HoGent

BEDRIJF
EN
ORGANISATIE

POD II - Deel III: Operationeel Onderzoek

Jens Buysse (Jens.Buysse@hogent.be)
Harm De Weirdt (Harm.DeWeirdt@hogent.be)
Wim Goedertier (Wim.Goedertier@hogent.be)
Stijn Lievens (Stijn.Lievens@hogent.be)
Lieven Smits (Lieven.Smits@hogent.be)

Deel III: Operationeel Onderzoek

Inhoud

Wat is Operationeel Onderzoek

Operationeel Onderzoek:

- is technische discipline;
- heeft als doel het ondersteunen van beslissingen;
- op een pragmatische maar wetenschappelijk onderbouwde manier;
- wordt geïmplementeerd in software.

Operationeel Onderzoek: Definitie

Operational research is a scientific method of providing executive departments with a quantitative basis for decisions regarding the operations under their control.

- "departments": militaire afdelingen
- "operations": militaire operaties

Onderzoeksvragen tijdens WO2

- Wat is de optimale grootte van een konvooi vrachtschepen en hoeveel begeleidende marineschepen moet men meesturen wannneer men het effect van de aanvallen van de vijandelijke onderzeeërs zo klein mogelijk wil maken?
- Op welke manier moeten zeemijnen worden gelegd als men de kans op het treffen van een door een mijnenveld varend vijandelijk schip zo groot mogelijk wil maken?
- Op welke plaatsen moet men bommenwerpers van extra bepantsering voorzien? Dit deed men door het analyseren van de kogelgaten in bommenwerpers wanneer die terug op de basis kwamen.

Huidige Toepassingen

- plannings- en scheduling problemen (supply chain analyse)
- de optimalisatie van layout van bv. magazijnen en productiehallen
- het ontwerpen van complexe (telecom) netwerken
- het ontwerpen van chips
- ...

Wiskundige Vorm van een OR Probleem

Heel wat vraagstukken binnen operationeel onderzoek kunnen geformuleerd worden als:

> *Vind het optimum (maximum of minimum) van een bepaalde functie terwijl de onafhankelijke beslissingsvariabelen binnen bepaalde grenzen blijven.*

Gebruikte oplossingsmethode hangt af van volgende factoren:

1. Is de functie die moet geoptimaliseerd worden lineair of niet?
2. Kunnen de beslissingsvariabelen reële of enkel gehele of binaire waarden aannemen?
3. Zijn de beperkingen lineair of niet? Gaat het over "harde" of "zachte" beperkingen?
4. Bij het beslissen welke methode men zal gebruiken dient men ook rekening te houden met de kwaliteit van de informatie waarover men beschikt.

Modelbouwcyclus

Volgende stappen worden typisch (iteratief) doorlopen om een probleem aan te pakken:

1. specificeer het probleem;
2. stel het wiskundig model op;
3. los op én interpreteer;
4. vergelijk met de realiteit;
5. stuur indien nodig het model en/of probleemomschrijving bij.

Modelbouwcyclus: Specificeer het Probleem

Praktische OR-problemen zijn vaak nogal vaag en onduidelijk geformuleerd.

- Zorg voor duidelijke probleemomschrijving.
  - Stel juiste doelen voorop.
  - Begrijp wat de restricties zijn en wat er mogelijk is.
  - Relatie tussen onderzoeksonderwerp en andere delen organisatie.
  - ...
- Gebruik kwantitatieve grootheden (lengte, oppervlakte, ratio, ...) bij het beschrijven van het probleem.

  Dit is een cruciale stap: het is immers zeer moeilijk om het "juiste" antwoord te verkrijgen uit het "verkeerde" probleem!

Modelbouwcyclus: Stel het Wiskundig Model op

- Kwantitatieve grootheden worden beslissingsvariabelen.
- Stel doelfunctie op in functie van deze beslissingsvariabelen.
- Typisch moeten de beslissingsvariabelen ook aan een aantal restricties voldoen.

Steeds is er de afweging:

- Eenvoudig en gemakkelijk op te lossen model komt misschien minder goed overeen met de realiteit.
- Meer gedetailleerd model vaak moeilijker op te lossen.

Modelbouwcyclus: Los op en Interpreteer

Na oplossen bekijkt men vaak het volgende:

- Ligt de oplossing op één van de restricties. Wat is de betekenis hiervan?
- Voer SENSITIVITEITSANALYSE uit, i.e. wat is effect op de oplossing bij verandering van de parameters.

Modelbouwcyclus: Vergelijk met de Realiteit

- Is de oplossing realistisch?
- Krijgt men na implementatie de verwachte resultaten?

Modelbouwcyclus: Stuur bij Indien Nodig

Indien oplossing niet overeenkomt met realiteit:

- stuur model bij (stap 2) of;
- stuur probleemomschrijving bij (stap 1).

Boer Frans: Probleemstelling

Boer Frans is een landbouwer en roept jouw hulp in om de optimale benutting van zijn land te bepalen. Boer Frans heeft in totaal 20 hectare grond ter beschikking en hij heeft de kennis en het materiaal om tarwe en/of gerst te verbouwen. De verkoopprijzen voor tarwe en gerst worden respectievelijk gegeven door 25 EUR en 20 EUR per 100 kg. De opbrengsten voor tarwe en gerst zijn respectievelijk 1000 kg en 1500 kg per hectare. De bovenstaande gegevens kunnen samengevat worden in de volgende tabel:

Gewas	Verkoopprijs	Opbrengst
Tarwe	25 EUR/100 kg	1000 kg/ha
Gerst	20 EUR/100 kg	1500 kg/ha

Boer Frans: Probleemstelling

Zowel tarwe en gerst hebben nood aan meststoffen en pesticiden, elk met hun eigen aanbevolen hoeveelheid. Door de milieuwetgeving mag boer Frans echter (gemiddeld) over zijn land hoogstens een bepaalde hoeveelheid mest en pesticiden gebruiken. De gegevens m.b.t. de meststoffen en pesticiden worden samengevat in de onderstaande tabel.

Wat?	Nodig tarwe	Nodig gerst	Prijs	Maximum
Bemesting	10 kg/ha	20 kg/ha	2 EUR/kg	15 kg/ha
Pesticide	2 kg/ha	1kg/ha	5 EUR/kg	1.8 kg/ha

Boer Frans: Opstellen Model

Definieer twee beslissingsvariabelen x_t en x_g met de volgende betekenis:

$$x_t\text{: aantal hectare tarwe}$$
$$x_g\text{: aantal hectare gerst.}$$

We stellen een formule op voor de winst:

$$\text{winst} = \text{opbrengst} - \text{kosten.}$$

Voor de opbrengst vinden we:

$$\text{opbrengst} = 1000x_t \times \frac{25}{100} + 1500x_g \times \frac{20}{100} = 250x_t + 300x_g.$$

Boer Frans: Opstellen Model

De kosten bestaan uit de aankoopkosten voor de meststoffen en de pesticiden. Benodigde hoeveelheid (in kg) voor meststof en pesticiden wordt gegeven door:

$$\text{meststoffen} = 10x_t + 20x_g \qquad \text{pesticiden} = 2x_t + x_g.$$

De kosten (in EUR) worden m.a.w. gegeven door:

$$\begin{aligned}
\text{kosten} &= \text{meststoffen} \times 2 + \text{pesticiden} \times 5. \\
&= (10x_t + 20x_g) \times 2 + (2x_t + x_g) \times 5 \\
&= 30x_t + 45x_g.
\end{aligned}$$

Alles samenvoegen levert als functie voor de winst:

$$\text{winst} = 220x_t + 255x_g.$$

Boer Frans: Opstellen Model

Er zijn beperkingen die ervoor zorgen dat boer Frans niet oneindig rijk kan worden:

- Slechts 20 hectare land:

$$x_t + x_g \leq 20.$$

- Beperking op gebruik meststoffen:

$$10x_t + 20x_g \leq 300.$$

- Beperking op gebruik pesticiden:

$$2x_t + x_g \leq 36.$$

Tenslotte is het fysisch onmogelijk om een negatief aantal hectare te telen van een gewas:

$$x_t \geq 0 \quad \text{en} \quad x_g \geq 0.$$

Boer Frans: Finaal Optimalisatieprobleem

Samenvattend moet het volgende optimalisatieprobleem opgelost worden:

$$\max D(x_t, x_g) = 220x_t + 255x_g$$

onder de beperkingen:

$$\begin{cases} x_t + x_g \leq 20 & \text{landbeperking} \\ 10x_t + 20x_g \leq 300 & \text{mestbeperking} \\ 2x_t + x_g \leq 36 & \text{pesticidebeperking} \end{cases}$$

en waarbij ook de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_t \geq 0 \quad \text{en} \quad x_g \geq 0.$$

Boer Frans: Vereenvoudigingen

- De werkuren zijn niet in het model opgenomen, m.a.w. boer Frans heeft tijd zat.
- Er wordt geen rekening gehouden met "economies of scale".
- Er wordt vanuit gegaan dat de opbrengstprijzen perfect gekend zijn.
- Er wordt geen rekening gehouden met het verhoogd risico dat monocultuur met zich meebrengt. Dit probleem kan eventueel opgevangen worden door een "strategische mix"-beperking toe te voegen.
- We bemesten steeds precies de aanbevolen hoeveelheid.
- Er werd aangenomen dat voor de beperking op pesticide en mest het gemiddelde over de totale oppervlakte mag genomen worden.
- ...

Boer Frans: Oplossing

Optimale oplossing van het probleem is:

$$x_t = 10 \quad \text{en} \quad x_g = 10 \quad \text{met bijhorende winst } D = 4750.$$

Zijn alle beperkingen voldaan?

$$\begin{cases} x_t + x_g = 20 \leq 20 & \text{landbeperking is actief} \\ 10x_t + 20x_g = 300 \leq 300 & \text{mestbeperking is actief} \\ 2x_t + x_g = 30 \leq 36 & \text{pesticidebeperking is niet actief} \end{cases}$$

Voor bepaalde beperkingen zijn linker- en rechterlid gelijk. Deze beperkingen worden de ACTIEVE BEPERKINGEN genoemd.

Boer Frans: Interpretatie

De optimale verhouding wordt gegeven door 10 hectare tarwe en 10 hectare gerst.

Hoe winst verhogen?

- Zoek zaaigoed met lagere bemestingsbehoefte (want mestbeperking is actief).
  - 10% minder bemesting: $x_t = 6.667$ en $x_g = 13.333$ en winst wordt 4933 EUR.
  - 10% minder pesticide: x_t en x_g ongewijzigd en de winst wordt 4765 EUR (omdat er minder kosten worden gemaakt).

Oefening 1

Een bedrijf vervaardigt twee soorten broeken, type A en type B. De stof van A-broeken kost 25 EUR per broek, die van de B-broeken 20 EUR per broek. Een arbeider werkt 60 minuten aan een A-broek, 20 minuten aan een B-broek. De verkoopprijzen bedragen respectievelijk 95 EUR en 60 EUR per broek. Het bedrijf heeft 8 arbeiders in dienst die maximaal 8 uur per dag werken aan 30 EUR per uur. Verder zijn er nog 2400 EUR vaste kosten per dag. Technische werkloosheid is niet mogelijk.Uit marktonderzoek blijkt dat van de A-broeken ten hoogste 60 stuks per dag verkocht kunnen worden, en van de B-broeken hoogstens 100 stuks per dag. Per dag zijn er ook ten hoogste 120 ritssluitingen beschikbaar.

