Curso de Habilidades Matemáticas para el Examen de Admisión

Listas de ejercicios

Primera edición

TC-732

2025

1. Aritmética

1.1. Operaciones con enteros

1. Resuelva las siguientes sumas mentalmente:

(a) $4+7=$
(b) $5+9=$
(c) $1+7=$
(d) $13+8=$
(e) $3+6=$
(f) $16+6=$
(g) $7+89=$
(h) $15+4=$
(i) $2+149=$
(j) $5+18=$
(k) $6+72=$
(l) $54+9=$
(m) $14+6=$
(n) $35+97=$
(o) $92+8=$
(p) $8+37=$
(q) $15+16=$
(r) $5+43=$
(s) $12+34=$
(t) $13+17=$
(u) $7+43=$
(v) $28+7=$
(w) $15+90=$
(x) $9+43=$
(y) $6+104=$
(z) $8+14=$
(aa) $8+82=$
(ab) $9+12=$
(ac) $7+67=$
(ad) $9+23=$
(ae) $2+926=$
(af) $12+35=$
(ag) $213+77=$
(ah) $2+247=$
(ai) $120+19=$
(aj) $34+6=$
(ak) $6+39=$

2. Resuelva las siguientes restas mentalmente

(a) $9-2=$
(b) $14-4=$
(c) $8-5=$
(d) $7-6=$
(e) $13-6=$
(f) $22-4=$
(g) $67-5=$
(h) $31-8=$
(i) $56-32=$
(j) $87-15=$
(k) $100-19=$
(l) $35-29=$
(m) $39-24=$
(n) $97-40=$
(o) $405-29=$
(p) $56-39=$
(q) $35-23=$
(r) $86-43=$
(s) $265-130=$
(t) $112-40=$
(u) $256-12=$
(v) $646-70=$
(w) $818-13=$
(x) $232-45=$
(y) $229-20=$
(z) $133-43=$
(aa) $357-46=$
(ab) $485-24=$
(ac) $448-15=$
(ad) $492-77=$
(ae) $272-81=$
(af) $153-32=$
(ag) $114-23=$
(ah) $265-51=$
(ai) $148-17=$
(aj) $358-88=$
(ak) $417-18=$
(al) $292-41=$
(am) $487-30=$
(an) $399-33=$
(ao) $488-68=$
(ap) $426-36=$
(aq) $60-33=$
(ar) $323-51=$
(as) $425-26=$
(at) $259-95=$
(au) $293-23=$
(av) $276-41=$
(aw) $340-44=$
(ax) $386-67=$
(ay) $176-72=$
(az) $370-48=$
(ba) $273-43=$
(bb) $301-62=$
(bc) $390-50=$

3. Resuelva los siguientes productos (multiplicaciones) mentalmente

(a) $1 \cdot 12 =$
(b) $2 \cdot 7 =$
(c) $3 \cdot 8 =$
(d) $7 \cdot 7 =$
(e) $4 \cdot 3 =$
(f) $1 \cdot 9 =$
(g) $\cdot 8 =$
(h) $4 \cdot 4 =$
(i) $4 \cdot 7 =$
(j) $3 \cdot 6 =$
(k) $1 \cdot 67 =$
(l) $9 \cdot 7 =$
(m) $6 \cdot 6 =$
(n) $4 \cdot 7 =$
(o) $5 \cdot 3 =$
(p) $5 \cdot 1 =$
(q) $7 \cdot 7 =$
(r) $4 \cdot 6 =$
(s) $6 \cdot 5 =$
(t) $11 \cdot 11 =$
(u) $6 \cdot 2 =$
(v) $7 \cdot 5 =$
(w) $9 \cdot 6 =$
(x) $11 \cdot 4 =$
(y) $5 \cdot 6 =$
(z) $9 \cdot 4 =$
(aa) $7 \cdot 5 =$
(ab) $5 \cdot 5 =$
(ac) $3 \cdot 8 =$
(ad) $8 \cdot 7 =$
(ae) $4 \cdot 9 =$
(af) $8 \cdot 4 =$
(ag) $9 \cdot 7 =$
(ah) $7 \cdot 3 =$
(ai) $8 \cdot 2 =$
(aj) $2 \cdot 15 =$
(ak) $2 \cdot 7 =$
(al) $9 \cdot 4 =$
(am) $4 \cdot 3 =$
(an) $5 \cdot 9 =$
(ao) $4 \cdot 8 =$
(ap) $9 \cdot 3 =$
(aq) $7 \cdot 8 =$
(ar) $2 \cdot 13 =$
(as) $2 \cdot 3 =$
(at) $7 \cdot 4 =$
(au) $2 \cdot 5 =$
(av) $5 \cdot 8 =$
(aw) $7 \cdot 12 =$
(ax) $5 \cdot 6 =$
(ay) $11 \cdot 12 =$

