Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abdelhamid Ben Badis de Mostaganem
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique
Département de Mathématiques et Informatique

EXAMEN LaTeX

Master Académique

Université de Mostaganem

Spécialité "Modélisation, Contrôle et Optimisation"

Analyse Des Systèmes Dynamiques

Par **Refai Mustapha**

Professeur : **Omar Belhamiti (Université de Mostaganem, Algérie)**

23 Avril 2017

Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées
Faculté des Sciences Exactes et de l'Informatique (FSEI)
Chemin des Crêtes (Ex-INES), 27000 Mostaganem, Algérie

Table des matières

Table des figures

1 Analyse des systèmes dynamiques

Dans cette partie, on se limite aux systèmes différentielles (linéaire et non linéaire) autonormes de dimension 2.
On appelle trajectoires c'est la courbe paramétrique décrite dans le plan par une solution $(x(t), y(t))$, quand t varie.

1.1 Trajectoires et points stationnaires

On rappel qu'un système différentielle est dite autonorme si les coêfficients des équations du système ne dépend pas de temps.
On considère un système différentielle autonorme en dimension 2 suivant :

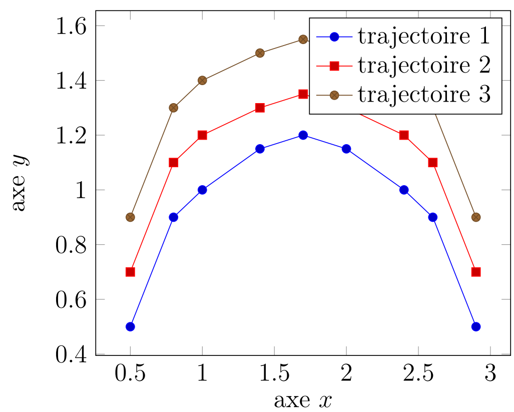
$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Où les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réels.
On suppose que le système vérifier les hypothèses du théorème de l'existence et l'unicité pour tout couple (x_0, y_0) avec t_0 donné. Il existe une solution $s(t) = (x(t), y(t))$ et une seul vérifiant la solution $s_0 = (x_0, y_0)$. Un point stationnaire $\mu^* = (x^*, y^*)$ est un point qui vérifier :

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

La fonction constante $s^* = (x^*, y^*)$ est une solution du système donc c'est une trajectoire parce que par chaque point passe une trajectoires.

Définition 1.1.1 (Trajectoires et points stationnaires) *On appelle un portrait de phase d'un système différentielle l'ensemble de ses trajectoires .*



On va d'abord étudier le portrait de phase des systèmes linéaires homogènes à coêfficients constants .

▷ Considérons un système différentielle de la forme

$$\boxed{X' = AX}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

c.à.d :

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

telle que :

$$\mathbf{X(t)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Chaque solution $(x(t), y(t))$ est une trajectoire, le point $(0,0)$ est toujours un point stationnaire (on appelle aussi un point critique, point d'équilibre).
Dans la suite, on va étudier selon la classification due à `Henri Point Carré`,le type des portraits de phase d'un système linéaire en fonction du type de valeurs propres de la matrice **A**.

1. Si **A** possède deux valeurs propres réelles positives $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Alors le point $(0,0)$ est un nœud instable .

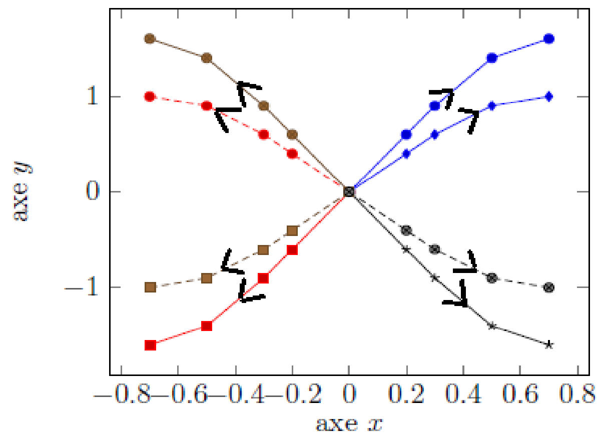


FIGURE 1 – représente un nœud instable .

Exemple 1.1.2 *Étudier le type des portraits de phase du système linéaire suivante*

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

La solution

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= -\lambda(3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \tag{1}$$

D'après (1) ;Le discriminant Δ est égal : $1 > 0$. Donc A possède deux valeurs propres distincts λ_1 et λ_2

$$det(A) = \lambda_1.\lambda_2 \quad = 2 > 0 \tag{2}$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3 > 0 \tag{3}$$

D'après (2) et (3) en déduire que $\lambda_1 > 0 \ et \ \lambda_2 > 0$

◇ Alors le point $(0,0)$ est un nœud instable .