Oefening 1: Vervolg

Hoeveel broeken van elk type moeten er geproduceerd worden om een zo groot mogelijke winst te maken? Beantwoord hiertoe onderstaande vragen.

1. Maak van dit probleem een wiskundig model. Voor de eenvoud mag je veronderstellen dat "fractionele" broeken mogelijk zijn.
2. Geef een aantal vereenvoudigingen die aanwezig zijn in dit model.
3. Geef de optimale oplossing (bv. door gebruik te maken van Excel) en interpreteer het resultaat.

Oefening 2

Een bank heeft 100 000 euro beschikbaar om te investeren gedurende het huidige jaar. De financiële analisten van de bank hebben de volgende investeringsmogelijkheden geselecteerd: bedrijfsleningen, persoonlijke leningen, preferente aandelen, gewone aandelen en staatsobligaties. Het jaarlijkse rendement van elke type investering wordt geschat op 12%, 17%, 10.5%, 11.5% en 9% respectievelijk. Om de risico's te reduceren hebben de analisten de volgende restricties opgelegd voor de portefeuille van de bank.

1. In de leningen, noch in de aandelen mag meer dan 50% van beschikbare bedrag worden geïnvesteerd.
2. De investering in staatsobligaties moet tenminste gelijk zijn aan 30% van de investering in leningen.
3. De persoonlijke leningen mogen hooguit 40% voor hun rekening nemen van de totale investering in de leningen.

Oefening 2: Vervolg

Hoe moet de bank zijn geld investeren opdat het jaarlijke rendement op de portefeuille gemaximaliseerd wordt? Stel in eerste instantie het wiskundig model op voor dit probleem. Gebruik dan Excel (of een ander softwarepakket) om het probleem op te lossen.

Oefening 3

Een vrachtvliegtuig beschikt over drie compartimenten om vracht te laden: vooraan, midden en achteraan. Elk compartiment heeft de volgende restricties qua gewicht en volume dat er kan in geladen worden:

Compartiment	Max gewicht (ton)	Max volume (m^3)
vooraan	10	6800
midden	16	8700
achteraan	8	5300

Om het evenwicht van het vliegtuig te bewaren moet het gewicht van de cargo in elk compartiment steeds in dezelfde verhouding blijven als wanneer elk compartiment volledig was geladen. Het middelste compartiment moet bv. steeds precies dubbel zo veel gewicht bevatten als het achterste compartiment.

Oefening 3: Vervolg

Er zijn vier verschillende types lading beschikbaar. Deze types lading zijn zodanig dat er willekeurige fracties van kunnen meegenomen/aanvaard worden. De eigenschappen van deze types staan in de tabel hieronder opgesomd. De kolom "Gewicht" geeft aan hoeveel ton er van elk type beschikbaar is.

Lading	Gewicht (ton)	Volume (m^3/ton)	Winst (EUR/ton)
L_1	18	480	310
L_2	15	650	380
L_3	23	580	350
L_4	12	390	285

Oefening 3: Vervolg

Je taak is om te bepalen hoeveel van elke lading moet worden meegenomen én hoe deze lading moet verdeeld worden over de drie compartimenten om de winst te maximaliseren.
Stel hiertoe eerst het wiskundig model op. Gebruik vervolgens een softwarepakket om de optimale oplossing van dit probleem te bepalen.

Inleiding

Veel problemen binnen het gebied van operationeel onderzoek zijn van de vorm: optimaliseer een *lineaire* doelfunctie waarbij de beslissingsvariabelen moeten voldoen aan een aantal *lineaire* restricties en waarbij de beslissingsvariabelen *niet-negatief* moeten zijn.

Lineaire Functie?

Definitie

We zeggen dat een reële functie f LINEAIR is in de veranderlijken x_1 t.e.m. x_n wanneer f de volgende vorm aanneemt:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

waarbij de coëfficiënten c_i ($i \in \{0, 1, \ldots, n\}$) reële getallen zijn.

Bv.

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + 2x_2 + 5x_3$$

is lineair terwijl

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 + 2x_2^2 + 5x_3$$

niet lineair is in de veranderlijken x_1, x_2 en x_3.

Lineaire Beperking?

Definitie

We spreken over een LINEAIRE BEPERKING *of* LINEAIRE RESTRICTIE *wanneer die van één van de volgende vormen is:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b,$$

of

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b,$$

of

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

waarbij de a_i (met $i \in \{1, \ldots, n\}$) en b reële getallen zijn.

Definitie LP-Probleem

Definitie

Een LP-PROBLEEM *bestaat erin om een* ***lineaire doelfunctie*** *in* n ***beslissingsvariabelen*** *te optimaliseren onder een verzameling van* m ***lineaire restricties*** *waarbij bovendien alle beslissingsvariabelen* ***niet-negatief*** *moeten zijn.*

Opmerking: Optimaliseren betekent zowel minimaliseren als maximaliseren.

Voorbeeld LP-Probleem: Boer Frans

Het "boer Frans" probleem is een LP-probleem.

$$\max D(x_t, x_g) = 220x_t + 255x_g$$

onder de beperkingen:

$$\begin{cases} x_t + \quad x_g \leq 20 & \text{landbeperking} \\ 10x_t + 20x_g \leq 300 & \text{mestbeperking} \\ 2x_t + \quad x_g \leq 36 & \text{pesticidebeperking} \end{cases}$$

en waarbij ook de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_t \geq 0 \quad \text{en} \quad x_g \geq 0.$$

Nog een LP-Probleem

$$\max D(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 6. \end{cases}$$

De niet-negativiteitsvoorwaarden zijn van kracht, of anders gezegd:

$$x_j \geq 0, \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Toepasbaarheid Grafische Oplossingsmethode

De grafische oplossingsmethode is enkel van toepassing op LP-problemen met **twee** (of eventueel drie) **beslissingsvariabelen**.

Wij beschouwen voor de grafische oplossingsmethode enkel LP-problemen met twee beslissingsvariabelen.

Stappen in de Grafische Oplossingsmethode

De grafische oplossingmethode bestaat uit de volgende stappen:

1. Teken het aanvaardbaar gebied.
2. Teken een (willekeurige) doelfunctierechte en verschuif deze (evenwijdig) in de "goede" richting om uit te vissen waar het optimum wordt bereikt.
3. Een optimum (als het bestaat) wordt steeds bereikt in een hoekpunt. Bepaal de coördinaten van dit hoekpunt door het stelsel lineaire vergelijkingen op te lossen.
4. Rapporteer de gevonden oplossing.

Grafische Oplossingsmethode voor Probleem "Boer Frans"

We tekenen het aanvaardbaar gebied:

- De niet-negativiteitsvoorwaarden zorgen ervoor dat we enkel het **eerste kwadrant** moeten beschouwen.
- Beschouw de beperking m.b.t. beschikbare oppervlakte:

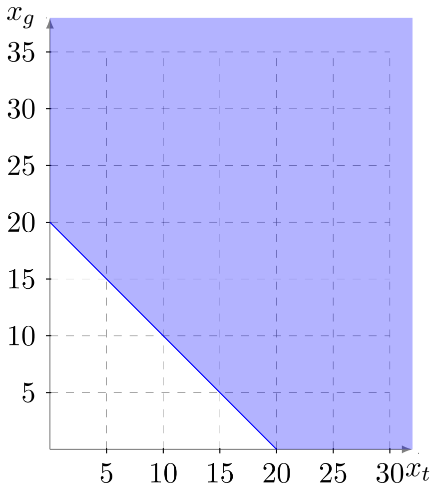
$$x_t + x_g \leq 20.$$

Zet deze om naar een *gelijkheid*:

$$x_t + x_g = 20.$$

Dit is de *vergelijking van een rechte in het* (x_t, x_g)*-vlak*! Aan de ene "kant" is $x_t + x_g > 20$ terwijl aan de andere kant geldt dat $x_t + x_g < 20$. Bepaal de goede kant door voor een (willekeurig) punt te controleren of de ongelijkeid $x_t + x_g < 20$ voldaan is of niet.

Eerste Restrictie: “Slechte” Kant Gekleurd



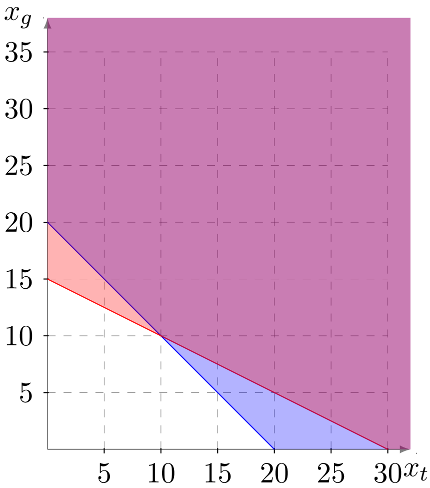
Herhalen voor Andere Restricties

We herhalen dit proces, nl.

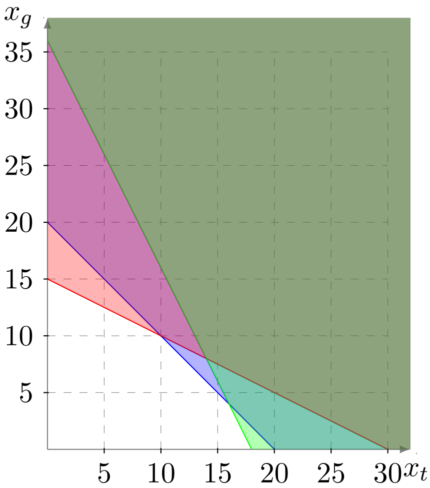
1. Zet om naar gelijkheid.
2. Teken de rechte.
3. Vind de "goede" kant van de rechte

nu voor de twee andere restricties.

Tweede Restrictie: $10x_t + 20x_g \leq 300$



Derde Restrictie: $2x_t + x_g \leq 36$



Aanvaardbaar Gebied: Conclusie

De aanvaardbare combinaties van x_t en x_g vindt men in het niet-gearceerde deel op voorgaande figuur én op de rand van dit niet-gearceerde deel.

Maximale Winst?

Kan Boer Frans 2200[1] EUR winst maken?
De combinaties van x_t en x_g waarvoor 2200 EUR winst wordt gemaakt worden gegeven door:

$$220x_t + 255x_g = 2200.$$

Dit is opnieuw de vergelijking van een rechte in het (x_t, x_g)-vlak én deze rechte bevat punten van het aanvaardbaar gebied.
Dit betekent dat boer Frans 2200 EUR winst kan maken!

[1] "Willekeurig" gekozen bedrag.

Maximale Winst?

Kan Boer Frans 4000 EUR winst maken? Combinaties van x_t en x_g met 4000 EUR winst:

$$220x_t + 255x_g = 4000.$$

Deze rechte is **evenwijdig** aan de vorige!

Maximale winst?

