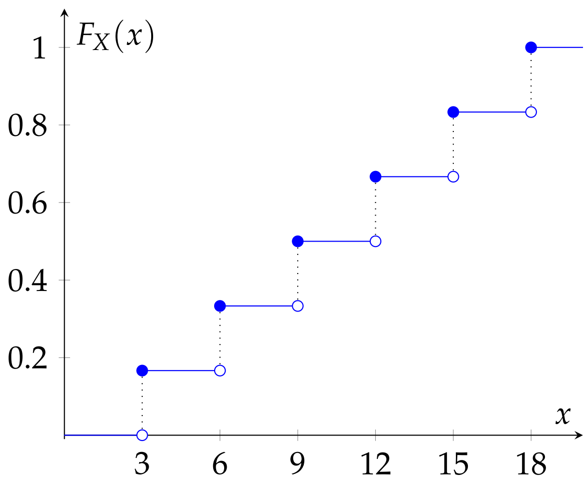
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 3 \\ 1/6 & \text{als } 3 \leq x < 6 \\ 2/6 & \text{als } 6 \leq x < 9 \\ 3/6 & \text{als } 9 \leq x < 12 \\ 4/6 & \text{als } 12 \leq x < 15 \\ 5/6 & \text{als } 15 \leq x < 18 \\ 1 & \text{als } 18 \leq x \end{cases}$$

2. De toevalsveranderlijke X telt het aantal worpen tot voor de eerste keer munt verschijnt wanneer men een evenwichtig muntstuk werpt. Er staat (in principe) geen bovengrens op het aantal keer dat men moet werpen voordat men munt bekomt, en men moet minstens éénmaal werpen. We vinden dus

$$\text{bld}(X) = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}_0.$$



Figuur 2.1: De kansfunctie $f_X(x)$ voor Oefening 1.



Figuur 2.2: De kansverdelingsfunctie $F_X(x)$ voor Oefening 1.

Aangezien het een evenwichtig muntstuk betreft is de kans op kop of munt allebei gelijk aan 1/2. Elke sequentie van n worpen heeft dus dezelfde kans, nl. $\frac{1}{2^n}$ en we vinden m.a.w.

$$f_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}.$$

Voor de kansverdelingsfunctie F_X vinden we (wanneer $n \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} F_X(n) &= \mathbb{P}(X \leq n) \\ &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2) + \cdots + \mathbb{P}(X = n) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Dit is een som van de vorm:

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = a \times \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

Toepassen van bovenstaande formule met $a = 1/2$ levert dat

$$F_X(n) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

De kans dat het aantal worpen minstens 3 en hoogstens 6 is kan als volgt berekend worden:

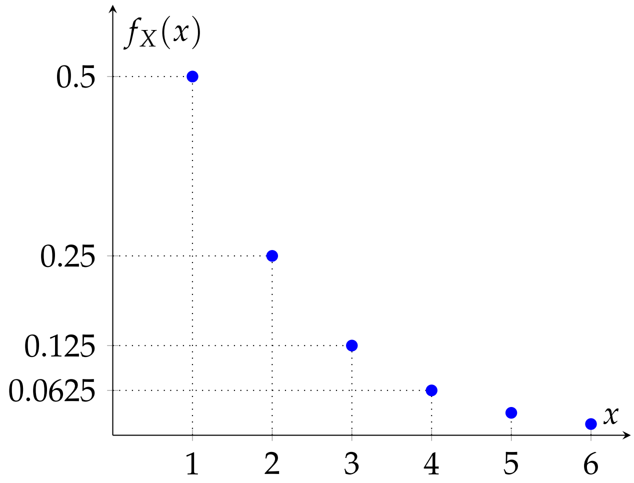
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(3 \leq X \leq 6) &= F_X(6) - F_X(2) \\ &= (1 - \frac{1}{2^6}) - (1 - \frac{1}{2^2}) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \\ &= \frac{15}{64}. \end{aligned}$$

3. We weten reeds uit de theorie dat in dit geval

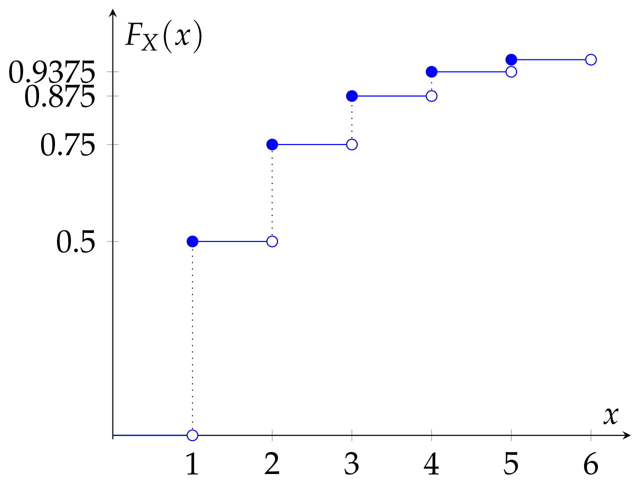
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Voor elk van de 36 mogelijkheden van Ω kan je de som bepalen van het aantal gegooide ogen. Expliciet geldt voor de toevalsveranderlijke X:

$$X \colon \Omega \to \mathbb{R} \colon (i, j) \mapsto i + j.$$



Figuur 2.3: De kansfunctie $f_X(x)$ voor Oefening 2.



Figuur 2.4: De kansverdelingsfunctie $F_X(x)$ voor Oefening 2.

De minimale som is 2 (voor het koppel $(1,1)$) en de maximale som is 12 (voor het koppel $(6,6)$). Het beeld van X is dus

$$\text{bld}(X) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,12\}.$$

Bij definitie is

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}\big(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = n\}\big)\\ &= \mathbb{P}\big((i,j) \in \Omega \mid i + j = n\big)\end{aligned}$$

Nu kan men eenvoudig nagaan dat

$$\begin{aligned}
X(\omega) = 2 &\iff \omega \in \{(1,1)\}\\
X(\omega) = 3 &\iff \omega \in \{(1,2),(2,1)\}\\
X(\omega) = 4 &\iff \omega \in \{(1,3),(2,2),(3,1)\}\\
X(\omega) = 5 &\iff \omega \in \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\\
X(\omega) = 6 &\iff \omega \in \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\\
X(\omega) = 7 &\iff \omega \in \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}
\end{aligned}$$

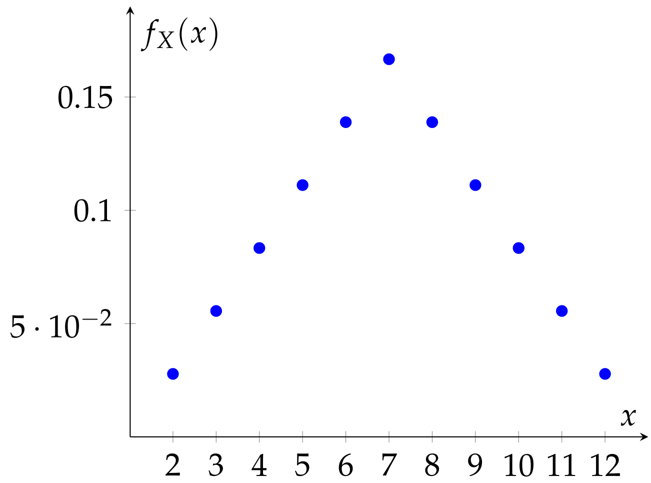
Aangezien bij een dobbelsteen de ogen op tegenovergestelde zijden steeds 7 vormen zijn de andere waarden symmetrisch. Wanneer de twee dobbelstenen bv. $(1,5)$ tonen aan de bovenkant, dan tonen ze $(6,2)$ aan de onderkant.

We kunnen de kansfunctie nu eenvoudig beschrijven aan de hand van een tabel:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Merk op dat inderdaad geldt:

$$\sum_{x=2}^{12} f_X(x) = 1.$$



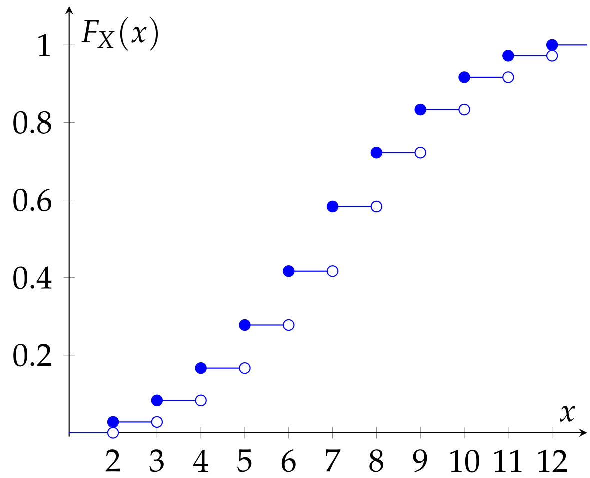
Figuur 2.5: De kansfunctie $f_X(x)$ voor Oefening 3.

De kansverdelingsfunctie F_X is stuksgewijs constant met sprongen in de punten $2, 3, \ldots, 12$. Expliciet krijgen we

$$F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 2 \\ 1/36 & \text{als } 2 \leq x < 3 \\ 3/36 & \text{als } 3 \leq x < 4 \\ 6/36 & \text{als } 4 \leq x < 5 \\ 10/36 & \text{als } 5 \leq x < 6 \\ 15/36 & \text{als } 6 \leq x < 7 \\ 21/36 & \text{als } 7 \leq x < 8 \\ 26/36 & \text{als } 8 \leq x < 9 \\ 30/36 & \text{als } 9 \leq x < 10 \\ 33/36 & \text{als } 10 \leq x < 11 \\ 35/36 & \text{als } 11 \leq x < 12 \\ 1 & \text{als } 12 \leq x \end{cases}$$

4. Er is gegeven dat

$$X(KK) = 2, \quad X(KM) = X(MK) = 1, \quad X(MM) = 0.$$



Figuur 2.6: De kansverdelingsfunctie $F_X(x)$ voor Oefening 3.

Als $\mathbb{P}(K) = 6/10$ (en dus $\mathbb{P}(M) = 4/10$) dan is

$$\begin{aligned} f_X(0) &= \mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\{MM\}) = \frac{4}{25}, \\ f_X(1) &= \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(\{MK, KM\}) = \frac{24}{100} + \frac{24}{100} = \frac{12}{25}, \\ f_X(2) &= \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(\{KK\}) = \frac{9}{25}. \end{aligned}$$

Merk op dat $f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) = 1$ zoals we verwachten.

De kansverdelingsfunctie is opnieuw stuksgewijs constant:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } x < 0 \\ 4/25 & \text{als } 0 \leq x < 1 \\ 16/25 & \text{als } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{als } 2 \leq x \end{cases}$$

2.4.4 Oefeningen

1. Bij een kleine verzekeringsmaatschappij heeft men ondervonden dat – gemiddeld – 1 op 10000 polissen resulteert in een schadeclaim van 200000 EUR, 1 op 1000 in een claim van 50000 EUR, 1 op 50 in een claim van 2000 EUR en de rest in een schadeclaim van 0 EUR. Men wenst nu te weten (teneinde een prijsaanpassing door te voeren) wat men gemiddeld uitbetaalt per polis.

2. Een kioskhouder verkoopt elke zaterdag een aantal exemplaren van een bepaalde krant. Het aantal exemplaren dat op een willekeurige zaterdag wordt *gevraagd* kan beschouwd worden als een kansvariabele. Nadat hij de verkoop een tijdlang heeft opgevolgd bekomt hij volgende resultaten

Aantal kranten	Kans
30	0.10
35	0.35
40	0.30
45	0.20
50	0.05

   a) De kioskhouder koopt elke zaterdag 40 kranten in. Hoe groot is de kans dat hij niet aan de vraag kan voldoen?
   b) Wat is de verwachtingswaarde van de vraag op een willekeurige zaterdag?
   c) Wat is de variantie van de vraag?
   d) De kranten kosten de kioskhouder 0.60 EUR, terwijl de verkoopprijs 1.15 EUR bedraagt. Kranten die niet verkocht werden moeten worden weggegooid. Bereken de verwachte winst van de kioskhouder op een willekeurige zaterdag, als hij 40 kranten inkoopt.

3. Een fabriek heeft twee afdelingen. Tot nu toe werden reparaties uitgevoerd in twee afzonderlijke werkplaatsen. Het bedrijf overweegt nu een nieuwe gemeenschappelijke werkplaats in te richten. Het machinepark werd gedurende 100 dagen bestudeerd en men vond volgende resultaten:

#Defecten per dag	0	1	2
Afdeling A	30	50	20
Afdeling B	20	30	50

   Men neemt aan dat de defecten onafhankelijk zijn. Hoeveel defecten mag men per dag verwachten in de gemeenschappelijke werkplaats?

Neem (voor deze oefening) aan dat uit de tabel de *exacte* kansfunctie kan afgeleid worden voor de twee relevante toevalsveranderlijken.

4. Veronderstel dat men in een ziekenhuis bloedtesten uitvoert voor een bepaalde ziekte waaraan ongeveer 1 op 100 mensen lijden. De mensen komen naar het ziekenhuis in groepen van 50 (bijvoorbeeld scholen) en de directeur vraagt zich af of – in plaats van individueel te testen – het niet beter zou zijn de 50 personen samen te testen. Als ze allemaal negatief zijn kan hij de hele groep gezond verklaren, zoniet zou hij overgaan tot individuele testen.

   a) Wat is het verwachte aantal testen als individueel wordt gescreend?
   b) Wat is het verwachte aantal testen als in groep wordt gescreend?
   c) Wat zou jij nu beslissen als directeur?

5. Bij het roulettespel kan men een inzet doen op 37 nummers, genummerd van 0 tot 36. Er zijn 18 rode vakjes, 18 zwarte vakjes en het nummer 0 is wit. Als men een bedrag inzet op een bepaald nummer en dit nummer wint, dan krijgt men 36 keer het oorspronkelijke bedrag uitbetaald. Is dit een eerlijk spel?

2.4.5 Oplossingen

1. Men kan wat men uitbetaalt (per polis) beschouwen als een toevalsveranderlijke X met

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 200000) &= \frac{1}{10000},\\ \mathbb{P}(X = 50000) &= \frac{1}{1000},\\ \mathbb{P}(X = 2000) &= \frac{1}{50},\\ \mathbb{P}(X = 0) &= \text{resterende kans.}\end{aligned}$$

   M.b.v. de formule voor verwachtingswaarde vinden we dus

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) = &\frac{1}{10000} \times 200000 + \frac{1}{1000} \times 50000\\ &+ \frac{1}{50} \times 2000 + (\text{resterende kans}) \times 0 = 110.\end{aligned}$$

Gemiddeld betaalt men dus 110 EUR per polis uit. Merk op dat het niet nodig is om de "resterende kans" expliciet te bepalen want die wordt bij het berekenen van het gemiddelde toch vermenigvuldigd met nul. Als je $\mathbb{P}(X = 0)$ toch wil kennen moet je zorgen dat de som van alle kansen samen gelijk is aan één.

2. a) Het aantal kranten dat wordt gevraagd kan gezien worden als een toevalsveranderlijke waarvan de kansfunctie gegeven is in de tabel van de opgave. Als de kioskhouder 40 kranten inkoopt dan kan hij niet aan de vraag voldoen wanneer $X > 40$. We berekenen de kans dat dit voorvalt:

$$\mathbb{P}(X > 40) = \mathbb{P}(X = 45) + \mathbb{P}(X = 50) = 0.20 + 0.05 = 0.25$$

Er is dus 25% kans dat de kioskhouder niet aan de vraag kan voldoen.

b) We moeten $\mathrm{E}(X)$ berekenen. Hiertoe gebruiken we de definitie van verwachingswaarde als een gewogen gemiddelde:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) = {} & 30 \times 0.10 + 35 \times 0.35 \\ & + 40 \times 0.30 + 45 \times 0.20 + 50 \times 0.05 = 38.75.\end{aligned}$$

c) De variantie kan eenvoudig berekend worden m.b.v. de definitie

$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= (30 - 38.75)^2 \times 0.10 + (35 - 38.75)^2 \times 0.35 \\ &\quad + (40 - 38.75)^2 \times 0.30 + (45 - 38.75)^2 \times 0.20 \\ &\quad + (50 - 38.75)^2 \times 0.05 \\ &= 27.19\end{aligned}$$

Een alternatieve manier is om gebruik te maken van het feit dat

$$\sigma_X^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.$$

We berekenen $\mathrm{E}(X^2)$ als

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X^2) &= 30^2 \times 0.10 + 35^2 \times 0.35 + 40^2 \times 0.30 \\ &\quad + 45^2 \times 0.20 + 50^2 \times 0.05 \\ &= 1528.75\end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\sigma_X^2 = 1528.75 - (38.75)^2 = 27.19$$

De tweede manier van berekenen vereist iets minder bewerkingen.

d) De winst is een functie g van het aantal gevraagde kranten, en we wensen $\mathrm{E}(g(X))$ te berekenen. Dit kan (m.b.v. "the law of the unconscious statistician") gedaan worden als

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(g(X)) = g(30) \times \mathbb{P}(X = 30) + g(35) \times \mathbb{P}(X = 35)\\ + g(40) \times \mathbb{P}(X = 40) + g(45) \times \mathbb{P}(X = 45)\\ + g(50) \times \mathbb{P}(X = 50).\end{aligned}$$

Alles wat nu nog moet gebeuren is het bepalen van de winst wanneer een bepaald aantal kranten wordt gevraagd. We weten dat

$$\text{Winst} = \text{Inkomsten} - \text{Uitgaven}.$$

De kioskhouder koopt steeds 40 kranten en heeft dus een vaste kost van $40 \times 0.60 = 24$ EUR. De inkomsten zijn het aantal gevraagde kranten maal 1.15 wanneer het aantal gevraagde kranten hoogstens 40 is. Wanneer het aantal kranten groter is dan 40 kan de kioskhouder (helaas voor hem) nog steeds slechts 40 kranten verkopen. Als men de berekening maakt, dan vindt men:

$$\begin{aligned}g(30) &= 30 \times 1.15 - 24 = 10.50\\ g(35) &= 35 \times 1.15 - 24 = 16.25\\ g(40) &= 40 \times 1.15 - 24 = 22.00\\ g(45) &= 40 \times 1.15 - 24 = 22.00\\ g(50) &= 40 \times 1.15 - 24 = 22.00\end{aligned}$$

De verwachte winst is dus

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(g(X)) &= 0.10 \times 10.50 + 0.35 \times 16.25\\ &\quad + 0.30 \times 22.00 + 0.20 \times 22.00\\ &\quad + 0.05 \times 22.00 = 18.84\end{aligned}$$

Opmerking: Dit is **niet** hetzelfde als eenvoudigweg de winst berekenen van $\mathrm{E}(X)$, want dit zou gelijk zijn aan

$$g(\mathrm{E}(X)) = g(38.75) = 38.75 \times 1.15 - 24 = 20.56$$

Dit toont aan dat over het algemeen

$$\mathrm{E}(g(X)) \neq g(\mathrm{E}(X)).$$

3. Noem C het aantal defecten per dag in de gemeenschappelijke werkplaats. Dan is het duidelijk dat C waarden kan aannemen van 0 tot 4. De verschillende kansen worden, dankzij de veronderstelde onafhankelijkheid, gemakkelijk berekend:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C=0) &= \mathbb{P}(A=0 \cap B=0) \\
&= \mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=0) \\
&= 0.3 \times 0.2 \\
&= 0.06;
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C=1) &= \mathbb{P}\big((A=0 \cap B=1) \cup (A=1 \cap B=0)\big) \\
&= \mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=1) + \mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=0) \\
&= 0.3 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 \\
&= 0.19;
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C=2) &= \mathbb{P}\big((A=0 \cap B=2) \cup (A=1 \cap B=1) \cup (A=2 \cap B=0)\big) \\
&= \mathbb{P}(A=0)\,\mathbb{P}(B=2) + \mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=1) \\
&\quad + \mathbb{P}(A=2)\,\mathbb{P}(B=0) \\
&= 0.3 \times 0.5 + 0.5 \times 0.3 + 0.2 \times 0.2 \\
&= 0.34;
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C=3) &= \mathbb{P}\big((A=1 \cap B=2) \cup (A=2 \cap B=1)\big) \\
&= \mathbb{P}(A=1)\,\mathbb{P}(B=2) + \mathbb{P}(A=2)\,\mathbb{P}(B=1) \\
&= 0.5 \times 0.5 + 0.2 \times 0.3 \\
&= 0.31;
\end{aligned}$$

en tenslotte

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C=4) &= \mathbb{P}(A=2 \cap B=2) \\
&= \mathbb{P}(A=2)\,\mathbb{P}(B=2) \\
&= 0.2 \times 0.5 \\
&= 0.10
\end{aligned}$$

Merk op dat inderdaad

$$\sum_{c=0}^{4} \mathbb{P}(C = c) = \sum_{c=0}^{4} f_C(c) = 0.06 + 0.19 + 0.34 + 0.31 + 0.10 = 1$$

We kunnen nu gemakkelijk het gevraagde gemiddelde berekenen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(C) &= \sum_{c=0}^{4} c f_C(c) \\ &= 0 \times 0.06 + 1 \times 0.19 + 2 \times 0.34 + 3 \times 0.31 + 4 \times 0.10 \\ &= 2.2 \end{aligned}$$

Alternatieve oplossingsmethode
De toevalsveranderlijke C is eigenlijk de *som* van de toevalsveranderlijkenn A en B, en dus is

$$\mathrm{E}(C) = \mathrm{E}(A + B) = \mathrm{E}(A) + \mathrm{E}(B).$$

Deze laatste eigenschap staat niet expliciet vermeld in de theorie maar je gaat gemakkelijk na dat in dit geval

$$\mathrm{E}(A) = 0.9 \quad \text{en} \quad \mathrm{E}(B) = 1.3,$$

zodat we inderdaad hetzelfde resultaat bekomen.

