HoGent

BEDRIJF
EN
ORGANISATIE

Probleemoplossend denken
Operationeel Onderzoek

Jens Buysse, Stijn Lievens, Lieven Smits

Inhoud

Operationeel onderzoek (OR)

Good OR jokes exist, but the problem of finding them is NP-hard.

Operationeel onderzoek

Operationeel onderzoek : richt zich op de toepassing van wiskundige technieken en modellen om processen binnen organisaties te verbeteren of te optimaliseren.

- Doel is dus beslissingen ondersteunen: besliskunde

Enkele successen : luchtafweer

Gemiddeld aantal kogels nodig om een vliegtuig neer te halen : van 20000 naar 4000

Enkele successen : scheepskonvooien

Hoe groot moet een beschermingsconvooi zijn?

Enkele successen : bepantsering

Waar moeten de vliegtuigen bepantserd worden? Op kogelgaten of net niet?

Toepassingen

- Planning en scheduling problemen
- Layout optimalisatie
- Routing optimalisatie
- Telecomnetwerken optimaliseren
- Resource usage problemen
- ...

Wiskundige vorm

- OR vraagstukken kunnen dikwijls in deze wiskundige vorm vertaald worden :
  - Vind het maximum van een functie
  - Terwijl de onafhankelijke functievariabelen binnen bepaalde grenzen blijven
- De oplossingsmethode is afhankelijk van
  - Soort functie (lineair, niet lineair)
  - Soort onafhankelijke variabelen (gehele of reële getallen)
  - Soort beperkingen (hard, zacht, lineair, niet-lineair)
  - Kwaliteit van de informatie

Modelbouwcyclus

Hoe bouwen we een model op

Modelbouwcyclus

1. Specificeer het probleem
2. Maak een wiskundig model
3. Los het model op interpreteer de resultaten
4. Vergelijk het resultaat met de realiteit
5. Stuur bij indien nodig

Specifieer het probleem

- Beschrijf het probleem
- Verifieer dat alle actoren het probleem op dezelfde manier begrijpen
- Gebruik kwantitatieve grootheden (oppervlakte, lengte, kill-loss ratio . . .) dit worden de systeemfactoren of systeemvariabelen
- Kwaliteit van de informatie ?
- Ervaring en inzicht in het probleem nodig

Maak wiskundig model

- Grootheden worden variabelen
- Compromis :

  Complex model : veel tijd nodig om op te stellen en op te lossen, maar komt goed met de realiteit overeen

  Eenvoudig model : goedkoper, maar wijkt meer af v/d realiteit !
- Vereenvoudigingen : bewuste afwijking tussen de werkelijkheid en het wiskundig model om het model hanteerbaar te houden
- Pas op : zijn de invloeden van toegepaste vereenvoudigingen écht verwaarloosbaar ?

Los op en interpreteer

- Ligt de oplossing op één van de grensvoorwaarden, zo ja dewelke en wat is de betekenis?
- Wat weet je over de informatiekwaliteit van de parameters ?
- Hoe gevoelig is de oplossing aan wijzigingen in de parameters van het probleem ?

Vergelijk met de realiteit

- Is de oplossing realistisch ?
- Krijgen we (na implementatie) de verwachte resultaten ?
- Indien niet, welke zijn de onverwachte invloedsfactoren ?

Voorbeeld

Frans is landbouwer en vraagt jouw hulp om de optimale benutting van zijn land te berekenen. Nonkel Frans heeft 20 ha grond en kennis en materieel om tarwe en gerst te verbouwen.
Verkoopprijzen : 25/100kg (tarwe) en 20/100kg (gerst).
Opbrengsten : 1000 kg/ha (tarwe) ; 1500 kg/ha (gerst) Hieronder de prijzen, behoefte en wettelijk beperkingen (gemiddeld per ha) van gebruik van meststof en pesticide.

	Nodig tarwe	Nodig gerst	Prijs	Maximum
Bemesting	10 kg/ha	20 kg/ha	2 euro/kg	15 kg/ha
Pesticide	2 kg/ha	1kg/ha	5 euro/kg	1.8 kg/ha

Voorbeeld

- Systeemvariabelen:

$$\begin{aligned} x_g &: \text{oppervlakte te bebouwen met gerst} \\ x_t &: \text{opperlvakte te bebouwen met tarwe} \end{aligned}$$

- Doelfunctie: winst = opbrengt - kosten

$$\begin{aligned} \text{Bemesting} &: q_b = 20x_t + 40x_g \\ \text{Pesticide} &: q_p = 10x_t + 5x_g \\ \text{Opbrengst} &: 250x_t + 300x_g \\ \text{Kost} &: 30x_t + 45x_g \\ \text{Winst} &: 220x_t + 255x_g \end{aligned}$$

Beperkingen

$$\begin{aligned} \text{Oppervlakte} &: x_t + q_g \leq 20 \\ \text{Bemesting} &: 10x_t + 20x_g \leq 300 \\ \text{Pesticide} &: 2x_t + x_g \leq 36 \end{aligned}$$

Vereenvoudigen

- We bemesten altijd de aanbevolen hoeveelheid
- Voor de beperking op bemesting en pesticide mag het gemiddelde over de totale oppervlakte genomen worden
- Economies of scale (bvb goedkopere prijzen bij loonwerkers bij grotere oppervlakten van één product) nemen we niet in rekening
- Werkuren niet in het model opgenomen m.a.w. Nonkel Frans heeft tijd zat
- Stabiliteit van de prijzen en de opbrengsten
- ...

Optimale oplossing

- $x_t = 10, x_g = 10$ en winst $= 4750$

Beperkingen gelden:

- Oppervlakte $10 + 10 = 20$
- Bemesting $100 + 200 = 300$
- Pesticide $20 + 10 = 30 \leq 36$

Voorbeeld 2

Een bedrijf vervaardigt twee soorten broeken, type A en type B. De stof van A-broeken kost 25 per broek, die van de B-broeken 20 per broek. Een arbeider werkt 60 minuten aan een A-broek, 20 minuten aan een B-broek. De verkoopprijzen bedragen respectievelijk 95 en 60. Het bedrijf heeft 8 arbeiders in dienst die maximaal 8 uur per dag werken aan 30 per uur. Verder zijn er nog 2400 vaste kosten per dag. Technische werkloosheid is niet mogelijk. Uit marktonderzoek blijkt dat van de A-broeken ten hoogste 60 stuks per dag verkocht kunnen worden, en van de hoogstens B-broeken 100 stuks per dag. Per dag zijn er ook ten hoogste 120 ritssluitingen beschikbaar. Hoeveel broeken van elk type moeten geproduceerd worden om een zo groot mogelijke winst te maken? Maak van dit probleem een wiskundig model

Oplossing

x_a aantal broeken A

x_b aantal broeken B

Kosten:

- Loonkost: $8^2 * 30 = 1920$
- Stof: $25 \times x_a + 20 \times x_b$
- Ritssluitingen nvt.
- Andere vaste kosten : 2400

Opbrengst:

- Opbrengst : $95x_a + 60x_b$

Oplossing

x_a aantal broeken A

x_b aantal broeken B

Kosten:

- Loonkost: $8^2 * 30 = 1920$
- Stof: $25 \times x_a + 20 \times x_b$
- Ritssluitingen nvt.
- Andere vaste kosten : 2400

Opbrengst:

- Opbrengst : $95x_a + 60x_b$

Maximaliseer : $70x_a + 40x_b - 4320$

Oplossing

Voorwaarden:

- $x_a + \frac{x_b}{3} \leq 64$
- $x_a \leq 60$ en $x_b \leq 100$
- $x_a + x_b \leq 120$

Oplossing: $x_a = 36$ en $x_b = 84$

Oefening 2

Een bank heeft 100.000 euro beschikbaar om te investeren gedurende het huidige jaar. De financiële analisten van de bank hebben de volgende investeringsmogelijkheden geselecteerd: bedrijfsleningen, persoonlijke leningen, preferente aandelen, gewone aandelen en staatsobligaties. Het jaarlijkse rendement van elke type investering wordt geschat op 12%, 17%, 10.5%, 11.5% en 9% respectievelijk. Om de risico's te reduceren hebben de analisten de volgende restricties opgelegd voor de portefeuille van de bank.