Alle DOELFUNCTIERECHTEN, i.e. rechten van de vorm

$$220x_t + 255x_g = D, \tag{1}$$

zijn **evenwijdig** met elkaar.
Verschuif de doelfunctierechte totdat deze nog nét een aanvaardbare combinatie van x_t en x_g bevat. In ons geval wordt dit bereikt bij het snijpunt van

$$x_t + x_g = 20,$$

en

$$10x_t + 20x_g = 300.$$

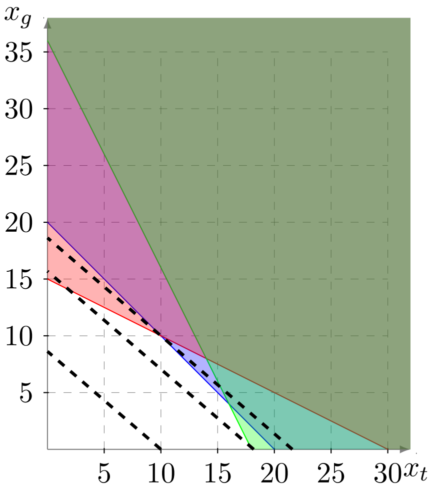
Bepalen van de coördinaten van dit snijpunt levert:

$$x_t = 10 \quad \text{en} \quad x_g = 10,$$

en de bijhorende winst is

$$220 \times 10 + 255 \times 10 = 4750.$$

Evenwijdige Doelfunctierechten



Oefening

Los het broekenprobleem op m.b.v. de grafische methode. Ter herinnering, dit probleem wordt gegeven door:

$$\max D(x_1, x_2) = 70x_1 + 40x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 192 \\ x_1 \leq 60 \\ x_2 \leq 100 \\ x_1 + x_2 \leq 120 \end{cases}$$

en waarbij verder de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn. Merk op dat we hier de vaste kost achterwege hebben gelaten. Om te bepalen of de activiteit al dan niet economisch zinvol is moet deze natuurlijk wel in rekening worden gebracht.

Oefening

Los het volgende LP-probleem op m.b.v. de grafische methode:

$$\min D(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{en} \quad x_2 \geq 0.$$

Bijzondere Gevallen

Meestal heeft een LP-probleem in twee beslissingsvariabelen een unieke oplossing maar dit hoeft niet zo te zijn.
Oneindig veel oplossingen kan wanneer de doelfunctierechten evenwijdig zijn met één van de grensrechten.
Stel dat bij boer Frans de doelfunctie gegeven wordt door: $200x_t + 400x_g$. De doelfunctierechten $200x_t + 400x_g = D$ zijn evenwijdig zijn met de mestrestrictie: $10x_t + 20x_g = 300$. Verifieer dat de optimale doelfunctiewaarde (nl. $D = 6000$) niet alleen bereikt wordt in de hoekpunten

$$x_t = 0, \quad x_g = 15$$

en

$$x_t = 10, \quad x_g = 10$$

maar óók in alle punten die deze hoekpunten verbinden.

Bijzondere Gevallen

Doelfunctie wordt oneindig groot/klein

Kan gebeuren wanneer het aanvaardbaar gebied onbegrensd is. Dit duidt *meestal* op het feit dat er een restrictie vergeten werd. Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$$

onder de beperking

$$2x_1 + x_2 \geq 1$$

terwijl de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_i \geq 0, \quad \text{voor } i \in \{1, 2\}.$$

Verifieer (grafisch) dat de doelfunctie willekeurig groot kan worden.

Bijzondere Gevallen

Aanvaardbaar gebied is leeg

Dit gebeurt wanneer de restricties elkaar tegenspreken.
Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 1 \\ \ \ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

terwijl de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_i \geq 0, \quad \text{voor } i \in \{1, 2\}.$$

Verifieer grafisch dat er *geen enkele combinatie* van waarden van x_1 en x_2 is die aan de restricties voldoet.

Probleem Grafische Oplossingsmethode

Grafische oplossingsmethode: enkel voor LP-problemen met twee (of drie) beslissingsvariabelen.

We willen een algoritme dat ook grotere LP-problemen kan aanpakken.

Simplexalgoritme: bedacht door George Dantzig in tweede helft jaren 40.

Algoritme is 70 jaar oud maar blijft één van de belangrijkste algoritmes binnen de informatica.

Algemene Vorm van een LP-Probleem

Definitie

Een LP-probleem in ALGEMENE VORM *bestaat uit n beslissingsvariabelen x_1 t.e.m. x_n waarbij een lineaire doelfunctie*

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

hetzij gemaximaliseerd hetzij geminimaliseerd moet worden onder een verzameling van m lineaire restricties,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \{\leq | = | \geq\}\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \{\leq | = | \geq\}\ b_2 \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \{\leq | = | \geq\}\ b_m \end{cases}$$

en waarbij de beslissingsvariabelen voldoen aan de niet-negativiteitsvoorwaarden:

$$x_j \geq 0, \quad \text{voor } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Hierbij zijn de coëfficiënten c_j, a_{ij} en b_i vaste reële getallen.

Opmerkingen bij Algemene Vorm

- $\{\leq | = | \geq\}$ betekent dat er precies één van de drie relationele operatoren moet worden gekozen. Deze keuze kan echter wel per restrictie verschillend zijn.
- Zowel maximalisatie als minimalisatie mogelijk.
- Geen eisen aan de coëfficiënten.

Dus: veel variatie mogelijk bij het modelleren van hetzelfde probleem.

Voor een algoritme is gemakkelijker als we een vorm hebben die minder variatie bevat: dit wordt de standaardvorm.

De Standaardvorm

Definitie

Bij een LP-probleem in STANDAARDVORM *moet men de waarde van* n *beslissingsvariabelen* x_1 *t.e.m.* x_n *bepalen om een lineaire doelfunctie te maximaliseren, i.e. bepaal*

$$\max D(x_1, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases}$$

en waarbij de beslissingsvariabelen voldoen aan de niet-negativiteitsvoorwaarden:

$$x_j \geq 0, \quad \textit{voor } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Hierbij zijn de coëfficiënten c_j*,* a_{ij} *en* b_i *vaste reële getallen.*

Opmerkingen bij Standaardvorm

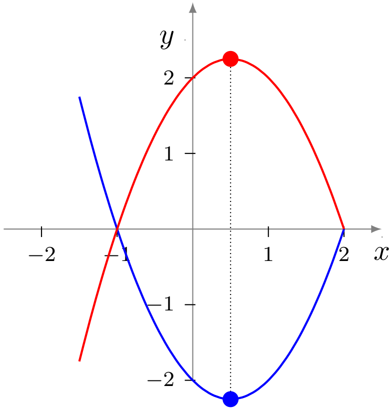
- Steeds **maximaliseren**.
- Alle beperkingen van de vorm $\leq$.

Opmerking: de standaardvorm heeft precies dezelfde modelleringskracht als de algemene vorm!

Anders gezegd: elk probleem in algemene vorm kan omgezet worden naar standaardvorm!

Omzetting Algemene naar Standaardvorm

Minimalisatie omzetten in maximalisatie: vermenigvuldig (de coëfficiënten van) de doelfunctie met -1.



Omzetting Algemene naar Standaardvorm

Omvormen van een $\geq$-restrictie: vermenigvuldig met -1.
Omzetting van een $=$-restrictie Een restrictie van de vorm

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

is equivalent met de twee restricties

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

en

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b.$$

De laatste vergelijking kunnen we vermenigvuldigen met -1.

Basisidee Simplexalgoritme

Definitie

Het AANVAARDBAAR GEBIED *van een LP-probleem bestaat uit de deelverzameling van punten uit* $\mathbb{R}^n$ *die zowel aan de* m *restricties, als aan de* n *niet-negativiteitsvoorwaarden voldoen.*

Basisidee Simplexalgoritme: Belangrijke Eigenschap

Eigenschap

Wanneer een LP-probleem minstens één optimale oplossing heeft, dan kan er steeds een optimale oplossing gevonden worden in een "hoekpunt" van het aanvaardbaar gebied.

Opmerking: In twee dimensies: hoekpunt is snijpunt van 2 restrictierechten; in drie dimensies: hoekpunt is snijpunt van 3 vlakken; in n dimensies: hoekpunt is snijpunt van n hypervlakken.

Basisidee Simplexalgoritme

Basisidee simplexalgoritme

Het basisidee van het simplexalgoritme bestaat er in om, startend vanuit een bepaald hoekpunt, *iteratief van hoekpunt naar hoekpunt te "springen"* tot men vaststelt dat men zich niet meer kan verbeteren. Op dit moment wordt de optimale oplossing gevonden.

Soort Problemen voor Simplexalgoritme

We bekijken enkel LP-problemen

- in standaardvorm;
- waarbij alle coëfficiënten b_i niet-negatief zijn, i.e. $b_i \geq 0$, of anders gezegd: *de oorsprong behoort tot het aanvaardbaar gebied*.

Opmerking: Later bekijken we hoe we problemen kunnen aanpakken waarbij de oorsprong niet tot het aanvaardbaar gebied behoort.

Toevoegen Spelingsvariabelen

We zetten m restricties in $\leq$-vorm om naar **gelijkheden** door toevoegen van SPELINGSVARIABELEN. De restrictie

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$

wordt omgezet in

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + y_i = b_i,$$

hierbij is y_i een niet-negatieve spelingsvariabele die de speling aangeeft tussen het linker- en rechterlid.
De spelingsvariabelen worden ook toegevoegd aan de doelfunctie met een coëfficiënt gelijk aan nul.

Verhoogde Vorm

Definitie

De VERHOOGDE VORM *(Eng. augmented form) van het LP-probleem in standaardvorm wordt gegeven door:*

$$\max D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + 0y_1 + \cdots + 0y_m$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad + y_2 & = b_2 \\ \quad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad + y_m & = b_m \end{cases}$$

en waarbij de beslissingsvariabelen voldoen aan de niet-negativiteitsvoorwaarden:

$x_j \geq 0,$ *voor* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *en* $y_i \geq 0,$ *voor* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}.$

Voorbeeld: Verhoogde Vorm Probleem "Boer Frans"

De verhoogde vorm van het LP-probleem "Boer Frans" wordt gegeven door[2]:

$$\max D(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 220x_1 + 255x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$$

onder de beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 20 \\ 10x_1 + 20x_2 + y_2 = 300 \\ 2x_1 + x_2 + y_3 = 36 \end{cases}$$

en waarbij ook de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2\}$$

en

$$y_i \geq 0 \quad \text{voor } i \in \{1, 2, 3\}.$$

[2]We schrijven nu eventjes x_1 en x_2 i.p.v. x_t en x_g.

Stelsel Lineaire Vergelijkingen

De verhoogde vorm bevat steeds m (functionele) restricties die samen een stelsel van m lineaire vergelijkingen in $n + m$ onbekenden vormen.
We hebben de volgende belangrijke eigenschap m.b.t. dit stelsel:

Eigenschap

Het stelsel lineaire vergelijkingen van de verhoogde vorm van een LP-probleem is steeds oplosbaar. Meer in het bijzonder heeft het stelsel n ***vrijheidsgraden****.*

Betekenis Vrijheidsgraden

Wanneer een stelsel lineaire vergelijkingen in N vergelijkingen $N - r$ vrijheidsgraden heeft dan betekent dit in de praktijk dat men aan $N - r$ willekeurig gekozen variabelen een willekeurige waarde mag geven. De waarden van de overige r variabelen liggen dan eenduidig vast.

Vrijheidsgraden: Voorbeeld

Beschouw volgend stelsel voor probleem “Boer Frans”:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 20 \\ 10x_1 + 20x_2 + y_2 = 300 \\ 2x_1 + x_2 + y_3 = 36 \end{cases}$$

Dit stelsel heeft 5 variabelen en rang 3. Er zijn m.a.w. $5 - 3 = 2$ vrijheidsgraden.
Kies bv. $x_1 = 5$ en $x_2 = 10$. De waarden van de andere variabelen wordt dan:

$y_1 = 20-5-10 = 5, y_2 = 300-50-200 = 50$ en $y_3 = 36-10-10 = 16$.

Alle variabelen zijn niet-negatief. Men verifieert dat $x_1 = 5$ en $x_2 = 10$ tot het aanvaardbaar gebied behoort voor probleem “Boer Frans”.