4. a) Wanneer iedereen individueel wordt getest dan is het aantal testen (per groep) constant, nl. 50. Het gemiddeld aantal testen nodig is dan ook 50.

   b) Wanneer in groep wordt getest dan is er in sommige gevallen maar één test nodig, nl. wanneer niemand de ziekte heeft. Wanneer minstens één iemand de ziekte heeft dan zijn er 51 testen nodig, nl. 1 test voor de groep en daarna 50 individuele testen om uit te vissen welke individuen de ziekte hebben.

   We moeten dus de kans vinden dat de groep negatief test. De kans dat één persoon de ziekte niet heeft en dus negatief test is 99%. De kans dat in een groep van 50 personen niemand de ziekte heeft is (wegens onafhankelijkheid van de personen):

$$(0.99)^{50} = 60.50\%$$

en dus is de kans dat minstens één persoon de ziekte heeft

$$1 - 60.50\% = 39.50\%.$$

Als we T het aantal testen noemen bij het in groep testen dan is

$$\mathrm{E}(T) = 1 \times 60.50\% + 51 \times 39.50\% = 20.75$$

c) Bij het in groep testen is het verwachte aantal testen dus beduidend lager. Puur economisch is het dus aangeraden om in groep te testen. Hier houden we echter geen rekening met andere factoren zoals bv. het feit dat mensen eventueel twee keer moeten getest worden, dat bij het in groep testen er mensen zijn die onnodig "schrik" worden aangejaagd enzovoort.

5. Bij definitie is een spel *eerlijk* als de inzet gelijk is aan de gemiddelde winst.

   Noem W de toevalsveranderlijke die het bedrag beschrijft dat wordt uitbetaald bij een inzet van 1 EUR. Uit de opgave weten we dat W slechts twee waarden aanneemt, nl. 0 en 36. Aangezien er 37 vakjes zijn is het duidelijk dat

$$\mathbb{P}(W = 0) = \frac{36}{37} \quad \text{en} \quad \mathbb{P}(W = 36) = \frac{1}{37}.$$

   Hieruit volgt dat

$$\mathrm{E}(W) = 0 \times \frac{36}{37} + 36 \times \frac{1}{37} = \frac{36}{37} < 1.$$

   Dit is dus *geen* eerlijk spel aangezien je gemiddeld minder wint dan je inzet.

HOOFDSTUK **3**

Kansverdelingen

3.2.5 Oefeningen

1. Een verzekeringsmaatschappij sluit met 10 personen een levensverzekering af. De kans dat een individuele persoon nog in leven is na 30 jaar is 60%. Bereken de kans dat na 30 jaar
   a) alle verzekerden nog leven;
   b) minstens 3 personen nog in leven zijn;
   c) exact 4 personen in leven zijn.
2. Om de verkoop van een bepaald artikel te stimuleren heeft een fabrikant in een kwart van de pakjes een geschenkje verpakt. Iemand koopt twee pakjes.
   a) Bereken de kans op twee geschenken.
   b) Wat is het gemiddeld aantal geschenken dat zo'n persoon mag verwachten, i.e. wat is μ?
   c) Bepaal de variantie σ^2.
3. Een wijnhandelaar blijkt zijn flessen enigszins onnauwkeurig te vullen. Hierdoor voldoet 10% van de afgeleverde flessen niet aan de inhoudsnorm van het etiket.
   a) Een consument koopt 12 flessen wijn. Hoe groot is de kans dat precies 2 flessen niet aan de norm voldoen?

b) Iemand koopt 144 flessen. Hoe groot is de kans dat hoogstens 10 flessen niet aan de norm voldoen?

4. Bij een injectie met een bepaald medicijn is de kans op een schadelijke nevenreactie 0,001. Bereken de kans dat bij 2000 inspuitingen

   a) 3 patiënten deze reactie vertonen;

   b) meer dan 5 patiënten de reactie vertonen.

5. Het aantal klanten dat per minuut een postkantoor binnenkomt, mag worden beschouwd als een kansvariabele met een Poisson-verdeling. De kans dat binnen een minuut niemand binnenkomt, bedraagt 0,6065. Bepaal de kans dat in een periode van 10 minuten er meer dan 10 klanten binnenkomen.

6. Bij een telefooncentrale komen gemiddeld 180 oproepen per uur binnen. Het aantal oproepen per uur mag beschouwd worden als een toevalsveranderlijke met een Poisson-verdeling. In een minuut kunnen hoogstens 6 gesprekken verwerkt worden. Bereken de kans dat in een bepaalde minuut overbelasting optreedt.

7. Op een bepaalde verkeersweg tussen twee steden gebeuren per jaar gemiddeld 10 verkeersongevallen. Bereken de kans dat er tijdens het komende jaar 8 of meer ongevallen gebeuren in de veronderstelling dat het aantal verkeersongevallen per jaar een Poisson-verdeling volgt.

8. Een webrobot zoekt naar een bepaald sleutelwoord in een reeks van onafhankelijk gekozen webpagina's. Men gaat ervan uit dat 15% van de webpagina's dit sleutelwoord bevatten.

   a) Wat is de kans dat de webrobot een webpagina vindt die het sleutelwoord bevat in de eerste vijf bezochte websites?

   b) Hoeveel webpagina's moet de webrobot gemiddeld bezoeken om een webpagina te vinden die het sleutelwoord bevat?

3.2.6 Oplossingen

1. Noem X het aantal verzekerden nog in leven na 30 jaar. Er zijn 10 personen en de kans dat een individuele persoon nog leeft na 30 jaar is 60%; dit is dus (ietwat oneerbiedig) gelijkaardig aan tienmaal gooien

met een munstuk waarbij de kans op kop 60% is en dan tellen hoeveel keer je kop zag. Het is dus duidelijk dat

$$X \sim B(10, 0.6).$$

We kunnen dus de (gekende) kansfunctie van de binomiale verdeling gebruiken.

a) $\mathbb{P}(X = 10) = \binom{10}{10}(0.6)^{10}(1-0.6)^{10-10} = (0.6)^{10} = 0.006047.$
De kans dat alle personen nog leven is dus minder dan 1%.

b) Minstens drie personen leven nog is equivalent met

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(X < 3) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = 2) \\
&= 1 - \binom{10}{0}(0.6)^0(1-0.6)^{10-0} - \binom{10}{1}(0.6)^1(1-0.6)^{10-1} \\
&\quad - \binom{10}{2}(0.6)^2(1-0.6)^{10-2} \\
&= 1 - 0.01230 \\
&= 0.9877
\end{aligned}$$

We gaan over op het complement omdat we dan veel minder rekenwerk hebben.
Merk op dat

$$\binom{10}{0} = 1, \quad \binom{10}{1} = 10 \quad \text{en} \quad \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

M.b.v. Excel kan je de gevraagde waarschijnlijkheid ook berekenen als

```
1 - binom.verd(2; 10; 0.6; WAAR)
```

Dit is de "vertaling" naar Excel van de uitdrukking

$$1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \quad \text{met } X \sim B(10, 0.6).$$

c) Exact 4 personen nog in leven is equivalent met

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 4) &= \binom{10}{4}(0.6)^4(1-0.6)^{10-4} \\
&= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times 0.6^4 \times 0.4^6 \\
&= 0.1115
\end{aligned}$$

M.b.v. Excel kan je dit ook berekenen als

```
binom.verd(4; 10; 0.6; ONWAAR)
```

Het laatste argument slaat op het feit dat we nu *geen* cumulatieve kansfunctie wensen te berekenen.

2. We noemen X het aantal pakjes met een geschenkje erin. Het is duidelijk dat X binomiaal verdeeld is met $n = 2$ en $p = \frac{1}{4}$:

$$X \sim B(2, \frac{1}{4}).$$

a) We krijgen twee geschenkjes als X de waarde 2 aanneemt:

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{2}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

Merk op dat dit ook gemakkelijk kan berekend worden zonder de kansfunctie van de binomiale verdeling te gebruiken.

b) Uit de formule voor de verwachtingswaarde van een binomiaal verdeelde toevalsveranderlijke volgt onmiddellijk dat

$$\mathrm{E}(X) = np = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

c) De variantie wordt ook onmiddellijk berekend aan de hand van de gekende formule:

$$\sigma_X^2 = np(1-p) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

3. a) Noem X het aantal flessen dat niet aan de norm voldoet, dan geldt

$$X \sim B(12, 0.1).$$

We vragen ons dus af wat $\mathbb{P}(X = 2)$ is. Dit wordt eenvoudig berekend:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 2) &= \binom{12}{2} (0.1)^2 (1 - 0.1)^{12-2} \\ &= \frac{12 \times 11}{2} \times \frac{9^{10}}{10^{12}} \\ &= 0.2301 \end{aligned}$$

Of met Excel:

```
binom.verd(2; 12; 0.1; ONWAAR)
```

b) Aangezien er nu meer flessen worden verkocht is het aantal flessen X dat nu niet aan de norm voldoet nog steeds binomiaal verdeeld maar de waarde van de parameter n is nu 144:

$$X \sim B(144, 0.1).$$

We vragen ons af wat

$$\mathbb{P}(X \leq 10)$$

is. Met de hand is dit een (zeer) lange berekening. Met Excel gebruiken we de formule

```
binom.verd(10; 144; 0.1; WAAR)
```

en we vinden

$$\mathbb{P}(X \leq 10) = 0.1372$$

4. We kunnen deze oefening op twee manier oplossen. De eerste manier is rechtstreeks met de binomiale verdeling met $n = 2000$ en $p = 0.001$. Omdat in dit geval n "groot" is en p "klein" kunnen we ook de Poisson-verdeling gebruiken met $\lambda = np = 2000 \times 0.001 = 2$. We noemen X de toevalsveranderlijke die binomiaal verdeeld is; Y volgt een Poisson-verdeling.

   a) M.b.v. de binomiale verdeling vinden we:

   $$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{2000}{3}(0.001)^3(0.999)^{1997} = 0.18054,$$

   terwijl de Poisson-verdeling het volgende resultaat oplevert:

   $$\mathbb{P}(Y = 3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = 0.18045.$$

   Merk op dat de resultaten identiek zijn indien we afronden op vier cijfers na de komma.

   b) Als we de binomiale verdeling gebruiken dan wordt dit al (zeer) lang om met de hand te berekenen. We gebruiken Excel om

   $$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5)$$

   te berekenen als

```
1-binom.verd(5; 2000; 0.001; WAAR)
```

en we vinden

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 0.01651$$

Met de Poisson-verdeling kunnen we dit nog net met de hand berekenen:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > 5) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 5) \\
&= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right) \\
&= 1 - e^{-2} \times \frac{109}{15} \\
&= 0.01656
\end{aligned}$$

We zien opnieuw dat beide oplossingsmethoden een quasi identiek antwoord opleveren.

5. We weten dat het aantal klanten X dat per minuut binnengaat Poisson-verdeeld is maar we kennen de parameter λ niet. We weten echter wel dat

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.6065 \iff e^{-\lambda} = 0.6065$$

We moeten deze vergelijking oplossen naar de onbekende parameter λ. Dit doen we door van beide leden de natuurlijke logaritme te nemen:

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda} = 0.6065 &\iff \ln(e^{-\lambda}) = \ln(0.6065) \\
&\iff -\lambda = -0.50005 \\
&\iff \lambda = 0.50005
\end{aligned}$$

Als Y het aantal klanten voorstelt dat binnengaat in 10 minuten, dan is Y ook Poisson-verdeeld maar met een parameter λ' die 10 keer groter is, want

$$0.50005/\text{minuut} = 5.0005/10 \text{ minuten}.$$

We wensen te bereken wat

$$\mathbb{P}(Y > 10) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 10)$$

is. Dit kan eenvoudig m.b.v. de volgende Excel-formule:

```
1 - poisson.verd(10; 5.0005; WAAR)
```

en we vinden

$$\mathbb{P}(Y > 10) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 10) = 0.01370$$

6. Het aantal oproepen per *minuut* is Poisson-verdeeld met parameter $\lambda = 180/60 = 3$ (want 1 uur bestaat uit 60 minuten). Noem X het aantal oproepen per minuut, dan zoeken we:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 6) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq 6)\\ &= 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!}\right)\\ &= 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{27}{8} + \frac{81}{40} + \frac{81}{80}\right)\\ &= 0.03351\end{aligned}$$

Of handiger (en sneller) m.b.v. Excel:

```
1-poisson.verd(6; 3; WAAR)
```

De kans op overbelasting is dus ongeveer 3.4%.

7. Het aantal ongevallen X is Poisson-verdeeld met parameter $\lambda = 10$, want λ geeft meteen ook de verwachtingswaarde van de Poisson-verdeling. Het beantwoorden van de vraag is nu een eenvoudige berekening:

$$\mathbb{P}(X \geq 8) = 1 - \mathbb{P}(X < 8) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 7).$$

Dit wordt eenvoudig berekend a.d.h.v. de volgende Excel-formule:

```
1-poisson.verd(7; 10; WAAR)
```

en we vinden

$$\mathbb{P}(X \geq 8) = 0.7798$$

De kans op 8 of meer ongevallen is dus ongeveer 78%.

8. Als we X het rangnummer noemen van de eerste pagina die het sleutelwoord bevat dan is X geometrisch verdeeld met kans op succes $p = 15\%$.

a) We zoeken (met $q = 1 - p$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 5) &= \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \mathbb{P}(X=5) \\ &= p + qp + q^2p + q^3p + q^4p \\ &= p(1 + q + q^2 + q^3 + q^4) \\ &= p\left(\frac{1-q^5}{1-q}\right) \\ &= 1 - q^5\end{aligned}$$

Wanneer we nu voor q de waarde 0.85 substitueren dan krijgen we

$$\mathbb{P}(X \leq 5) = 0.5563$$

b) We kunnen gebruikmaken van de gekende formule voor de verwachtingswaarde van een geometrisch verdeelde toevalsveranderlijke:

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{p} = \frac{100}{15} = 6.6667$$

3.3.3 Oefeningen

1. Jobs worden naar een printer gezonden aan een gemiddeld tempo van 3 jobs per uur.

   a) Wat is de verwachte tijd tussen jobs?

   b) Wat is de waarschijnlijkheid dat de volgende job wordt gezonden binnen de volgende 5 minuten?

2. De tijd nodig door een technicus om een bepaald soort machine te herstellen heeft een exponentiële verdeling met een gemiddelde van 4 uur. Er bestaat speciaal gereedschap dat dit gemiddelde doet dalen naar 2 uur. Wanneer de technicus erin slaagt om een machine te herstellen in minder dan 2 uur, dan krijgt hij 100 EUR, anders krijgt hij 80 EUR. Bepaal de verwachte meeropbrengst per machine wanneer de technicus het speciale gereedschap gebruikt.

3. Een programma is verdeeld in 3 modules die parallel worden gecompileerd op 3 verschillende computers. De compilatietijd van elk blok is exponentieel verdeeld met een gemiddelde van 5 minuten, onafhankelijk van de andere blokken. Het programma is gecompileerd wanneer alle blokken gecompileerd zijn.

a) Wat is de waarschijnlijkheid dat het programma volledig gecompileerd is in minder dan 5 minuten?

b) Wat is de verwachte compilatietijd? Maak gebruik van het feit dat je de verwachtingswaarde van een toevalsveranderlijke X die enkel niet-negatieve waarden aanneemt ook als volgt kan berekenen:

$$\mu_X = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx.$$

3.3.4 Oplossingen

1. Noem T de tijd tussen twee jobs. Dan is T exponentieel verdeeld met parameter $\lambda = 3/\text{uur}$.

   a) We weten dat voor een exponentiële verdeling de verwachtingswaarde gelijk is aan $1/\lambda$, dus

   $$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}\text{uur}.$$

   Gemiddeld komt er dus om de 20 minuten een job toe.

   b) De volgende kans wordt gevraagd

   $$\mathbb{P}(T \leq 5\text{ minuten}) = \mathbb{P}(T \leq \frac{1}{12}\text{uur}).$$

   Nu kunnen we de formule voor de kansverdelingsfunctie van een exponentieel verdeelde toevalsveranderlijke gebruiken:

   $$\mathbb{P}(T \leq t) = F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-3\times\frac{1}{12}} = 0.2212$$

   Opmerking: wanneer men deze formule wenst te gebruiken is het belangrijk dat λ en t in dezelfde " eenheid" staat, dus bv. allebei uitgedrukt in termen van uur of in termen van minuten maar niet door elkaar.

2. Noem T_1 (resp. T_2) de waarschijnlijkheidsverdeling van de tijd nodig om een machine te herstellen zonder (resp. met) het speciale gereedschap. Noem W_1 en W_2 de toevalsveranderlijken die de bijhorende opbrengsten voorstellen. De toevalsveranderlijken W_i kunnen slechts twee waarden aannemen, nl. 100 en 80. De technicus krijgt 100 EUR

als hij de machine kan herstellen in minder dan 2 uur, anders krijgt hij slechts 80 EUR, m.a.w.

$$\mathbb{P}(W_i = 100) = \mathbb{P}(T_i < 2) \quad \text{en} \quad \mathbb{P}(W_i = 80) = \mathbb{P}(T_i \geq 2).$$

Het komt er dus op aan om de kansen $\mathbb{P}(T_i < 2)$ te bepalen en hiertoe moeten we eerst de parameters λ_i bepalen.

Het gemiddelde van T_1 is 4 uur:

$$\mathrm{E}(T_1) = 4 = \frac{1}{\lambda_1} \iff \lambda_1 = \frac{1}{4},$$

en voor T_2 is de gemiddelde tijd 2 uur:

$$\mathrm{E}(T_2) = 2 = \frac{1}{\lambda_2} \iff \lambda_2 = \frac{1}{2}.$$

M.b.v. de formule voor de kansverdelingsfunctie vinden we dus

$$\mathbb{P}(T_1 < 2) = \mathbb{P}(T_1 \leq 2) = F_{T_1}(2) = 1 - e^{-\frac{1}{4}\times 2} = 0.3935$$

en

$$\mathbb{P}(T_2 < 2) = \mathbb{P}(T_2 \leq 2) = F_{T_2}(2) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\times 2} = 0.6321.$$

Nu kunnen we de verwachtingswaarde van de opbrengst gaan berekenen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W_1) &= 80 \times \mathbb{P}(T_1 \geq 2) + 100 \times \mathbb{P}(T_1 < 2) \\ &= 80 \times (1 - 0.3935) + 100 \times 0.3935 \\ &= 87.87 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W_2) &= 80 \times \mathbb{P}(T_2 \geq 2) + 100 \times \mathbb{P}(T_2 < 2) \\ &= 80 \times (1 - 0.6321) + 100 \times 0.6321 \\ &= 92.64 \end{aligned}$$

De verwachte meeropbrengst (per machine) is dus $92.64 - 87.87 = 4.77$ EUR.

Opmerking In de opgave zijn er onvoldoende gegevens om te beslissen of de technicus het nieuwe gereedschap moet kopen. Dat hangt af van een heel aantal factoren, zoals de kostprijs van het gereedschap, de verwachte levensduur van het gereedschap, het verwachte aantal machines dat kan hersteld worden enzovoort.

3. We starten met het vinden van de kansverdelingsfunctie voor de compilatietijd. Noem T de compilatietijd van het programma en T_i de compilatietijd van module i (met $i \in \{1,2,3\}$). Het programma is gecompileerd in minder dan t minuten (met $t > 0$) als en slechts alledrie de modules compileren in minder dan t minuten. In symbolen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T < t) &= \mathbb{P}\big((T_1 < t) \cap (T_2 < t) \cap (T_3 < t)\big) && \text{onafhankelijkheid}\\ &= \mathbb{P}(T_1 < t)\,\mathbb{P}(T_2 < t)\,\mathbb{P}(T_3 < t) && \text{kansverdelingsfunctie}\\ &= (1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t})(1 - e^{-\lambda_3 t})\end{aligned}$$

   a) Aangezien voor de toevalsveranderlijken T_i geldt dat $\lambda_i = 1/5$, volgt onmiddellijk dat

$$\mathbb{P}(T_i < 5) = 1 - e^{\lambda_i \times 5} = 1 - e^{-1} = 0.6321$$

   en dus

$$\mathbb{P}(T < 5) = (0.6321)^3 = 0.2526$$

   De kans dat het volledige programma gecompileerd is in 5 minuten of minder is dus iets meer dan 25%.

   b) Aangezien $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ kunnen we $\mathbb{P}(T < t)$ ook schrijven als

$$\mathbb{P}(T < t) = (1 - e^{-\lambda t})^3.$$

   De verwachte compilatietijd is dus (m.b.v. de formule in de opgave)

$$\mu_T = \int_0^\infty 1 - (1 - e^{-\lambda t})^3 \, \mathrm{d}t$$

   Wanneer je bekend bent met integraalrekenen dan zie je dat deze integraal kan berekend worden m.b.v. de substitutie $y = e^{-\lambda t}$. Je kan echter ook software gebruiken, bv. online op www.wolframalpha.com waar de integraal kan berekend worden m.b.v. het volgende commando:

```
integrate (1 - (1-exp(-t/5))^3) t = 0 to infinity
```

   We krijgen dat

$$\mu_T = \frac{55}{6} \approx 9.167$$

   De gemiddelde compilatietijd is dus iets meer dan 9 minuten.

Deel II

Bomen en Grafen

HOOFDSTUK **4**

Bomen

4.1.1 Oefeningen

1. Bekijk de boom in Figuur 4.1. Beantwoord de volgende vragen:

   a) Geef de wortel van de boom.

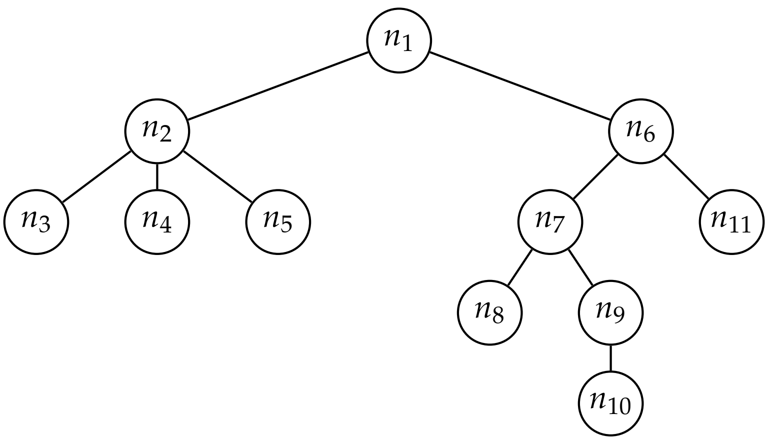
   b) Geef de verzamelingen T_1 t.e.m. T_m volgens Definitie 4.1.

   c) Geef de kinderen van elke top in de boom.

   d) Geef de graad van elke top in de boom.

   e) Geef de graad van de boom T.

   f) Welke toppen zijn broers van elkaar?