Oefening 2

1. Noch in de leningen, nog in de aandelen mag meer dan 50% van beschikbare bedrag worden geïnvesteerd
2. De investering in staatsobligaties moet tenmisten gelijk zijn aan 30% van de investering in leningen
3. De persoonlijke leningen mogen hooguit 40% voor hun rekening nemen van de totalte investering in de leningen.

Hoe moet de bank zijn geld investeren opdat het jaarlijke rendement op de portefeuille gemaximaliseerd wordt?

Lineair programmeren

Lineair programmeren

Bij Lineair Programmeren (LP) wordt de optimale waarde bepaald van een lineaire criteriumfunctie van meerdere belsissingsvariabelen

- Deze variabelen moeten voldoen aan een aantal lineaire bijvoorwaarden.
- Programmeren $\neq$ op computer programmeren, maar wordt gezien als plannen

Productieplanningsprobleem

- Een bedrijf produceert 4 producten: A, B, C en D
- Product ondergaat drie fasen: assemblage, afronding en verplakking met voor elk product bepaalde tijd (zie tabel)
- Er is 400 uur beschikbaar voor assemblage, 480 uur voor afronding en 220 uur voor verpakking
- Elk product heeft zijn eigen grondstofbehoeften: A=1.9, B=2.5, C=1.8 en D=2 eenheden per eenheid product
- Totaal zijn er 1500 grondstoffen voorhanden
- De winst per product zijn : A=4.8, B=12, C=6 euro en D=7.2 euro
- Het bedrijf heeft al een order van 100 producten A aanvaard

De vraag voor elk van de producten is groot en het bedrijf kan zoveel producten verkopen als het produceert. Hoeveel moet er nu van A, B, C, D gemaakt worden voor maximale winst?

Productieplanningsprobleem

	Productietijd in uur				
	A	B	C	D	Beschikbaar
Assemblage	0.70	0.75	0.55	0.34	400
Afronding	0.55	0.82	0.80	0.55	480
Verpakking	0.24	0.32	0.45	0.27	220

Beslissingsvariabelen en doelstelling

$$
\begin{aligned}
x_A &= \text{aantal te produceren eenheden van product A} \\
x_B &= \text{aantal te produceren eenheden van product B} \\
x_C &= \text{aantal te produceren eenheden van product C} \\
x_D &= \text{aantal te produceren eenheden van product D}
\end{aligned}
$$

Men wil winst maximaliseren:

$$4.8x_A + 12x_B + 6x_C + 7.2x_D$$

Capaciteitsrestricties

Assemblage

$$0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D \leq 400$$

Afronding

$$0.55x_A + 0.82x_B + 0.80x_C + 0.55x_D \leq 480$$

Verpakking

$$0.24x_A + 0.32x_B + 0.45x_C + 0.27x_D \leq 220$$

Grondstofvoorwaarden

$$1.9x_A + 2.5x_B + 1.8x_C + 2x_D \leq 1500$$

Capaciteitsrestricties

Assemblage

$$0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D \leq 400$$

Afronding

$$0.55x_A + 0.82x_B + 0.80x_C + 0.55x_D \leq 480$$

Verpakking

$$0.24x_A + 0.32x_B + 0.45x_C + 0.27x_D \leq 220$$

Grondstofvoorwaarden

$$1.9x_A + 2.5x_B + 1.8x_C + 2x_D \leq 1500$$

Geaccepteerd onder

$$x_A \geq 100$$

Capaciteitsrestricties

Assemblage

$$0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D \leq 400$$

Afronding

$$0.55x_A + 0.82x_B + 0.80x_C + 0.55x_D \leq 480$$

Verpakking

$$0.24x_A + 0.32x_B + 0.45x_C + 0.27x_D \leq 220$$

Grondstofvoorwaarden

$$1.9x_A + 2.5x_B + 1.8x_C + 2x_D \leq 1500$$

Geaccepteerd onder

$$x_A \geq 100$$

Niet-negativiteitseisen

$$x_A, X_B, x_C, C_D \geq 0$$

Algemene formulering van een LP-model

Elk lineair probleem kan je omzetten in een algemene formulering.
Maximaliseer $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ Onder m voorwaarden

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

en

$$x_1, x_2, \ldots x_n \geq 0$$

Algemene vorm van een LP model

Of: Maximaliseer

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

onder

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \text{voor i} = 1, 2, \ldots m$$

en

$$x_j \geq 0 \text{ voor j} = 1, 2, \ldots n$$

Minimalisatie ipv Maximalisatie

In een LP model kan een criteriumfunctie ook geminimaliseerd worden in plaats van gemaximaliseerd:

0Minimaliseer

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

is gelijkwaardig met maximaliseer

$$-c_1x_1 - c_2x_2 - \cdots - c_nx_n$$

Niet-negativiteitseisen

- Alle variabelen moeten niet-negatief zijn. Als je een variabele x hebt die zowel positieve als negatieve waarden kan aannemen, dan vervang je x door twee niet-negatieve variabelen x^+ en x^-.
- Net zoals elk getal kan geschreven kan worden als het verschil van twee niet-negatieve getallen $(-3 = 0 - 3)$
- Transformatie wordt dan: $x = x^+ - x^-$ waarbij $x^+, x^- \geq 0$

Definities

Toegelaten oplossing Een verzameling waarden voor $(x_1, \ldots, x_n)$ die aan alle voorwaarden voldoet

Optimale oplossing Een optimale oplossing die de criteriumfunctie maximaliseert over gebied van toegelaten oplossingen

Geen toegelaten oplossing

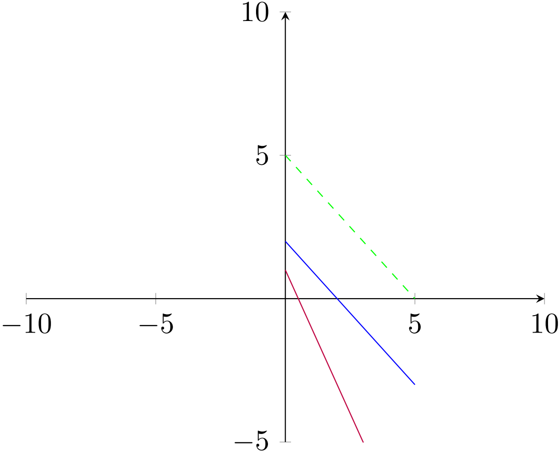
- Wanneer de beperkingen elkaar tegen spreken
- Meestal fout bij opstelling

Voorbeeld:

$$\text{Maximaliseer } x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_1 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Geen toegelaten oplossing