Vrijheidsgraden: Voorbeeld

Kies bv. $x_2 = 15$ en $y_1 = 0$. De waarden van de andere variabelen wordt dan:

$$x_1 = 5, \quad y_2 = -50, \quad \text{en} \quad y_3 = 11,$$

Er is een negatieve variabele (nl. y_2). Men verifieert dat in dit geval niet aan de mestrestrictie (de tweede restrictie) wordt voldaan. Merk ook op dat $y_1 = 0$ en dat al het beschikbare land wordt gebruikt.

Betekenis Spelingsvariabelen

We zien dat het teken van de spelingsvariabelen het volgende betekent:

1. Als y_i een waarde heeft strikt groter dan nul, dan ligt de oplossing (van de x-en) strikt aan de "goede" kant van deze restrictie. De i-de restrictie is m.a.w. voldaan.
2. Als y_i de waarde nul heeft, dan ligt de oplossing (van de x-en) precies "op" de i-de restrictie, en deze is dan ook voldaan.
3. Als y_i een negatieve waarde aanneemt, dan ligt de oplossing (van de x-en) aan de "verkeerde" kant van deze restrictie. De i-de restrictie is m.a.w. *niet* voldaan.

Aanvaardbare en Niet-Aanvaardbare Oplossingen

Oplossingen van het stelsel lineaire vergelijkingen waarvoor alle variabelen een niet-negatieve waarde hebben worden AANVAARDBARE OPLOSSINGEN genoemd; wanneer één of meerdere variabelen een negatieve waarde hebben dan spreken we over een NIET-AANVAARDBARE OPLOSSING.

Basisoplossing

We spreken van een BASISOPLOSSING wanneer we de n vrij te kiezen variabelen **de waarde nul geven**.

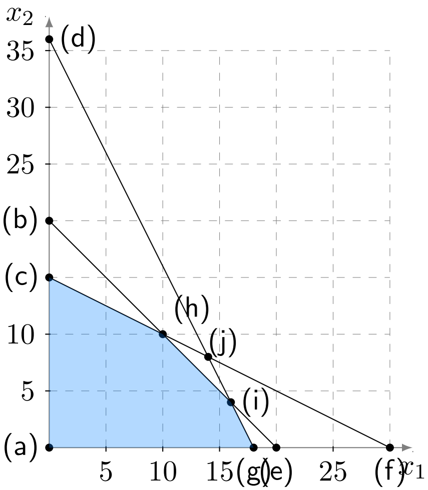
De n variabelen die we gelijk aan nul hebben gekozen worden de NIET-BASISVARIABELEN genoemd; de andere m (normaalgezien verschillend van nul) worden de BASISVARIABELEN genoemd.

Wanneer de m basisvariabelen allemaal niet-negatief zijn dan spreken we over een AANVAARDBARE BASISOPLOSSING.

Voorbeeld Basisoplossingen: “Boer Frans”

	niet-basisvars	basisvariabelen	aanvaardbaar?
(a)	$x_1 = 0,\ x_2 = 0$	$y_1 = 20,\ y_2 = 300,\ y_3 = 36$	Ja
(b)	$x_1 = 0,\ y_1 = 0$	$x_2 = 20,\ y_2 = -100,\ y_3 = 16$	Nee
(c)	$x_1 = 0,\ y_2 = 0$	$x_2 = 15,\ y_1 = 5,\ y_3 = 21$	Ja
(d)	$x_1 = 0,\ y_3 = 0$	$x_2 = 36,\ y_1 = -16,\ y_2 = -420$	Nee
(e)	$x_2 = 0,\ y_1 = 0$	$x_1 = 20,\ y_2 = 100,\ y_3 = -4$	Nee
(f)	$x_2 = 0,\ y_2 = 0$	$x_1 = 30,\ y_1 = -10,\ y_3 = -24$	Nee
(g)	$x_2 = 0,\ y_3 = 0$	$x_1 = 18,\ y_1 = 2,\ y_2 = 120$	Ja
(h)	$y_1 = 0,\ y_2 = 0$	$x_1 = 10,\ x_2 = 10,\ y_3 = 6$	Ja
(i)	$y_1 = 0,\ y_3 = 0$	$x_1 = 16,\ x_2 = 4,\ y_2 = 60$	Ja
(j)	$y_2 = 0,\ y_3 = 0$	$x_1 = 14,\ x_2 = 8,\ y_1 = -2$	Nee

Voorbeeld Basisoplossingen: Grafisch



Hoekpunten Algebraïsch

Eigenschap

De aanvaardbare basisoplossingen van het stelsel lineaire vergelijkingen van een LP-probleem in verhoogde vorm komen precies overeen met de hoekpunten van het aanvaardbaar gebied van dit LP-probleem.

LP-probleem Oplossen door Enumereren Basisoplossingen?

In principe kan een LP-probleem als volgt worden aangepakt:

- Overloop alle deelverzamelingen van grootte n uit een verzameling van grootte $n + m$.
- Bepaal voor elke deelverzameling de bijhorende basisoplossing. Indien aanvaardbaar verifieer of ze al dan niet beter is dan de huidige beste oplossing (en pas indien nodig de huidige beste oplossing aan).

Maar! Aantal basisoplossingen:

$$\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!m!}$$

waarvan de meeste niet-aanvaardbaar zijn!

Aantal Basisoplossingen: Numerieke Waarden

n	m	aantal basisoplossingen
2	3	10
10	6	8008
30	20	$47129212243960 \approx 4.7 \times 10^{13}$
100	30	$29372339821610944823963760 \approx 2.9 \times 10^{25}$

Conclusie: dit algoritme zal een zeer lange looptijd hebben! Reken bv. eens uit hoeveel jaar het duurt om 2.9×10^{25} basisoplossingen te controleren aan een tempo van een miljoen basisoplossingen per seconde!

Hoe Pakt Simplexalgoritme dit Probleem aan?

Het simplexalgoritme lost dit probleem op door

1. énkel aanvaardbare basisoplossingen te beschouwen én
2. ervoor te zorgen dat de basisoplossing snel (i.e. min of meer "op het zicht") kan bepaald worden.

Hiervoor introduceert men het concept van een naburige basisoplossing.

Naburige Basisoplossing: Definitie

Definitie

Een NABURIGE BASISOPLOSSING *van een basisoplossing is een basisoplossing waarvan alle basisvariabelen op één na gelijk zijn aan de basisvariabelen van de eerste basisoplossing. Of anders gezegd, twee basisoplossingen zijn naburig wanneer ze precies* $m - 1$ *basisvariabelen gemeenschappelijk hebben.*

Opmerking: elke basisoplossing heeft precies $m \times n$ naburige basisoplossingen.

Naburige Basisoplossing: Voorbeeld

basisoplossing	naburige basisoplossingen
(a)	(b), (c), (d), (e), (f), (g)
(b)	(a), (c), (d), (e), (h), (i)
(c)	(a), (b), (d), (f), (h), (j)
(d)	(a), (b), (c), (g), (i), (j)
(e)	(a), (b), (f), (g), (h), (i)
(f)	(a), (c), (e), (g), (h), (j)
(g)	(a), (d), (e), (f), (i), (j)
(h)	(b), (c), (e), (f), (i), (j)
(i)	(b), (d), (e), (g), (h), (j)
(j)	(c), (d), (f), (g), (h), (i)

Merk op: naburige basisoplossingen betekent grafisch een verplaatsing langs een rechte aan de rand van het aanvaardbaar gebied.

Startoplossing Simplexalgoritme

We herinneren aan de assumptie dat de oorsprong tot het aanvaardbaar gebied behoort. Bijgevolg is:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0, y_1 = b_1, y_2 = b_2, \ldots, y_m = b_m$$

een aanvaardbare basisoplossing.
Merk op: *Deze aanvaardbare basisoplossing kan onmiddellijk worden afgelezen uit de vorm van het stelsel, want elke basisvariabele komt precies éénmaal voor in het stelsel.*
Simplexalgoritme zal elementaire rijoperaties uitvoeren op het stelsel (en zet het zo om in een equivalent stelsel) op zo'n manier dat *elke basisvariabele steeds zijn eigen vergelijking heeft*.

Toevoegen Doelfunctievergelijking

Om te kunnen zien:

- welke niet-basisvariabele moet worden opgenomen in de basis;
- wanneer het algoritme stopt

nemen we een extra vergelijking op in het stelsel. Deze vergelijking komt overeen met de te maximaliseren doelfunctie.

Opletten! Omdat alle variabelen in het linkerlid worden geschreven keert het teken van de coëfficiënten om!

Toevoegen Doelfunctievergelijking: Voorbeeld

Wanneer de te maximaliseren doelfunctie wordt gegeven door:

$$D = 220x_1 + 255x_2,$$

dan wordt de volgende vergelijking opgenomen in het stelsel:

$$-220x_1 - 255x_2 + D = 0.$$

Welke Variabele Komt in de Basis?

De niet-basisvariabele die de doelfunctie het **meest laat stijgen per eenheid stijging** van deze niet-basisvariabele wordt gekozen als diegene die in de basis zal komen.

Voor het vorige voorbeeld:

- D stijgt 220 eenheden per eenheid stijging van x_1;
- D stijgt 255 eenheden per eenheid stijging van x_2.

Conclusie: De variabele x_2 wordt gekozen om opgenomen te worden in de basis.

Welke Variabele Verlaat de Basis?

Eens gekozen is welke variable in de basis zal komen zijn er nog m naburige basissen mogelijk.

De meeste hiervan zijn echter niet aanvaardbaar.

Er is echter een eenvoudige rekenregel om te bepalen welke variabele uit de basis moet verdwijnen.

We bepalen deze rekenregel a.d.h.v. een voorbeeld.

Welke Variabele Verlaat de Basis? Voorbeeld

We beschouwen volgend LP-probleem in standaardvorm:

$$\max D(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 \leq 21 \\ \quad 2x_1 + 6x_2 \leq 39 \\ \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 33. \end{cases}$$

De niet-negativiteitsvoorwaarden zijn van kracht.

Welke Variabele Verlaat de Basis? Voorbeeld

Als eerste stap herschrijven we het probleem in zijn verhoogde vorm, daartoe voegen we spelingsvariabelen toe. In dit voorbeeld stappen we af van de benaming y voor de spelingsvariabelen en noemen we deze ook eenvoudigweg x. De verhoogde vorm wordt:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} -4x_1 + 6x_2 + x_3 & & & = 21 \\ 2x_1 + 6x_2 & + x_4 & & = 39 \\ 4x_1 + 2x_2 & & + x_5 & = 33. \end{cases}$$

en $x_i \geq 0$ voor $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Welke Variabele Verlaat de Basis? Voorbeeld

Vervolgens nemen we de doelfunctievergelijking op in het stelsel en we krijgen.

$$
\begin{cases}
-3x_1 - 2x_2 + D = 0 \\
-4x_1 + 6x_2 + x_3 = 21 \\
2x_1 + 6x_2 + x_4 = 39 \\
4x_1 + 2x_2 + x_5 = 33
\end{cases}
$$

met $x_i \geq 0$ voor $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Aangezien x_1 de **meest negatieve coëfficiënt** heeft in de doelfunctievergelijking wordt x_1 in de basis gebracht.

Welke Variabele Verlaat de Basis? Voorbeeld

Welke variabele moet de basis verlaten, x_3, x_4 of x_5?
We proberen ze één voor één.