Figuur 4.1: Een voorbeeldboom.

g) Geef de bladeren van de boom.

h) Geef de afstammelingen van n_6.

i) Geef de voorouders van n_{10}.

j) Maak een tabel waarin voor elke top zijn hoogte en diepte wordt gegeven.

4.1.2 Oplossingen

1. a) De wortel van de boom is de top n_1.

   b) Er zijn twee deelbomen T_1 en T_2 die gegeven worden door

$$T_1 = \{n_2, n_3, n_4, n_5\}$$
$$T_2 = \{n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}\}.$$

   c) In tabelvorm vinden we

top	kinderen
n_1	n_2, n_6
n_2	n_3, n_4, n_5
n_6	n_7, n_{11}
n_7	n_8, n_9
n_9	n_{10}

   De andere toppen hebben geen kinderen.

   d) De graad van een top is het aantal kinderen van die top. We leiden het antwoord dus zeer eenvoudig af uit het antwoord op de vorige vraag. We antwoorden opnieuw in tabelvorm

top	graad	top	graad
n_1	2	n_7	2
n_2	3	n_8	0
n_3	0	n_9	1
n_4	0	n_{10}	0
n_5	0	n_{11}	0
n_6	2		

   e) De graad van de *boom* is de *maximale graad van zijn toppen*. In dit geval is de graad van de boom dus 3.

f) Toppen zijn broers van elkaar als ze dezelfde ouder hebben. We vinden nu gemakkelijk dat de volgende verzamelingen toppen bestaan uit broers:

$$\{n_2, n_6\}, \quad \{n_3, n_4, n_5\}, \quad \{n_7, n_{11}\}, \quad \{n_8, n_9\}.$$

g) De bladeren van de boom zijn de toppen zonder kinderen, of anders gezegd de toppen met graad nul. Dit zijn de volgende toppen:

$$\{n_3, n_4, n_5, n_8, n_{10}, n_{11}\}.$$

h) De afstammelingen van de top n_6 zijn de kinderen van n_6 samen met de afstammelingen (recursief) van deze kinderen. We vinden:

$$\{n_7, n_{11}, n_8, n_9, n_{10}\}.$$

i) De voorouders van n_{10} zijn de ouder van n_{10} (i.e. de top n_9) samen met de voorouders (recursief) van deze ouder:

$$\{n_9, n_7, n_6, n_1\}.$$

j) De diepte van een top geeft de "afstand" tot de wortel; de hoogte van een blad is steeds nul en voor een andere top één meer dan de maximum hoogte van zijn kinderen.

top	hoogte	diepte	top	hoogte	diepte
n_1	4	0	n_7	2	2
n_2	1	1	n_8	0	3
n_3	0	2	n_9	1	3
n_4	0	2	n_{10}	0	4
n_5	0	2	n_{11}	0	2
n_6	3	1			

4.2.3 Oefeningen

1. Bereken hoeveel null-referenties er zullen zijn bij de array-van-kinderen voorstelling van de boom in Figuur 4.1. Wat is de verhouding van het aantal effectief gebruikte referenties tot het aantal voorziene referenties?

2. Teken de array-van-kinderen voorstelling van de boom in Figuur 4.1.

3. Bereken hoeveel null-referenties er zullen zijn bij eerste-kind-volgende-broer voorstelling van de boom in Figuur 4.1. Wat is de verhouding van het aantal effectief gebruikte referenties tot het aantal voorziene referenties?

4. Wat is de verhouding van het aantal effectief gebruikte referenties tot het aantal voorziene referenties voor een willekeurige gewortelde boom van graad k met n toppen.

5. Teken de eerste-kind-volgende-broer voorstelling van de boom in Figuur 4.1.

4.2.4 Oplossingen

1. De voorbeeldboom heeft 11 toppen en de graad van de *boom* is 3. Er zijn in totaal dus $11 \times 3 = 33$ referenties wanneer we de array-van-kinderen voorstelling gebruiken.

   Het aantal effectief gebruikte referenties is $11 - 1 = 10$. Wanneer we de pijlen omkeren dan wijst elke top naar zijn ouder, en iedere top behalve de wortel heeft juist één ouder. Er is dus steeds één pijl minder dan er toppen zijn.

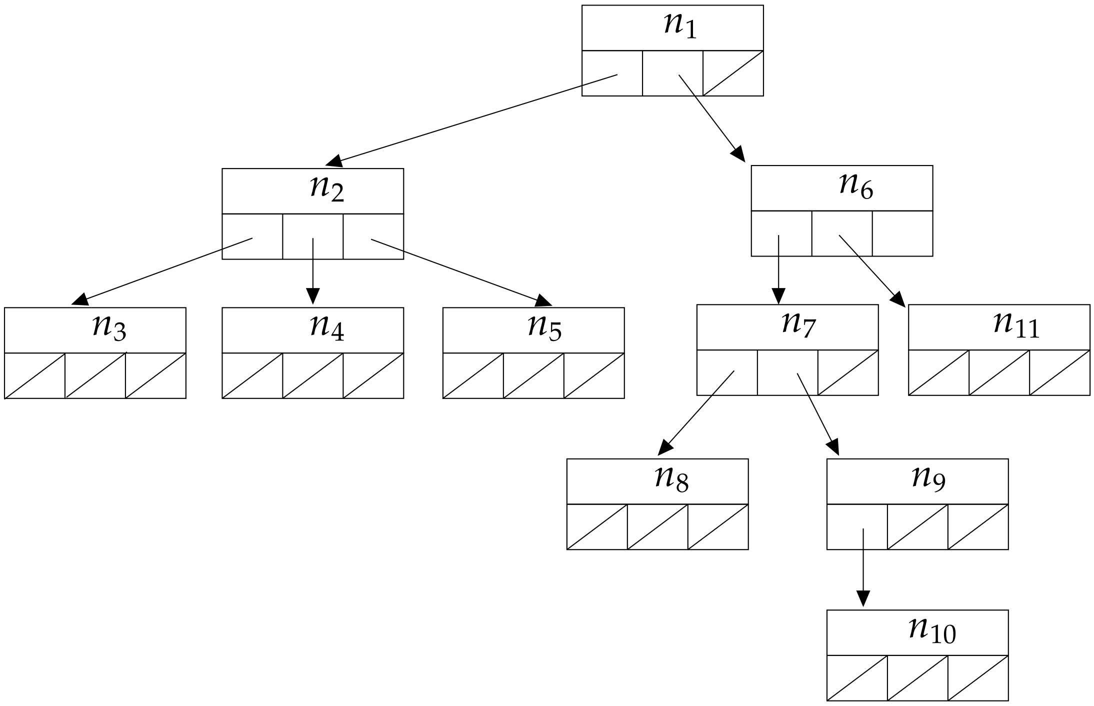
   Er zijn dus slechts 10 referenties met een waarde verschillend van `null`.

   De verhouding van het aantal gebruikte t.o.v. het totaal aantal referenties is dus
   $$\frac{10}{33} = 0.30303 \approx \frac{1}{3}.$$

2. De oplossing van deze opgave zie je in Figuur 4.2

3. Bij de eerste-kind-volgende-broer voorstelling zijn er steeds twee referenties per top. In totaal zijn er nu dus 22 referenties. Het aantal effectief gebruikte referenties is nog steeds 10. Inderdaad, als we de pijlen omkeren dan wijst elke top behalve de wortel ofwel naar zijn ouder ofwel naar zijn vorige broer.

   De verhouding van het aantal gebruikte t.o.v. het aantal voorziene referenties is nu
   $$\frac{10}{22} = 0.45455 \approx \frac{1}{2}.$$



Figuur 4.2: De array-van-kinderen voorstelling van de voorbeeldboom voor de oefeningen.

Dit is dus heel wat beter dan bij de array-van-kinderen voorstelling. Bovendien is deze verhouding *onafhankelijk* van de graad van de boom.

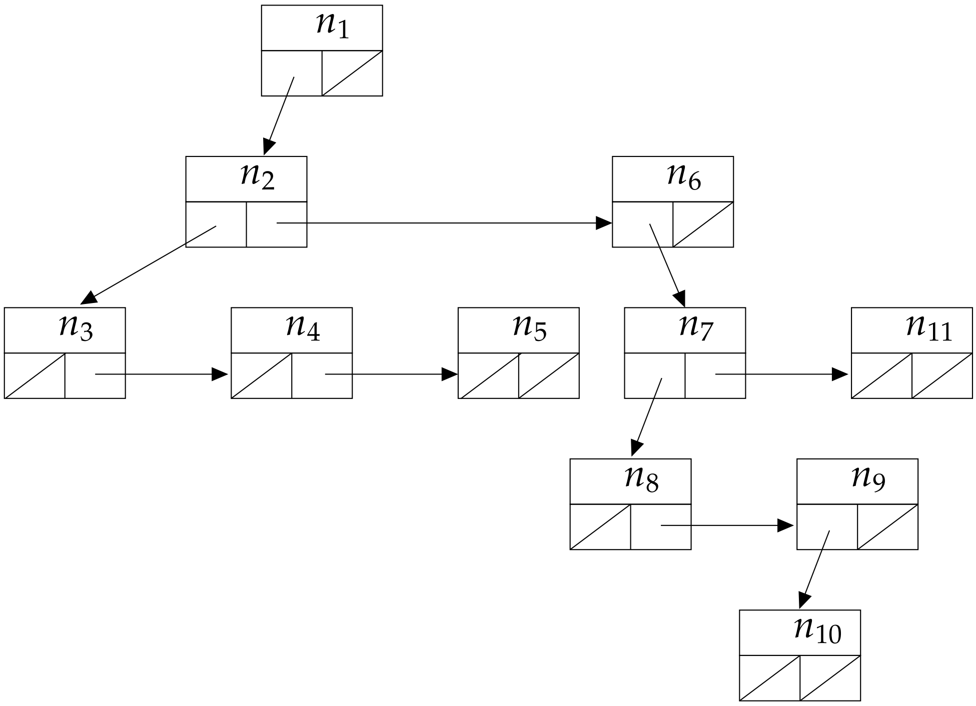
4. We kunnen de redenering uit de vorige oefening veralgemenen. Wanneer de boom n toppen heeft dan zijn er in de eerste-kind-volgende-broer voorstelling $2n$ referenties. Het aantal gebruikte referenties is steeds $n-1$. Immers, wanneer we de pijlen omkeren dan wijst elke top, behalve de wortel, ofwel naar zijn vorige broer of naar zijn ouder. De gevraagde verhouding is dus

$$\frac{n-1}{2n} \approx \frac{1}{2} \quad \text{als } n \text{ groot is.}$$

5. De oplossing van deze oefening wordt getoond in Figuur 4.3.

4.3.3 Oefeningen

1. Geef de volgorde waarin de toppen worden bezocht wanneer de boom in Figuur 4.1 respectievelijk in preorde en postorde wordt doorlopen.



Figuur 4.3: De eerste-kind-volgende-broer voorstelling van de voorbeeldboom voor de oefeningen.

2. Geef code analoog aan Algoritme 4.1 om een gewortelde boom in postorde te doorlopen.

3. Geef code analoog aan Algoritme 4.2 om de hoogte van een gewortelde boom te berekenen. Baseer je op formule (4.2).

4.3.4 Oplossingen

1. Bij preorde bezoeken we eerst de wortel van de boom en daarna (recursief) in preorde de deelbomen onder de wortel. We vinden voor preorde
$$n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}.$$
Voor postorde vinden we
$$n_3, n_4, n_5, n_2, n_8, n_{10}, n_9, n_7, n_{11}, n_6, n_1.$$

2. De code voor het in postorde doorlopen van een gewortelde boom is heel gelijkaardig aan die voor het in preorde doorlopen van een gewortelde boom: behalve het wijzigen van de naam van de methodes

moeten we enkel de "visit" functie verplaatsen zodat deze wordt uitgevoerd *na* het uitvoeren van de recursieve oproepen. In concreto krijgen we dan:

Invoer Een gewortelde boom T, en een visit functie.
Uitvoer De visit functie is aangeroepen voor elke top van de boom.

```
function PostOrde(T,visit)
    PostOrdeRecursief(T.wortel, visit)          ▷ start met de wortel
end function
function PostOrdeRecursief(v, visit)
    for all w ∈ kinderen(v) do          ▷ implementatie-onafhankelijk
        PostOrdeRecursief(w, visit)
    end for
    visit(v)
end function
```

3. Het is relatief eenvoudig om de formule (4.2) om te zetten in een recursief algoritme.

Invoer Een gewortelde boom T.
Uitvoer De hoogte van de boom.

```
function Hoogte(T)
    return HoogteRecursief(T.wortel)          ▷ Start met de wortel
end function
function HoogteRecursief(v)
    h ← −1                          ▷ Dan kunnen we altijd +1 doen
    for all w ∈ kinderen(v) do
        h ← max(h, HoogteRecursief(w))
    end for
    return h + 1          ▷ Wanneer m = 0 dan zal h nog steeds −1 zijn
end function
```

4.4.4 Oefeningen

1. a) Teken de binaire boom met labels 0 t.e.m. 9 waarvoor de inorde sequentie

$$9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5$$

is terwijl de postorde sequentie

$$9, 1, 4, 0, 3, 6, 7, 5, 8, 2$$

is.

b) Doe nu hetzelfde voor de volgende sequenties, of leg uit waarom zo'n binaire boom niet bestaat:

$$\text{inorde: } 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5$$

en

$$\text{postorde: } 9, 1, 4, 0, 3, 6, 5, 7, 8, 2$$

4.4.5 Oplossingen

1. a) Uit de postorde sequentie weten we onmiddellijk dat 2 de wortel van de boom is want bij de postorde sequentie staat de wortel van de boom steeds op de laatste plaats. Uit de inorde sequentie leiden we dan af dat de toppen in de linkerdeelboom

$$9, 3, 1, 0, 4$$

zijn, terwijl de toppen in de rechterdeelboom

$$7, 6, 8, 5$$

zijn, want bij de inorde sequentie staat de wortel steeds tussen de toppen van de linker- en rechterdeelboom. We zien dat in de postorde sequentie de verzameling toppen

$$\{9, 3, 1, 0, 4\}$$

wel degelijk voorkomt vóór al de toppen van de verzameling

$$\{7, 6, 8, 5\}.$$

Op dit moment zijn de twee sequenties nog steeds consistent met elkaar.

We kunnen dit proces nu verder zetten voor de twee geïdentificeerde deelsequenties, bv.

$$\text{inorde: } 9, 3, 1, 0, 4 \quad \text{postorde: } 9, 1, 4, 0, 3$$

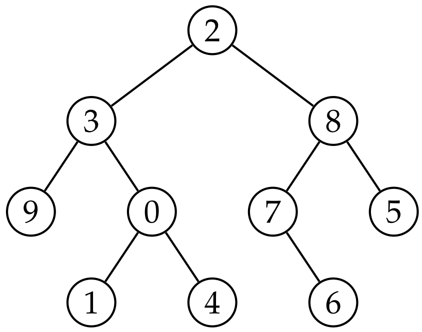
en

$$\text{inorde: } 7, 6, 8, 5 \quad \text{postorde: } 6, 7, 5, 8.$$

Uit de eerste postorde sequentie zien we dat 3 de wortel moet zijn van de linkerdeelboom, en uit de bijhorende inorde sequentie volgt dan dat 9 de enige top is in de linkerdeelboom van de top 3. De toppen in de rechterdeelboom van 3 zijn dus 1, 0 en 4. Aangezien 0 als laatste voorkomt in de postorde sequentie is dit de wortel van deze deelboom. Uit de inorde sequentie zien we dan dat 1 onmiddellijk links moet zitten van 0 en 4 onmiddellijk rechts.

In de rechterdeelboom bestaande uit de toppen $\{7,6,8,5\}$ is 8 de wortel. In de rechterdeelboom van 8 zit enkel de top 5. In de linkerdeelboom de toppen 7 en 6; dit zien we allebei uit de inorde sequentie. We zien dat 7 de wortel moet zijn van de linkerdeelboom van 8. Uit de inorde sequentie volgt dat 6 het rechterkind is van 7.

De volledige binaire boom ziet er als volgt uit:

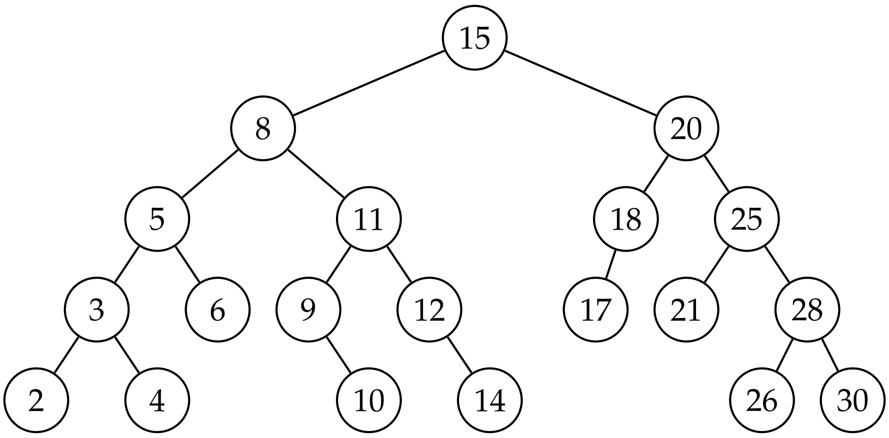


Men gaat gemakkelijk na dat deze boom inderdaad de vooropgestelde inorde en postorde sequentie van toppen heeft. De redenering die we hebben gemaakt toont ook aan dat dit de *enige* binaire boom die consistent is met de gegeven sequenties.

b) Net als in de vorige opgave zien we dat 2 de wortel moet zijn van de binaire boom en dat $9,3,1,0,4$ resp. $7,6,8,5$ de toppen zijn van de linker- resp. rechterdeelboom.

In de postorde sequentie komen alle toppen van de linkerdeelboom ook effectief vóór de toppen van de rechterdeelboom.

De linkerdeelboom is net dezelfde als in de vorige oefening, dus we concentreren ons nu op de rechterdeelboom met de toppen $7,6,8,5$. Uit de postorde sequentie zien we dat 8 de wortel moet zijn van deze boom en uit de inorde sequentie volgt dat 7 en 6 de linkerdeelboom uitmaken, terwijl de enige top in de rechterdeel-



Figuur 4.4: Een binaire zoekboom.

boom van 8 de top 5 is. Echter, in de postorde sequentie komt 5 (uit de rechterdeelboom) vóór 7 (uit de linkerdeelboom). Dit is natuurlijk onmogelijk.

Er is m.a.w. geen enkele binaire boom die de gegeven inorde en postorde sequentie heeft.

4.5.5 Oefeningen

1. Geef de binaire zoekboom die opgebouwd wordt door de volgende sleutels
$$4, 7, 5, 8, 11, 3, 2, 9, 10, 6$$
één voor één aan de zoekboom toe te voegen in de gegeven volgorde.

2. Veronderstel dat men een binaire zoekboom opbouwt door sleutels één voor één toe te voegen aan een initieel lege boom.

   a) Geef een rij van lengte 7 die een binaire zoekboom van minimale diepte oplevert.

   b) Geef een rij van lengte 15 die een binaire zoekboom van minimale diepte oplevert.

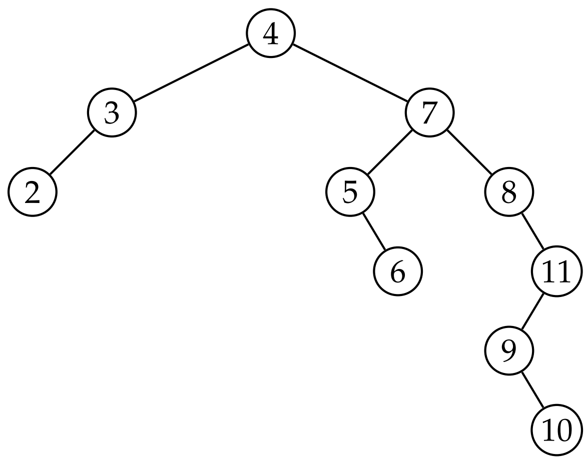
   c) Geef een rij van lengte 5 die een binaire zoekboom van maximale diepte oplevert. Wanneer krijg je een over het algemeen een slecht gebalanceerde binaire zoekboom?

3. Beschouw de binaire zoekboom in Figuur 4.4. Voer de volgende opdrachten één na één uit.

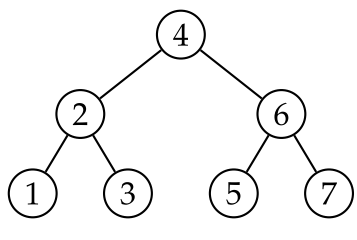
    a) Welke toppen worden er bezocht bij het zoeken naar de top 12?
    b) Welke toppen worden er bezocht bij het zoeken naar de top 27?
    c) Voeg een top met sleutelwaarde 23 toe aan de zoekboom. Teken de resulterende zoekboom.
    d) Voeg vervolgens een top met sleutelwaarde 22 toe aan de zoekboom. Teken de resulterende zoekboom.
    e) Verwijder de top met waarde 4 uit de zoekboom. Teken de resulterende zoekboom.
    f) Verwijder vervolgens de top met waarde 18 uit de zoekboom. Teken de resulterende zoekboom.
    g) Verwijder vervolgens de top met waarde 20 uit de zoekboom. Teken de resulterende zoekboom.