2. Si $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres réelles négatives $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Alors le point $(0,0)$ est un nœud stable .

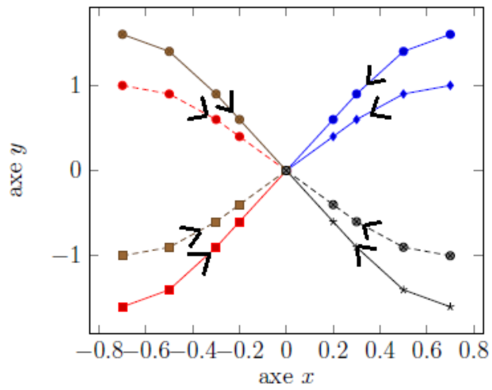


FIGURE 2 – représente un nœud stable .

Exemple 1.1.3 *On considère le système suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -2x(t) - 3y(t) \end{cases}$$

La solution

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= -\lambda(-3-\lambda) + 2 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \tag{4}$$

D'après (4) ; Le discriminant Δ est égal : $1 > 0$. Donc $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres distincts λ_1 et λ_2

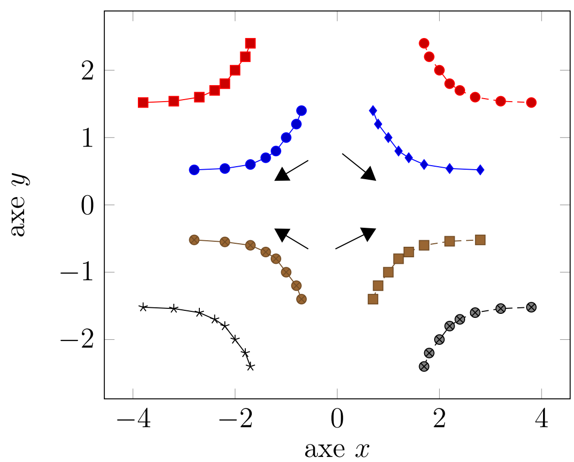
$$det(A) \quad = \lambda_1.\lambda_2 \quad = \quad 2 > 0 \tag{5}$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = -3 < 0 \tag{6}$$

D'après (5) et (6) en déduire que $\lambda_1 < 0$ *et* $\lambda_2 < 0$

- ◇ Alors le point $(0,0)$ est un nœud stable .

3. Si la matrice $\mathbf{A}$ possède deux valeurs propres réelles $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, Alors le point stationnaire $(0,0)$ est un col (ou selle) .



Exemple 1.1.4

$$\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

La solution

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= (-2-\lambda)(-4-\lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda - 5 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0 \tag{7}$$

D'après (7) ; Le discriminant $\Delta > 0$. Donc A possède deux valeurs propres réelles λ_1 et λ_2

$$det(A) = \lambda_1.\lambda_2 = -5 < 0 \tag{8}$$

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 > 0 \tag{9}$$

D'après (8) et (9) en déduire que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

- $\diamond$ Alors le point $(0,0)$ est un col .

4. Si la matrice A possède deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \alpha + \beta_i \quad et \quad \lambda_2 = \alpha - \beta_i$$

Alors :

Cond. 1. Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0,0)$ est un foyet instable

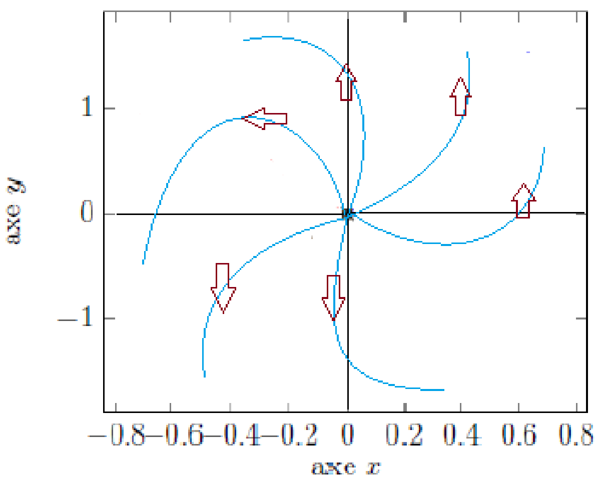


FIGURE 3 – représente un foyer instable .

Cond. 2. Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0, 0)$ est un centre.

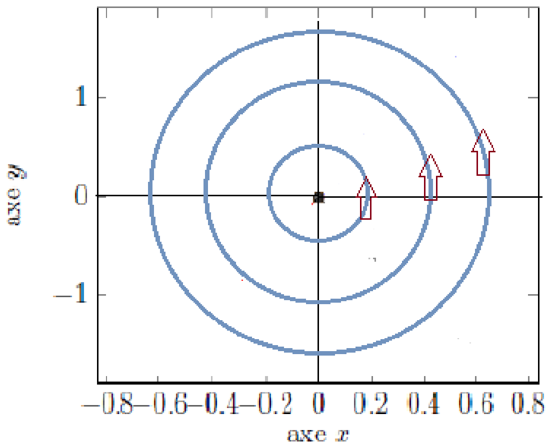


FIGURE 4 – représente un centre .