Een onbegrensde oplossing

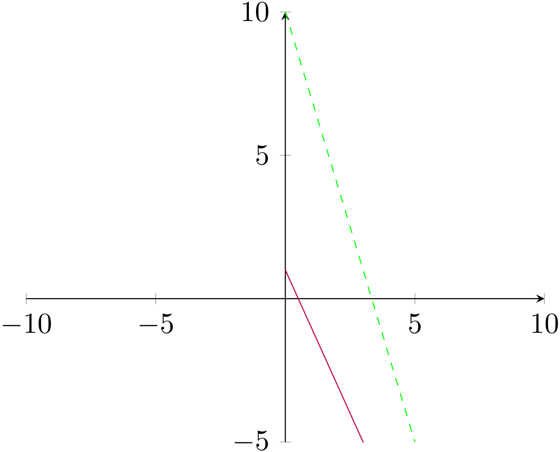
- Dit wil zeggen dat de criteriumfunctie elke willekeurige grote positieve waarde kan aannemen binnen de verzameling van toegelaten oplossingen.
- Meestal wijst dit op het vergeten van een beperking

Voorbeeld:

$$\text{Maximaliseer } 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Een onbegrensde oplossing



Optimale oplossing

- Als een LP probleem oplosbaar is, dan bestaat er een optimale oplossing. Sterker nog:

Er is een optimale oplossing waarin hooguit m van de beslissingsvariabelen een positieve waarde hebben met m het aantal beperkingen (exclusief de niet-negativiteitsisen)

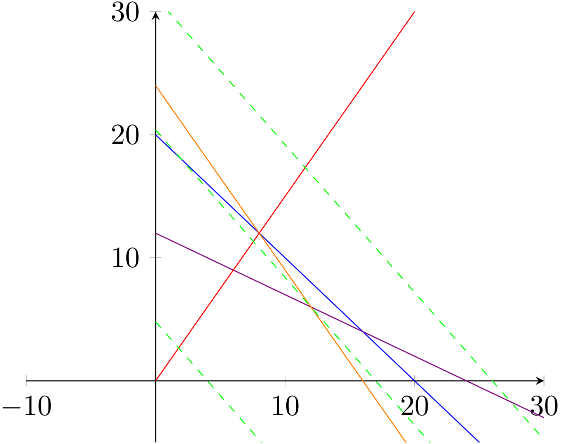
Grafische oplosmethode voor LP

Grafische oplossingsmethode voor LP

Maximaliseer $24x_1 + 20x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 0.5x_1 + x_2 \leq 12 \\ \frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{24}x_2 \leq 1 \\ 12x_1 - 8x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Grafische oplosmethode voor LP



Voorbeeld

Voor de productie van twee producten P_1 en P_2 zijn 120 machines en 180 arbeiders beschikbaar. De productiesnelheid per machine en per maand bedraagt 500kg voor P_1 en 1000kg voor P_2. Bij de productie is 1 man per ton P_1 en drie man per ton P_2 nodig. De maximale verkoopscapaciteit $(P_1 + P_2)$ bedraagt 80 ton per jaar P_1 levert een winst op van 300 euro per ton, P_2 een winst van 400euro per ton. Welke productmix (per maand) geeft maximale winst ?

Voorbeeld: modellering

Beslissingsvariabelen:

x_1 : Productie P_1

x_2 : Productie P_2

Doelfunctie

$$3x_1 + 4x_2$$

Restricties

$$\begin{cases} x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 120 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Oplossing

Zelf te tekenen en te verifiëren op
http://www.cs.cornell.edu/w8/~andru/relplot/

Oplossing

Optimale oplossing

- $x_1 = 30$ of dus 30 ton P_1 per maand
- $x_2 = 50$ pf dus 50 ton P_2 per maand
- $Z = 3.30 + 4.50 = 290$ of dus 29000 winst per maand

Actieve restricties

- Personeelsbeperking
- Marktbeperking

Niet-actieve restricties

- Machinebeperking

Interpretatie oplossing

- Onder huidige omstandigheden geeft productie van 30 ton P_1 en 50 ton P_2 de grootste winst.
- Machinepark wordt niet volledig benut. De winst kan niet verhoogd worden door extra machines aan te kopen.
- Door de markt te vergroten of extra personeel aanwerven kan de winst vergroten.

Grafische oplossing: ideeën

- Canonieke vorm met alle $b_i \geq 0$ aanvaardbaar gebied (AG) $=$ convexe veelhoek die de oorsprong bevat
- immers AG $=$ alle punten die onder alle rechten liggen
- In de meer algemene vorm met $b_i \leq 0$ zal de oorsprong niet noodzakelijk in het AG liggen
- Doelfunctie is een vlak in de ruimte
- Optimum $=$ hoekpunt van de convexe veelhoek
- Bij $n = 2$ (2 systeemvariabelen) : een hoekpunt wordt bepaald door snijpunt van 2 rechten

Oefening

Los het broekenprobleem grafisch op

- Doelfunctie : $70x_1 + 40x_2$
- Grensvoorwaarden

$$\begin{aligned} \text{Arbeid} &: 3x_1 + y_1 \leq 192 \\ \text{Markt} &: (x_1 \leq 60) \wedge (x_2 \leq 100) \\ \text{Ritssluitingen} &: x_1 + x_2 \leq 120 \end{aligned}$$

Simplex methode

In plain English: it's used to reach a goal while also having constraints

Simplex methode

- Trachten een uniforme oplossing te vinden, die oplossing kan bieden voor $n \geq 3$.
- Wordt vandaag de dag nog vaak gebruikt!

Basisidee : eliminatiemethode van Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Simplex methode

- Trachten een uniforme oplossing te vinden, die oplossing kan bieden voor $n \geq 3$.
- Wordt vandaag de dag nog vaak gebruikt!

Basisidee : eliminatiemethode van Gauss

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

Oplossen gebeurt door een veelvoud van de eerste vergelijk van de andere vergelijkingen af te trekken om de variabele x_1 uit die andere vergelijking te elimineren.

Simplex methode

1. Trek 2 keer de eerste vergelijking af van de tweede
2. Tel 1 keer de eerste vergelijkin bij de derde op

Simplex methode

1. Trek 2 keer de eerste vergelijking af van de tweede
2. Tel 1 keer de eerste vergelijkin bij de derde op

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Simplex methode

1. Trek 2 keer de eerste vergelijking af van de tweede
2. Tel 1 keer de eerste vergelijkin bij de derde op

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met eerste stelsel. Trek dit idee door:

Simplex methode

1. Trek 2 keer de eerste vergelijking af van de tweede
2. Tel 1 keer de eerste vergelijkin bij de derde op

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met eerste stelsel. Trek dit idee door:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ -4x_3 = -4 \end{cases}$$

Oplossing is dus

Simplex methode

1. Trek 2 keer de eerste vergelijking af van de tweede
2. Tel 1 keer de eerste vergelijkin bij de derde op

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Dit stelsel is gelijkwaardig met eerste stelsel. Trek dit idee door:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ -4x_3 = -4 \end{cases}$$

Oplossing is dus

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Simplex methode

Nu gaat deze methode wel niet op voor ongelijkheden: test dit zelf maar eens thuis uit!
Daarom:

- Wordt in Simplex het LP-model omgezet in gelijkwaardig model met enkel gelijkheden
- Dit heet men de standaardvorm
- De variabelen staan aan de linkerkant
- De constante aan de rechterkant is niet-negatief

Simplex methode

Nu gaat deze methode wel niet op voor ongelijkheden: test dit zelf maar eens thuis uit!
Daarom:

- Wordt in Simplex het LP-model omgezet in gelijkwaardig model met enkel gelijkheden
- Dit heet men de standaardvorm
- De variabelen staan aan de linkerkant
- De constante aan de rechterkant is niet-negatief

Deze omzetting wordt in LP software automatisch gedaan

Omzetting in standaardvorm: stap 1

Aangezien elke constante een positieve constante moet zijn:

- Vermenigvuldig elke negatieve rechterlidcoëfficiënt met -1.
  - $\leq$ wordt dan $\geq$
  - $\geq$ wordt dan $\leq$

Omzetting in standaardvorm: stap 2

Maak gebruik van verschil- en surplusvariabelen. Bv.