4.5.6 Oplossingen

1. Hier krijgen we volgende binaire zoekboom.



2. a) De "ideale" zoekboom met 7 elementen ziet er zo uit:



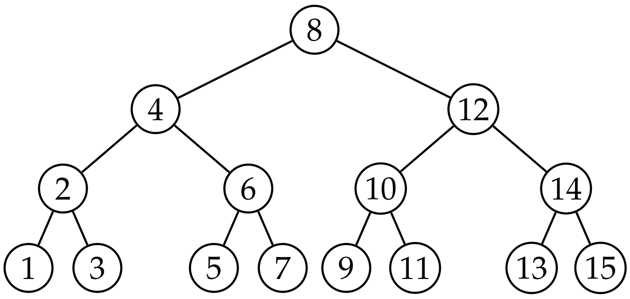
Een *mogelijke* volgorde van toevoegen is de volgende:

$$4, 2, 6, 1, 3, 5, 7.$$

Er zijn echter nog veel andere volgordes mogelijk, bv.

$$4, 2, 1, 3, 6, 5, 7.$$

b) De zoekboom met minimale diepte bestaande uit 15 elementen heeft de volgende vorm:



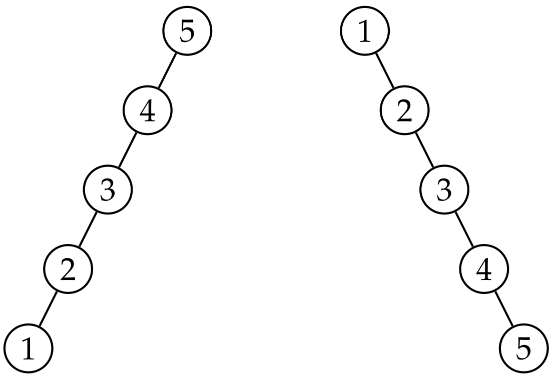
Merk op dat de linkerdeelboom van de wortel dezelfde is als in de vorige oefening. De sleutels van de rechterdeelboom zijn exact 8 groter dan de overeenkomstige labels in de linkerdeelboom. Een *mogelijke* volgorde van invoegen is:

$$8, 4, 12, 2, 6, 10, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$$

Dit is niveau per niveau. De pre-orde volgorde is ook een volgorde die zal leiden tot dezelfde boom:

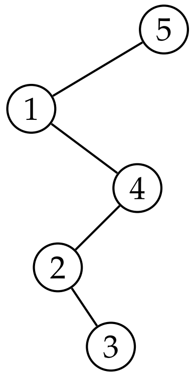
$$8, 4, 2, 1, 3, 6, 5, 7, 12, 10, 9, 11, 14, 13, 15.$$

c) Wanneer je de sleutels toevoegt in dalende of stijgende volgorde dan krijg je de volgende zoekbomen met maximale diepte:



Stijgende en dalende volgorde van labels zijn echter niet de enige manieren om een slecht gebalanceerde boom te vinden. Hieronder nog een ander voorbeeld waarbij de labels werden toegevoegd in de volgorde

$$5, 1, 4, 2, 3$$



3. a) De volgende toppen worden bezocht wanneer we zoeken naar de top met label 12:

   15 (links) 8 (rechts) 11 (rechts) 12 (gevonden)

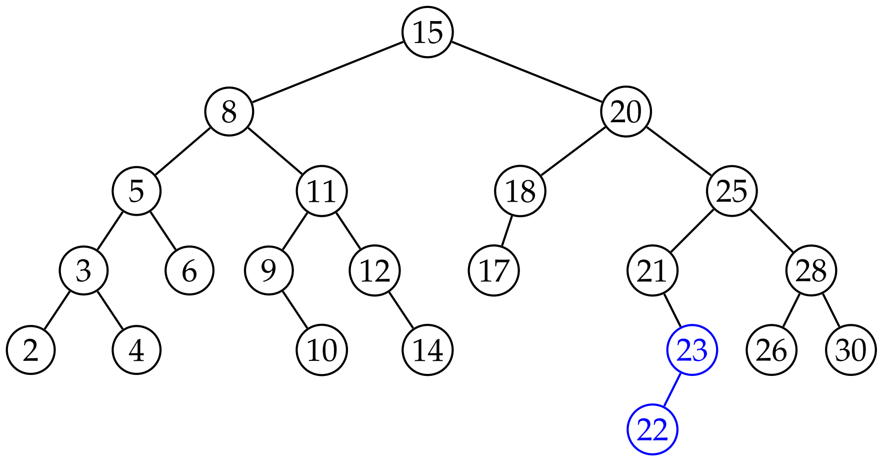
   b) De volgende toppen worden bezocht wanneer we zoeken naar de top met label 27:

   15 (rechts) 20 (rechts) 25 (rechts) 28 (links) 26 (rechts is leeg).

   In de top 26 zouden we m.a.w. naar rechts moeten gaan in onze zoektocht naar de top 27. Deze rechterdeelboom is echter leeg. Dit toont aan dat de top 27 niet tot de boom behoort.

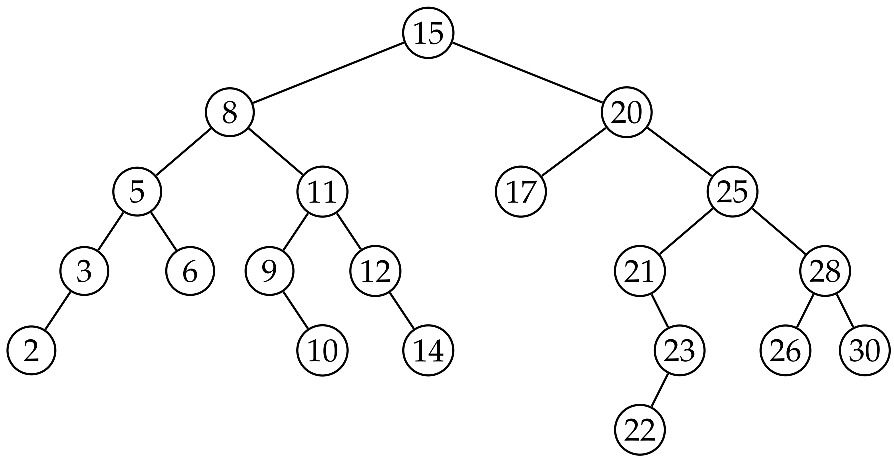
   c) Toevoegen van top 23 resulteert in een nieuw blad rechts van top 21.

   d) Toevoegen van top 22 resulteert in een nieuw blad links van de nieuw toegevoegde top 23. Het resultaat van deze twee toevoegingen wordt hieronder getoond.

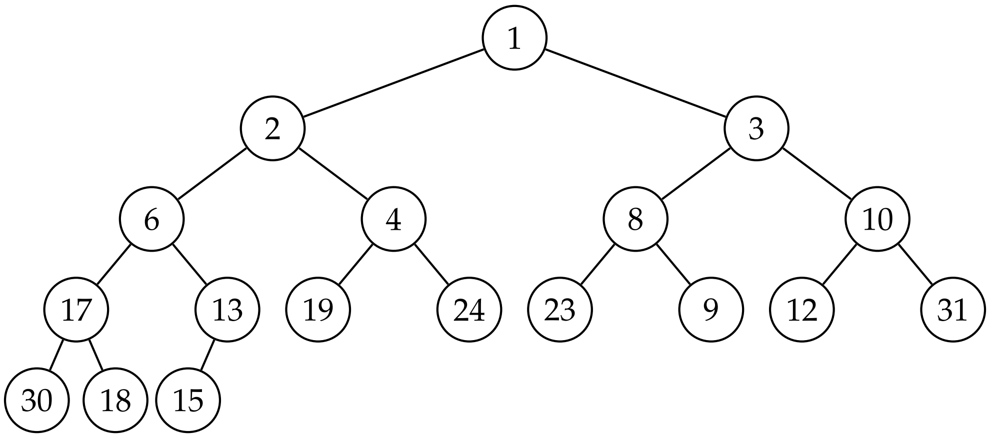


e) Verwijderen van top 4 uit de binaire zoekboom is zeer eenvoudig aangezien 4 een blad is. Dit blad hoeft enkel maar verwijderd te worden (door de rechterreferentie van 3 terug op "null" te zetten).

f) Verwijderen van top 18 is ook relatief eenvoudig aangezien de top 18 slechts één kind heeft; 18 is het linkerkind van zijn ouder (20) en dus wordt het enige kind van 18 (17 in dit geval) het linkerkind van 20. Het resultaat van de laatste twee verwijderbewerkingen wordt hieronder getoond:

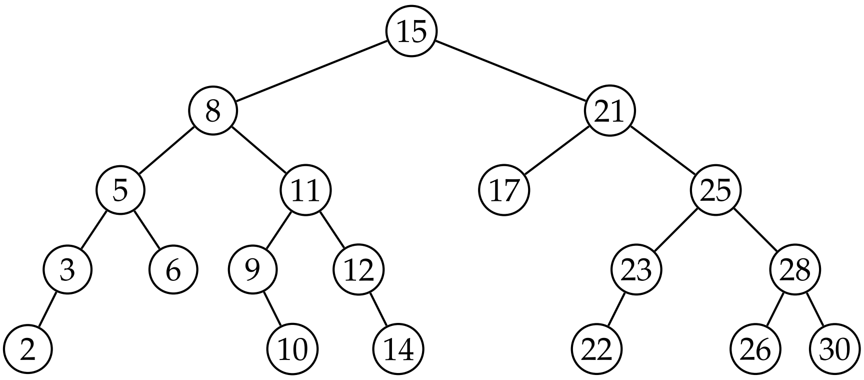


g) De top 20 heeft twee kinderen. We zoeken zijn opvolger, dit is de kleinste top in zijn rechterdeelboom. In dit geval is dit top 21. We verwijderen de top 21 uit de boom. Uiteraard heeft 21 hoogstens één kind en dus is dit gemakkelijk. De top 21 is het linkerkind van zijn ouder 25; de deelboom met wortel 23 wordt de linkerdeelboom van 25. Vervolgens vervangen we (de waarde)



Figuur 4.5: Een binaire hoop.

20 door (de waarde van) zijn opvolger 21. Het resultaat zie je hieronder.



4.6.8 Oefeningen

1. Start met een lege binaire hoop. Voeg achtereenvolgens de volgende elementen toe aan de binaire hoop:

$$11, 13, 1, 15, 6, 5, 9, 16, 3, 10, 7, 4, 12, 14, 2.$$

   Teken de resulterende hoop na elke toevoeging.

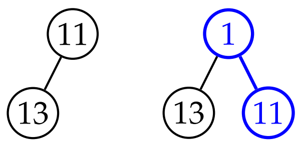
2. Beschouw de binaire hoop in Figuur 4.5. Verwijder de drie kleinste elementen uit deze binaire hoop. Teken de binaire hoop na elke verwijdering.

3. Wat worden de relaties in Eigenschap 4.36 wanneer een binaire hoop wordt opgeslaan in een array met als eerste index 0?
4. Waar kan het maximale element zich bevinden in een binaire hoop, aannemende dat de binaire hoop bestaat uit verschillende elementen.

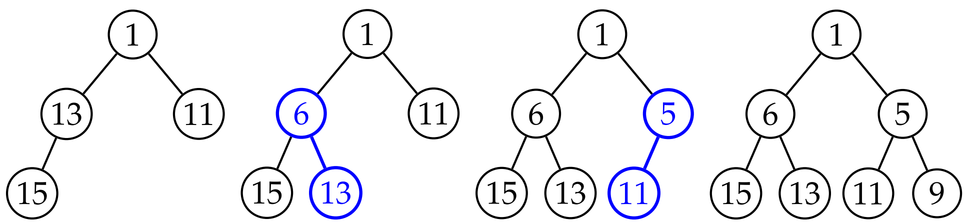
4.6.9 Oplossingen

1. We starten met een binaire hoop bestaande uit slechts één top:

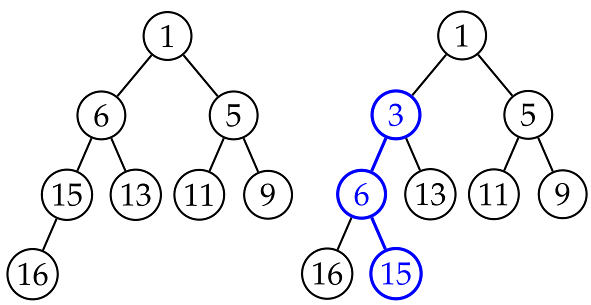
Bij het toevoegen van 13 is er geen enkele verwisseling nodig; bij het toevoegen van 1 is er één verwisseling nodig.



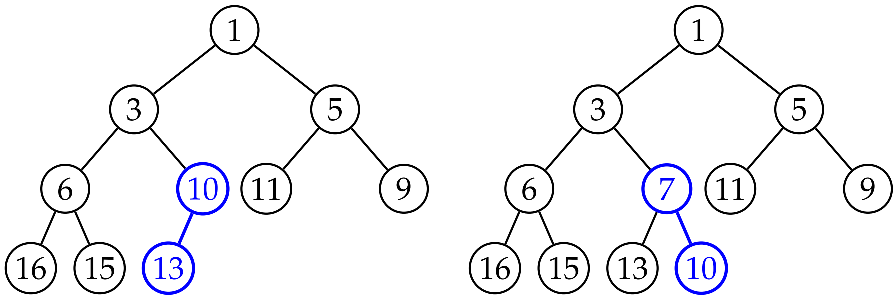
Voor het toevoegen van 15 is er geen enkele verwisseling nodig; voor het toevoegen van 6 en 5 zijn er telkens 1 verwisseling nodig, terwijl voor het toevoegen van 9 er geen enkele verwisseling nodig is.



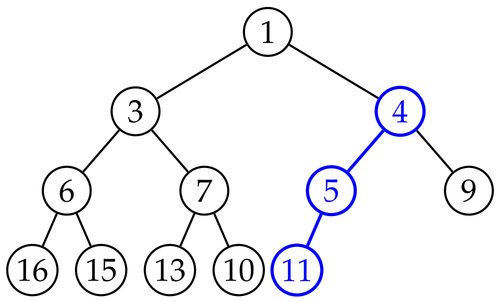
Voor het toevoegen van 16 is er geen enkele verwisseling nodig; voor het toevoegen van 3 zijn er twee verwisselingen nodig.



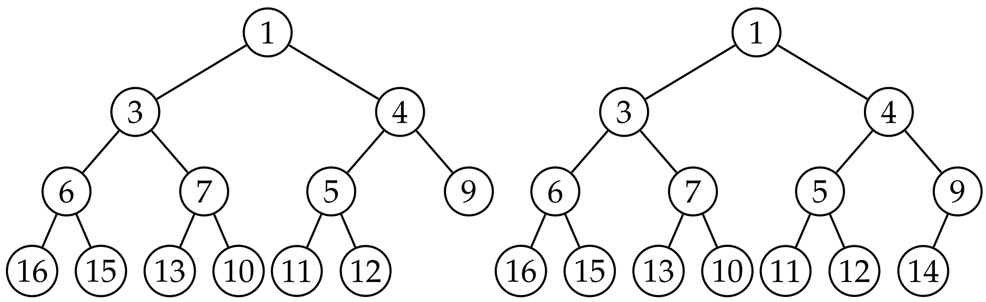
Voor het toevoegen van 10 en 7 is er telkens één verwisseling nodig:



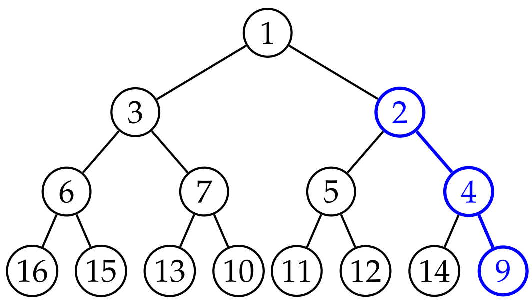
Voor het toevoegen van 4 zijn er twee verwisselingen nodig:



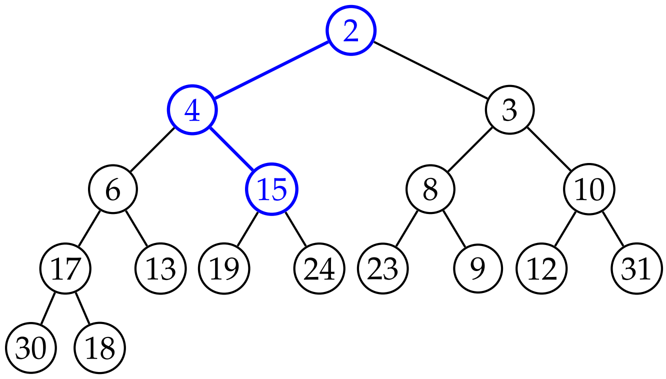
Voor het toevoegen van 12 en 14 zijn er geen verwisselingen nodig:



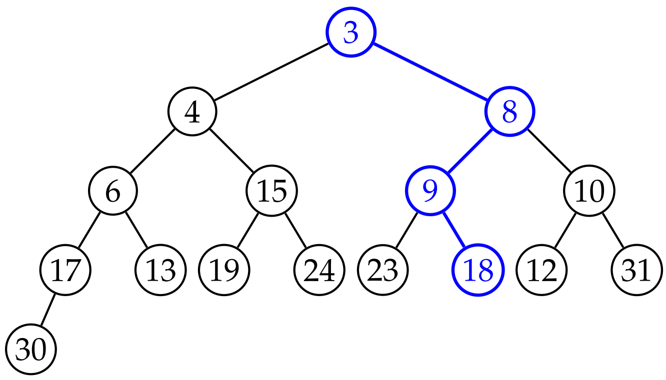
Voor het toevoegen van 2, tenslotte, zijn er twee verwisselingen nodig:



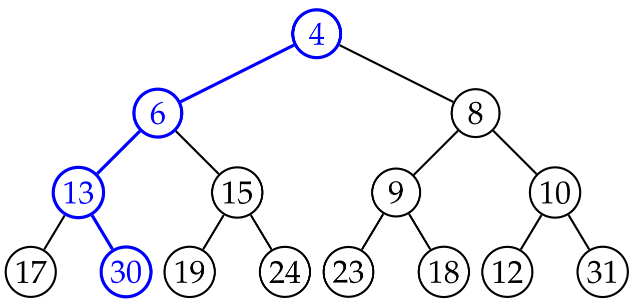
2. Het kleinste element 1 bevindt zich in de wortel van de boom. We verwijderen het laatste blad (met waarde 15) en plaatsen 15 in de wortel van de boom. Nu moet 15 eventueel naar beneden bubbelen teneinde de ordeningseigenschap van binaire hopen te herstellen. We krijgen:



Nu is 2 het kleinste element en wordt dit vervangen door de waarde 18 in het laatste blad. De waarde 18 bubbelt dan omlaag zodat de ordeningseigenschap van binaire hopen weer geldig is:



We herhalen deze procedure nu nogmaals voor het kleinste element 3 en de waarde 30 in het laatste blad.



3. Als de toppen genummerd worden vanaf nul dan zien we voor de eerste toppen dat

top	kinderen
0	1 en 2
1	3 en 4
2	5 en 6
3	7 en 8
$\vdots$	$\vdots$

Hieruit blijkt duidelijk dat

$$\text{left}(i) = 2i + 1, \quad \text{right}(i) = 2i + 2 \quad \text{en} \quad \text{parent}(i) = \lfloor (i-1)/2 \rfloor.$$

4. In een binaire hoop waar alle elementen verschillend zijn is de waarde van een top steeds *strikt kleiner* dan de waarde van zijn kinderen. Dit betekent dat het maximale element zich steeds in een *blad* moet bevinden.

   Merk op dat dit niet echt veel helpt om snel dit maximum te lokaliseren. Als er n toppen zijn in de binaire hoop dan zijn er $\lceil n/2 \rceil$ blaadjes. Het vinden van het maximum in een binaire hoop is dus een bewerking met een *lineaire* tijdscomplexiteit, terwijl het vinden van het minimum een *constante* tijdscomplexiteit heeft.

HOOFDSTUK **5**

Graafalgoritmes

5.1.1 Oefeningen

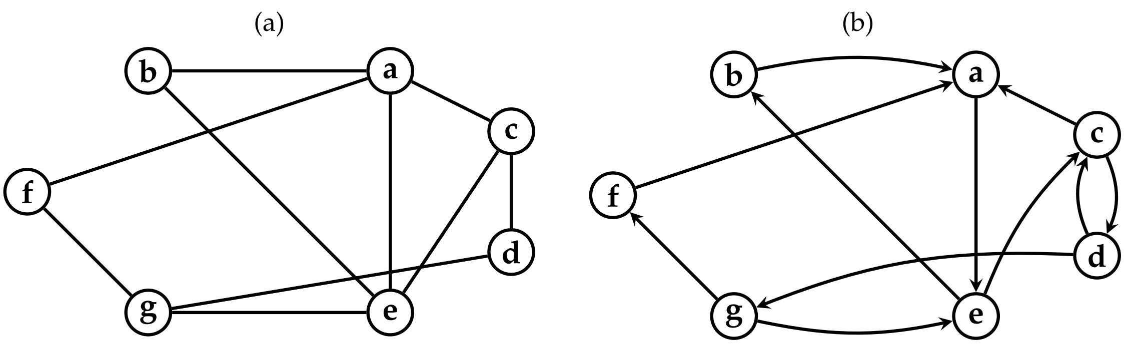
1. Beschouw de gerichte en ongerichte graaf in Figuur 5.1.

   a) Geef de bogenverzameling van deze twee grafen.

   b) Geef voor beide grafen de verzameling buren(e). Wat is de graad van de knoop e in beide gevallen?

   c) Vind het kortste pad (i.e. het pad met de kleinste lengte) van b naar d in beide grafen.

   d) Vind in beide grafen de langste enkelvoudige cykel die d bevat.



Figuur 5.1: Twee voorbeeldgrafen voor de oefeningen.