Cond. 3. Si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$, le point stationnaire $(0, 0)$ est un foyet stable

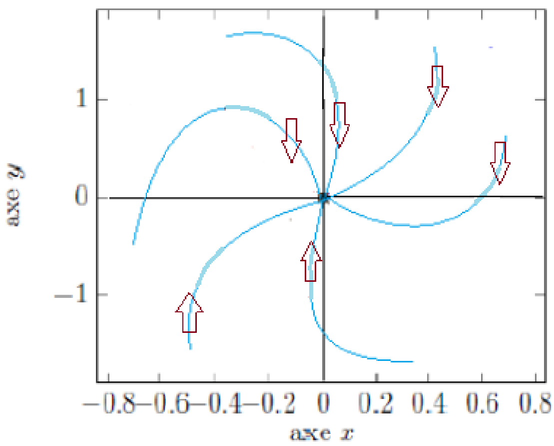


FIGURE 5 – représente un foyet stable .

Exemple 1.1.5

$$\begin{cases} x'(t) = \quad x(t) + y(t) \\ y'(t) = -4x(t) + y(t) \end{cases}$$

La solution

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les valeurs propres de la matrice A :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 5 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \tag{10}$$

D'après (10) ; Le discriminant $\Delta < 0$. Donc A possède deux valeurs propres complexes conjuguées λ_1 et λ_2

$$trace(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 > 0 \tag{11}$$

D'après (11) en déduire que $\alpha > 0$

◇ Alors le point $(0, 0)$ est un foyer instable .

1.2 Les points stationnaires pour les systèmes non-linéaire

On considère un système différentielle non-linéaire de la forme :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Où ce système on ne peut pas écrire sous la forme $X' = AX$. La aussi les points stationnaire de ce système sont donnée par

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Remarque 1.2.1 *Pour faire l'étude de stabilité d'un système non-linéaire il faut linéarisé se système au voisinage des points d'équilibre, pour cela on calcule la jacobienne du système.*

$$\mathbf{J(x, y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.2

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + y^2(t) \\ y'(t) = x(t) - 2y(t) - 3 \end{cases}$$

Les points Stationnaire : $P_1 = (9, 3)$ $\quad P_2 = (1, -1)$

La solution

$$A = J(x^*, y^*)$$

avec (x^*, y^*) le point stationnaire .

$$\mathbf{J(x, y)} = \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} det(A_1) = \lambda_1.\lambda_2 = -4 < 0 \\ tr(A_1) = \lambda_1 + \lambda_2 = -3 < 0 \end{cases} \tag{12}$$

D'après (12) en remarque que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

◇ Alors le point P_1 est un col (selle) .

.

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} det(A_2) & = & \lambda_1.\lambda_2 & = & 4 > 0 \\ trace(A_2) & = & \lambda_1 + \lambda_2 & = & -3 < 0 \end{cases} \tag{13}$$

D'après (13) en remarque que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

◇ Alors le point P_2 est un nœud stable .

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *On considère le système différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) + y(t) \\ y'(t) = \ \ x(t) + \beta y(t) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$$

Question. 1. *Trouver les conditions d'existence des solutions stationnaires positives .*
Question. 2. *Trouver les conditions de stabilité des ces solutions stationnaires .*

La solution

Réponse. 1.

$$\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ x + \beta y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} y = -\alpha x \\ x = -\beta y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \beta < 0 \end{cases} \quad \underline{Conditions \ \ d'existence}$$

Réponse. 2.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} det(A) = \alpha\beta - 1 = \lambda_1.\lambda_2 > 0 \\ tr(A) = \alpha + \beta = \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta - 1 > 0 \\ \alpha + \beta < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha\beta > 1 \\ \alpha < -\beta \end{cases}$$

Alors les conditions de stabilité de ces solutions stationnaires sont :

1. $\alpha < 0 \ \Rightarrow \ \alpha \in \mathbf{R}_- =]-\propto, 0]$.
2. $\alpha < -\beta \ \Rightarrow \ \alpha \in]-\propto, 0] \cup [0, +\propto[$.