- Als x_3 de basis verlaat dan wordt $x_1 = -21/4$. Dit is een niet-aanvaardbare basisoplossing.
- Als x_4 de basis verlaat dan wordt $x_1 = 39/2$. Voor x_5 vinden we dan $x_5 = 33 - 4 \times \frac{39}{2} = -45 < 0$. Dit is een niet-aanvaardbare basisoplossing.
- Als x_5 de basis verlaat dan wordt $x_1 = 33/4$. Bovendien volgt:

$$x_4 = 39 - 2x_1 = 39 - \frac{33}{2} = \frac{45}{2}$$

en

$$x_3 = 21 + 4x_1 = 21 + 33 = 54.$$

Deze basisoplossing is aanvaardbaar!

Welke Variabele Verlaat de Basis? Voorbeeld

Merk op dat x_5 de enige variabele is die uit de basis kan verdwijnen eens besloten is dat x_1 in de basis komt.

De variabele x_5 is diegene waarvoor de **verhouding** van het rechterlid van zijn vergelijking en de coëfficiënt van x_1 (nl. $33/4$) de **kleinste is onder alle niet-negatieve verhoudingen**!

Stelsel Herschrijven

De (nieuwe) oplossing die we gevonden hebben, nl. $x_1 = 33/4$, $x_4 = 45/2$ en $x_3 = 54$ (en $x_2 = x_5 = 0$) kan *niet* rechtstreeks uit het stelsel worden afgelezen.

We gaan het stelsel herschrijven zodat x_1 nu ook slechts één keer in het stelsel voorkomt (in de vergelijking waar nu x_5 staat).

Hiertoe bepalen we x_1 uit deze vergelijking:

$$x_1 = \frac{1}{4}\big(33 - 2x_2 - x_5\big).$$

We substitueren dit nu in de andere vergelijkingen. Hierdoor zal x_1 slechts éénmaal voorkomen in het stelsel.

Stelsel Herschrijven

Voor de doelfunctievergelijking vinden we:

$$
\begin{aligned}
& -3x_1 - 2x_2 + D = 0 \\
\iff & -\frac{3}{4}\left(33 - 2x_2 - x_5\right) - 2x_2 + D = 0 \\
\iff & -\frac{99}{4} + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_5 - 2x_2 + D = 0 \\
\iff & -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_5 + D = \frac{99}{4}.
\end{aligned}
$$

Stelsel Herschrijven

De vergelijking voor x_3 wordt:

$$
\begin{aligned}
& -4x_1 + 6x_2 + x_3 = 21 \\
\iff & -(33 - 2x_2 - x_5) + 6x_2 + x_3 = 21 \\
\iff & 8x_2 + x_3 + x_5 = 54.
\end{aligned}
$$

Stelsel Herschrijven

De vergelijking voor x_4 wordt:

$$
\begin{aligned}
& 2x_1 + 6x_2 + x_4 = 39 \\
\iff & \frac{1}{2}\big(33 - 2x_2 - x_5\big) + 6x_2 + x_4 = 39 \\
\iff & 5x_2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{45}{2}.
\end{aligned}
$$

Stelsel Herschrijven: Besluit

Samenvattend kunnen we zeggen dat we het stelsel hebben omgevormd naar

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_5 + D = \frac{99}{4} \\ 8x_2 + x_3 + x_5 = 54 \\ 5x_2 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = \frac{45}{2} \\ 4x_1 + 2x_2 + x_5 = 33. \end{cases}$$

Merk op: uit dit stelsel lezen we onmiddellijk de aanvaarbare basisoplossing af: $x_2 = x_5 = 0$ en $x_3 = 54$, $x_4 = 45/2$ en $x_1 = 33/4$. De waarde van de doelfunctie is $D = 99/4$.

Stappen in één Iteratie

De situatie is nu volledig equivalent met de startsituatie en de stappen die we net hebben gedaan kunnen herhaald worden. Deze stappen zijn:

- Kies de variabele die in de basis wordt gebracht.
- Kies de variabele die uit de basis verdwijnt.
- Herschrijf het stelsel zodat elke basisvariabele zijn "eigen" vergelijking heeft en precies éénmaal voorkomt in het stelsel.

We bekijken nu hoe we deze stappen efficiënt kunnen implementeren.

Rekenregels van het Simplexalgoritme

Beslissen welke variabele in de basis wordt gebracht.

- We kiezen steeds de niet-basisvariabele wiens coëfficiënt in de huidige doelfunctievergelijking het **meest negatief** is.
- Wanneer zo'n niet-basisvariabele niet bestaat dan stopt het algoritme.

Beslissen welke variabele uit de basis verdwijnt.

- Voor elke basisvervariabele berekenen we de verhouding van het rechterlid van zijn vergelijking en de coëfficiënt van de variabele waarvan beslist is dat die in de basis komt.
- De vergelijking (i.e. basisvariabele) met de **kleinste niet-negatieve verhouding** is de variabele die uit de basis verdwijnt.

Rekenregels van het Simplexalgoritme

Herschrijven van het stelsel lineaire vergelijkingen.

- Voer elementaire rijoperaties uit (zoals vroeger gedaan bij de methode van Gauss-Jordan) om de nieuwe basisvariabele te elimineren uit alle vergelijkingen behalve uit de vergelijking waar de "oude" basisvariabele in voorkomt.

Vervolg Simplexmethode

We schrijven ons laatste stelsel in matrixnotatie waarbij rijen en kolommen geannoteerd worden:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & D & \text{RL} \end{array} \\
\begin{array}{c} D \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & -1/2 & 0 & 0 & 3/4 & 1 & 99/4 \\
0 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 54 \\
0 & 5 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 45/2 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

De eerste rekenregel zegt dat x_2 in de basis komt. Wie moet er verdwijnen? We berekenen de verhoudingen:

$$x_3 \rightsquigarrow 54/8 = 6.75, \quad x_4 \rightsquigarrow 45/2/5 = 4.5, \quad x_1 \rightsquigarrow 33/2 = 16.5$$

De kleinste niet-negatieve verhouding is die voor x_4. De variabele x_4 verdwijnt uit de basis.

Vervolg Simplexmethode: Voorbeeld

We schrijven ons laatste stelsel in matrixnotatie waarbij rijen en kolommen geannoteerd worden:

$$
\begin{array}{c}
 \\ D \\ x_3 \\ x_4 \\ x_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & D & \text{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & -1/2 & 0 & 0 & 3/4 & 1 & 99/4 \\
0 & 8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 54 \\
0 & 5 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 45/2 \\
4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 33
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

De variabele x_4 verdwijnt uit de basis. Elementaire rijoperaties

$$R_1 \leftarrow R_1 - \frac{-1/2}{5} R_3 \quad \text{of eenvoudiger} \quad R_1 \leftarrow 10R_1 + R_3.$$

$$R_2 \leftarrow R_2 - \frac{8}{5} R_3 \quad \text{of eenvoudiger} \quad R_2 \leftarrow 5R_2 - 8R_3,$$

en

$$R_4 \leftarrow R_4 - \frac{2}{5} R_3 \quad \text{of eenvoudiger} \quad R_4 \leftarrow 5R_4 - 2R_3.$$

Vervolg simplexmethode

Uitvoeren van de elementaire rijoperaties levert:

$$
\begin{array}{c}
 \\ D \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & D & \text{RL} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 10 & 270 \\
0 & 0 & 5 & -8 & 9 & 0 & 90 \\
0 & 5 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 45/2 \\
20 & 0 & 0 & -2 & 6 & 0 & 120
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Hieruit lezen we onmiddellijk de huidige oplossing af:

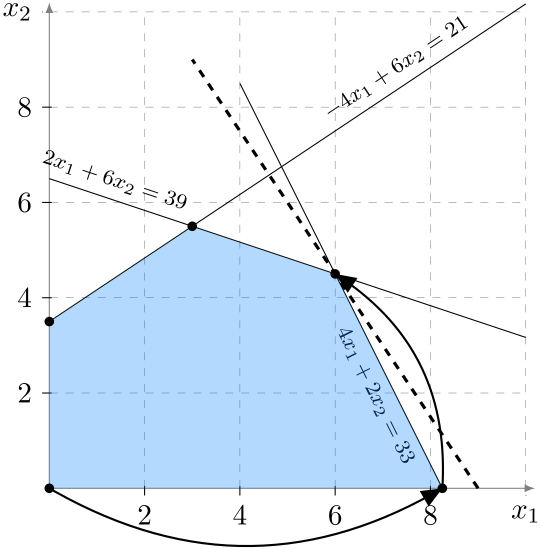
$$D = 270/10 = 27, x_3 = 90/5 = 18, x_2 = 45/10 = 9/2, x_1 = 6$$

en de niet-basisvariabelen:

$$x_4 = x_5 = 0.$$

Omdat in de doelfunctievergelijking alle coëfficiënten positief zijn betekent dit dat we de optimale oplossing van dit LP-probleem hebben gevonden.

Stappen van het Simplexalgoritme Gevisualiseerd



Probleemstelling

De besproken simplexmethode gaat ervan uit dat de oorsprong tot het aanvaardbaar gebied behoort.

Dit zorgt ervoor dat we onmiddellijk een aanvaardbare basisoplossing en bijhorende vorm van het stelsel hebben.

> *Hoe vinden we echter op een eenvoudige manier een aanvaardbare basisoplossing en de vorm van het bijhorend stelsel wanneer de oorsprong niet tot het aanvaardbaar gebied behoort?*

Voorbeeld

Beschouw het volgende LP-probleem in twee variabelen:

$$\max D(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$$

en waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2\}.$$

Men gaat onmiddellijk na dat de oorsprong, nl. $x_1 = 0$ en $x_2 = 0$ *niet* tot het aanvaardbaar gebied behoort.

Restrictie van de $\geq$-vorm

Een restrictie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b,$$

met $b > 0$, wordt in eerste instante omgevormd naar de gelijkheid:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - y = b,$$

Maar! Als alle $x_j = 0$, dan is $y = -b < 0$ wat niet toegelaten is!
Oplossing: We voegen *nog een extra variabele toe*, een KUNSTMATIGE VARIABELE, of

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - y + z = b,$$

en $x_j = 0$, $y = 0$ en $z = b$ is aanvaardbaar.

Restrictie van de $=$-vorm

De restrictie

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

heeft *geen speling*

We voegen enkel een kunstmatige variabele toe:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + z = b,$$

en $x_j = 0$ en $z = b$ is aanvaardbaar.

Voorbeeld Toevoegen Spelings- en Kunstmatige Variabelen

Het stelsel lineaire vergelijkingen (met toevoeging van de doelfunctievergelijking) voor het voorgaand LP-probleem is:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \phantom{{}-x_3+\underline{x}_4+\underline{x}_5} + D = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + \underline{x}_4 \phantom{{}+\underline{x}_5+D} = 4 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-x_3+\underline{x}_4} + \underline{x}_5 \phantom{{}+D} = 6. \end{cases}$$

Hierbij is x_3 een spelingsvariabele en werden de kunstmatige variabelen voor de duidelijkheid eventjes onderlijnd.

Wegwerken Kunstmatige Variabelen

De kunstmatige variabelen zijn enkel ingevoerd om gemakkelijk een oplossing van het eerste stelsel te vinden waarvoor alle variabelen positief zijn.

We zoeken een aanvaardbare oplossing waarvoor alle kunstmatige variabelen de waarde nul aannemen.