5.1.2 Oplossingen

1. a) De bogenverzameling E_o van de ongerichte graaf is

$$E_o = \{(a,b),(a,c),(a,e),(a,f),(b,e),(c,d),(c,e),\\ (d,g),(e,g),(f,g)\}.$$

Opmerking: omdat het hier gaat om een ongerichte graaf mag de volgorde van de "koppels" omgekeerd worden.
Voor de gerichte graaf vinden we de bogenverzameling E_g:

$$E_g = \{(a,e),(b,a),(c,a),(c,d),(d,c),(d,g),(e,b),\\ (e,c),(f,a),(g,e),(g,f)\}.$$

Elke boog (v,w) heeft hier een staart v en een kop w; de volgorde van de koppels is in dit geval dus wel van belang.

b) In de ongerichte graaf zijn de buren van de knoop e:

$$\text{buren}(e) = \{a,b,c,g\},$$

en bijgevolg is de graad van de knoop e gelijk aan vier.
In de gerichte graaf vinden we:

$$\text{buren}(e) = \{b,c\}.$$

In dit geval is de graad van e dus slechts twee. Er zijn slechts twee bogen waarvoor de *staart* gelijk is aan e.

c) In de ongerichte graaf zien we (op het zicht) dat er minstens drie stappen (bogen) nodig zijn om vanuit b de knoop d te bereiken. De mogelijke paden zijn:

$$b,a,c,d$$

en

$$b,e,c,d$$

en

$$b,e,g,d.$$

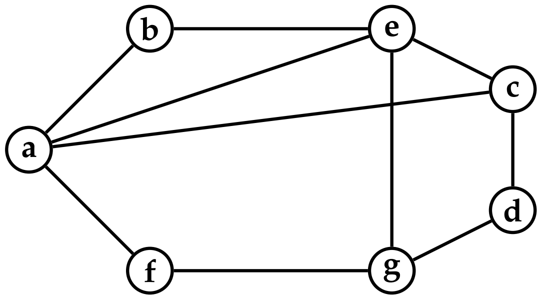
Voor de gerichte graaf zijn er minimaal vier stappen (bogen) nodig. In dit geval is er slechts één kortste pad en dit wordt gegeven door

$$b,a,e,c,d.$$

Later in de cursus komen systematische manieren aan bod om (één) kortste pad te vinden.

d) We moeten een zo lang mogelijk pad vinden waarbij elke knoop (behalve d) hoogstens één keer voorkomt en zodanig dat alle bogen in het pad verschillend zijn.

Hieronder zie je een *andere voorstelling* van *dezelfde* ongerichte graaf:



Het is nu onmiddellijk duidelijk dat de gevraagde cykel gegeven wordt door:

$$d, c, e, b, a, f, g, d$$

In dit geval heeft de graaf dus een zogenaamde *Hamiltoniaanse cykel*, een enkelvoudige cykel die elke knoop juist éénmaal bezoekt.

Voor de gerichte graaf zie je dat een cykel die eindigt in d steeds c als voorlaatste knoop moet hebben, en bijgevolg dus (als we niet onmiddellijk teruggaan naar d) de knoop e als voorganger van c moet hebben. Voor knoop e zijn de mogelijke voorgangers g en a. Als we g kiezen dan zijn we onmiddellijk terug in d (pad d, g, e, c, d); wanneer we echter a kiezen dan kunnen we nog naar f, dan g en tenslotte d (steeds in omgekeerde volgorde). De langste enkelvoudige cykel die d bevat is dus

$$d, g, f, a, e, c, d.$$

5.2.3 Oefeningen

1. Beschouw de gerichte en ongerichte graaf in Figuur 5.1.

   a) Geef voor beide grafen de adjacentiematrix. Je mag veronderstellen dat a rangnummer 1 heeft, b rangnummer 2 enzovoort.

b) Geef voor beide grafen de adjacentielijst-voorstelling. Je mag veronderstellen dat a rangnummer 1 heeft, b rangnummer 2 enzovoort.

2. Hoe berekent men de graad van een top i van een graaf G wanneer de adjacentiematrix A van de graaf gegeven is? Geef een algoritme. Wat is de tijdscomplexiteit van deze methode?

3. Hoe berekent men de graad van een top i van een graaf G wanneer de adjacentielijst-voorstelling van de graaf gegeven is? Geef een algoritme. Wat is de tijdscomplexiteit van deze methode?

5.2.4 Oplossingen

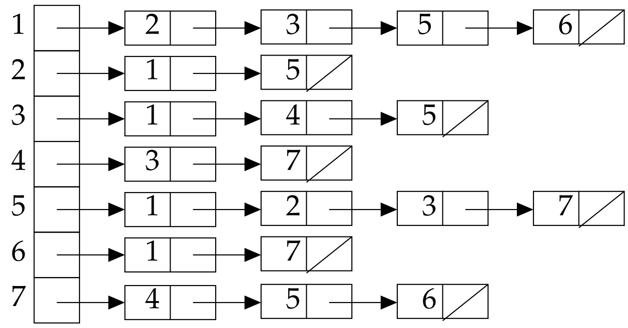
1. a) Voor de ongerichte graaf is de adjacentiematrix

$$A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

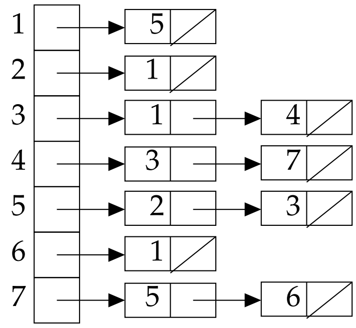
Voor de gerichte graaf vinden we:

$$A_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Voor de ongerichte graaf vinden we de volgende adjacentielijst-voorstelling.



Voor de gerichte graaf krijgen we de volgende adjacentielijst-voorstelling:



2. We berekenen de graad van een knoop i door rij i van de adjacentiematrix te overlopen en te tellen hoeveel maal men een “1” aantreft.

   Het is duidelijk dat deze methode een tijdscomplexiteit heeft die lineair is in het aantal knopen van de graaf, of $\Theta\big(\#(V)\big)$.

   Het algoritme zou er als volgt kunnen uitzien:

   Invoer Een gerichte of ongerichte graaf $G = (V, E)$ met orde $n > 0$. Een knoop i waarvan de graad moet berekend worden. De adjacentiematrix van de graaf wordt gegeven in het veld met de naam “adjacentiematrix”.

   Uitvoer De graad van de knoop i werd berekend.

   ```
   function GraadAdjacentiematrix(G, i)
       g ← 0                                  ▷ Initialiseer de graad op 0
       A ← G.adjacentiematrix
       for j ← 1 to n do
           g ← g + A[i][j]                    ▷ Overloop rij i
       end for
       return g
   end function
   ```

3. Wanneer de adjacentielijstvoorstelling van de graaf gegeven is, dan moeten we de *lineair geschakelde lijst* op positie i gaan overlopen om te

tellen hoeveel elementen die bevat.

Dit vereist evenveel stappen als de graad van de beschouwde knoop en dus is de tijdscomplexiteit $\Theta(\text{graad}(i))$. De uitvoeringstijd hangt dus enkel af van de graad van de knoop en *niet* van het totaal aantal knopen.

In pseudocode zou dit algoritme er als volgt kunnen uitzien:

Invoer Een gerichte of ongerichte graaf $G = (V, E)$ met orde $n > 0$. Een knoop i waarvan de graad moet berekend worden. De adjacentielijst van de graaf wordt gegeven in het veld met de naam "adjacentielijst".

Uitvoer De graad van de knoop i werd berekend.

function GRAADADJACENTIELIJST(G, i)
    $g \leftarrow 0$ ▷ Initialiseer de graad op 0
    $L \leftarrow G$.adjacentielijst ▷ L is een array van referenties
    $p \leftarrow L[i]$ ▷ De eerste referentie voor knoop i
    while $p \neq$ null **do**
        $g \leftarrow g + 1$
        $p \leftarrow p$.next ▷ De volgende referentie opzoeken
    end while
    return g
end function

5.3.5 Oefeningen

1. Een ongerichte graaf is GECONNECTEERD als en slechts als er een pad bestaat tussen elke twee knopen v en w.

    a) Ga na dat de bovenstaande definitie equivalent is met zeggen dat er een pad bestaat van een bepaalde knoop s naar alle andere knopen.

    b) Schrijf een methode ISGECONNECTEERD die nagaat of een ongerichte graaf geconnecteerd is (return-waarde **true**) of niet (return-waarde **false**). Doe dit door de methode BREEDTEEERST aan te passen.

2. Vind alle mogelijke topologische sorteringen van de graaf in Figuur 5.10.

3. Vind de compilatievolgorde van de modules in Figuur 5.9 wanneer de labels in dalende volgorde worden doorlopen.

4. Veronderstel nu dat er in de graaf van Figuur 5.9 een extra boog $(8, 6)$ wordt toegevoegd. Pas nu het algoritme voor topologisch sorteren toe.

5.3.6 Oplossingen

1. a) We moeten bewijzen dat de uitspraken

   > er bestaat een pad tussen elke twee knopen van de ongerichte graaf G

   en

   > er bestaat een pad van één knoop s naar alle andere knopen van de ongerichte graaf G

   equivalent zijn.

   Het is onmiddellijk duidelijk dat de eerste uitspraak de tweede impliceert.

   Omgekeerd, veronderstel dat de tweede uitspraak waar is. We moeten nu aantonen dat er een pad bestaat tussen twee willekeurige knopen v en w van de ongerichte graaf G. We weten bij veronderstelling dat er een pad bestaat van s naar v:

   $$s \rightsquigarrow v$$

   Omdat de graaf *ongericht* is kunnen we dit pad ook "omkeren" en bestaat er dus ook een pad van v naar s. Merk op: deze redenering is niet geldig voor een gerichte graaf.

   $$v \rightsquigarrow s. \tag{5.1}$$

   Bovendien bestaat er bij veronderstelling ook een pad van s naar w:

   $$s \rightsquigarrow w. \tag{5.2}$$

   Als we de paden in (5.1) en (5.2) aan elkaar "plakken" dan vinden we een pad van v (via s) naar w:

   $$v \rightsquigarrow s \rightsquigarrow w.$$

   Dit toont aan dat beide uitspraken equivalent zijn.

b) De methode BREEDTEEERST bepaalt welke knopen bereikt kunnen worden vanuit een bepaalde startknoop s. Om de methode ISGECONNECTEERD te schrijven moeten we enkel bijhouden hoeveel knopen kunnen bereikt worden vanuit s en controleren of dit aantal gelijk is aan het totaal aantal knopen n. Indien dit zo is, dan is de ongerichte graaf geconnecteerd, anders niet.

In de implementatie kiezen we als startknoop s de knoop 1.

Invoer Een ongerichte graaf $G = (V, E)$ met orde $n > 0$. De knopen zijn genummerd van 1 tot n, i.e. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Uitvoer **true** als de graaf geconnecteerd is, **false** anders.

```
function IsGeconnecteerd(G)
    D ← [false, false, ..., false]
    D[1] ← true                        ▷ Kies 1 als startknoop
    a ← 1                              ▷ a telt het aantal bereikbare knopen
    Q.init()
    Q.enqueue(1)                       ▷ Plaats knoop 1 op de wachtrij
    while Q ≠ ∅ do
        v ← Q.dequeue()
        for all w ∈ buren(v) do
            if D[w] = false then
                D[w] ← true
                a ← a + 1              ▷ nieuw ontdekte knoop: a verhogen
                Q.enqueue(w)
            end if
        end for
    end while
    return a = n                       ▷ Vergelijking, geen toewijzing
end function
```

We introduceerden dus een nieuwe variabele a met de eigenschap dat a steeds telt hoeveel keer er **true** staat in de array D.

2. Het is duidelijk dat d steeds de laatste knoop moet zijn in een topologische sortering aangezien dit de enige knoop is met graad 0. Bovendien moet a steeds de eerste knoop zijn in de topologische sortering want alle andere knopen zijn bereikbaar vanuit a. De knopen b en c zijn niet gerelateerd en kunnen dus in een willekeurige volgorde staan. De twee topologische sorteringen zijn m.a.w.

$$a, b, c, d \quad \text{en} \quad a, c, b, d.$$

3. Voor deze oefening nemen we aan dat op lijn 4 van het algoritme van topologisch sorteren de knopen overlopen worden in de volgorde $10, 9, 8, \ldots, 1$. Bovendien nemen we aan dat op lijn 17 de buren ook steeds in dalende volgorde worden doorlopen zodat bv. voor knoop 7 de buren gegeven worden als 9 en 5 (in die volgorde).

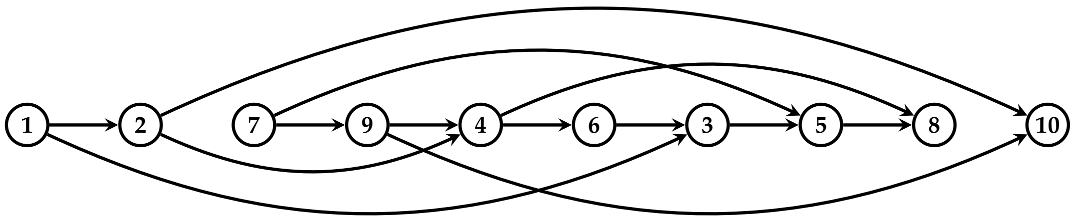
   We houden (de inhoud van) de array D bij, de stapel van de methode-oproepen en de lijst S.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stack	S
(a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\emptyset$
(b)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	$\emptyset$
(c)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	10	10
(d)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	9	10
(e)	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	9, 4	10
(f)	0	0	0	1	0	0	0	1	1	2	9, 4, 8	10
(g)	0	0	0	1	0	0	0	2	1	2	9, 4	8, 10
(h)	0	0	0	1	0	1	0	2	1	2	9, 4, 6	8, 10
(i)	0	0	1	1	0	1	0	2	1	2	9, 4, 6, 3	8, 10
(j)	0	0	1	1	1	1	0	2	1	2	9, 4, 6, 3, 5	8, 10
(k)	0	0	1	1	2	1	0	2	1	2	9, 4, 6, 3	5, 8, 10
(l)	0	0	2	1	2	1	0	2	1	2	9, 4, 6	3, 5, 8, 10
(m)	0	0	2	1	2	2	0	2	1	2	9, 4	6, 3, 5, 8, 10
(n)	0	0	2	2	2	2	0	2	1	2	9	4, 6, 3, 5, 8, 10
(o)	0	0	2	2	2	2	0	2	2	2		9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(p)	0	0	2	2	2	2	1	2	2	2	7	9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(q)	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2		7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(r)	0	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(s)	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2		2, 7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(t)	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	2, 7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10
(u)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2		1, 2, 7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10

   In de lijst S lezen we de gevonden topologische sortering af:

$$1, 2, 7, 9, 4, 6, 3, 5, 8, 10.$$

In Figuur 5.2 zie je nog maar eens een andere voorstelling van de graaf van de softwaremodules. Deze keer volgens de nieuw gevonden topologische sortering. Je ziet opnieuw dat alle bogen vooruit wijzen.



Figuur 5.2: Een tweede topologische sortering van de graaf van de softwaremodules.

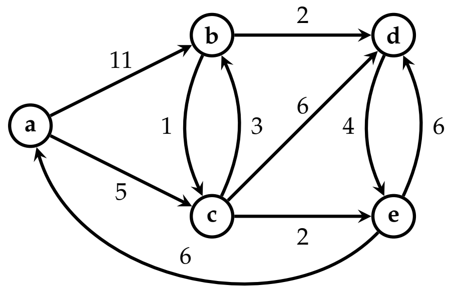
4. Wanneer een boog $(8, 6)$ wordt toegevoegd aan de graaf, dan heeft de graaf een cykel. We kijken of het algoritme de cykel detecteert.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	stack	S
(a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		$\emptyset$
(b)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$\emptyset$
(c)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1, 2	$\emptyset$
(d)	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1, 2, 4	$\emptyset$
(e)	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1, 2, 4, 6	$\emptyset$
(f)	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1, 2, 4, 6, 3	$\emptyset$
(g)	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1, 2, 4, 6, 3, 5	$\emptyset$
(h)	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1, 2, 4, 6, 3, 5, 8	$\emptyset$

Op dit moment zal het algoritme de knoop 6 zal bezoeken als buur van de knoop 8. Echter, op dit moment staat de $D[6]$ reeds op "1" en is dus "bezig", en het algoritme heeft hier de cykel $6, 3, 5, 8, 6$ ontdekt. Op dit moment krijgt de variabele cycleDetected de waarde **true**. Hierdoor zullen geen verdere recursieve oproepen gebeuren want de conditie op lijn 18 evalueert nu steeds naar **false**. In het hoofdalgoritme wordt op lijn 8 waargenomen dat cycleDetected de waarde **true** heeft. Hierdoor eindigt het algoritme SORTEERTOPOLOGISCH met de waarde **false** om aan te geven dat er geen topologische sortering bestaat

5.4.3 Oefeningen

1. In Algoritme 5.5 wordt nu enkel de afstand van elke knoop v tot de startknoop s bijgehouden. In veel toepassingen heeft men echter ook



Figuur 5.3: Een gewogen, gerichte graaf.

een pad nodig dat deze minimale afstand realiseert.

a) Pas de pseudo-code van Algoritme 5.5 aan zodanig dat er een tweede array P wordt teruggeven zodanig dat $P[v]$ de knoop geeft die de voorganger (predecessor) is van v op een kortste pad van s naar v.

b) Pas je aangepaste algoritme toe op de gerichte graaf in Figuur 5.9 startend vanaf knoop 1. Ga ervan uit dat knopen steeds worden bezocht in stijgende volgorde. Hoe zit de array P er na afloop uit?

c) Schrijf een algoritme dat als invoer de array P neemt en een knoop v. Het algoritme geeft een lijst terug die het kortste pad van s naar v bevat (in de juiste volgorde).

2. Beschrijf hoe je volgend probleem kan oplossen als een kortste pad probleem. Gegeven een lijst van Engelstalige 5-letterwoorden. Woorden worden *getransformeerd* door juist één letter van het woord te vervangen door een andere letter. Geef een algoritme dat nagaat of een woord w_1 omgezet kan worden in een woord w_2. Indien dit het geval is dan moet je algoritme ook de tussenliggende woorden tonen voor de kortste sequentie van transformaties die w_1 in w_2 omzet.

3. Vind voor de graaf in Figuur 5.4 de lengte van het kortste pad van Brugge naar alle andere steden. Voer hiertoe het algoritme van Dijkstra uit.

4. Vind voor de graaf in Figuur 5.3 (de lengte van) het kortste pad van de knoop a naar alle andere knopen. Voer hiertoe het algoritme van Dijkstra uit (en houd ook bij wat de kortste paden zijn).

5.4.4 Oplossingen

1. a) Het idee is dat we starten met een array P die op een default-waarde is geïnitialiseerd die aangeeft dat er nog geen voorganger is gevonden. Wij gebruiken als deze default-waarde de waarde 0 omdat wij aannemen dat onze knopen genummerd zijn van 1 t.e.m. n en dus is 0 geen geldig knoopnummer.

   Telkens wanneer we een nieuwe knoop ontdekken vullen we de gepaste entry van de array P in.

   Invoer Een gerichte of ongerichte ongewogen graaf $G = (V, E)$ met orde $n > 0$. Een knoop s waarvan het zoeken vertrekt. De knopen zijn genummerd van 1 tot n, i.e. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

   Uitvoer De array P met $P[v]$ de voorganger van v op een kortste pad van s naar v; als $P[v] = 0$ dan is er geen pad van s naar v.

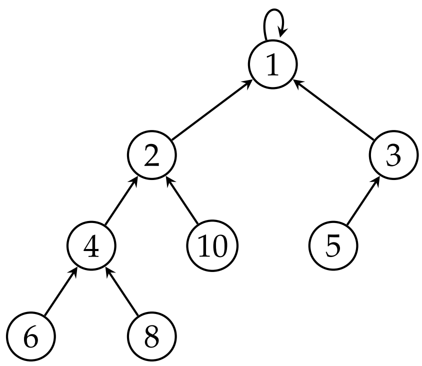
```
function KortstePadOngewogenMetPad(G, s)
    P ← [0, 0, ..., 0]                          ▷ n keer 0
    P[s] ← s                                    ▷ voorganger van s is zichzelf
    Q.init()                                    ▷ wachtrij van knopen
    Q.enqueue(s)
    while Q ≠ ∅ do
        v ← Q.dequeue()
        for all w ∈ buren(v) do
            if P[w] = 0 then                    ▷ w nog niet ontdekt
                P[w] ← v                        ▷ w is gevonden via v
                Q.enqueue(w)
            end if
        end for
    end while
    return P
end function
```

   b) We houden de array P bij:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(b)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(c)	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(d)	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(e)	1	1	1	2	0	0	0	0	0	0
(f)	1	1	1	2	0	0	0	0	0	2
(g)	1	1	1	2	3	0	0	0	0	2
(h)	1	1	1	2	3	4	0	0	0	2
(i)	1	1	1	2	3	4	0	4	0	2

We zien dus dat er geen pad is van 1 naar 7 noch naar 9 aangezien zowel $P[7]$ als $P[9]$ nog steeds de waarde nul hebben.

De informatie in de array P kan ook als volgt worden voorgesteld:



Hieruit zie je duidelijk dat de array P in essentie de kortste paden bevat maar in *omgekeerde volgorde* gezien vanuit de startknoop s.

c) Het idee is om te starten bij de knoop v en steeds achteruit te lopen totdat we de knoop s bereiken. De knopen die onderweg worden ontmoet moeten *vooraan* de lijst worden toegevoegd. We controleren echter eerst of er wel een pad is.

