UNIVERSITÉ ABDELHAMID IBN BADIS-MOSTAGANEM

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET L'INFORMATIQUE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE

Mémoire de Licence

Spécialité : Controle et Analyse de Systeme(CAS)

Thème

Positivité des matrices

Présenté par

Mustapha Refai

Soutenu le 23 /05/2015

Devant le jury

Mohand Ouldali	**Encadreur**	**U. MOSTAGANEM.**
	Examinateur	**U. MOSTAGANEM.**

Table des matières

Chapitre 1

Rappel de notion nécessaires

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1.1 *On dit que un corps* $\Bbbk$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) *est un* $\Bbbk$*.espace vectoriel est l'ensemble non vide* E *formé des vecteures qui contient forcément* $u = 0_E$ *muni :*

– d'une loi d'addition sur un ensemble E est une application

$$+ : E \times E \to E$$
$$(u, v) \to u + v$$

– d'une loi de multiplication par un scalaire sur un ensemble E est une application

$$\cdot : \Bbbk \times E \to E$$
$$(\lambda, u) \to \lambda u$$

qui verifier les axiomes suivant :

$$\forall\,(u, v, w) \in E^3$$

1) $u + v = v + u$	(commutativité)
2) $u + (v + w) = (u + v) + w$	(Associativité)
3) $\exists 0_E \in E : u + 0_E = u$	(élèment neutre)
4) $\exists u' \in E : u' + u = 0_E$	(symétrique)

ces quatre premiers propriétés sont de $(E, +)$ un groupe abélien.

et $\forall \lambda, \mu \in \Bbbk$, $\forall u, v \in E$ on a :

5) $1 \cdot u = u$
6) $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7) $\lambda (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8) $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Exemple 1.1.1

i) posons $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$,$\forall n \geq 1$ est $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

iii) l'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{k})$des matrices à coéfficiant dans $\mathbb{k}$ est un $\mathbb{k}$ espace vectoriel.

1.2 Application linéaire

Définition 1.2.1 *soient E,F deux espace vectoriel sur $\mathbb{k}$,on appelle l'application f :$E \to F$,est une application linéaire si elle vérifier :*

1) $f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \forall u, v \in E$

2)$f(\lambda u) = \lambda f(u) \qquad \forall u \in E \ , \forall \lambda \in \mathbb{k}$

Définition 1.2.2 *soit E, F deux espace vectoriel de $\mathbb{k}$ on dit que f :$E \to F$ est une application linéaire si et seulement si $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \qquad \forall (u, v) \in E^2$,$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}$*

Définition 1.2.3 *soient E, F deux $\mathbb{k}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ est une application linéaire Le noyau de f noté par $ker(f)$ est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image est 0_F.*

c'est à dire : $ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0_F\}$ autrement dit :$ker(f) = f^{-1}(0_F)$.

On appelle l'image de f l'ensemble noté par $Im(f)$ Telle que :

$$Im(f) = f(E) = \{v \in f : \exists u \in E, u = f(v)\}.$$

1.3 Les matrices

Définition 1.3.1 *On appelle une matrice A de coéfficient dans $\mathbb{k}$ ($\mathbb{R} ou \mathbb{C}$) le tableau réctangulaire à $'n'$lignes et $'m'$ colonne représenté par :*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathbb{k} \quad i = \overline{1, n} \quad ; j = \overline{1, m}$$

Proposition 1.3.1

› L'ensmble des matrices à $'n'$ lignes et $'m'$ colonne et à coefficient dans $\mathbb{k}$ noté par $M_{n,m}(\mathbb{k})$

› si n=m on appelle A est une matrice cerrée et on la note $M_n(\mathbb{k})$.

› si n=1 on parle de matrices lignes (vecteur ligne).

› si m=1 on parle de matrices colonnes (vecteur colonne).

Exemple 1.3.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

1.3.1 Opération sur les matrices

Addition

Définition 1.3.2 *soient* $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et* $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ *deux matrices de même taille.*

On définie $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ est la somme de deux matrices A et B $(C = A + B)$ telle que : $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = \overline{1,n} \qquad j = \overline{1,m}$

2) $\forall A \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ et $\forall B \in M_{p,q}(\mathbb{k})$, il existe la somme directe de A et B noté $A \oplus B$ définie par :

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & ... & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ -6 & 7 & 3 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Exemple 1.3.2 *soient* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *et* $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$

donc $C = A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & -2+9 \\ 0+6 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$

1) La somme des matrices est commutative $\forall A, B \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ $A + B = B + A$

2) La somme des matrices est assosiative $\forall A, B, C \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ $(A + B) + C = A + (B + C)$

3) La matrice nulle $0_{n,m}(\mathbb{k})$ est l'élément neutre pour l'addition dans $M_{n,m}(\mathbb{k})$:

$\forall A \in M_{n,m}(\mathbb{k})$,$A + 0_{n,m}(\mathbb{k}) = 0_{n,m}(\mathbb{k}) + A = A$

produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.3.3 *soit* $A \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{k}$ *, on définie la matrice*$[\alpha a_{ij}]_{i,j=1}^{n,m} \in M_{n,m}(\mathbb{k})$ *est le produit de la matrice* A *par* α *formée en multipliant chaque coefficient de* A *par* α *et on la not* αA

Exemple 1.3.3 *soient* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ *et* $\alpha = 3$ *alors* $\alpha A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 6 & -3 & -9 \end{bmatrix}$

Proposition 1.3.2 *soit* $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$ *,* $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{k})$

1) $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$

2) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

Produit

Définition 1.3.4 *soient* $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n,p} \in M_{n,p}(\mathbb{k})$ *et* $B = [b_{ij}]_{i,j=1}^{p,q} \in M_{p,q}(\mathbb{k})$ *, alors le produit* $C = AB$ *est la matrice* $C = [c_{ij}]_{i,j=1}^{n,q} \in M_{n,q}(\mathbb{k})$ *dont les coefficient* c_{ij} *sont définie par :*$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \quad \forall i = \overline{1,n}$,$\forall j = \overline{1,q}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 0 + 0 \times 6 & 1 \times 5 + 0 \times 3 \\ 2 \times 0 + (-1) \times 6 & 2 \times 5 + (-1) \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$$

1) Le produit matricielle n'est pas commutative $AB \neq BA$.

2) $AB = 0 \nRightarrow A = 0 \vee B = 0$.

3) $AB = AC \nRightarrow B = C$.

4) Le produit matricielle est associative $A(BC) = (AB)C$.

5) $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C) A = BA + CA$,distributivité du produit par rapport à la somme.

1.4 Déterminant

Soit $A \in M_n(\mathbb{k})$, on définie le déterminant de A noté $\mid A \mid$ $(det(A))$ telle que$\mid A \mid \in \mathbb{k}$ est :

1) Si $A = [a] \Longrightarrow \mid A \mid = a$.

2) Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Longrightarrow \mid A \mid = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$

3) Si $A \in M_n(\mathbb{k})$ avec $n \geq 3$ on choisit une ligne quelconque 'i 'et on dévloppe de la manière suivant :$\mid A \mid = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \mid A_{ij} \mid = a_{11} \mid A_{11} \mid - a_{12} \mid A_{12} \mid + \ldots + (-1)^{i+j} a_{1n} \mid A_{1n} \mid$,avec A_{ij} est la matrice obtenue en éléminant la ligne 'i ' et la collonne 'j ' .

Exemple 1.4.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mid A \mid = 2$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mid B \mid = -6$

Proposition 1.4.1 (*déterminant d'une matrice triangulaire*) :

Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure ,c'est à dire : $t_{i,j} = 0$ si $i \rangle j$. Alors :

$$\begin{vmatrix} t_{1,1} & \dots & \dots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{vmatrix} = t_{1,1} \times t_{2,2} \times \dots \times t_{n,n}$$

Le produit des coéfficients diagonaux .En particulier , $|I_n| = 1$

1.5 Forme bilinéaire symétrique

Définition 1.5.1 *soit E un $\Bbbk$ espace vectoriel de dimension finie,une application*

$$b : E \times E \to \Bbbk$$
$$(x, y) \to b(x, y)$$

est dit une forme bilinéaire sur l'espace E quand :

$$\forall x_1, x_2, y \in E \qquad \forall \lambda \in \Bbbk \qquad b(x_1 + \lambda x_2, y) = b(x_1, y) + \lambda b(x_2, y)$$

$$\forall x, y_1, y_2 \in E \qquad \forall \lambda \in \Bbbk \qquad b(x, y_1 + \lambda y_2) = b(x, y_1) + \lambda b(x, y_2)$$

(bilinéarité = linéarité à gauche + linéarité à droite)

et on dit que b est symétrique quand

$$\forall x, y \in E \qquad b(x, y) = b(y, x)$$

Remarquer que la symétrie permet de ne vérifier la linéarité que d'un seul côté.

Exemple 1.5.1

1- $E = \Bbbk$ la multiplication $(x,y) \to xy$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\Bbbk \times \Bbbk$.

2- $E = \mathbb{R}^2$ le produit scalaire usuel

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \to x_1y_1 + x_2y_2$$

est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

1.6 Les formes quadratiques

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corp commutatif $\Bbbk$.