Exercice 1.3.2 *On considère le système différentielle suivante :*

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t)y(t) - x(t) \\ y'(t) = \beta x(t)y(t) + y(t) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$$

Question. 1. *Trouver les conditions d'existence des solutions stationnaires positives .*
Question. 2. *Trouver les conditions de stabilité des ces solutions stationnaires .*

La solution

Réponse. 1.

$$\begin{cases} \alpha xy - x = 0 \\ \beta xy + y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} (\alpha y - 1)x = 0 \\ (\beta x + 1)y = 0 \end{cases}$$

Cas 1. Si $x = 0 \iff y = 0$

Alors : $\boxed{E_0 = (0, 0)}$

Cas 2. Si $\alpha y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{\beta}$

On remplaçant y dans le deuxième équation , on obtient :

$$\beta x \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\beta}$$

Alors : $\boxed{E_1 = (-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})}$

Donc ; les conditions d'existence sont : $\boxed{\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta < 0 \end{matrix}}$

Réponse. 2. Trouvons les conditions de stabilité de ces solutions stationnaires :

$$\begin{cases} f(x,y) = \alpha xy - x = 0 \\ g(x,y) = \beta xy + y = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{J(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y - 1 & \alpha x \\ \beta y & \beta x + 1 \end{pmatrix}$$

⋆ Pour $E_0 = (0,0)$:

$$\mathbf{A} = J(E_0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} det(J(E_0)) & = & -1 < 0 \\ trace(J(E_0)) & = & 0 \end{cases}$$

Le déterminant de **A** est négative .

▷ **Alors** $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, peut dire que le point Stationnaire E_0 n'est pas stable .

⋆ Pour $E_1 = (-\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha})$:

$$\mathbf{A} = J(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha}{\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} det(J(E_1)) = 1 > 0 \\ trace(J(E_1)) = 0 \end{cases}$$

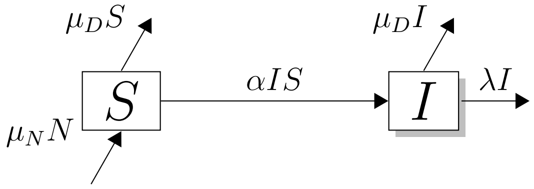
$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda I) \\ &= \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -1$$

Donc : $\lambda = \pm 1$

▷ **Alors** ; le point stationnaire E_1 est un centre,donc on ne peut pas parler de stabilité.

Exercice 1.3.3 *Soit une maladie donnée représentée par le diagramme suivante :*



Tel que le modèle mathématique qui représente ce diagramme est :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha IS + \mu_N N - \mu_D S \\ I'(t) = \alpha IS - \mu_D - \lambda I \end{cases}$$

avec : $\alpha, \mu_N, \mu_D, \lambda > 0 \qquad S, I > 0$

Question. 1. Trouver les conditions d'existence des solutions stationnaires positives .

Question. 2. Trouver les conditions de stabilité des ces solutions stationnaires .

La solution

.

Réponse. 1.

$$\left\{\begin{array}{lcl} S'(t) & = & 0 \\ I'(t) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -\alpha IS + \mu_N N - \mu_D S & = & 0 \\ (\alpha S - \mu_D - \lambda)I & = & 0 \end{array}\right. \tag{14}$$

D'après le deuxième équation du système (14).

Cas 1. Si $I = 0 \Rightarrow S = \frac{\mu_N}{\mu_D}N$

.

Alors : $\boxed{E_0 = \left(\frac{\mu_N}{\mu_D}N, 0\right)}$

.

Cas 2. Si $S = \frac{\lambda+\mu_D}{\alpha} \Rightarrow I = \frac{\mu_N}{\mu_D+\lambda}N - \frac{\mu_D}{\alpha}$

.

Alors : $\boxed{E_1 = \left(\frac{\lambda+\mu_D}{\alpha}, \frac{\mu_N}{\mu_D+\lambda}N - \frac{\mu_D}{\alpha}\right)}$

.

Réponse. 2. Trouvons les conditions de stabilité de ces solutions stationnaires :

$$\mathbf{J(S,I)} = \begin{pmatrix} -\alpha I - \mu_D & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - \mu_D - \lambda \end{pmatrix}$$

⋆ Pour $E_0 = (\frac{\mu_N}{\mu_D}N, 0)$:

$$\mathbf{J(E_0)} = \begin{pmatrix} -\mu_D & -\alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N \\ 0 & \alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N - \mu_D - \lambda \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant et la trace de cette matrice :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} det(J(E_0)) & = & -\alpha\mu_N N + \mu_D^2 + \lambda\mu_D & > & 0 \\ trace(J(E_0)) & = & -2\mu_D + \alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N - \lambda & < & 0 \end{array}\right. \tag{15}$$

D'après le système (15) on construit deux conditions sont :

.

Cond 1. $\boxed{\mu_D + \lambda > \alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N}$

Cond 2. $\boxed{\alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N < \lambda + 2\mu_D}$

.

Pour E_0 soit stable il faut que :

$$\boxed{\mu_D + \lambda > \alpha\frac{\mu_N}{\mu_D}N}$$