Invoer Een array P met voorgangers vanuit een knoop s. Een knoop v waarnaar het pad moet worden gevonden. De knopen zijn genummerd van 1 tot n, i.e. $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Uitvoer Een lijst van knopen startend bij s en eindigend bij v. Indien er geen pad bestaat van s naar v dan is de lijst leeg.

function GEEFPAD(P, s, v)
  if $P[V] = 0$ **then** ▷ Controleer of het pad bestaat
    return $\emptyset$

```
    end if
    L ← [v]                         ▷ lijst met één element
    c ← v                           ▷ c is de "huidige"knoop
    while c ≠ s do
        c ← P[c]
        L ← c :: L                  ▷ c vooraan toevoegen aan lijst
    end while
    return L
end function
```

Om onszelf te overtuigen dat het algoritme inderdaad correct werkt doorlopen we het nog eens stap voor stap voor de array

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P[i]$	1	1	1	2	3	4	0	4	0	2

met $s = 1$ en $v = 8$.

s	v	c	L
1	8		
			$[8]$
		8	
		4	
			$[4,8]$
		2	
			$[2,4,8]$
		1	
			$[1,2,4,8]$

Het algoritme eindigt met als pad $1 \to 2 \to 4 \to 8$. Dit is inderdaad het correcte antwoord.

2. Dit probleem kan aangepakt worden m.b.v. het aangepaste algoritme KORTSTEPADONGEWOGENMETPAD. Elk woord stelt een knoop van de graaf voor. Twee knopen zijn adjacent als hun woorden slechts op één plaats van elkaar verschillen.

3. We passen het algoritme van Dijkstra toe en we tonen telkens de inhoud van de array D wanneer de lus op regel 5 start[1]. De elementen die tot S behoren (en waarvoor de kortste afstand dus gekend is) worden aangeduid met een sterretje.

[1] Behalve de eerste regel die de beginwaarde van D toont.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(a)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
(b)	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
(c)	0*	57	∞	∞	∞	133	∞	∞	∞	∞	∞
(d)	0*	57*	112	115	143	133	∞	∞	∞	∞	∞
(e)	0*	57*	112*	115	142	133	∞	∞	211	147	195
(f)	0*	57*	112*	115*	142	133	∞	∞	211	147	194
(g)	0*	57*	112*	115*	142	133*	210	∞	211	147	194
(h)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	210	∞	211	147	194
(i)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	185	∞	211	147*	194
(j)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	185*	315	211	147*	194
(k)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	185*	315	211	147*	194*
(l)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	185*	315	211*	147*	194*
(m)	0*	57*	112*	115*	142*	133*	185*	315*	211*	147*	194*

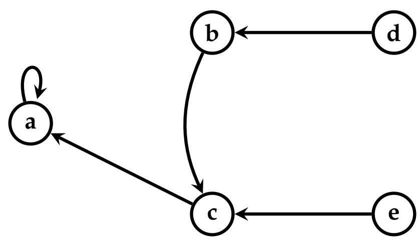
Uit deze tabel kan je waarnemen dat voor steden Leuven (5), Namen (7) en Hasselt (11) het eerste gevonden pad niet het kortste is.

4. We houden opnieuw de array D bij en we houden ook een array P bij (net zoals bij het aangepaste algoritme voor het kortste pad in ongewogen grafen). We vinden:

D	a	b	c	d	e
(a)	0	∞	∞	∞	∞
(b)	0*	11	5	∞	∞
(c)	0*	8	5*	11	7
(d)	0*	8	5*	11	7*
(e)	0*	8*	5*	10	7*
(f)	0*	8*	5*	10*	7*

P	a	b	c	d	e
(a)	a	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
(b)	a	a	a	$\emptyset$	$\emptyset$
(c)	a	c	a	c	c
(d)	a	c	a	c	c
(e)	a	c	a	b	c
(f)	a	c	a	b	c

We duiden de inhoud van de array P aan op onderstaande figuur. Dit geeft meteen ook de mogelijkheid om de (omgekeerde) paden te vinden.



5.5.4 Oefeningen

1. Vind een minimale kost opspannende boom m.b.v. het algoritme van Prim voor de graaf in Figuur 5.4. Neem als startknoop "Brugge".

2. Vind een minimale kost opspannende boom m.b.v. het algoritme van Kruskal voor de graaf in Figuur 5.4.

5.5.5 Oplossingen

1. Het algoritme van Prim is een gulzige versie van het algoritme voor generiek zoeken waarbij telkens de goedkoopste boog wordt gekozen die het ontdekte gebied uitbreidt met een nieuwe knoop.

   In Tabel 5.1 kan je volgen wat er gebeurt. In Figuur 5.4 staan de bogen van de minimale kost opspannende boom in het vetjes getekend.

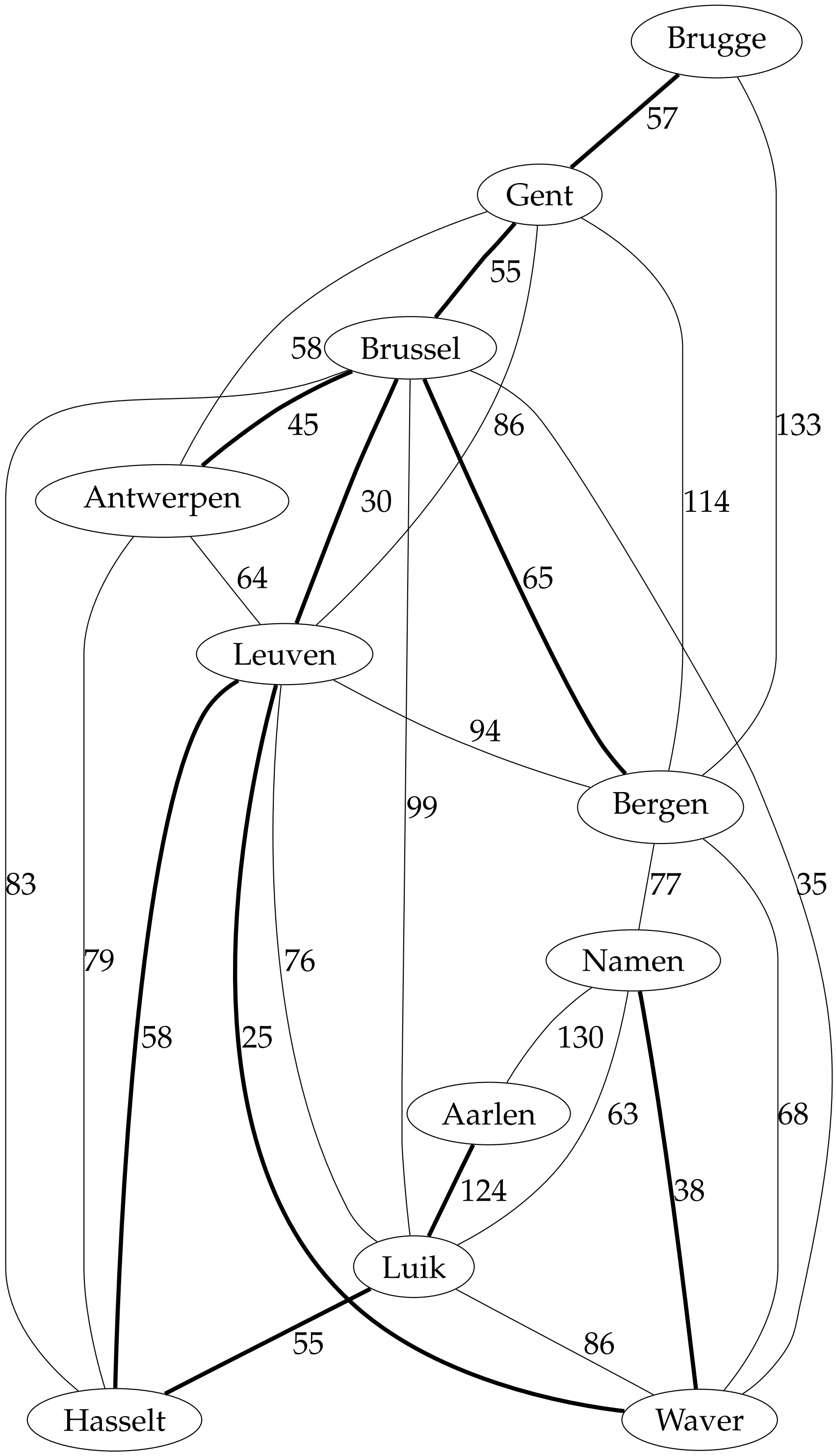
2. Bij het algoritme van Kruskal worden de bogen eerst gesorteerd in stijgende volgorde van gewicht. De bogen worden in deze volgorde overlopen en wanneer het toevoegen van een boog geen cykel veroorzaakt dan wordt die toegevoegd. Dit gaat verder tot alle bogen overlopen zijn (of tot er $n - 1$ bogen zijn toegevoegd).

   Om uit te vissen of het toevoegen van een boog een cykel veroorzaakt gaan we hier als volgt tewerk. Initieel behoort elke knoop tot zijn eigen "component", genummerd van 1 tot n. Een component is een verzameling knopen die geconnecteerd zijn m.b.v. reeds gekozen bogen.

   Wanneer een boog wordt toegevoegd tussen twee componenten i en j dan worden deze samengevoegd tot één component. Als $i < j$ dan veranderen we het componentnummer van de knopen die tot j behoorden eenvoudigweg in i. We mogen nooit een boog toevoegen tussen twee knopen in dezelfde component omdat dit een cykel zou veroorzaken. Inderdaad, het feit dat de twee knopen v en w tot dezelfde component behoren betekent dat er reeds een pad bestaat van v naar w m.b.v. bogen die tot de gekozen bogen behoren. Toevoegen van de boog (w, v) zou van dit pad een cykel maken. Dit is uiteraard niet toegelaten.

gemarkeerde knopen	mogelijke bogen	gekozen boog
$\{1\}$	$1 \xrightarrow{57} 2, 1 \xrightarrow{133} 6$	$1 \xrightarrow{57} 2$
$\{1,2\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{55} 3, 2 \xrightarrow{58} 4$ $2 \xrightarrow{86} 5, 2 \xrightarrow{114} 6$	$2 \xrightarrow{55} 3$
$\{1,2,3\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{58} 4, 2 \xrightarrow{86} 5, 2 \xrightarrow{114} 6$ $3 \xrightarrow{45} 4, 3 \xrightarrow{30} 5, 3 \xrightarrow{65} 6, 3 \xrightarrow{99} 9$ $3 \xrightarrow{35} 10, 3 \xrightarrow{83} 11$	$3 \xrightarrow{30} 5$
$\{1,2,3,5\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{58} 4, 2 \xrightarrow{114} 6$ $3 \xrightarrow{45} 4, 3 \xrightarrow{65} 6\ , 3 \xrightarrow{99} 9$ $3 \xrightarrow{35} 10, 3 \xrightarrow{83} 11, 5 \xrightarrow{64} 4$ $5 \xrightarrow{94} 6, 5 \xrightarrow{76} 9, 5 \xrightarrow{25} 10, 5 \xrightarrow{58} 11$	$5 \xrightarrow{25} 10$
$\{1,2,3,5,10\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{58} 4, 2 \xrightarrow{114} 6$ $3 \xrightarrow{45} 4, 3 \xrightarrow{65} 6\ , 3 \xrightarrow{99} 9$ $3 \xrightarrow{83} 11, 5 \xrightarrow{64} 4$ $5 \xrightarrow{94} 6, 5 \xrightarrow{76} 9, 5 \xrightarrow{58} 11$ $10 \xrightarrow{68} 6, 10 \xrightarrow{38} 7, 10 \xrightarrow{86} 9$	$10 \xrightarrow{38} 7$
$\{1,2,3,5,10,7\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{58} 4, 2 \xrightarrow{114} 6$ $3 \xrightarrow{45} 4, 3 \xrightarrow{65} 6\ , 3 \xrightarrow{99} 9$ $3 \xrightarrow{83} 11, 5 \xrightarrow{64} 4$ $5 \xrightarrow{94} 6, 5 \xrightarrow{76} 9, 5 \xrightarrow{58} 11$ $10 \xrightarrow{68} 6, 10 \xrightarrow{86} 9$ $7 \xrightarrow{77} 6, 7 \xrightarrow{130} 8, 7 \xrightarrow{63} 9$	$3 \xrightarrow{45} 4$
$\{1,2,3,5,10,7,4\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{114} 6, 3 \xrightarrow{65} 6$ $3 \xrightarrow{99} 9, 3 \xrightarrow{83} 11$ $5 \xrightarrow{94} 6, 5 \xrightarrow{76} 9, 5 \xrightarrow{58} 11$ $10 \xrightarrow{68} 6, 10 \xrightarrow{86} 9, 7 \xrightarrow{77} 6$ $7 \xrightarrow{130} 8, 7 \xrightarrow{63} 9, 4 \xrightarrow{79} 11$	$5 \xrightarrow{58} 11$
$\{1,2,3,5,10,7,4,11\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{114} 6, 3 \xrightarrow{65} 6, 3 \xrightarrow{99} 9$ $5 \xrightarrow{94} 6, 5 \xrightarrow{76} 9$ $10 \xrightarrow{68} 6, 10 \xrightarrow{86} 9, 7 \xrightarrow{77} 6$ $7 \xrightarrow{130} 8, 7 \xrightarrow{63} 9, 11 \xrightarrow{55} 9$	$11 \xrightarrow{55} 9$
$\{1,2,3,5,10,7,4,11,9\}$	$1 \xrightarrow{133} 6, 2 \xrightarrow{114} 6, 3 \xrightarrow{65} 6, 5 \xrightarrow{94} 6$ $10 \xrightarrow{68} 6, 7 \xrightarrow{77} 6\ , 7 \xrightarrow{130} 8, 9 \xrightarrow{124} 8$	$3 \xrightarrow{65} 6$
$\{1,2,3,5,10,7,4,11,9,6\}$	$7 \xrightarrow{130} 8, 9 \xrightarrow{124} 8$	$9 \xrightarrow{124} 8$
$\{1,2,3,5,10,7,4,11,9,6,8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

Tabel 5.1: Stap voor stap uitvoering van het algoritme van Prim op de graaf met Belgische provinciehoofdsteden.



Figuur 5.4: Minimale kost opspannende boom gevonden met het algoritme van Prim startend vanuit de knoop "Brugge".

We starten met de 26 bogen in stijgende volgorde van gewicht:

$$\begin{aligned}
&5 \xrightarrow{25} 10, 3 \xrightarrow{30} 5, 3 \xrightarrow{35} 10, 7 \xrightarrow{38} 10, 3 \xrightarrow{45} 4, 2 \xrightarrow{55} 3,\\
&9 \xrightarrow{55} 11, 1 \xrightarrow{57} 2, 2 \xrightarrow{58} 4, 5 \xrightarrow{58} 11, 7 \xrightarrow{63} 9, 4 \xrightarrow{64} 5,\\
&3 \xrightarrow{65} 6, 6 \xrightarrow{68} 10, 5 \xrightarrow{76} 9, 6 \xrightarrow{77} 7, 4 \xrightarrow{79} 11, 3 \xrightarrow{83} 11, 2 \xrightarrow{86} 5,\\
&9 \xrightarrow{86} 10, 5 \xrightarrow{94} 6, 3 \xrightarrow{99} 9, 2 \xrightarrow{114} 6, 8 \xrightarrow{124} 9, 7 \xrightarrow{130} 8, 1 \xrightarrow{133} 6
\end{aligned}$$

Initieel behoren alle knopen tot hun eigen component:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

De eerste boog $5 \xrightarrow{25} 10$ verbindt twee knopen in twee verschillende componenten. Door deze boog smelten deze twee componenten samen tot één component:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	3	4	5	6	7	8	9	5	11

De volgende boog $3 \xrightarrow{30} 5$ verbindt twee knopen uit componenten 3 en 5. Alle knopen van component 5 worden toegevoegd aan component 3:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	3	4	3	6	7	8	9	3	11

De boog $3 \xrightarrow{35} 10$ wordt *niet* gekozen omdat die twee knopen uit dezelfde component (3 in dit geval) verbindt. Deze boog zou dus een cykel veroorzaken onder de gekozen bogen.

De boog $7 \xrightarrow{38} 10$ wordt gekozen; de knoop 7 wordt toegevoegd aan de component 3:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	3	4	3	6	3	8	9	3	11

De boog $3 \xrightarrow{45} 4$ wordt ook gekozen, en de knoop 4 wordt toegevoegd aan de component 3:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	3	3	3	6	3	8	9	3	11

De boog $2 \xrightarrow{55} 3$ wordt ook gekozen. Alle knopen van component 3 worden toegevoegd aan component 2[2].

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	2	2	2	6	2	8	9	2	11

De volgende boog $9 \xrightarrow{55} 11$ wordt ook gekozen. De knopen 9 en 11 vormen nu samen één component.

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	2	2	2	2	6	2	8	9	2	9

De boog $1 \xrightarrow{57} 2$ wordt ook gekozen:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	1	1	1	1	6	1	8	9	1	9

De boog $2 \xrightarrow{58} 4$ wordt *niet* gekozen want deze boog verbindt twee knopen uit dezelfde component. De boog $5 \xrightarrow{58} 11$ wordt dan weer wel gekozen. De twee knopen uit de component 9 worden toegevoegd aan component 1:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	1	1	1	1	6	1	8	1	1	1

De bogen $7 \xrightarrow{63} 9$ en $4 \xrightarrow{64} 5$ worden allebei niet gekozen. De boog $3 \xrightarrow{65} 6$ wordt wel gekozen en de knoop 6 wordt toegevoegd aan component 1.

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	1	1	1	1	1	1	8	1	1	1

[2] In de praktijk is het efficiënter om de kleinste component van naam te veranderen.

Alle bogen tot voor $8 \xrightarrow{124} 9$ worden niet gekozen want deze verbinden allemaal twee knopen uit dezelfde component (nl. component 1). De boog $8 \xrightarrow{124} 9$ wordt gekozen en nu behoren alle knopen tot dezelfde component:

knoop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
component	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Dit betekent dat we een minimale kost opspannende boom hebben gevonden. In dit geval bestaat de minimale kost opspannende boom dus uit de bogen:

$$\begin{aligned} T = \{&5 \xrightarrow{25} 10, 3 \xrightarrow{30} 5, 7 \xrightarrow{38} 10, 3 \xrightarrow{45} 4, 2 \xrightarrow{55} 3, \\ &9 \xrightarrow{55} 11, 1 \xrightarrow{57} 2, 5 \xrightarrow{58} 11, 3 \xrightarrow{65} 6, 8 \xrightarrow{124} 9\}. \end{aligned}$$

In dit geval is dit dezelfde minimale kost opspannende boom als gevonden met het algoritme van Prim. Het totale gewicht van deze boom is:

$$\begin{aligned} \text{gewicht}(T) &= 25 + 30 + 38 + 45 + 55 + 55 + 57 + 58 + 65 + 124 \\ &= 552. \end{aligned}$$

5.6.1 Oefeningen

1. Beschouw opnieuw de acht steden in Figuur 5.18, maar veronderstel nu dat het gewicht van een boog gegeven wordt door de zogenaamde Manhattan-distance tussen de twee knopen, dus

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

   a) Ga na dat de Manhattan-distance aan de driehoeksongelijkheid voldoet. **Hint**: voor de absolute waarde geldt dat

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

   b) Pas het benaderende algoritme voor het oplossen van het handelsreizigersprobleem toe op dit probleem. Gebruik Kruskals algoritme om de minimale opspannende boom te construeren. Wanneer meerdere bogen kunnen gekozen worden, kies dan steeds de lexicografisch kleinste boog. Neem de knoop a als wortel van de opspannende boom.

5.6.2 Oplossingen

1. a) We moeten aantonen dat voor elk willekeurig drietal punten (x_1, y_1), (x_2, y_2) en (x_3, y_3) geldt dat:

$$d\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) \leq d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big).$$

We starten met het linkerlid:

$$\begin{aligned} &d\big((x_1,y_1),(x_3,y_3)\big) \\ &\qquad = |x_3 - x_1| + |y_3 - y_1| \\ &\qquad = |x_3 - x_2 + x_2 - x_1| + |y_3 - y_2 + y_2 - y_1| \\ &\qquad \leq |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| + |y_3 - y_2| + |y_2 - y_1| \\ &\qquad = \big(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|\big) + \big(|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|\big) \\ &\qquad = d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) + d\big((x_2,y_2),(x_3,y_3)\big). \end{aligned}$$

Dit toont aan dat de Manhattan-distance aan de driehoeksongelijkheid voldoet.

b) We bouwen de adjacentiematrix (met gewichten) op wanneer de afstand tussen de steden gemeten wordt m.b.v. de Manhattan-distance:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 & 5 & 6 & 7 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 7 & 8 & 5 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 3 & 0 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 4 & 3 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 5 & 2 & 3 & 0 & 7 \\ 6 & 4 & 3 & 6 & 7 & 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Als we nu een minimale kost opspannende boom opbouwen m.b.v. het algoritme van Kruskal dan worden de volgende bogen gekozen:

$$(a,b), (a,d), (e,g), (b,c), (c,h), (d,e), (e,f).$$

Dit is dezelfde minimale kost opspannende boom als reeds gevonden in het voorbeeld in de theorie (zij het met andere gewichten). De bijhorende benaderende oplossing zal dus identiek zijn.

Deel III

Operationeel Onderzoek

HOOFDSTUK **6**

Inleiding tot Operationeel Onderzoek

6.4 Oefeningen

1. Een bedrijf vervaardigt twee soorten broeken, type A en type B. De stof van A-broeken kost 25 EUR per broek, die van de B-broeken 20 EUR per broek. Een arbeider werkt 60 minuten aan een A-broek, 20 minuten aan een B-broek. De verkoopprijzen bedragen respectievelijk 95 EUR en 60 EUR per broek. Het bedrijf heeft 8 arbeiders in dienst die maximaal 8 uur per dag werken aan 30 EUR per uur. Verder zijn er nog 2400 EUR vaste kosten per dag. Technische werkloosheid is niet mogelijk[1]. Uit marktonderzoek blijkt dat van de A-broeken ten hoogste 60 stuks per dag verkocht kunnen worden, en van de B-broeken hoogstens 100 stuks per dag. Per dag zijn er ook ten hoogste 120 ritssluitingen beschikbaar.

   Hoeveel broeken van elk type moeten er geproduceerd worden om een zo groot mogelijke winst te maken? Beantwoord hiertoe onderstaande vragen.

   a) Maak van dit probleem een wiskundig model. Voor de eenvoud mag je veronderstellen dat "fractionele" broeken mogelijk zijn.