$$0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D \leq 400$$

Kan je omzetten in

$$\begin{cases} 0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D + v = 400 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Waarom kan dit zomaar:

Omzetting in standaardvorm: stap 2

Maak gebruik van verschil- en surplusvariabelen. Bv.

$$0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D \leq 400$$

Kan je omzetten in

$$\begin{cases} 0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D + v = 400 \\ v \geq 0 \end{cases}$$

Waarom kan dit zomaar: Indien volgende een oplossing is (voldoet aan ongelijkheid)

$$x_A^0, x_B^0, x_C^0, x_D^0$$

Dan zullen de gelijkheidheden opgaan met

$$x_A^0, x_B^0, x_C^0, x_D^0, v^0$$

en

$$v^0 = 400 - (0.70x_A + 0.75x_B + 0.55x_C + 0.34x_D)$$

Omzetting in standaardvorm : stap 2

Omgekeerd geldt ook: Indien volgende een oplossing is voor de gelijkheid

$$x_A^1, x_B^1, x_C^1, x_D^1, v^1$$

dan voldoet volgende oplossing zeker aan de ongelijkheid (want $v^1 \geq 0$)

$$x_A^1, x_B^1, x_C^1, x_D^1$$

De variabele v heet met een verschilvariabele.

Omzetting in standaardvorm: stap 2

Hetzelfde gaat op voor een $\geq$. bv.

$$x_A \geq 100$$

Voer een nieuwe variabele w in dan kan je zeggen:

$$\begin{cases} x_A - w = 100 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

Deze variabele w heet met een surplusvariabele.

Surplus en verschilvariabele

Wat is de interpretatie van deze variabelen voor de oplossing?

Surplus en verschilvariabele

Wat is de interpretatie van deze variabelen voor de oplossing?
De afwijking van de oplossing ten op zichte van de constante.

Standaardvorm

Maximaliseer

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i}^{m} 0.y_i$$

onder

$$\sum_{j}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i \text{voor i} = 1, 2, \ldots m$$

en

$$x_j \geq 0 \text{voor j} = 1, 2, \ldots n$$

$$b_i \geq 0 \text{voor i} = 1, 2, \ldots m$$

$$y_i \geq 0 \text{voor i} = 1, 2, \ldots m$$

Voorbeeld

Beslissingsvariabelen:

x_1 : Productie P_1

x_2 : Productie P_2

Doelfunctie

$$3x_1 + 4x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

Restricties

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + y_1 = 120 \\ x_1 + 3x_2 + y_2 = 180 \\ x_1 + x_2 + y_3 = 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Gevolgen door standaardisering

- De restrictievergelijkingen zijn nu een stelsel van m lineaire vergelijkingen in $m+n$ onbekenden geworden
- Elke oplossing van dit stelsel stelt een punt voor in de n-dimensionale ruimte (van de x-en)
- Betekenis van de y_i in de grafische voorstelling

  $y_i = 0$ punt ligt op de rechte horend bij de restrictie
  $y_i > 0$ punt ligt aan de aanvaardbare kant van de rechte
  $y_i < 0$ punt ligt aan de niet-aanvaardbare kant van de rechte

Herhaling stelsels vergelijkingen

- Onder de rang van een stelsel vectoren verstaat men het maximale aantal lineair onafhankelijke vectoren in dat stelsel
- Onder de kolommenrang van een matrix verstaat men de rang van de als vectoren opgevatte kolommen van de matrix.
- Onder de rijenrang van een matrix verstaat men de rang van de als vectoren opgevatte rijen van de matrix.
- Een niet direct voor de hand liggende eigenschap is dat de kolommenrang en de rijenrang aan elkaar gelijk zijn. Die gemeenschappelijke waarde heet de rang van de matrix.
- Indien een stelsel oplosbaar is, is het aantal vrije oplossingen $=$ het aantal variabelen - rang[A]

Terug naar stelsels vergelijkingen

$$A_{m,m+n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Rijen en kolommen zijn zeker linear onafhankelijk (0 en 1 achteraan)
- Dus de rang van stelsel is dus zeker m
- Het stelsel heeft dus $(n+m) - m$ vrije oplossingen
- En dus: stelsel heeft n-voudig oneindig aantal oplossingen

n-voudig oneindig oplossingen betekent dat je telkens n variabelen vrij kan kiezen en die een willekeurige waarde kan geven. De overblijvende m variabelen worden op die manier vastgelegd.

n-voudig oneindig aantal oplossingen

- We vinden een oplossing van het stelsel door aan n willekeurig gekozen variabelen een willekeurige waarde te geven en het stelsel op te lossen naar de m overblijvende variabelen.
- De bekomen oplossing zal pas dan in het aanvaardbare gebied liggen als alle $x_i \geq 0$ en alle $y_i \geq 0$

Aanvaardbaar vs. niet aanvaardbaar

Aanvaardbaar oplossingen van het stelsel die voldoen aan de niet-negativiteitsvoorwaarden

Niet-aanvaardbaar oplossingen van het stelsel die niet voldoen aan de niet-negativiteitsvoorwaarden

Basisoplossing

- Grafisch is een oplossing een hoekpunt van gebied met toegelaten oplossingen
- Dit geldt ook voor hogere dimensies ($n > 2$): een lineaire combinatie van twee andere toegelaten oplossingen

Nu geldt dat:

In een toegelaten oplossing die met een hoekpunt van het togelaten gebied correspondeert, kunnen hooguit m van de beslissingsvariabelen een positieve waarde hebben

Deze positieve variabelen heten we basisvariabelen van een basisoplossing.

Basisoplossing

Een basisoplossing is dus:

- Oplossing van het stelsel
- Bekomen door n gekozen variabelen $= 0$ te stellen
- De overige m variabelen te berekenen uit het stelsel

Exhaustief algoritme

1. Bereken alle basisoplossingen
2. Bereken de doelfunctie voor deze basisoplossingen
3. Zoek de grootste waarde uit deze set

Aantal basisoplossingen : $\binom{n}{n+m} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$

Simplex methode

1. Construeer een toegelaten basisoplossing
2. Bepaal uitgaande van de huidige basisoplossing een nieuwe basisoplossing die slecht 1 basisvariabele verschilt met de huidige basisoplossing. Daarom: maak een niet-basisvariabele positief en maak een van huidige basisvariabelen 0.
   - Criteriumwaarde moet verbeterd worden
   - Nieuwe oplossing moet toegelaten basisoplossing zijn
3. Herhaal totdat criteriumfunctie niet kan verbeterd worden

Voorbeeld

Maximaliseer $3x_1 + 2x_2 + -0.5x_3$ onder

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 + -2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Maximaliseer $3x_1 + 2x_2 + -0.5x_3$ onder

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 10 \\ 3x_1 + x_2 + -2x_3 \leq 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Stap 1: normalisatie
Maximaliseer $3x_1 + 2x_2 - 0.5x_3$ onder

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x_4 + x_5 = 8 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \geq 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Hoe kiezen we nu een start-basisoplossing?

Voorbeeld

Hoe kiezen we nu een start-basisoplossing?

- Basisvorm: in elke gelijkheidsvoorwaarde komt een variabele voor die coëfficient 1 in die voorwaarde heeft en coëfficient 0 in andere gelijkheidsvoorwaarden: hier OK!

Voorbeeld

Hoe kiezen we nu een start-basisoplossing?

- Basisvorm: in elke gelijkheidsvoorwaarde komt een variabele voor die coëfficient 1 in die voorwaarde heeft en coëfficient 0 in andere gelijkheidsvoorwaarden: hier OK!