4. Resuelva las siguientes divisiones mentalmente

(a) $8 \div 2 =$
(b) $6 \div 2 =$
(c) $9 \div 3 =$
(d) $120 \div 4 =$
(e) $48 \div 6 =$
(f) $10 \div 2 =$
(g) $48 \div 3 =$
(h) $36 \div 3 =$
(i) $76 \div 4 =$
(j) $24 \div 4 =$
(k) $14 \div 7 =$
(l) $21 \div 7 =$
(m) $36 \div 9 =$
(n) $44 \div 4 =$
(o) $14 \div 2 =$
(p) $21 \div 3 =$
(q) $54 \div 6 =$
(r) $81 \div 9 =$
(s) $15 \div 3 =$
(t) $26 \div 2 =$
(u) $309 \div 3 =$
(v) $48 \div 2 =$
(w) $128 \div 2 =$
(x) $3 \div 3 =$
(y) $85 \div 5 =$
(z) $120 \div 6 =$
(aa) $72 \div 2 =$
(ab) $33 \div 3 =$
(ac) $56 \div 7 =$
(ad) $72 \div 9 =$
(ae) $96 \div 3 =$
(af) $72 \div 8 =$
(ag) $24 \div 6 =$
(ah) $135 \div 5 =$
(ai) $98 \div 2 =$
(aj) $54 \div 6 =$
(ak) $44 \div 4 =$
(al) $21 \div 3 =$
(am) $135 \div 5 =$
(an) $9 \div 9 =$
(ao) $76 \div 4 =$
(ap) $24 \div 4 =$
(aq) $14 \div 7 =$
(ar) $21 \div 7 =$
(as) $128 \div 2 =$
(at) $81 \div 9 =$
(au) $120 \div 5 =$
(av) $36 \div 9 =$
(aw) $15 \div 3 =$
(ax) $75 \div 5 =$
(ay) $120 \div 4 =$
(az) $120 \div 6 =$
(ba) $48 \div 2 =$
(bb) $15 \div 5 =$
(bc) $33 \div 3 =$
(bd) $56 \div 7 =$
(be) $309 \div 3 =$
(bf) $85 \div 5 =$
(bg) $72 \div 2 =$
(bh) $14 \div 2 =$
(bi) $72 \div 8 =$
(bj) $24 \div 6 =$
(bk) $9 \div 9 =$
(bl) $26 \div 2 =$
(bm) $72 \div 9 =$
(bn) $3 \div 3 =$
(bo) $63 \div 7 =$
(bp) $60 \div 5 =$

1.2. Problemas con números enteros

1. Carlos tenía 800 Gapes al inicio del día. Él decidió regalar la mitad del dinero que tuviera en la billetera a cada uno de los sobrinos que llegara a su casa ese día.

   ¿Cuánto dinero le dió Carlos al quinto sobrino que lo visitó? [1]

   A. 200 gapes.
   B. 100 gapes.
   C. 50 gapes.
   D. 25 gapes.

   Solución: Cuando llegó su primer sobrino, le dio $800/2 = 400$ gapes, y le quedaron otros 400. Al segundo, le dió $400/2 = 200$ y le quedaron 200. Al tercero le dió $200/2 = 100$ y le quedaron 100. Al cuarto le dió $100/2 = 50$ y le quedaron 50. Así, al quinto le dió 25 y le quedaron 25.

   En general, vemos que al n-ésimo sobrino le dió $800/2^n$ gapes. □

2. Una persona inició un trabajo a las 3:47 p. m. El trabajo lo terminó la primera vez que la suma de los dígitos que indican la hora y los minutos fue 20.