[1] Dit betekent dat alle arbeiders steeds betaald worden, ook al hebben ze niets omhanden.

b) Geef een aantal vereenvoudigingen die aanwezig zijn in dit model.

c) Geef de optimale oplossing (bv. door gebruik te maken van Excel) en interpreteer het resultaat.

2. Een bank heeft 100 000 euro beschikbaar om te investeren gedurende het huidige jaar. De financiële analisten van de bank hebben de volgende investeringsmogelijkheden geselecteerd: bedrijfsleningen, persoonlijke leningen, preferente aandelen, gewone aandelen en staatsobligaties. Het jaarlijkse rendement van elke type investering wordt geschat op 12%, 17%, 10.5%, 11.5% en 9% respectievelijk. Om de risico's te reduceren hebben de analisten de volgende restricties opgelegd voor de portefeuille van de bank.

   a) In de leningen, noch in de aandelen mag meer dan 50% van beschikbare bedrag worden geïnvesteerd.

   b) De investering in staatsobligaties moet tenminste gelijk zijn aan 30% van de investering in leningen.

   c) De persoonlijke leningen mogen hooguit 40% voor hun rekening nemen van de totale investering in de leningen.

   Hoe moet de bank zijn geld investeren opdat het jaarlijke rendement op de portefeuille gemaximaliseerd wordt? Stel in eerste instantie het wiskundig model op voor dit probleem. Gebruik dan Excel (of een ander softwarepakket) om het probleem op te lossen.

3. Een vrachtvliegtuig beschikt over drie compartimenten om vracht te laden: vooraan, midden en achteraan. Elk compartiment heeft de volgende restricties qua gewicht en volume dat er kan in geladen worden:

Compartiment	Max gewicht (ton)	Max volume (m^3)
vooraan	10	6800
midden	16	8700
achteraan	8	5300

   Om het evenwicht van het vliegtuig te bewaren moet het gewicht van de cargo in elk compartiment steeds in dezelfde verhouding blijven als wanneer elk compartiment volledig was geladen. Het middelste compartiment moet bv. steeds precies dubbel zo veel gewicht bevatten als het achterste compartiment.

Er zijn vier verschillende types lading beschikbaar. Deze types lading zijn zodanig dat er willekeurige fracties van kunnen meegenomen/aanvaard worden. De eigenschappen van deze types staan in de tabel hieronder opgesomd. De kolom "Gewicht" geeft aan hoeveel ton er van elk type beschikbaar is.

Lading	Gewicht (ton)	Volume (m^3/ton)	Winst (EUR/ton)
L_1	18	480	310
L_2	15	650	380
L_3	23	580	350
L_4	12	390	285

Je taak is om te bepalen hoeveel van elke lading moet worden meegenomen én hoe deze lading moet verdeeld worden over de drie compartimenten om de winst te maximaliseren.

Stel hiertoe eerst het wiskundig model op. Gebruik vervolgens een softwarepakket om de optimale oplossing van dit probleem te bepalen.

6.5 Oplossingen

1. We gebruiken de beslissingsvariabelen x_A respectievelijk x_B om het aantal stuks dat geproduceerd wordt van type A respectievelijk B voor te stellen.

   Wanneer er x_A en x_B broeken worden geproduceerd dan zijn de inkomsten:
   $$95x_A + 60x_B.$$
   Verder zijn er de kosten voor de stof van de broeken
   $$25x_A + 20x_B.$$
   De arbeidskosten zijn (aangezien technische werkloosheid niet mogelijk is)
   $$8 \times 8 \times 30 = 1920.$$

Verder zijn er nog de vaste kosten van 2400 EUR per dag. De winst per dag wordt bijgevolg gegeven door:

$$95x_A + 60x_B - 25x_A - 20x_B - 1920 - 2400 = 70x_A + 40x_B - 4320.$$

De doelfunctie die we gaan maximaliseren wordt m.a.w. gegeven door

$$D(x_A, x_B) = 70x_A + 40x_B - 4320.$$

Uiteraard is het productieproces onderheving aan een aantal beperkingen.

Ten eerste zijn er de *marktbeperkingen*:

$$x_A \leq 60$$

en

$$x_B \leq 100.$$

Bovendien kunnen er per dag hoogstens 120 broeken worden geproduceerd wegens de *materiaalbeperking*:

$$x_A + x_B \leq 120.$$

Tot slot is er nog de *arbeidsbeperking*. Er zijn per dag slechts 64 arbeidsuren beschikbaar. Het produceren van een broek van type A kost één arbeidsuur; voor een broek van type B is dit 1/3 uur:

$$x_A + \frac{x_B}{3} \leq 64.$$

Bovendien moet het aantal geproduceerde broeken steeds positief zijn (*niet-negativeitsvoorwaarden*)

$$x_A \geq 0$$

en

$$x_B \geq 0.$$

Samengevat is het op te lossen model

$$\max D(x_A, x_B) = 70x_A + 40x_B - 4320$$

onder de beperkingen

$$\begin{aligned} x_A \quad &\leq 60 \\ x_B &\leq 100 \\ x_A + x_B &\leq 120 \\ x_A + \frac{x_B}{3} &\leq 64 \end{aligned}$$

en de niet-negativeitsvoorwaarden

$$x_A \geq 0 \quad \text{en} \quad x_B \geq 0.$$

Enkele voor de hand liggende vereenvoudigingen die we gemaakt hebben in dit model zijn:

- Alle arbeiders werken even efficiënt.
- De tijd voor het maken van de broeken is exact gekend.
- We houden geen rekening met falende machines e.d.
- De kost van de ritssluitingen wordt niet meegerekend.
- De arbeiders kunnen niet overwerken; technische werkloosheid is niet mogelijk.

Wanneer dit model opgelost wordt dan vinden als optimale oplossing:

$$x_A = 36, x_B = 84, D(36, 84) = 1560.$$

Er wordt m.a.w. 1560 EUR winst gemaakt per dag. Dit betekent dat de activiteit economisch zinvol is.

De *arbeidsbeperking* is actief want

$$36 + \frac{84}{3} = 64.$$

De *materiaalbeperking* is ook actief want per dag worden er exact 120 broeken geproduceerd:

$$36 + 84 = 120.$$

Het heeft geen zin om extra vertegenwoordigers aan te werven (om de afzetmarkt te vergroten) want de *marktbeperkingen* zijn niet actief.

Wanneer we een extra arbeider aanwerven dan is de optimale oplossing:

$$x_A = 48, x_B = 72, D(x_A, x_B) = 1920.$$

Opletten! Dit betekent in dit geval niet dat de winst 1920 EUR is. We mogen immers niet vergeten dat de functie D de arbeidskost bevat. In dit geval vergroot de arbeidskost met 240 EUR, en de werkelijke winst is dus 1680 EUR.

Wanneer we tien arbeiders aanwerven dan is de optimale oplossing

$$x_A = 60, x_B = 60, D(x_A, x_B) = 2280.$$

Opnieuw is de werkelijke winst lager (nl. 1800 EUR). De markt van de broeken van type A is nu verzadigd. Het heeft nu geen zin meer om extra arbeiders aan te werven. Wanneer extra arbeiders worden aangeworven verschuift de verdeling naar extra broeken van type A; die leveren meer winst per broek maar vereisen ook meer manuren.

Wanneer extra ritssluitingen worden aangekocht dan zien we het omgekeerde effect. Dan worden extra broeken van type B gemaakt (die minder manuren vereisen). Wanneer er bv. 121 ritssluitingen beschikbaar zijn is de optimale oplossing:

$$x_A = 35.5, x_B = 85.5, D(x_A, x_B) = 1585.$$

Er wordt hier dus 25 EUR extra winst gemaakt per broek.

Als je je afvraagt of het mogelijk is om een halve broek te maken moet je je inbeelden dat zo'n bedrijf natuurlijk meerdere dagen produceert. Op tien dagen tijd moeten ze dan 355 broeken van type A maken en 855 broeken van type B. Het zal dan over die 10 dagen 15850 EUR winst maken.

2. De bank moet beslissen welk bedrag te investeren in elk van de vijf mogelijkheden. Noem deze bedragen x_1 t.e.m. x_5 (in de volgorde zoals opgesomd).

   Het (te maximaliseren) rendement is dan:

   $$0.12x_1 + 0.17x_2 + 0.105x_3 + 0.115x_4 + 0.09x_5.$$

   De beperkingen zijn uiteraard dat er hoogstens 100 000 euro beschikbaar is:

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 100000$$

   Dan zijn er nog de beperkingen die opgelegd zijn door de analisten:

a)

$$x_1 + x_2 \leq 0.50 \times 100000 \qquad \text{leningen}$$

en

$$x_3 + x_4 \leq 0.50 \times 100000 \qquad \text{aandelen}$$

b)

$$x_5 \geq 0.30(x_1 + x_2)$$

c)

$$x_2 \leq 0.40(x_1 + x_2)$$

Bovendien moet elk bedrag ook positief zijn; de niet-negativiteitsvoorwaarden zijn van kracht.

Na oplossen vindt men de volgende allocatie van de middelen:

$$x_1 = 30000,\ x_2 = 20000,\ x_3 = 0,\ x_4 = 35000,\ x_5 = 15000$$

Het rendement (totale winst) op deze investering is dan 12375 euro, of 12.375%.

3. In deze opgave moet er niet enkel beslist worden hoeveel van elke lading mee te nemen maar ook *in welk compartiment* deze lading moet worden geplaatst. Er zijn m.a.w. $4 \times 3 = 12$ beslissingsvariabelen. Noem $x_{i,j}$ het aantal ton van lading i dat in compartiment j wordt geplaatst.

   De winst die wordt gemaakt door een bepaalde allocatie is:

$$\begin{aligned} &310(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3}) + 380(x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3}) \\ &\quad + 350(x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3}) + 285(x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3}). \end{aligned}$$

   Er zijn vier soorten van beperkingen: er is een gewichtsbeperking per compartiment, een volumebeperking per compartiment en beperkingingen op de verdeling van de gewichten tussen de compartimenten en tenslotte kan er niet méér van een bepaalde lading worden meegenomen dan er beschikaar is.

We kunnen niet méér van een bepaalde lading meenemen dan beschikbaar:

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 18 \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 15 \\ x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} \leq 23 \\ x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} \leq 12. \end{cases}$$

De gewichtsbeperkingen per compartiment zijn de volgende:

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1} \leq 10 \\ x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2} \leq 16 \\ x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3} \leq 8 \end{cases}$$

De volumebeperkingen zijn gelijkaardig:

$$\begin{cases} 480x_{1,1} + 650x_{2,1} + 580x_{3,1} + 390x_{4,1} \leq 6800 \\ 480x_{1,2} + 650x_{2,2} + 580x_{3,2} + 390x_{4,2} \leq 8700 \\ 480x_{1,3} + 650x_{2,3} + 580x_{3,3} + 390x_{4,3} \leq 5300 \end{cases}$$

Tenslotte moet het evenwicht in het vliegtuig bewaard blijven, bv. tussen het eerste en tweede compartiment:

$$\frac{x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}}{x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2}} = \frac{10}{16}.$$

Dit is natuurlijk geen lineaire beperking, dus herschrijven we dit als

$$16(x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}) = 10(x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2}).$$

Verder ook tussen compartiment 1 en 3:

$$8(x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} + x_{4,1}) = 10(x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3})$$

De verhouding tussen compartiment 2 en 3 zal dan ook onmiddellijk voldaan zijn:

$$8(x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} + x_{4,2}) = 16(x_{1,3} + x_{2,3} + x_{3,3} + x_{4,3}).$$

Uiteraard zijn alle beslissingsvariabelen niet-negatief.

Na oplossen van dit LP-probleem vinden we de volgende optimale oplossing:

$$x_{2,1} = 7, x_{2,3} = 8, x_{3,1} = 3, x_{3,2} = 12.9474, x_{4,2} = 3.0526.$$

Alle andere beslissingsvariabelen zijn nul. De winst die wordt gemaakt is 12151.58 EUR. Men verifieert dat alle compartimenten hun maximale gewicht dragen. Het middelste compartiment is eveneens volledig gevuld qua volume.

HOOFDSTUK 7

Lineair Programmeren

7.6 Oefeningen

1. Los het broekenprobleem op m.b.v. de grafische methode. Ter herinnering, dit probleem wordt gegeven door:

   $$\max D(x_1, x_2) = 70x_1 + 40x_2$$

   onder de beperkingen

   $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 192 \\ x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 120 \end{cases}$$

   en waarbij verder de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn. Merk op dat we hier de vaste kost achterwege hebben gelaten. Om te bepalen of de activiteit al dan niet economisch zinvol is moet deze natuurlijk wel in rekening worden gebracht.

2. Los het volgende LP-probleem op m.b.v. de grafische methode:

   $$\min D(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

   onder de beperkingen

   $$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{en} \quad x_2 \geq 0.$$

3. Los het LP-probleem uit opgave 2 op m.b.v. de II-fasen methode. Maak gebruik van een programma zoals Excel of R om de elementaire rij-operaties snel en correct te kunnen uitvoeren. Duid op de figuur aan welke punten werden bezocht in het (x_1, x_2) vlak. Ga in het bijzonder na waar de simplexprocedure is aanbeland op het einde van de eerste fase.

4. **Simplex procedure vast in oneindige lus** Het volgende voorbeeld is speciaal geconstrueerd opdat de simplexprocedure in een oneindige lus zou raken:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2.3x_1 + 2.15x_2 - 13.55x_3 - 0.4x_4$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 0.4x_1 + 0.2x_2 - 1.4x_3 - 0.2x_4 \leq 0 \\ -7.8x_1 - 1.4x_2 + 7.8x_3 + 0.4x_4 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Gebruik Excel om twee iteraties van de simplexprocedure toe te passen. Wanneer meerdere variabelen uit de basis kunnen worden verwijderd kies dan diegene met de grootste pivotwaarde. (Deze regel is ook interessant vanuit het standpunt van numerieke stabiliteit.)

Wat merk je na twee iteraties? Wat zal er gebeuren na 6 iteraties?

Opmerking: Het feit dat de simplexprocedure vastloopt in een oneindige lus betekent *niet* dat dit probleem geen optimale oplossing heeft. Gebruik een software-pakket om deze optimale oplossing te bepalen.

5. **Simplexprocedure op Klee-Minty kubus** Beschouw het volgende LP-probleem met drie beslissingsvariabelen en met drie restricties:

$$\max D(x_1, x_2, x_3) = 2^2 x_1 + 2x_2 + x_3$$

onder de volgende beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 \leq 5 \\ 2^2 x_1 + x_2 \leq 5^2 \\ 2^3 x_1 + 2^2 x_2 + x_3 \leq 5^3, \end{cases}$$

en waarbij verder de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Het aanvaardbaar gebied is in dit geval een "vervormde" kubus waarbij één van de 2^3 hoekpunten in de oorsprong ligt.

Gebruik een software-pakket om na te gaan dat de simplexprocedure in dit geval alle 8 de hoekpunten bezoekt om uiteindelijk te eindigen in de optimale oplossing $(0, 0, 5^3)$.

Men kan dit probleem veralgemenen naar een willekeurig aantal dimensies n waarbij het dan 2^n hoekpunten zal bezoeken. Dit probleem werd speciaal ontworpen om aan te tonen dat de simplexprocedure in het slechtste geval een exponentiële tijdscomplexiteit heeft.

7.7 Oplossingen

1. Het aanvaardbaar gebied wordt getoond in Figuur 7.1. Wanneer men nu de doelfunctierechte(n) tekent dan vindt men dat de optimale oplossing gevonden wordt in het snijpunt van de rechten

$$3x_1 + x_2 = 192$$

en

$$x_1 + x_2 = 120.$$

Het snijpunt wordt m.a.w. gegeven door het snijpunt van volgend stelsel lineaire vergelijkingen:

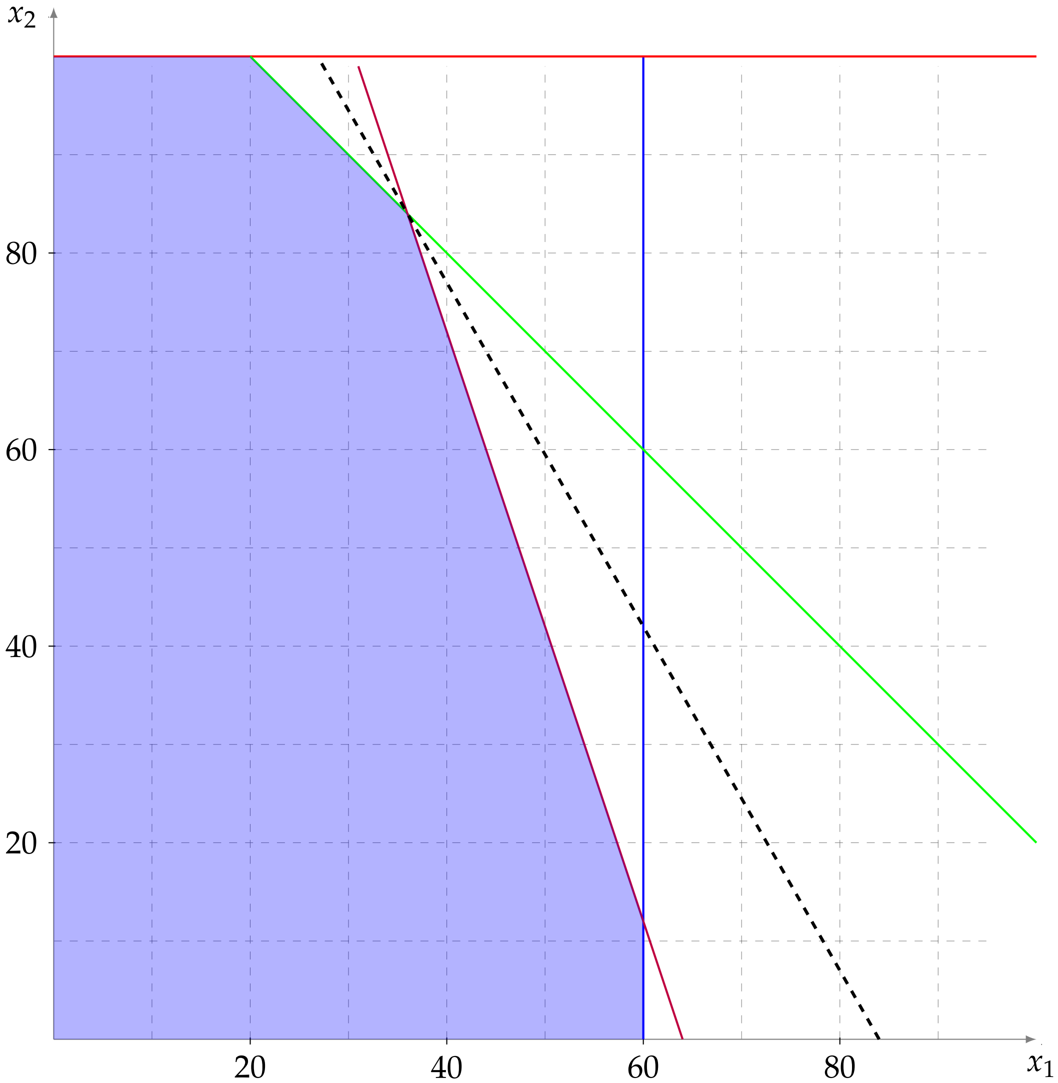
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 192 \\ \;\; x_1 + x_2 = 120. \end{cases}$$

Wanneer men de tweede vergelijking van de eerste aftrekt dan vindt men dat

$$2x_1 = 72 \iff x_1 = 36.$$

Hieruit volgt dan onmiddellijk dat $x_2 = 84$. De optimale oplossing wordt m.a.w. gegeven door

$$x_1 = 36, \quad x_2 = 84 \quad \text{en} \quad D = 70 \times 36 + 40 \times 84 = 5880.$$



Figuur 7.1: Het aanvaardbaar gebied voor het broekenprobleem samen met de optimale doelfunctierechte.

2. We tekenenen het aanvaardbaar gebied. Dit vind je in Figuur 7.2.

   Let op het volgende.

   - Omdat er restricties zijn van de $\geq$-vorm behoort de oorsprong niet tot het aanvaardbaar gebied.
   - Let ook op de richting waarin de doelfunctien rechten bewegen. Omdat er moet geminimaliseerd worden is "naar onder" in dit geval de correcte richting.