Daarom hier toegelaten basisoplossing:
$x_4 = 10, x_5 = 8, x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Voorbeeld

Om nu een betere oplossing te zoeken, moeten we vergelijkingen herschrijven in equivalente basisvorm:

1. Je kan beide zijden van vergl. door getalen ($\neq 0$) delen
2. Je kan een veelvoud van een vergl. optellen bij elk van de andere vergl.

Voorbeeld

Om nu een betere oplossing te zoeken, moeten we vergelijkingen herschrijven in equivalente basisvorm:

1. Je kan beide zijden van vergl. door getalen ($\neq 0$) delen
2. Je kan een veelvoud van een vergl. optellen bij elk van de andere vergl.

Dit moeten we wel doen door de objectieffunctie te verhogen: welke variabele gaan we een basisvariabele van maken om $3x_1 + 2x_2 - 0.5x_3$ te verhogen?

- x_1
- x_2
- x_3

Voorbeeld

Om nu een betere oplossing te zoeken, moeten we vergelijkingen herschrijven in equivalente basisvorm:

1. Je kan beide zijden van vergl. door getalen ($\neq 0$) delen
2. Je kan een veelvoud van een vergl. optellen bij elk van de andere vergl.

Dit moeten we wel doen door de objectieffunctie te verhogen: welke variabele gaan we een basisvariabele van maken om $3x_1 + 2x_2 - 0.5x_3$ te verhogen?

- x_1
- x_2
- x_3

Het ligt voor de hand om de niet-basisvariabele positief te maken met de grootste positieve coëfficiënt: hier dus x_1

Voorbeeld

ALs je x_1 positief maakt, dan zullen de waarden van de basisvariabelen x_4 en x_5 veranderen: maar hoe groot kan je x_1 maken?

Voorbeeld

ALs je x_1 positief maakt, dan zullen de waarden van de basisvariabelen x_4 en x_5 veranderen: maar hoe groot kan je x_1 maken?
Kijken we naar

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Voorbeeld

ALs je x_1 positief maakt, dan zullen de waarden van de basisvariabelen x_4 en x_5 veranderen: maar hoe groot kan je x_1 maken?
Kijken we naar

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Dan mag x_1 maximaal $\frac{10}{4}$ worden, anders moet x_4 negatief worden.
Kijken we naar

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 8$$

Voorbeeld

ALs je x_1 positief maakt, dan zullen de waarden van de basisvariabelen x_4 en x_5 veranderen: maar hoe groot kan je x_1 maken?
Kijken we naar

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Dan mag x_1 maximaal $\frac{10}{4}$ worden, anders moet x_4 negatief worden.
Kijken we naar

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 8$$

Dan mag x_1 maximaal $\frac{8}{3}$ worden, anders moet x_5 negatief worden.
We kunnen x_1 dus maximaal tot $min(\frac{10}{4}, \frac{8}{3}) = \frac{10}{4}$ verhogen.

Voorbeeld

ALs je x_1 positief maakt, dan zullen de waarden van de basisvariabelen x_4 en x_5 veranderen: maar hoe groot kan je x_1 maken?
Kijken we naar

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

Dan mag x_1 maximaal $\frac{10}{4}$ worden, anders moet x_4 negatief worden.
Kijken we naar

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 8$$

Dan mag x_1 maximaal $\frac{8}{3}$ worden, anders moet x_5 negatief worden.
We kunnen x_1 dus maximaal tot $min(\frac{10}{4}, \frac{8}{3}) = \frac{10}{4}$ verhogen.
Als x_1 wordt verhoogd tot $\frac{10}{4}$ wordt x_4 op nul gezet: x_4 verlaat de basis voor x_1

Voorbeeld

Nu moeten we de gelijkheidsvoorwaarden herschrijven in de nieuwe basisvorm:

1. Deel beide zijden van $4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10$ door 4 om de coëfficient van $x_1 = 1$ te maken
2. Trekt resulterende vergl. $x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.25x_4 = 2.5$ drie keer af van $3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 8$
3. Hierbij krijg je : $-1.25x_2 - 2.75x_3 - 0.75x_4 + x_5 = 0.5$

We moeten ook de criteriumfuntie aanpassen

1. Substitueer $x_1 = 2.5 - 0.75x_2 - 0.25x_3 - 0.25x_4$ in $3x_1 + 2x_2 + 0.5x_3$

Dan bekom je

$$7.5 - 0.25x_2 - 1.25x_3 - 0.75x_4$$

Voorbeeld

We hebben dus nu:
Maximaliseer $7.5 - 0.25x_2 - 1.25x_3 - 0.75x_4$ onder

$$\begin{cases} x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.25x_4 + 0x_5 = 2.5 \\ 0.x_1 - 1.25x_2 - 2.75x_3 - 0.75x_4 + x_5 = 0.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \geq 0 \end{cases}$$

Dit heeft criteriumwaarde 7.5

Voorbeeld

We hebben dus nu:
Maximaliseer $7.5 - 0.25x_2 - 1.25x_3 - 0.75x_4$ onder

$$\begin{cases} x_1 + 0.75x_2 + 0.25x_3 + 0.25x_4 + 0x_5 = 2.5 \\ 0.x_1 - 1.25x_2 - 2.75x_3 - 0.75x_4 + x_5 = 0.5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0 \geq 0 \end{cases}$$

Dit heeft criteriumwaarde 7.5
Nu hebben alle niet-basisvariabelen een negatieve coëfficient zodat de waarden van de objectieffunctie zou verslechteren als je een van deze variabelen positief zou maken:
$\Rightarrow$ Deze basisoplossing is optimaal (want de variabelen moeten niet-negatief zijn!)

Oefening

Maximaliseer $3_x1 + 2x_2 + x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Oefening

Maximaliseer $3_x 1 + 2x_2 + x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 70 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Oplossing is $x_1 = 10, x_2 = 20, x_j = 0$ met criteriumwaarde $= 70$

Oefening 2

Maximaliseer $3x_1 + 4x_2$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 + 3x_2 \leq 180 \\ x_1 + x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Constructie basisoplossing

Voor geval dat het LP model $\geq$ of $=$ bijvoorwaarden heeft is de constructie van een startoplossing niet zo simpel als voor geval van alleen $\leq$ bijvoorwaarden.
Oplossing:

- Voor elke voorwaarde die geen $\leq$ voorwaarde is wordt een surplusvariabele ingevoerd
- Er wordt een nieuwe simplex probleem opgesteld die de som van surplusvariabelen minimaliseert
- Oplossing van extra probleem wordt dan als basisoplossing gekozen voor origineel probleem

Complexiteit

1. Stopt de simplex methode altijd na een eindig aantal iteraties?
2. Hoe snel groeit het aantal iteraties als het aantal bijvoorwaarden wordt verhoogd?

Complexiteit

1. Stopt de simplex methode altijd na een eindig aantal iteraties?
2. Hoe snel groeit het aantal iteraties als het aantal bijvoorwaarden wordt verhoogd?

Antwoorden:

1. Nee, simplex stopt niet altijd na een eindig aantal iteraties
2. Het benodigde iteraties kan exploderen (bv. tot 2^m aantal iteraties)

Dit komt in de praktijk wel maar heel zelden voor!

Complexiteit: stopt simplex?

Maximaliseer $0.75x_1 - 20x_2 + 0.5x_3 - 6x_4$ onder

$$\begin{cases} 0.25x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \leq 0 \\ 0.5x_1 - 12x_2 - 0.5x_3 + 3x_4 \leq 0 \\ x_3 \leq 1 x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Zal bij simplexmethode in een lus terecht komen die zich blijft herhalen en waarbij criteriumwaarde steeds dezelfde blijft.