Définition 1.6.1 *une forme quadratique q sur E est une application $q : E \to \Bbbk$, telle que :*

¡) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$ $\forall \lambda \in \Bbbk$ et $\forall x \in E$

¡¡) L'application $f : E \times E \to \Bbbk$ définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

soit une forme bilinéaire symétrique,qu'on appelle la forme polaire de la forme quadratique q.

›Un espace vectoriel E muni d'un forme quadratique est appelé espace quadratique,on le note (E, q).

Proposition 1.6.1 *Si b est une forme bilinéaire symétrique , alors l'application $q : E \to \Bbbk$ définie par :*

$q(x) = b(x,x)$ est une forme quadratique dont la forme polaire est égale à f, on l'appelle la forme quadratique associée à f .

° La forme quadratique q est dit associée à la forme bilinéaire symétrique b .

Exemple 1.6.1 $x \to x^2$ *(sur $\Bbbk$) est une forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique.*

Chapitre 2

Théorème de Sylvester

2.1 Théorème

Pour qu'une matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$,réelle symétrique , soit définie positive, il faut et suffit que les n matrices $A_p = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ pour p de 1 à n , aient leur déterminant strictement positif , autrement dit que les n mineurs principaux dominants soient strictement positifs.

Preuve.

Notons q la forme quadratique associée à A ,définie par $q(x) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_ix_j$.

La conditoin est nécessaire. On remarque d'abord que si q est définie positive, alors $\det A > 0$. En effet , par rapport à une base orthogonale pour cette forme quadratique (il en existe , d'après la réduction de Gauss), la matrice de q s'écrit $diag(c_1, \ldots, c_n)$ les c_i étant tous strictement positifs. Alors $c_1 \ldots c_n = (\det A)(\det Q)^2$ (Q étant la matrice de passage), donc $\det A > 0$. Le résultat s'ensuit, en appliquant le même raisonnement à la restriction de q aux sous-espaces $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$, pour $1 \leq k \leq n-1$.

Montrons maintenant que la condition est suffisante. On procède par récurrence sur la dimension . Pour $n = 0$ c'est évident puisqu'en dimension 0 l'ensemble des vecteurs non nuls est vide. Supposons la propriété vraie pour $n-1$ et notons $E = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Par hypothèse de récurrence, $q_{|E}$ est définie positive. De plus, q est non dégénérée (parce que le déterminant de A est non nul) donc

$$\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp \; avec \; E^\perp = 1$$

Soient e un vecteur non nul de $E^{\perp}$ et $a = q(e)$. Alors $\det A$ et $\det A_{n-1}$ ont même signe d'après le même argument que dans la première partie (qui met implicitement en jeu le discriminant), or par hypothèse $\det A$ et $\det A_{n-1}$ sont strictement positifs. Donc $a > 0$, si bien que la restriction de q à $E^{\perp}$ est, elle aussi, définie positive, ce qui montre que q est définie positive. $\square$

2.2 Programme

Ce programme est fait pour tester si la matrice $M_{n,n}$ est définie positive ou non .

Algorithme

$fonction\,(test)$

si positive $\longleftarrow (oui = 1)$

$pour\ i \longleftarrow 1$ à $\dim(M)$

$si\ \det(M_{ii}) \leq 0$

si positive $\longleftarrow (non = 0)$

$stop$

$fin\ si$

$fin\ pour$

Programme sur Matlab

$function\ test = test\,(M)$ # déclarer une fonction est nomée «test».

si positive $= true$;

$for\ \ i = 1 : length\,(M)$ # une boucle «for» de 1 jusqu'à la taille de la matrice .

$if\,(\det(M\,(1:i, 1:i)) \leq 0)$ # tester les mineurs principaux dominanats de la matrice.

si positive $= false$;

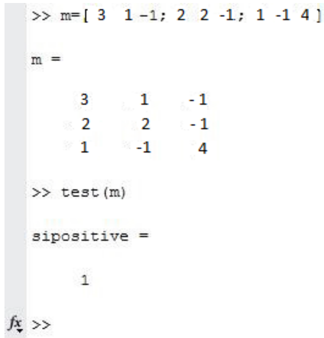
$break$; # stop et fin ce programme si la condition précédent est vérifier .

end

end

si positive

Exemple 2.2.1 *Soit la matrice* $m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ *est définie positive car :*



```
>> m=[ 3  1 -1; 2  2 -1; 1 -1 4 ]

m =

     3     1    -1
     2     2    -1
     1    -1     4

>> test(m)

sipositive =

     1

>>
```

$\det(3) = 3 \succ 0$

$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 4 \succ 0$

$\det(m) = 16 \succ 0$

Si on le testé sur Matlab on obtient FIG. 2.1.