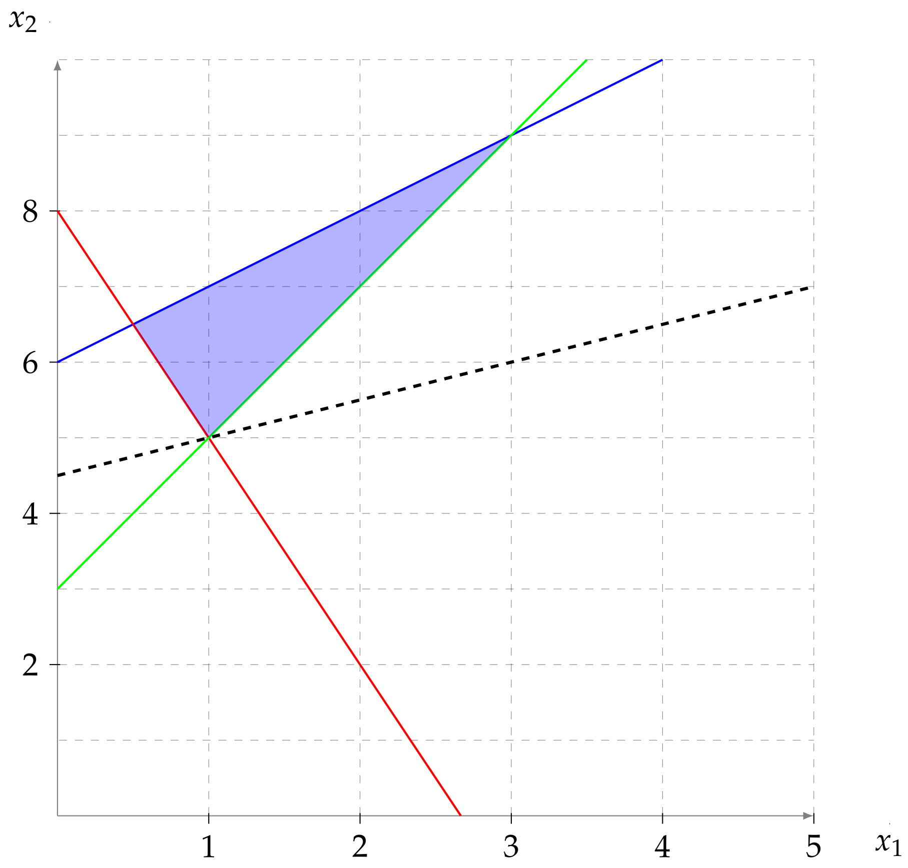
   Zoals men kan aflezen uit de figuur wordt de optimale oplossing gegeven door

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5 \quad \text{en} \quad D = -1 + 2 \times 5 = 9.$$

3. In de twee II-fasen methode worden achtereenvolgens de volgende punten in het (x_1, x_2)-vlak bezocht. Er wordt gestart in de oorsprong $(0, 0)$. In de eerste iteratie wordt x_2 in de basis gebracht ten koste van de artificiële variabele die hoort bij de laatste restrictie. De bekomen oplossing in het (x_1, x_2)-vlak is $(0, 3)$. Vervolgens wordt x_1 in de basis gebracht ten koste van de artificiële variabele die hoort bij de middelste restrictie. De oplossing in het (x_1, x_2)-vlak is $(1, 5)$. Dit is het einde van de eerste fase, en men is in een hoekpunt van het aanvaardbaar gebied aanbeland. Na het klaarzetten van het tableau voor Gaussische eliminatie aan de start van de tweede fase ziet men dat alle coëfficënten in de doelfunctievergelijking niet-negatief zijn. Dit duidt erop dat de optimale oplossing werd bereikt.

4. We geven de tableaus waarbij we telkens het spilemelent in het vet aanduiden.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL \end{array} \\
\begin{array}{c} D \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
-2,3 & -2,15 & 13,55 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathbf{0,4} & 0,2 & -1,4 & -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-7,8 & -1,4 & 7,8 & 0,4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$



Figuur 7.2: Aanvaardbaar gebied voor het LP-probleem in oefening 2. De doelfunctierechte waarvoor het minimum wordt bereikt is eveneens getekend. Opletten! Wanneer er zou gevraagd worden om te maximaliseren dan zou de optimale oplossing te vinden zijn in het hoekpunt rechts boven.

.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL \end{array} \\
\begin{array}{c} D \\ x_1 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & -1 & 5,5 & -0,75 & 5,75 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0,5 & -3,5 & -0,5 & 2,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \mathbf{2,5} & -19,5 & -3,5 & 19,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0,5 & 3,5 & 0,5 & -2,5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_1 \\ x_2 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2{,}3 & -2{,}15 & 13{,}55 & 0{,}4 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & \mathbf{0{,}4} & 0{,}2 & -1{,}4 & -0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & -7{,}8 & -1{,}4 & 7{,}8 & 0{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -0{,}4 & -0{,}2 & 1{,}4 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 7{,}8 & 1{,}4 & -7{,}8 & -0{,}4 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Merk op dat de structuur van dit tableau gelijkaardig is aan dat van het eerste tableau maar dat alles twee plaatsen naar rechts is doorgeschoven. Hier ziet men eigenlijk al dat het algoritme zal vastraken in een oneindige lus maar we tonen de volgende tableaus ook nog om dit expliciet te maken. Merk op dat de doelfunctiewaarde nog steeds gelijk is aan nul! Enkel de basis is gewijzigd.

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_3 \\ x_2 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
5{,}75 & 0 & 0 & -1 & 5{,}5 & -0{,}75 & 0 & 0 & 1 & 0\\
2{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5 & -3{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
19{,}5 & 1 & 0 & \mathbf{2{,}5} & -19{,}5 & -3{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
-19{,}5 & 0 & 0 & -2{,}5 & 19{,}5 & 3{,}5 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_3 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
13{,}55 & 0{,}4 & 0 & 0 & -2{,}3 & -2{,}15 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1{,}4 & -0{,}2 & 1 & 0 & \mathbf{0{,}4} & 0{,}2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
7{,}8 & 0{,}4 & 0 & 1 & -7{,}8 & -1{,}4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_5 \\ x_4 \\ x_7 \\ x_8
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL
\end{array}\\
\begin{pmatrix}
5{,}5 & -0{,}75 & 5{,}75 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-3{,}5 & -0{,}5 & 2{,}5 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-19{,}5 & -3{,}5 & 19{,}5 & 1 & 0 & \mathbf{2{,}5} & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{c} \\ D \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & D & RL \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2,3 & -2,15 & 13,55 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & -1,4 & -0,2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,8 & -1,4 & 7,8 & 0,4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

In dit laatste tableau ziet men dat men opnieuw in dezelfde basis is aanbeland als diegene waarmee men gestart is. Dit toont aan dat voor dit specifieke voorbeeld de simplexprocedure in een oneindige lus vastzit.

5. De simplexprocedure verloopt als volgt:

iteratie	basis	(x_1, x_2, x_3)	D
1	$(y_1, y_2, y_3) = (5, 25, 125)$	$(0, 0, 0)$	0
2	$(x_1, y_2, y_3) = (5, 5, 85)$	$(5, 0, 0)$	20
3	$(x_1, x_2, y_3) = (5, 5, 65)$	$(5, 5, 0)$	30
4	$(y_1, x_2, y_3) = (5, 25, 25)$	$(0, 25, 0)$	50
5	$(y_1, x_2, x_3) = (5, 25, 25)$	$(0, 25, 25)$	75
6	$(x_1, x_2, x_3) = (5, 5, 65)$	$(5, 5, 65)$	95
7	$(x_1, y_2, x_3) = (5, 5, 85)$	$(5, 0, 85)$	105
8	$(y_1, y_2, x_3) = (5, 25, 125)$	$(0, 0, 125)$	125

Men ziet dat er een bepaald patroon zit in welke van de variabelen x_1, x_2 en x_3 tot de basis behoren alnaargelang de iteraties vorderen. De laatste vier iteraties zijn in essentie de "gespiegelde" versie van de eerste vier. Het enige verschil is dat nu x_3 wél tot de basis behoort. Als men deze eigenschap doortrekt naar een probleem met $n = 4$ beslissingsvariabelen (en vier beperkingen), dan kan men voorspellen hoe de simplexprocedure zal verlopen. Eerst krijgt men 8 iteraties zal hierboven met $x_4 = 0$ (niet in de basis). In iteratie 9 zal x_4 in de basis komen, en dan zal men de gespiegelde versie krijgen van hetgeen hierboven staat (met telkens $x_4 \neq 0$).

Op de URL: http://www.phpsimplex.com/simplex/simplex.htm?l=en kan je de simplexmethode stap voor stap uitvoeren. Let er wel op dat het tableau een klein beetje anders gevormd is dan de tableaus in de cursus maar het idee blijft volledig hetzelfde.

HOOFDSTUK **8**

Geheeltallig Lineair Programmeren

8.6 Oefeningen

1. Los het volgende gemengde ILP-probleem op m.b.v. de grafische methode:

$$\max D(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 33 \end{cases}$$

waarbij $x_1 \in \mathbb{N}$ en waar bovendien de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{en} \quad x_2 \geq 0.$$

2. Los volgend binair geheeltallig LP-probleem m.b.v. de branch-and-bound methode. Om de LP-relaxaties op te lossen kan je gebruikmaken van een softwarepakket. Houd het verloop van het proces bij a.d.h.v. een oplossingsboom.

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 6x_1 + \ 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + \ x_4 \leq 1 \\ -x_1 \qquad + \ x_3 \qquad \leq 0 \\ \qquad -x_2 \qquad + \ x_4 \leq 0. \end{cases}$$

en

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

3. Een coach van een zwemteam wil een team samenstellen voor de 4×50 meter wisselslag. Hij beschikt over 5 zwemmers, die elk verschillende tijden neerzetten voor de verschillende zwemstijlen. De coach wil uiteraard het snelste team samenstellen.

   De tijden (in seconden) van de zwemmers worden in onderstaande tabel gegeven:

	Lucas	Liam	Vince	Finn	Louis
Rugslag	37,7	32,9	33,8	37,0	35,4
Schoolslag	43,4	33,1	42,2	34,7	41,8
Vlinderslag	33,3	28,5	38,9	30,4	33,6
Vrije slag	29,2	26,4	29,6	28,5	31,1

   a) Gebruik de binaire beslissingsvariabelen $x_{i,j}$, waarbij $x_{i,j} = 1$ betekent dat "slag" i gezwommen wordt door "zwemmer" j. Bijvoorbeeld $x_{1,2} = 1$ betekent dat Liam rugslag voor zijn rekening neemt.

   b) Hoe druk je uit dat de tijd van het beste team minimaal is? Gebruik $t_{i,j}$ om aan te geven wat de tijd is zwemmer j voor de slag i.

   c) Druk uit dat elke slag door juist één zwemmer wordt gezwommen.

   d) Druk uit dat elke zwemmer hoogstens één slag mag zwemmen. Merk op dat één zwemmer buiten de ploeg zal vallen.

Los het probleem op m.b.v. Excel-solver en formuleer je advies aan de coach.

4. **Klassiek arbeidsplanningprobleem** Een restaurant is zeven dagen per week open. Men wil op elk van de zeven dagen minimaal het volgende aantal personeelsleden aan het werk hebben in het restaurant:

Dag	Ma	Di	Woe	Do	Vr	Zat	Zo
Aantal	14	13	15	16	19	18	11

Het werkregime is zodanig dat een arbeider steeds 5 dagen werkt en daarna (verplicht) twee dagen thuis is. Dit patroon zet zich (oneindig) door.

Vind het minimaal aantal personeelsleden dat nodig is om aan de bestaffingsvereisten van het restaurant te voldoen. Stel hiertoe eerst het wiskundig model op en los dit vervolgens op m.b.v. een softwarepakket.

Tip: denk goed na over de *betekenis* van je beslissingsvariabelen. Wanneer je de (voor de hand liggende) keuze zou gebruiken die zegt dat x_i het aantal personeelsleden is dat werkt op dag i, dan wordt het zeer moeilijk om het model op te stellen.

5. Stel dat in een bepaalde regio met 5 steden brandweercentrales gevestigd moeten worden. Elke stad is een potentiële vestigingsplaats voor een brandweercentrale. Het is vereist dat elke stad op hoogstens 10 minuten reistijd ligt van een brandweercentrale. In de tabel hieronder worden de reistijden in minuten tussen elk paar steden gegeven.

Van \Naar	Stad 1	Stad 2	Stad 3	Stad 4	Stad 5
Stad 1	0	11	12	9	15
Stad 2	11	0	14	12	10
Stad 3	9	8	0	15	12
Stad 4	10	12	15	0	13
Stad 5	17	12	10	13	0

Merk op dat de reistijden niet symmetrisch zijn. Bv. het duurt 12 minuten om van stad 1 naar stad 3 te reizen, maar omgekeerd duurt het slechts 9 minuten.

Men wil zo weinig mogelijk brandweercentrales plaatsen zodanig dat aan de reistijdvoorwaarden wordt voldaan. Stel het wiskundig model op voor dit probleem (en los het op), i.e. hoeveel brandweerkazernes zijn nodig en waar moeten ze worden geplaatst?

8.7 Oplossingen

1. Het aanvaardbaar gebied wordt getoond in Figuur 8.1. Hier leidt men uit af dat de optimale oplossing gegeven wordt door:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{9}{2} \quad \text{en} \quad D = -3 \times 3 + 2 \times \frac{9}{2} = 0.$$

2. We starten met het oplossen van de LP-relaxatie van het gegeven LP-probleem en we vinden:

$$x_1 = 5/6, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, D = 33/2.$$

Aangezien dit LP-probleem een oplossing heeft plaatsen we het op de open lijst.

Aangezien er maar één probleem op de open lijst staat wordt het ervan gehaald, en we splitsen het probleem op in twee deelproblemen. Eén waaraan de beperking $x_1 = 0$ is toegevoegd en één waaraan de beperking $x_1 = 1$ is toegevoegd.

Wanneer $x_1 = 0$ moet zijn dan wordt de optimale oplossing gegeven door

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1, D = 9.$$

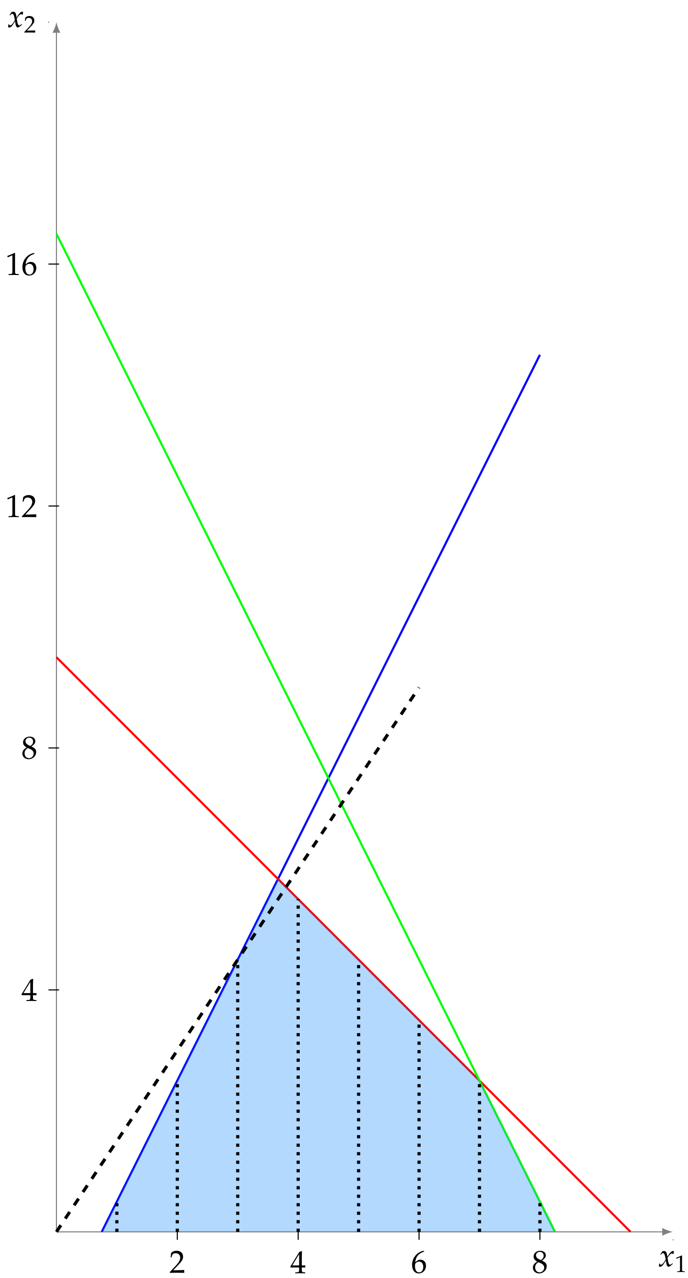
Dit is een oplossing van het originele BILP-probleem, en het wordt m.a.w. niet op de open lijst geplaatst. Wél onthouden we dat dit onze huidige beste oplossing is.

Wanneer $x_1 = 1$ moet zijn dan wordt de optimale oplossing gegeven door:

$$x_1 = 1, x_2 = 4/5, x_3 = 0, x_4 = 4/5, D = 81/5.$$

De oplossing van dit probleem is niet geheeltallig en de D-waarde is groter dan de huidig beste D-waarde, nl. 9. We plaatsen het probleem op de open lijst.

Opnieuw staat er slechts één probleem op de open lijst. We verwijderen het ervan en we zien dat x_2 de eerste variabele is die niet aan de geheeltalligheidseisen voldoet.



Figuur 8.1: Het aanvaardbaar gebied voor het gemengd geheeltallig LP-probleem in Oefening 1. Het aanvaardbaar gebied bestaat enkel uit de aangeduide verticale lijnstukken die in het aanvaardbaar gebied liggen van de LP-relaxatie.

We creëeren twee extra problemen, één waarbij $x_2 = 0$ en één waarbij $x_2 = 1$ (naast natuurlijk de reeds toegevoegde restrictie dat $x_1 = 1$.)

Wanneer $x_2 = 0$, dan wordt de optimale oplossing gegeven door:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 4/5, x_4 = 0, D = 69/5.$$

Dit probleem is niet geheeltallig en wordt aan de open lijst toegevoegd omdat D groter is dan de huidige beste waarde nl. 9.

Voor $x_2 = 1$ wordt de optimale oplossing:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 1/2, D = 16.$$

Dit probleem is niet geheeltallig en wordt aan de open lijst toegevoegd omdat D groter is dan de huidige beste waarde nl. 9.

De open lijst bevat op dit moment twee problemen. We kiezen het probleem waarvoor de D-waarde maximaal is, nl. het probleem met de extra restricties $x_1 = 1$ en $x_2 = 1$. We splitsen het probleeml op op basis van de variabele x_4.

Voor $x_4 = 0$ wordt de optimale oplossing gegeven door

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1/5, x_4 = 0, D = 76/5.$$

Dit probleem is niet geheeltallig en wordt aan de open lijst toegevoegd omdat D groter is dan de huidige beste waarde nl. 9.

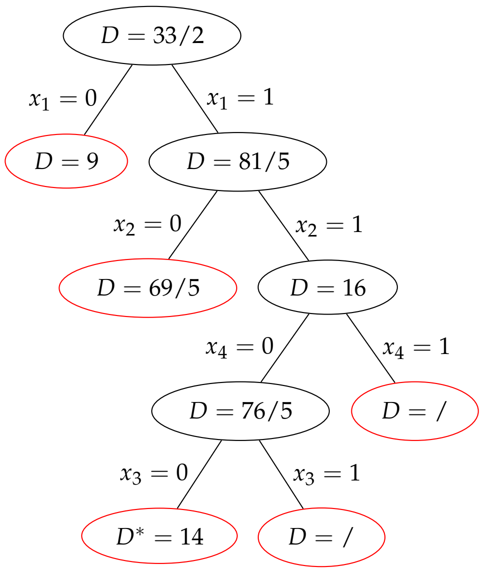
Voor $x_4 = 1$ heeft het probleem geen oplossing en het wordt dan ook niet aan de open lijst toegevoegd.

Er staan op dit moment twee problemen op de open lijst. Omdat 76/5 groter is dan 69/5 wordt het probleem met de restricties $x_1 = 1, x_2 = 1, x_4 = 0$ als eerste van de open lijst gehaald.

We splitsen het probleem op basis van de variabele x_3. Wanneer $x_3 = 0$ als restrictie wordt toegevoegd dan vindt men als optimale oplossing:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 9, D = 14.$$

Dit is een geheeltallige oplossing die beter is dan de huidige beste oplossing. Dit wordt m.a.w. de nieuwe beste oplossing. Bovendien is 14 strikt groter dan de doelfunctiewaarde van het enige problemeel op de open lijst (met doelfunctiewaarde 69/5). Dit probleem wordt bijgevolg verwijderd van de open lijst.



Figuur 8.2: Schematische weergave van de oplossingsboom opgebouwd door het branch-and-bound algoritme bij het oplossen van het probleem gegeven in Oefening 2.

Tenslott moet men nog de restrictie $x_3 = 1$ toevoegen maar in dit geval zijn er geen oplossingen en dit probleem moet m.a.w. niet aan de open lijst worden toegevoegd.

De open lijst is leeg en het algoritme heeft de optimale oplossing gevonden. Deze wordt gegeven door:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 9, D = 14.$$

De opgebouwde oplossingsboom wordt weergegeven in Figuur 8.2.

3.

4. Er zijn 7 beslissingsvariabelen x_i met $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ waarbij x_i het aantal personen voorstelt dat zijn of haar werkweek *start* op dag i.

   Het aantal personeelsleden in dienst wordt gegeven door

   $$D(x_1, \ldots, x_7) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7.$$

   Dit is meteen ook de te minimaliseren doelfunctie.

Op elke dag moeten er voldoende personeelsleden aan het werk zijn. De maandag werkt iedereen behalve diegenen die op dinsdag of woensdag starten. Dit betekent dat er moet gelden dat

$$x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 14.$$

Nu doen we hetzelfde voor de 6 andere dagen:

$$\begin{cases} x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 13 \\ x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 15 \\ x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 19 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 18 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \end{cases}$$

Bovendien moet elke x_i een natuurlijk getal zijn: $x_i \in \mathbb{N}$, voor $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Als men dit model oplost dan vindt men als optimale oplossing:

$$x_1 = 4, x_2 = 7, x_3 = 1, x_4 = 4, x_5 = 3, x_6 = 3, x_7 = 0.$$

In totaal zijn er 22 personeelsleden nodig.

5. Voor elk van de vijf steden moet er beslist worden of er een brandweercentrale komt of niet. We gebruiken m.a.w. vijf beslissingsvariabelen:

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ als een brandweercentrale in stad } j \text{ gebouwd wordt} \\ 0 \text{ anders,} \end{cases}$$

met $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. De te minimaliseren doelfunctie wordt gegeven door het aantal gebouwde brandweercentrales:

$$D(x_1, \ldots, x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Om stad 1 te kunnen bedienen moet er minstens één brandweercentrale gebouwd worden in een stad van waaruit stad 1 kan bereikt worden in hoogstens 10 minuten. In dit geval betekent dit minstens één brandweercentrale in stad 1, 3 of 4:

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq 1.$$

We doen nu hetzelfde voor de andere 4 steden:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_1 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_5 \geq 1. \end{cases}$$

De beslissingsvariabelen zijn in dit geval binair. Een optimale oplossing wordt gegeven door:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 1$$

Andere optimale oplossingen zijn mogelijk, bv.

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$$

Alle optimale oplossingen hebben uiteraard dezelfde doelfunctiewaarde, nl. 3.