Complexiteit: aantal bijvoorwaarden

Maximaliseer

$$\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} x_j$$

onder

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1}, i = 1 \ldots m$$

$$x_j \geq 0, j = 1 \ldots m$$

Zal simplex-methode 2^m iteraties nodig hebben.

Complexiteit: aantal bijvoorwaarden - praktijk

- Aantal iteraties meestal minder is dan $\frac{3}{2}m$
- Zelden groter dan $3m$

Praktijk: Total rekentijd stijgt grofweg als derde macht van het aantal bijvoorwarden: een LP probleem met 200 bijvoorwaarden gebruikt dus waarschijnlijk 8 keer meer rekentijd als gelijksoortig LP probleem met 100 bijvoorwaarden.

Simplex Tableau

Simplex tableau

Simplex algoritme:

1. Construeer een toegelaten basisoplossing
2. Bepaal uitgaande van de huidige basisoplossing een nieuwe basisoplossing die slechts 1 basisvariabele verschilt met de huidige basisoplossing. Daarom: maak een niet-basisvariabele positief en maak een van huidige basisvariabelen 0.
   - Criteriumwaarde moet verbeterd worden
   - Nieuwe oplossing moet toegelaten basisoplossing zijn
3. Herhaal totdat criteriumfunctie niet kan verbeterd worden

Simplex tableau

Simplex tableau is een visuele voorstelling (en iets overzichterlijker) dan de algebraïsche oplossingsmethode.
Neem als voorbeeld: Maximaliseer $x_1 + 2x_2$ onder

$$\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Simplex tableau

Simplex tableau is een visuele voorstelling (en iets overzichterlijker) dan de algebraïsche oplossingsmethode.
Neem als voorbeeld: Maximaliseer $x_1 + 2x_2$ onder

$$\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Zet om in basisvorm: Maximaliseer $x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ onder

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Simplex tableau

Maak van de objectieffunctie een vergelijking:
$z = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ en vul de vergelijkingen in de tabel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3

- Eerste kolom niet-basisvariabelen
- Laatste kolom rechterlid (RL)
- Afspraak: doelfunctie altijd bovenaan zetten

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3

Op dit moment is de oplossing:

$$x_3 = 2, x_4 = 2, x_5 = 3, x_1 = 0, x_2 = 0$$

Komt dus overeen met punt in de oorsprong

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_4	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3

In de rij met de doelfunctie, kies de kolom met de grootste & positieve waarde. Deze kolom heten we de sleutelkolom.

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL	TR
z	1	2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	0	2	${}^{2}/_{0} = 0$
x_4	0	1	0	1	0	2	${}^{2}/_{1} = 2$
x_5	1	1	0	0	1	3	${}^{3}/_{1} = 3$

We voegen een extra (tijdelijke) kolom toe : test ratio (TR): dit is de verhouding van RL met SK

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL	TR
z	1	2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	0	2	$^2/_0 = 0$
x_4	0	1	0	1	0	2	$^2/_1 = 2$
x_5	1	1	0	0	1	3	$^3/_1 = 3$

De basisvariabele die de basis verlaat is die met de kleinste strikt positieve test ratio. De rij van deze variabele noemen we de sleutelrij

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL	TR
z	1	2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	0	2	$^2/_0 = 0$
x_4	0	1	0	1	0	2	$^2/_1 = 2$
x_5	1	1	0	0	1	3	$^3/_1 = 3$

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL	TR
z	1	2	0	0	0	0	
x_3	1	0	1	0	0	2	$^2/_0 = 0$
x_2	0	1	0	1	0	2	$^2/_1 = 2$
x_5	1	1	0	0	1	3	$^3/_1 = 3$

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.
Zorg ervoor dat de coëfficient van de pivot $= 1$ en voor alle andere rijen in de kolom $= 0$. Hiervoor gebruik je de elementaire rijoperaties.

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	3

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.

- Rij 2 (R_2) en 3 (R_2)zijn ok.
- Van $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	0	0	-1	1	1

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.

- Rij 2 (R_2) en 3 (R_3)zijn ok.
- Van $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	2	0	0	0	0
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	0	0	-1	1	1

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.

- Rij 2 (R_2) en 3 (R_3)zijn ok.
- Van $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$
- $R1 \leftarrow R_1 - 2R_3$

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	-2	0	-4
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	0	0	-1	1	1

Noem de variabele die in de kolom staat het pivotelement. Deze wordt nu als basisvariabele gebruikt.

- Rij 2 (R_2) en 3 (R_3)zijn ok.
- Van $R_4 \leftarrow R_4 - R_3$
- $R1 \leftarrow R_1 - 2R_3$

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	-2	0	-4
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	0	0	-1	1	1

We hebben nu een oplossing:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 1$$

Met criteriumfunctie $= 4$ (Grafisch zie bord)

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	1	0	0	-2	0	-4
x_3	1	0	1	0	0	2
x_2	0	1	0	1	0	2
x_5	1	0	0	-1	1	1

Bij maximalisatieproblemen stopt het algoritme als de doelfunctie niet meer verbeterd kan worden, of dus als er geen positieve elementen meer zitten in de rij van de doelfunctie.
Hier is dat niet het geval, dus itererereren we verder (hier heeft x_1 nog een positieve coëfficiënt). Vul nu zelf eens de iteratie aan.

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	0	0	0	-1	-1	-5
x_3	0	0	1	1	-1	1
x_2	0	1	0	1	0	2
x_1	1	0	0	-1	1	1

- $R_2 \leftarrow R_2 - R_4$
- $R_1 \leftarrow R_1 - R4$

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	0	0	0	-1	-1	-5
x_3	0	0	1	1	-1	1
x_2	0	1	0	1	0	2
x_1	1	0	0	-1	1	1

We hebben nu als oplossing

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$$

Met als criterium 5.

Simplex tableau

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RL
z	0	0	0	-1	-1	-5
x_3	0	0	1	1	-1	1
x_2	0	1	0	1	0	2
x_1	1	0	0	-1	1	1

- Er zijn geen positieve elementen meer in de laatste rij
- Daarom kunnen we zeggen dat dit (een) optimale oplossing is!

Oefening 1

Maximaliseer $2x_1 + 5x_2$ onder

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Oefening 2

Maximaliseer $x_1 - 2x_2 - x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Oefening 3

Maximaliseer $3x_1 + 2x_2$ onder

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 \leq 21 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 39 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 33 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Oplossing is $\{6, 4.5, 10, 0, 0\}$ met criterium 27

Niet standaardvormen

Niet-standaardvorm

Wanneer het LP-model $\geq, =$ voorwaarden bevat is de startoplossing niet zo simpel:

$$\sum_{j}^{n} a_{ij}x_i + y_i \geq b_i, b_i > 0$$

- Grafisch: oorsprong buiten aanvaardbaar gebied
- We moeten dus een andere startoplossing bedenken

Voorbeeld

Maximaliseer $3x_1 + 5x_2 + 2x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0.5x_3 \geq 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Eerst wordt een surplusvariabele x_4 ingevoerd om het LP-model in de volgende gelijkwaardige standaardvorm te herschrijven:
Maximaliseer $3x_1 + 5x_2 + 2x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0.5x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Deze LP-formulering is niet in de basisvorm: waarom?

Voorbeeld

- Basisvorm: in elke gelijkheidsvoorwaarde komt een variabele voor die coëfficient 1 in die voorwaarde heeft en coëfficient 0 in andere gelijkheidsvoorwaarden.

Maximaliseer $3x_1 + 5x_2 + 2x_3$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0.5x_3 - x_4 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

We moeten kunstmatige variabelen toevoegen.