Nieuwe Doelfunctievergelijking

Wanneer de som van alle kunstmatige variabelen nul is dan is elke kunstmatige variabele ook gelijk aan nul.
We voeren een nieuwe doelfunctie in:

$$\min D_{\mathsf{min}} = \text{som van alle kunstmatige variabelen.}$$

Omdat de procedure zoals besproken echter enkel werkt voor maximalisatie gaan we nu over op

$$\max D_{\mathsf{max}} = -(\text{som van alle kunstmatige variabelen}),$$

zodanig dat de doelfunctievergelijking wordt

$$\text{som van alle kunstmatige variabelen} + D_{\mathsf{max}} = 0.$$

Nieuwe Doelfunctievergelijking: Voorbeeld

Voor het voorgaande LP-probleem vinden we:

$$\begin{cases} \underline{x}_4 + \underline{x}_5 + D_{\mathsf{max}} = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + \underline{x}_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + \underline{x}_5 = 6. \end{cases}$$

$\underline{x}_4 = 4$ en $\underline{x}_5 = 6$ en $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ is een aanvaardbare oplossing.
Probleem: de correcte waarde van D_{max} nl. -10 kan niet worden afgelezen!
Reden: $\underline{x}_4$ en $\underline{x}_5$ komen elk twee keer voor.
Oplossing: Elimineren van $\underline{x}_4$ en $\underline{x}_5$ uit de doelfunctievergelijking d.m.v. elementaire rijoperaties.

Nieuwe Doelfunctievergelijking: Voorbeeld

Pas de elementaire rijoperaties

$$R_1 \leftarrow R_1 - R_2 - R_3$$

toe. Dan wordt het stelsel

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + x_3 \qquad\qquad + D_{\mathsf{max}} = -10 \\ \quad 2x_1 + \ \ x_2 - x_3 + \underline{x}_4 \qquad\qquad = 4 \\ \quad\ \ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + \underline{x}_5 \qquad = 6, \end{cases}$$

Het staat nu wel in de correcte vorm voor het toepassen van de rekenregels van het simplexalgoritme.

Toepassen Simplexalgoritme op Gegeven Tableau

$$
\begin{array}{c} \\ D_{\max} \\ \underline{x}_4 \\ \underline{x}_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \underline{x}_4 & \underline{x}_5 & D_{\max} & \text{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix} -3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ \color{red}{2} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$R_1 \leftarrow 2R_1 + 3R_2, \quad \text{en} \quad R_3 \leftarrow 2R_3 - R_2$$

$$
\begin{array}{c} \\ D_{\max} \\ x_1 \\ \underline{x}_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \underline{x}_4 & \underline{x}_5 & D_{\max} & \text{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 2 & -8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \color{red}{3} & 1 & -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$R_1 \leftarrow R_1 + R_3, \quad \text{en} \quad R_2 \leftarrow 3R_2 - R_3$$

$$
\begin{array}{c} \\ D_{\max} \\ x_1 \\ x_2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \underline{x}_4 & \underline{x}_5 & D_{\max} & \text{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -4 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Oplossing: $(x_1, x_2, D_{\max}) = (2/3, 8/3, 0)$ en alle andere variabelen $= 0$.

Verwijderen Kunstmatige Variabelen

Wanneer een oplossing werd gevonden waarvoor alle kunstmatige variabelen gelijk zijn aan nul dan is hun rol uitgespeeld. Ze worden verwijderd en de oorspronkelijke doelfunctievergelijking wordt terug ingevoegd. Voor het voorbeeld wordt dit:

$$\begin{cases} -x_1 - \ \ x_2 \qquad\qquad + D = 0 \\ 6x_1 \qquad\qquad - 4x_3 \qquad = 4 \\ \qquad\quad 3x_2 + \ \ x_3 \qquad = 8. \end{cases}$$

Maar! De basisvariabelen (in dit geval x_1 en x_2) staan twee keer in het stelsel.
Oplossing Elimineer deze uit de doelfunctievergelijking alvorens verder te gaan.

Verwijderen Kunstmatige Variabelen

Na het verwijderen van de kunstmatige variabelen en het terug invoeren van de originele doelfunctievergelijking zal het over het algemeen zo zijn dat één of meerdere basisvariabelen voorkomen in de doelfunctievergelijking. Deze moeten hieruit geëlimineerd worden alvorens verder te gaan.

Eliminatie Basisvariabelen uit Doelfunctievergelijking

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_1 \\ x_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & D & \mathsf{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
6 & 0 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 8
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$R_1 \leftarrow 6R_1 + R_2 + 2R_3$$

$$
\begin{array}{c}
\\ D \\ x_1 \\ x_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & D & \mathsf{RL} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & -2 & 6 & 20 \\
6 & 0 & -4 & 0 & 4 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 8
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Nu kunnen de rekenregels van het simplexalgoritme opnieuw worden toegepast.

Finalisatie Voorbeeld

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & D & \text{RL} \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ x_1 \\ x_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 6 & 20 \\ 6 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & \color{red}{1} & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

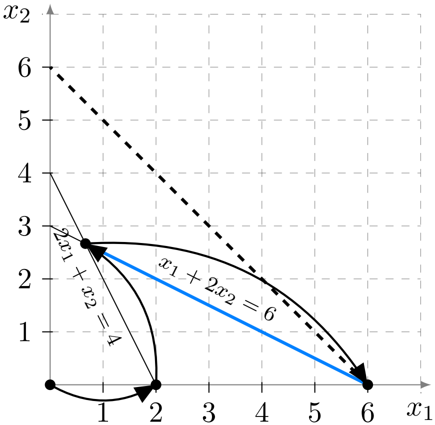
$$R_1 \leftarrow R_1 + 2R_3 \quad \text{en} \quad R_2 \leftarrow R_2 + 4R_3$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & D & \text{RL} \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ x_1 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 6 & 36 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 36 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alle coëfficiënten in de doelfunctievergelijking zijn positief. Bijgevolg heeft de simplexprocedure de optimale oplossing gevonden. Die wordt gegeven door

$$x_1 = 6, x_2 = 0, x_3 = 8, D = 6.$$

Visualisatie II-fasen Methode



II-fasen Methode: Samenvatting

1. Zorg ervoor dat elke restrictie een rechterlid b_i heeft dat groter of gelijk is aan nul. Dit kan steeds bereikt worden door te vermenigvuldigen met -1 indien nodig.
2. Voeg spelings- en kunstmatige variabelen toe:
   - Een restrictie in de $\leq$-vorm krijgt een spelingsvariabele met een plusteken.
   $$\leq \quad \rightsquigarrow \quad +\mathsf{SV}$$
   - Een restrictie in de $\geq$-vorm krijgt een spelingsvariabele met een minteken en een kunstmatige variabele met een plusteken.
   $$\geq \quad \rightsquigarrow \quad -\mathsf{SV} + \mathsf{KV}$$
   - Een restrictie in de $=$-vorm krijgt een kunstmatige variabele met een plusteken.
   $$= \quad \rightsquigarrow \quad +\mathsf{KV}$$

II-fasen Methode: Samenvatting

3. Indien er kunstmatige variabelen werden toegevoegd moeten deze verwijderd worden door de tijdelijke doelfunctievergelijking

$$\text{som van de kunstmatige variabelen} + D_{\text{max}} = 0$$

toe te voegen. Dit gaat als volgt:

  3.1 Elimineer de kunstmatige variabelen uit de doelfunctievergelijking.
  3.2 Pas de rekenregels van het simplexalgoritme toe totdat D_{max} de waarde nul aanneemt. Als dit niet mogelijk is, dan is het aanvaardbaar gebied voor dit LP-probleem leeg.

II-fasen Methode: Samenvatting

4. Indien er kunstmatige variabelen werden toegevoegd, dan worden deze verwijderd en de originele doelfunctievergelijking wordt terug ingevoerd. In het algemeen zullen er basisvariabelen uit de doelfunctievergelijking moeten worden geëlimineerd.
5. Nu staat het stelsel in de correcte vorm voor het toepassen van de rekenregels van de simplexprocedure. Herhaal deze totdat de simplexprocedure stopt.

Oefening

Los het volgende LP-probleem op m.b.v. de II-fasen methode.

$$\min D(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 8 \\ -2x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases}$$

waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{en} \quad x_2 \geq 0.$$

Maak gebruik van een programma zoals Excel of R om de elementaire rijoperaties snel en correct te kunnen uitvoeren. Duid op de figuur aan welke punten werden bezocht in het (x_1, x_2)-vlak. Ga in het bijzonder na waar de simplexprocedure is aanbeland op het einde van de eerste fase.

Details van de Simplexprocedure

Eindigt de simplexprocedure steeds?
Wanneer degeneratie optreedt dan kan de simplexprocedure vastraken in een oneindige lus. Zie oefeningen.

Uitvoeringstijd?
Meestal eindigt de simplexprocedure na een beperkt aantal iteraties. Gemiddeld is het aantal iteraties evenredig met m.

Echter, speciaal geconstrueerde voorbeelden hebben een exponentieel aantal iteraties nodig, bv. “kubus” van Klee-Minty. Alle 2^n hoekpunten worden bezocht! Zie oefeningen.

Details van de simplexprocedure

Leeg aanvaardbaar gebied?
Eerste fase eindigt met kunstmatige variabelen verschillend van nul.

Onbegrensde oplossing?
Variabele x_s komt in de basis én alle $a_{i,s} \leq 0$.

Geen begrenzing voor x_s en doelfunctie kan willekeurig groot worden.

Oefening

Simplex procedure vast in oneindige lus Het volgende voorbeeld is speciaal geconstrueerd opdat de simplexprocedure in een oneindige lus zou raken:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2.3x_1 + 2.15x_2 - 13.55x_3 - 0.4x_4$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 0.4x_1 + 0.2x_2 - 1.4x_3 - 0.2x_4 \leq 0 \\ -7.8x_1 - 1.4x_2 + 7.8x_3 + 0.4x_4 \leq 0 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1. \end{cases}$$

Gebruik Excel om twee iteraties van de simplexprocedure toe te passen. Wanneer meerdere variabelen uit de basis kunnen worden verwijderd kies dan diegene met de grootste pivotwaarde. (Deze regel is ook interessant vanuit het standpunt van numerieke stabiliteit.)
Wat merk je na twee iteraties? Wat zal er gebeuren na 6 iteraties?

Oefening

Simplexprocedure op Klee-Minty kubus Beschouw het volgende LP-probleem met drie beslissingsvariabelen en met drie restricties:

$$\max D(x_1, x_2, x_3) = 2^2 x_1 + 2x_2 + x_3$$

onder de volgende beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 & & & \leq 5 \\ 2^2 x_1 + & x_2 & & \leq 5^2 \\ 2^3 x_1 + & 2^2 x_2 + & x_3 & \leq 5^3, \end{cases}$$

en waarbij verder de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Het aanvaardbaar gebied is in dit geval een "vervormde" kubus waarbij één van de 2^3 hoekpunten in de oorsprong ligt.

Oefening (vervolg)

Gebruik een software-pakket om na te gaan dat de simplexprocedure in dit geval alle 8 de hoekpunten bezoekt om uiteindelijk te eindigen in de optimale oplossing $(0, 0, 5^3)$.

Men kan dit probleem veralgemenen naar een willekeurig aantal dimensies n waarbij het dan 2^n hoekpunten zal bezoeken. Dit probleem werd speciaal ontworpen om aan te tonen dat de **simplexprocedure in het slechtste geval een exponentiële tijdscomplexiteit** heeft.

Inleiding

Soms is het niet zinvol dat een bepaalde beslissingsvariabele een fractionele waarde aanneemt:

- Het aantal printers dat men gaat aankopen.
  Beslissingsvariabele moet geheel zijn.
- Welke (ondeelbare) keuzes worden gemaakt?
  Beslissingsvariabele moet binair zijn: men doet iets (1) of men doet het niet (0).