Chapitre 3

Relations binaires

Définition 3.0.1 ($relation\ binaire$). *Soit* E *un ensemble. Une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur* E *est un sous-ensemble de* $E \times E$. *On note* $x\mathcal{R}y$ *pour signifier que* $(x,y) \in \mathcal{R}$ *et* $x\mathcal{R}'y$ *pour signifier que* $(x,y) \notin \mathcal{R}$.

3.1 Relation d'ordre

Définition 3.1.1 *On dit qu'une relation binaire* $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est une relation d'ordre si et seulement si :*

1) $\mathcal{R}$ est réflexive , i.e. : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
2) $\mathcal{R}$ est transitive , i.e. : $\forall x,y,z \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Longrightarrow (x\mathcal{R}z)$
3) $\mathcal{R}$ est antisymétrique, i.e. : $\forall x,y \in E,\ (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Longrightarrow (x = y)$

$(E,\mathcal{R})$ est alors appelé ensemble ordonné.

Exemple 3.1.1 : *un ensemble de nombres , la relation* $\leq$ *est une relation d'ordre.*

3.2 Ordre total

Définition 3.2.1 *Un ordre* (*ou une relation d'ordre*) *sur* E *est dit total si et seulement si :*

$$\forall x,y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

- Un ordre qui n'est pas total est dit partiel.

3.3 Théorème (relation d'ordre sur $M_n(\mathbb{C})$)

On définit sur $M_n(\mathbb{C})$, la relation $A\mathcal{R}B$ ssi $(B-A)$ est définie positive .

Preuve.

Soit $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre partiel.

1) Réflexivité : $A\mathcal{R}A \ ,\forall\ A\in M_n(\mathbb{C})$

$$\langle (A-A)\,x,x\rangle = \left\langle 0_{M_n(\mathbb{C})}x,x\right\rangle = 0 \geq 0$$

2) Antisymétrie : On veut montrer que : $(\ A\mathcal{R}B \ \wedge\ B\mathcal{R}A\ ) \implies A=B$ $\forall A,B\in M_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ \wedge \\ B\mathcal{R}A \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} (A-B) \text{ définie positive} \\ \wedge \\ (B-A) \text{ définie positive} \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \langle (A-B)\,x,x\rangle \geq 0 \\ \wedge \\ \langle (B-A)\,x,x\rangle \geq 0 \end{cases} \Big/ \ \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \langle (A-B)\,x,x\rangle \geq 0 \\ \wedge \\ -\langle (B-A)\,x,x\rangle \leq 0 \end{cases} \Big/ \ \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \langle (A-B)\,x,x\rangle \geq 0 \\ \wedge \\ \langle (A-B)\,x,x\rangle \leq 0 \end{cases} \Big/ \ \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \langle (A-B)\,x,x\rangle = 0 \qquad \forall x\in E \\
&\Longrightarrow (A-B)\,x = 0 \\
&\Longrightarrow Ax = Bx \\
&\Longrightarrow A = B
\end{aligned}$$

3) Transitivité : $(\ A\mathcal{R}B \ \wedge\ B\mathcal{R}C\ ) \implies A\mathcal{R}C \quad \forall A,B,C\in M_n(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} A\mathcal{R}B \\ \wedge \\ B\mathcal{R}C \end{cases} &\Longrightarrow \begin{cases} \langle (A-B)\,x,x\rangle \geq 0 \\ \wedge \\ \langle (B-C)\,x,x\rangle \geq 0 \end{cases} \qquad \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \langle (Ax-Bx)\,,x\rangle + \langle (Bx-Cx)\,,x\rangle \geq 0 \qquad \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \langle (Ax-Bx)+(Bx-Cx)\,,x\rangle \geq 0 \qquad \forall x\in E \\
&\Longrightarrow \langle (A-C)\,x,x\rangle \geq 0 \qquad \forall x\in E \\
&\Longrightarrow A\mathcal{R}C
\end{aligned}$$

3.4 Majorant minimal

Définition 3.4.1 *T est un majorant minimal de (A,B) ssi* $\ker(T-A)\cap\ker(T-B)=\{0\}$.

Exemple 3.4.1 *Soit A et B ,T troix matrices de $M_2(\mathbb{R})$*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

T est un majorant minimal de (A, B) car :

$$T - A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$i)$Soit $(x, y) \in \ker(f_{T-A})$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{1}{4}y \\ x = -\frac{5}{2}y \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \ker(f_{T-A}) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$ii)$Soit $(x, y) \in \ker(f_{T-B})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Longrightarrow \ker(f_{T-B}) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

donc d'apré $i)$ et $ii)$:

$$\ker(f_{T-A}) \cap \ker(f_{T-B}) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Bibliographie

[1] Dr. Mohand Ouldali

[2] Dr Philipe G. Ciarley, Intoduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation , Paris 1988, p.26.

[3] Relations d'ordre L2 .pdf

[4] Algèbre linéaire_cours.