- In de standaardvorm wordt aan elke gelijkheidsvoorwaarde die geen $\leq$ is, een kunstmatige variabele toegevoegd.
  - Deze krijgt coëfficiënt 1 in de voorwaarde
  - Deze krijgt coëfficient 0 in de andere voorwaarden

Daarna beshouwen we een hulpmodel met de nieuwe lineaire gelijkheidsvoorwaarden en met de criteriumfunctie de som van de kunstmatige variabelen.
Minimaliseer $u_1 + u_2$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0.5x_3 - x_4 + u_1 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + u_2 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

Voorbeeld

Minimaliseer $u_1 + u_2$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 0.5x_3 - x_4 + u_1 = 7 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 + u_2 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2 \geq 0 \end{cases}$$

- LP model is in basisvorm
- Als oorspronkelijke LP model een toegelaten oplossing heeft, moet het hulpmodel een oplossing hebben met $u_1 = u_2 = 0$ Waarom?
- Hulpmodel los je op met klassieke methode
- De waarden voor de variabelen x_1, x_2, x_3, x_4 van de optimale basisoplossing vormen dan een toegelaten startoplossing voor de standaardvorm van oorspronkelijke probleem.

Oefening

Maximaliseer $x_1 + x_2$ onder

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Geheeltallig lineair programmeren

Geheeltallig lineair programmeren

Een geheeltallig LP-probleem is een lineair programmeringsprobleem waarin sommige of alle belslissingsvariabelen geheeltallig moeten zijn

zuiver ILP alle beslissingsvariebelen integer: zuiver ILP

gemengd ILP niet alle beslissingsvariabelen geheel

binair ILP alle beslissingsvariabelen binair

Geheeltallig lineair programmeren

Wanneer gebruiken:

- Bij *als-dan* voorwaarden: als product A gemaakt wordt, dan moet product B ook gemaakt worden
- Deze variabelen kunnen gemodelleerd worden als geheeltallige variabelen die alleen de waarden 0 en 1 kunnen aannemen.
- Combinatorische optimaliseringsproblemen als binaire ILP's gemoddelleerd worden

Geheeltallig lineair programmeren

Nadeel bij ILP: de rekentijd om een geheeltallig programmeringsprobleem is vele malen groter dan de rekentijd voor een continu ILP van dezelfde omvang.
Sterker nog:

- Discrete optimaliseringsproblemen zijn meestal NP-compleet: voor het probleem bestaat geen polynomiaal-tijds algoritme maar de rekentijd neemt exponentieel snel toe in probleemgrootte.

Vaak hangt de rekentijd af van:

1. Aantal geheeltallige variabelen
2. De gekozen formulering (soms zijn meerdere formuleringen mogelijk)

Geheeltallig lineair programmeren

Daarom: LP-relaxatie

De LP relaxatie is het LP-probleem waarbij je de geheeltalligheidseisen laat vallen

- $x_j \in \{0, 1\}$ wordt verzwakt tot $0 \leq x_j \leq 1$

Principes

De maximale criteriumwaarde van het oorspronkelijke geheeltallige LP-probleem is altijd kleiner dan of gelijk aan de optimale criteriumwaarde van de LP relaxatie

- Eenvoudig: gebied toegelaten oplossingen voor de LP-relaxatie is groter dan het gebied van de toegelaten oplossingen van het oorspronkelijke geheeltallige probleem.

Principes

De maximale criteriumwaarde van het oorspronkelijke geheeltallige LP-probleem is altijd kleiner dan of gelijk aan de optimale criteriumwaarde van de LP relaxatie

- Eenvoudig: gebied toegelaten oplossingen voor de LP-relaxatie is groter dan het gebied van de toegelaten oplossingen van het oorspronkelijke geheeltallige probleem.

Indien de optimale oplossing van de LP-relaxatie geheel is, dan is dit meteen ook de optimale oplossing van het originele ILP.

Principes

De criteriumwaarde van een toegelaten oplossing voor het ILP geeft een ondergrens voor de maximale criteriumwaarde van het ILP

- Afronding van de optimale oplossing van de LP relaxatie kan leiden tot een toegelaten oplossing voor het oorspronkelijke ILP en dus tot een ondergrens voor de maximale criteriumwaarde van het ILP.
- Als die voldoende dicht bij de optimale oplossing ligt, is men daar in de praktijk vaak tevreden mee.

Voorbeeld ILP

Stel dat in een bepaalde regio met 5 steden brandweercentrales gevestigd moeten worden. Elke stad is een potentiële vestigingsplaats voor een brandweercentrale. Het is vereist dat elke stad binnen 10 minuten reistijd ligt van een brandweercentrale. In tabel 123 worden de reistijden in minuten tussen elk paar steden gegeven.
Wat is het minimaal aantal benodigde brandweercentrales en waar zouden deze gevestigd moeten worden?

Voorbeeld ILP

Van \Naar	Stad 1	Stad 2	Stad 3	Stad 4	Stad 5
Stad 1	0	11	12	9	15
Stad 2	11	0	14	12	10
Stad 3	9	8	0	15	12
Stad 4	10	12	15	0	13
Stad 5	17	12	10	13	0

Voorbeeld ILP

Voor elke stad $j = 1, \ldots, 5$ maken we een beslissingsvariabele

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ als een brandweercentrale in stad } j \text{ gebouwd wordt} \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

Voorbeeld ILP

Voor elke stad $j = 1, \ldots, 5$ maken we een beslissingsvariabele

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ als een brandweercentrale in stad } j \text{ gebouwd wordt} \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

Doel: minimaliseer

$$\sum_{j=1}^{5} x_j$$

Voor elke stad i geeft N_i de verzameling van steden aan met een reistijd van 10 minuten of minder naar stad i. (Bv. $N_i = \{1, 3, 4\}$) Dan moet dus:

Voorbeeld ILP

Voor elke stad $j = 1, \ldots, 5$ maken we een beslissingsvariabele

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ als een brandweercentrale in stad } j \text{ gebouwd wordt} \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

Doel: minimaliseer

$$\sum_{j=1}^{5} x_j$$

Voor elke stad i geeft N_i de verzameling van steden aan met een reistijd van 10 minuten of minder naar stad i. (Bv. $N_i = \{1, 3, 4\}$)
Dan moet dus:

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq 1$$

Dit zorgt ervoor dat stad i binnen 10 minuten van een brandweercentrale ligt.

Voorbeeld

We vinden dus: Minimaliseer $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ onder

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_3 + x_5 \geq 1 \\ x_4 + x_1 \geq 1 \\ x_5 + x_2 \geq 1 \\ x_i \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Oplossing:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 2$$

Oplossingsmethodes (1)

Idee: oplossenvan LP-relaxatie en afronden

- Afronding ligt niet zeker in aanvaardbaar gebied
- Afgeronde oplossing is niet langer optimaal

Oplossingsmethodes (2)

Idee: opsommen en berekenen van alle oplossingen

- Alle oplossingen één voor één overlopen en optimale oplossing bijhouden
- Enkel bruikbaar voor kleine problemen

Branch and Bound

Branch and Bound: totale verzameling van toegelaten oplossingen splitsen in steeds kleinere deelverzamelingen en tijdens dit proces proberen bepaalde deelverzamelingen te elimineren voor verder onderzoek aan de hand van onder- en bovengrenzen.

- We beschouwen hier maximalisatieprobleem
- Aan elke deelverzameling van oplossingen is een bovengrens gekoppeld: een getal zodat de criteriumwaarde van elke toegelaten oplossing in de deelverzameling kleiner dan of gelijk is aan dat getal.
- De ondergrens is de criteriumwaarde van de beste toegelaten oplossing die tot dan bekend is.