Definitie: Geheeltallig LP-probleem

Definitie

Een LP-probleem waarin minstens één beslissingsvariabele een gehele waarde moet aannemen wordt een GEHEELTALLIG LP-PROBLEEM *genoemd. Binnen de geheeltallige LP-problemen wordt nog een onderscheid gemaakt tussen problemen waarbij alle beslissingsvariabelen geheeltallig zijn, de zogenaamde* ZUIVERE GEHEELTALLIGE LP-PROBLEMEN *en diegene waarbij dit niet het geval is, de* GEMENGDE GEHEELTALLIGE LP-PROBLEMEN*. Een bijzondere klasse van zuivere geheeltallige LP-problemen zijn diegene waarbij alle beslissingsvariabelen binair zijn, en deze worden* BINAIRE GEHEELTALLIGE LP-PROBLEMEN *genoemd.*

Voorbeeld

Voorbeeld van een (gemengd) geheeltallig LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

onder de volgende beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 + \phantom{x_2 -{}} 5x_3 \phantom{{}- 2x_4} \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ 6x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3 \end{cases}$$

waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

van kracht zijn en bovendien moet gelden dat

$$x_j \text{ is geheel} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Definitie LP-Relaxatie

Definitie

De LP-RELAXATIE *van een geheeltallig LP-probleem is het LP-probleem dat men bekomt door alle geheeltalligheidseisen weg te laten.*

Voorbeeld LP-Relaxatie

De LP-relaxatie van het vorige geheeltallig LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

onder de volgende beperkingen:

$$\begin{cases} x_1 + \quad 5x_3 & \leq 10 \\ x_1 + \; x_2 - \; x_3 & \leq 1 \\ 6x_1 - 5x_2 & \leq 0 \\ -x_1 \qquad + 2x_3 - 2x_4 & \leq 3 \end{cases}$$

waarbij de niet-negativiteitsvoorwaarden

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

van kracht zijn en bovendien moet gelden dat

Deze restrictie is weggelaten

LP-Relaxatie van een Binaire Variabele

Een beperking

$$x_j \in \{0, 1\}$$

wordt in de LP-relaxatie vervangen door:

$$x_j \leq 1$$

en de niet-negativiteitsvoorwaarde

$$x_j \geq 0,$$

zodanig dat x_j een *reële waarde* tussen 0 en 1 moet aannemen.

Toepasbaarheid Grafische Oplossingsmethode

De grafische oplossingsmethode kan ook toegepast worden op ILP-problemen[3] als men er rekening mee houdt dat het aanvaardbaar gebied in minstens één dimensie beperkt is tot geheeltallige waarden.

[3] ILP staat voor Integer Linear Programming

Voorbeeld Grafische Methode

We beschouwen het volgende zuiver geheeltallig LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

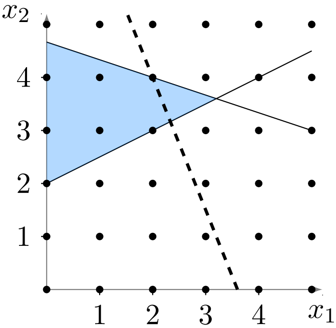
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 14. \end{cases}$$

waarbij

$$x_j \in \mathbb{N} \quad \text{voor } j \in \{1, 2\}.$$

Voorbeeld Grafische Methode: Vervolg

We plotten het aanvaardbaar gebied:



We zien dat de oplossing gegeven wordt door:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4 \quad \text{en} \quad D = 18.$$

Belangrijke Conclusie

De optimale oplossing van een geheeltallig LP-probleem ligt **niet** *langer gegarandeerd* **in een hoekpunt** *van het aanvaardbaar gebied!*

De reeds geziene oplossingsmethodes zijn dus niet langer rechtstreeks toepasbaar.

Oefening

Los het volgende gemengde ILP-probleem op m.b.v. de grafische methode:

$$\max D(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 19 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 33 \end{cases}$$

waarbij $x_1 \in \mathbb{N}$ en waar bovendien de niet-negativiteitsvoorwaarden van kracht zijn:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{en} \quad x_2 \geq 0.$$

Afronden Oplossing LP-Relaxatie

Idee: **we lossen de LP-relaxatie op en ronden de oplossing af zodat een geheeltallige oplossing wordt bekomen.**
We passen dit idee toe op het reeds geziene ILP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 \leq 14. \end{cases}$$

waarbij

$$x_j \in \mathbb{N} \quad \text{voor } j \in \{1, 2\}.$$

De oplossing van de LP-relaxatie, zoals af te lezen op vorige figuur, is:

$$x_1 = 3.2 \quad x_2 = 3.6 \quad \text{en} \quad D = 23.2$$

Hoe we x_1 en x_2 ook afronden en afkappen we bekomen nooit een aanvaardbare oplossing van het ILP-probleem.

Afronden Oplossing LP-Relaxatie: Tweede Voorbeeld

Beschouw het volgend zuiver geheeltallig LP-probleem:

$$\max D(x_1, x_2) = x_1 + 5x_2,$$

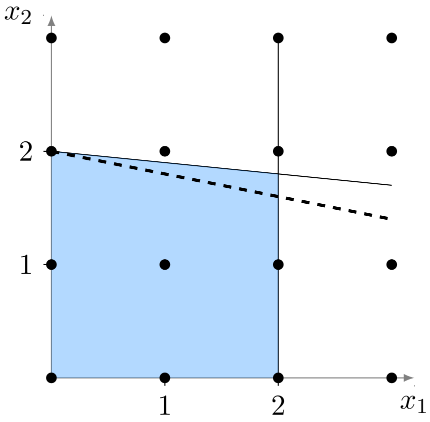
onder de beperkingen

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \leq 20 \\ x_1 \qquad\qquad \leq 2. \end{cases}$$

waarbij

$$x_j \in \mathbb{N} \quad \text{voor } j \in \{1, 2\}.$$

Afronden Oplossing LP-Relaxatie: Vervolg Tweede Voorbeeld



Afronden Oplossing LP-Relaxatie: Vervolg Tweede Voorbeeld

De oplossing van de LP-relaxatie gegeven wordt door

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1.8 \quad \text{en} \quad D = 11.$$

Als we deze oplossing naar beneden afronden dan krijgen we

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1 \quad \text{en} \quad D = 7.$$

Dit punt voldoet aan alle restricties maar is geen optimale oplossing van het geheeltallig LP-probleem. Deze wordt immers gegeven door

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \quad \text{en} \quad D = 10.$$

Afronden Oplossing LP-Relaxatie: Conclusie

Afronden van de optimale oplossing van de LP-relaxatie kan leiden tot

- een “oplossing” die niet aanvaardbaar is;
- of een suboptimale “oplossing”.

Enumereren van alle Aanvaardbare Punten

Idee: **Het aantal aanvaardbare punten is eindig[4]. Overloop ze allemaal en kies die combinatie waarvoor de doelfunctiewaarde optimaal is.**

Dit idee is in de praktijk niet bruikbaar omdat het aantal aanvaardbare punten *veel te groot* is.

Bv. voor een BILP met n beslissingsvariabelen zijn er a priori 2^n combinaties die mogelijks aanvaardbaar zijn!

[4] We gaan hier uit van een zuiver ILP waarvoor het aanvaardbaar gebied begrensd is.

Basisidee Branch-and-Bound Methode

De branch-and-bound methode tracht op een slimme manier “alle” aanvaardbare punten te overlopen, maar het is de bedoeling om (hopelijk) veel aanvaardbare punten *niet expliciet te gaan beschouwen* omdat men reeds weet dat ze toch niet de optimale oplossing kunnen zijn.

De branch-and-bound methode zal herhaaldelijk LP-problemen oplossen en maakt dus gebruik van een (niet nader bepaald) oplossingsalgoritme voor LP-problemen. De reeds besproken oplossingsmethodes kunnen hiervoor gebruikt worden.

Belanrijke Eigenschappen LP-Relaxatie

Eigenschap

De doelfunctiewaarde van een optimale oplossing van de LP-relaxatie van een geheeltallig LP-probleem is steeds minstens even goed als de doelfunctiewaarde van een optimale oplossing van het geheeltallig LP-probleem.

Eigenschap

Wanneer een optimale oplossing van de LP-relaxatie van een geheeltallig LP-probleem aan alle geheeltalligheidseisen voldoet dan is dit meteen ook een optimale oplossing van het geheeltallig LP-probleem.

Branch-and-Bound Methode

We beperken ons nu voor de eenvoud tot *maximalisatieproblemen*.
De branch-and-bound methode houdt een OPEN LIJST bij van LP-problemen die nog verder moeten bekeken worden.
Initialisatie: De LP-relaxatie van het ILP-probleem wordt op de open lijst geplaatst. We zetten $D^* = -\infty$.
Hoofdlus bestaat uit drie stappen:

1. **Opsplitsen**
2. **Begrenzen**
3. **Controle**

Einde: wanneer de open lijst leeg is. Indien $D^* \neq -\infty$ oplossing gevonden anders geen oplossing mogelijk.

Opsplitsen

- Haal probleem van de open lijst waarvoor doelfunctiewaarde maximaal is (steeds minstens D^*)
- Kies eerste variabele x_j die niet geheel is maar het zou moeten zijn.
- Twee nieuwe deelproblemen worden aangemaakt: één met de extra restrictie $x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor$ en de andere met de extra restrictie $x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$.

Begrenzing

Bepaal de doelfunctiewaarde voor de twee nieuw aangemaakte LP-problemen.

Controle

Elk van de twee problemen wordt op de open lijst geplaatst tenzij aan minstens één van de volgende drie voorwaarden voldaan is.

- De doelfunctiewaarde van de gevonden oplossing is kleiner of gelijk aan D^*.
- Het LP-probleem heeft geen oplossingen.
- De oplossing van het LP-probleem voldoet aan alle geheeltalligheidseisen (en is m.a.w. een oplossing van het geheeltallig LP-probleem). Nu zijn er twee mogelijkheden.
  1. De doelfunctiewaarde van het LP-probleem is niet beter dan de huidig beste waarde D^*. In dit geval moet er verder niets worden gedaan.
  2. De doelfunctiewaarde van het LP-probleem is beter dan de huidige beste. We vervangen D^* en x^* door de nieuwe beste oplossing. Vervolgens verwijderen we alle problemen van de open lijst waarvoor de doelfunctiewaarde kleiner of gelijk is aan de nieuwe waarde van D^*.

Uitwerking Branch-and-Bound methode

Los op m.b.v. de branch-and-bound methode:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4$$

met de volgende beperkingen:

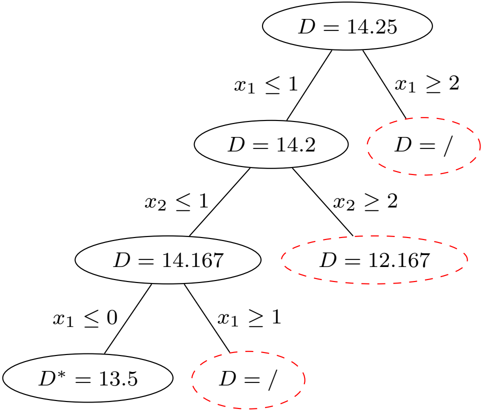
$$\begin{cases} x_1 + 5x_3 \leq 10 \\ x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\ 6x_1 - 5x_2 \leq 0 \\ -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3 \end{cases}$$

met

$$x_j \geq 0 \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}$$
$$x_j \text{ is geheel} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Uitwerking: zie bord.