Branch and Bound

Nut bovengrens en ondergrens:

- Stel A deelverzameling met bovengrens $\overline{a}$
- Beste ondergrens op dat moment $\overline{x}$
- Als $\overline{a} < \overline{x} \Rightarrow$ kan je A elimineren want

Branch and Bound

Nut bovengrens en ondergrens:

- Stel A deelverzameling met bovengrens $\overline{a}$
- Beste ondergrens op dat moment $\overline{x}$
- Als $\overline{a} < \overline{x} \Rightarrow$ kan je A elimineren want
- elke criteriumwaarde van elke toegelaten oplossing in A zal $< \overline{x}$

Branch and Bound: methode

1. Kies een probleem en splits het in kleinere deelproblemen: de branching stap
2. Bereken voor elk deelprobleem een grens via LP-relaxatie: de bounding stap
3. Doorgrond elk deelprobleem: problemen die aan een van de volgende testen voldoen moeten niet verder uitgewerkt worden:
    1. De bovengrens voor het probleem is hoogstens $Z*$ (de waarde van de huidig beste oplossing). Dus hier kunnen geen betere oplossingen gevonden worden dan diegene die we al hebben
    2. De LP -relaxatie van het probleem heeft geen aanvaardbare oplossingen
    3. De optimale oplossing is geheel (voor die variabelen die geheeltalligheidsrestricties hebben). Eventueel kan hier dus een betere waarde voor $Z*$ gevonden worden. In dit geval wordt test 1 herhaald voor alle openstaande deelproblemen

Branch and Bound: Knapzakprobleem

Maximaliseer:

$$60x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 10x_6 + 3x_7$$

onder

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 1.4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 \leq 11 \\ x_j \in \{0, 1\}, j = 1 \ldots 7 \end{cases}$$

Branch and Bound: Knapzakprobleem

Maximaliseer:

$$60x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 10x_4 + 20x_5 + 10x_6 + 3x_7$$

onder

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 1.4x_4 + 3x_5 + 3x_6 + x_7 \leq 11 \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1 \ldots 7 \end{cases}$$

Of dus algemeen: Maximaliseer

$$\sum_i c_i x_i$$

onder

$$\begin{cases} \sum_i a_i x_i \leq b \\ 0 \leq x_i \leq u_j, j = 1 \ldots n \\ x_j \in \{0,1\}, j = 1 \ldots 7 \end{cases}$$

Branch and Bound: Knapzakprobleem

Je hetb n artikelen die in een rugzak kunnen worden meegenomen, waarbij elk exemplaar van artikel j een waarde c_j heeft en een beslag a_j legt op de capaciteit b van een de rugzak.

Branch and Bound: Knapzakprobleem - LP relaxatie

Je kan de variabelen ordenen zodat:

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \cdots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

Variabelen geordend in afnemende winst per eenheid capaciteitsopslag.
Dan is de optimale continue oplossing

$$\overline{x_1} = min(u_1, \frac{b}{a_1}), \overline{x_2} = min(u_2, \frac{b}{a_2}), \ldots$$

Voor dit voorbeeld:

$$\overline{x_1} = 1, \overline{x_2} = 1, \overline{x_3} = \frac{3}{4}, \overline{x_4} = 0, \overline{x_5} = 0, \overline{x_6} = 0,$$

Met criteriumwaarde $= 150$

Branch and Bound: Knapzakprobleem - LP relaxatie

- Getalwaarde 150 is bovengrens voor de totale verzameling van toegelaten oplossing voor ILP
- Nu kunnen we een toegelaten startoplossing vinden door:
  - stel overeenkomstig de volgende van $\frac{c_j}{a_j}$ zoveel mogelijk van de variabelen $x_i = 1$ zonder dat de capaciteitsrestrictie geschonden wordt.

Dit geeft startoplossing

$$x_1^0 = 1, x_2^0 = 1, x_3^0 = 0, x_4^0 = 1, x_5^0 = x_6^0 = 0, x_7^0 = 1$$

Branch and Bound: Knapzakprobleem - branching

- Deze toegelaten oplossing geeft criteriumwaarde 133 en is beginwaarde van de ondergrens.
- Nu moeten we opslitsen op grond van x_3 want die heeft geen gehele waarde

Algemeen:

- Bekijk de oplossing van de LP-relaxatie van het huidige deelprobleem en stel x_j de eerste beslissingsvariabele die niet aan de geheeltalligheidseis voldoet en zijn waarde x_j^*. Beschouw dan twee deelproblemen:
  1. Een met eis $x_j <\leq \lfloor x_j^* \rfloor$
  2. Een met de eis $x_j \geq \lceil x_j^* \rceil$

Branch and Bound: Knapzakprobleem - branching

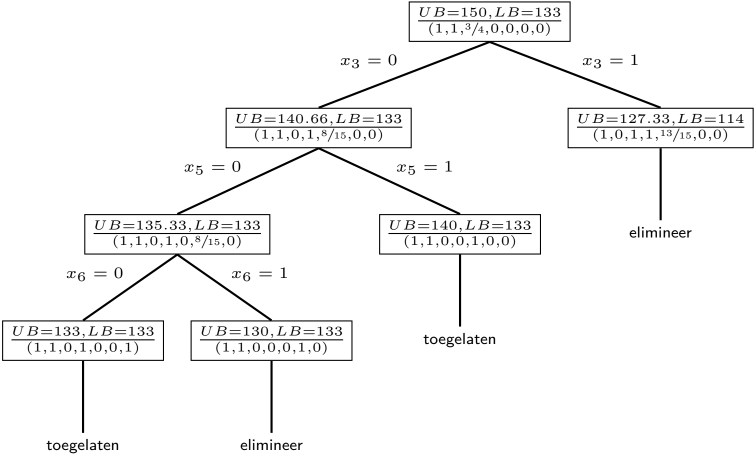
We hebben dus twee deelverzamelingen

1. Een deelverzameling met alle toegelaten oplossingen $(x_1 \ldots x_7)$ met x_3 op 0 en andere variabelen vrij
2. Een deelverzameling met alle toegelaten oplossingen $(x_1 \ldots x_7)$ met x_3 op 1 en andere variabelen vrij

Je vindt opnieuw een vorm van het knapzakprobleem en laat zich gemakkelijk oplossing via LP-relaxatie.

We passen een last-in-first-out strategie toe waarbij de diepte in gegaan wordt bij het splitsen van de deelverzamelingen

Branch and Bound: Knapzakprobleem - branching



Branch and Bound - Oplossing

- De ondergrens LB blijft ongewijzigd tot in node 6 (nummer zelf correct) een verbeterde toegelaten oplossing met criteriumwaarde 14 wordt gevonden

De brand-and-bound methode leidt na 7 stappen tot conclusie

$$x_1^* = x_2^* = x_5^* = 1, x_3^* = x_4^* = x_6^* = x_7^* = 0$$

Met als maximale criteriumwaarde 140

Branch and Bound - Bedenkingen (1)

- Algoritme stopt als er geen op te splitsen deelproblemen zijn
- De ondergrens is dan ook de oplossing van het probleem
- Indien geen ondergrens $\Rightarrow$ geen oplossing
- Software laat toe mid-berekeningen te stoppen als ondergrens en bovengrens voldoende dicht bij elkaar liggen: de criteriumwaarde van de toegelaten oplossing waarmee je stopt kan dan slecht weinig verschillen van de optimale criteriumwaarde

Branch and Bound - Bedenkingen (2)

- Algemeen explodeert de rekentijd als het aantal geheeltallige variabelen groot wordt
- Bv. Knapzakprobleem: als aantal variabelen n is, dan moet je in het splitsingsproces in het meest ongunstige geval 2^n deelverzamelingen beschouwen. (Neemt dus exponentieel toe)
- Daarom wordt vaak gegrepen naar heuristische oplossingsmethode