Oplossingsboom



Oefening

Los volgend binair geheeltallig LP-probleem m.b.v. de branch-and-bound methode. Om de LP-relaxaties op te lossen kan je gebruikmaken van een softwarepakket. Houd het verloop van het proces bij a.d.h.v. een oplossingsboom.

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

onder de beperkingen

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10 \\ x_3 + x_4 \leq 1 \\ -x_1 + x_3 \leq 0 \\ -x_2 + x_4 \leq 0. \end{cases}$$

en

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Knapzakprobleem: Inleiding

Rugzak met capaciteit van 50 kg. Wat mee te nemen teneinde waarde van de rugzak te maximaliseren?

Voorwerp	Gewicht	Waarde
Beeldje	30 kg	4000 EUR
Schilderij 1	25 kg	2500 EUR
Schilderij 2	25 kg	2500 EUR

Knapzakprobleem: inleiding

We voeren drie beslissingsvariabelen in, één voor elk voorwerp:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{als voorwerp } j \text{ gekozen wordt} \\ 0 & \text{als voorwerp } j \text{ niet gekozen wordt.} \end{cases}$$

Met behulp van deze beslissingsvariabelen kan de waarde van de rugzak als volgt worden uitgedrukt:

$$4000x_1 + 2500x_2 + 2500x_3.$$

Het gewicht van de rugzak wordt als volgt uitgedrukt:

$$30x_1 + 25x_2 + 25x_3.$$

Knapzakprobleem: Inleiding

Het optimalisatieprobleem waar de dief voor staat wordt bijgevolg gegeven door

$$\max D(x_1, x_2, x_3) = 4000x_1 + 2500x_2 + 2500x_3$$

onder de beperkingen

$$30x_1 + 25x_2 + 25x_3 \leq 50$$

en

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3\}.$$

Definitie Knapzakprobleem

Definitie

Gegeven n *positieve reëele gewichten* g_j *(*$j \in \{1, 2 \ldots, n\}$*) en* n *positieve reëele waarden* w_j *(*$j \in \{1, 2 \ldots, n\}$*) en een maximaal positief reëel gewicht G. Een* KNAPZAKPROBLEEM *heeft de volgende vorm:*

$$\max D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n$$

onder de beperkingen

$$g_1 x_1 + g_2 x_2 + \cdots + g_n x_n \leq G$$

en

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \textit{voor } j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Oplossen (?) van een Knapzakprobleem

Wat zijn de interessante voorwerpen?

Diegene die veel waard zijn per gewicht!

Een *gulzig algoritme* neemt dan eerst het voorwerp met de grootste waarde per gewicht ratio (wanneer dit in de rugzak past), neemt vervolgens het voorwerp met de tweede grootste waarde per gewicht ratio, enzoverder tot alle voorwerpen bekeken zijn.

Besproken Algoritme Levert Niet Steeds Optimale Oplossing

We passen het gulzig algoritme toe op het reeds gegeven knapzakprobleem.
We bekijken de waarde per gewicht ratio van de drie voorwerpen.

Voorwerp	Gewicht	Waarde	Waarde/Gewicht
Beeldje	30 kg	4000 EUR	$4000/30 \approx 133.33$
Schilderij 1	25 kg	2500 EUR	$2500/25 = 100$
Schilderij 2	25 kg	2500 EUR	$2500/25 = 100$

Volgens het gulzig algoritme moeten we eerst het beeldje nemen (want het past in de rugzak). De rugzak heeft nu nog een capaciteit van $50 - 30 = 20$ kg. Geen van de twee schilderijen past nog in de rugzak. De rugzak samengesteld door het gulzig algoritme heeft een totale waarde van 4000 EUR. Echter, de twee schilderijen passen samen ook in de rugzak en hebben een gecombineerde waarde van 5000 EUR.

Naamgeving

We noemen het besproken algoritme voor het "oplossen" van knapzakproblemen het BENADEREND GULZIG ALGORITME.

Oplossen LP-Relaxatie Knapzakprobleem

De LP-relaxatie van een knapzakprobleem kan opgelost worden *zonder* het simplexalgoritme toe te passen.

Volgende stappen leveren steeds de optimale oplossing van de LP-relaxatie:

- Sorteer items volgens dalende waarde per gewicht ratio (i.e. de interessante voorwerpen eerst).
- Overloop items in deze volgorde. Zolang item volledig in rugzak past wordt het genomen.
- In het algemeen zal er een item zijn dat niet volledig past. Neem dié fractie van het item zodanig dat de rugzak volledig wordt gevuld.

Toepassing Gulzig Algoritme

Voor het reeds gegeven knapzakprobleem wordt de oplossing van de LP-relaxatie volgens het bovenstaande algoritme gegeven door:

$$x_1 = 1, x_2 = 20/25, x_3 = 0, D = 6000.$$

Men verifieert (bv. m.b.v. Excel of de simplexmethode) dat dit inderdaad de optimale oplossing is van dit fractioneel knapzakprobleem. Dit is altijd het geval zoals blijkt uit de volgende eigenschap.

Eigenschap Gulzig Algoritme

Eigenschap

Het zonet besproken gulzig algoritme levert steeds de oplossing voor de ***LP-relaxatie*** *van een knapzakprobleem, i.e. voor een fractioneel knapzakprobleem waarbij willekeurige fracties van de items kunnen meegenomen worden.*

Aanpassingen Branch-and-Bound Algoritme voor Knapzakprobleem

1. In plaats van D^* te initialiseren op $-\infty$ kunnen we m.b.v. het *benaderend* gulzig algoritme reeds een eerste oplossing vinden. Dit zal toelaten om hopelijk meer deelproblemen vroegtijdig af te sluiten (op basis van hun bovengrens).
2. Een extra restrictie van de vorm $x_j \leq 0$ vereenvoudigt tot $x_j = 0$ en correspondeert met een knapzakprobleem waarbij het j-de voorwerp niet mag gekozen worden.
3. Een extra restrictie van de vorm $x_j \geq 1$ vereenvoudigt tot $x_j = 1$ en correspondeert met een knapzakprobleem waarbij het j-de voorwerp steeds moet gekozen worden (en men de capaciteit van de knapzak dus vermindert met g_j).

Voorbeeld Branch-and-Bound voor Knapzakprobleem

We lossen het volgende knapzakprobleem op m.b.v. de branch-and-bound methode:

$$\max D(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 11x_2 + 8x_3 + 6x_4$$

met

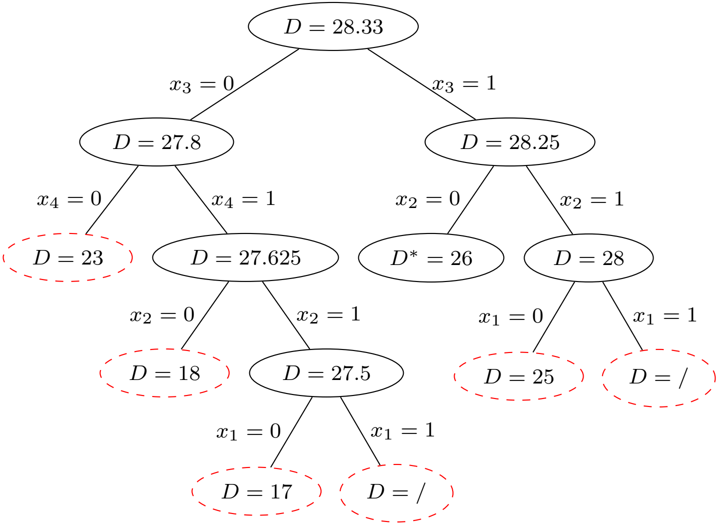
$$8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 20$$

en

$$x_j \in \{0, 1\} \quad \text{voor } j \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Uitwerking: zie bord!

Oplossingsboom



Oefening

Een coach van een zwemteam wil een team samenstellen voor de 4×50 meter wisselslag. Hij beschikt over 5 zwemmers, die elk verschillende tijden neerzetten voor de verschillende zwemstijlen. De coach wil uiteraard het snelste team samenstellen.
De tijden (in seconden) van de zwemmers worden in onderstaande tabel gegeven:

	Lucas	Liam	Vince	Finn	Louis
Rugslag	37,7	32,9	33,8	37,0	35,4
Schoolslag	43,4	33,1	42,2	34,7	41,8
Vlinderslag	33,3	28,5	38,9	30,4	33,6
Vrije slag	29,2	26,4	29,6	28,5	31,1

Oefening: Vervolg

1. Gebruik de binaire beslissingsvariabelen $x_{i,j}$, waarbij $x_{i,j} = 1$ betekent dat "slag" i gezwommen wordt door "zwemmer" j. Bijvoorbeeld $x_{1,2} = 1$ betekent dat Liam rugslag voor zijn rekening neemt.
2. Hoe druk je uit dat de tijd van het beste team minimaal is? Gebruik $t_{i,j}$ om aan te geven wat de tijd is zwemmer j voor de slag i.
3. Druk uit dat elke slag door juist één zwemmer wordt gezwommen.
4. Druk uit dat elke zwemmer hoogstens één slag mag zwemmen. Merk op dat één zwemmer buiten de ploeg zal vallen.

Los het probleem op m.b.v. Excel-solver en formuleer je advies aan de coach.

Oefening: Klassiek Arbeidsplanningprobleem

Een restaurant is zeven dagen per week open. Men wil op elk van de zeven dagen minimaal het volgende aantal personeelsleden aan het werk hebben in het restaurant:

Dag	Ma	Di	Woe	Do	Vr	Zat	Zo
Aantal	14	13	15	16	19	18	11

Het werkregime is zodanig dat een arbeider steeds 5 dagen werkt en daarna (verplicht) twee dagen thuis is. Dit patroon zet zich (oneindig) door.

Vind het minimaal aantal personeelsleden dat nodig is om aan de bestaffingsvereisten van het restaurant te voldoen. Stel hiertoe eerst het wiskundig model op en los dit vervolgens op m.b.v. een softwarepakket.

Tip: denk goed na over de *betekenis* van je beslissingsvariabelen. Wanneer je de (voor de hand liggende) keuze zou gebruiken die zegt dat x_i het aantal personeelsleden is dat werkt op dag i, dan wordt het zeer moeilijk om het model op te stellen.

Oefening

Stel dat in een bepaalde regio met 5 steden brandweercentrales gevestigd moeten worden. Elke stad is een potentiële vestigingsplaats voor een brandweercentrale. Het is vereist dat elke stad op hoogstens 10 minuten reistijd ligt van een brandweercentrale. In de tabel hieronder worden de reistijden in minuten tussen elk paar steden gegeven.

Van \Naar	Stad 1	Stad 2	Stad 3	Stad 4	Stad 5
Stad 1	0	11	12	9	15
Stad 2	11	0	14	12	10
Stad 3	9	8	0	15	12
Stad 4	10	12	15	0	13
Stad 5	17	12	10	13	0

Oefening: vervolg

Merk op dat de reistijden niet symmetrisch zijn. Het duurt bv. 12 minuten om van stad 1 naar stad 3 te reizen, maar omgekeerd duurt het slechts 9 minuten.
Men wil zo weinig mogelijk brandweercentrales plaatsen zodanig dat aan de reistijdvoorwaarden wordt voldaan. Stel het wiskundig model op voor dit probleem (en los het op), i.e. hoeveel brandweerkazernes zijn nodig en waar moeten ze worden geplaatst?