   ¿Cuántos minutos tardó esa persona para realizar este trabajo? [2]

   A. 172
   B. 192
   C. 212
   D. 232

   Solución: Note que la hora la estamos expresando en forma $a : bc$ con a, b, c dígitos. Además, como los minutos llegan hasta 59 y luego vuelven a 00, $b \leq 5$. Queremos que $a+b+c = 20$, pero queremos que a sea un número cercano después de 3, pues nos dice que la persona terminó el trabajo la *primera* vez que la suma de los dígitos que indican la hora y los minutos fue 20.

   Para que $a = 3$, necesitaríamos que $b + c = 17$, pero como $b \leq 5$, sería necesario que c fuera mayor o igual a 12 y esto no puede suceder. De la misma forma para que $a = 4$, $b + c = 16$, y como $b \leq 5$, $c \geq 11$, de nuevo no se puede.

   En general, note que como $b \leq 5$ y $c \leq 9$, entonces $b + c \leq 14$, así que para que la suma sea 20, a debe ser al menos 6. Si $a = 6$, entonces b debe ser 5 y c debe ser 9. Es decir que la persona termina el trabajo a las 6:59 p. m., por lo que pasaron 3 horas y 12 minutos, es decir $180+12 = 192$ minutos. La respuesta correcta es la B.

   Forma alternativa de hacer el problema: Podemos utilizar las soluciones, sumando esa cantidad de minutos a la hora actual y ver si satisface que la suma de los dígitos es 20:

   A. 172 minutos son 120+52, es decir 2 horas y 52 minutos. Al sumarlo a la hora de inicio, tenemos 3:47 → 5:47 (cuando pasan 2 horas) → 6:00 (cuando pasan 13 minutos más, faltan $52-13 = 39$ minutos) → 6:39 pm. Sumando los dígitos obtenemos 18. Así esta no puede ser.

   B. Hacemos lo mismo: 192 son 3 horas y 12 minutos, que al sumarlo a 3:47, obtenemos 6:59. Estos sí suman 20.

   Note que las otras dos opciones toman más tiempo. Aunque los dígitos sumaran 20 al terminar el trabajo después de esa cantidad de minutos, no sería la primera vez que la suma de los dígitos es 20, pues ya en la opción B. sumaban 20, y ocurre antes. De esta forma, la opción B. debe ser la correcta.

   Por completitud, 3:47 más 212 minutos es 7:19, que no suman 20. 3:47 más 232 es 7:39 que tampoco suman 20. □

3. En una fábrica se empacaron 84 bombillos en varias cajas con 7 bombillos. En cada caja hay más bombillos en perfecto estado que la cantidad de bombillos defectuosos.

   ¿Cuál de las siguientes opciones es imposible que suceda? [3]

   A. Se empacaron 36 bombillos defectuosos.
   B. Se empacaron 48 bombillos en perfecto estado.
   C. Se empacaron más de 40 bombillos defectuosos.
   D. Se empacaron más de 60 bombillos en perfecto estado.

Solución: Lean bien la pregunta. ¿Cuál de las opciones es *imposible* que suceda? No tenemos demasiada información, solo una restricción: en cada caja debe haber más bombillos en perfecto estado (buenos), que malos. Entonces, ¿cuántos bombillos buenos debe haber en cada caja?, ¿Cuántas cajas hay?, ¿Cuántos bombillos buenos debe haber en total? ¿Cuántos bombillos defectuosos (malos)? Responder estas preguntas debería ayudarnos a resolver cuál opción es imposible.

Como cada caja tiene 7 bombillos, y debe haber más bombillos buenos que malos, debe haber al menos cuatro bombillos buenos en cada caja, y máximo 3 bombillos malos, esto pues si hubiesen 4 bombillos malos (o más), para completar los 7 solo quedarían 3 bombillos buenos (o menos), pero tienen que haber más buenos que bombillos malos.

Como $84/7 = 12$, esto quiere decir que los bombillos se dividieron en 12 cajas con 7 bombillos cada una. Como en cada caja hay al menos 4 bombillos buenos, en total debe haber al menos $12 \cdot 4 = 48$ bombillos buenos. Como el total de bombillos es 84 y hay como mínimo 48 bombillos buenos, debe haber como máximo $84 - 48 = 36$ bombillos defectuosos. Así, es *imposible* que se empacaran más de 40 bombillos defectuosos. La opción correcta es la C. □

4. Una profesora tenía 8000 gapes para comprar lápices y borradores. Ella compró 6 lápices para cada uno de sus 4 estudiantes. El número de borradores que compró fue la tercera parte del número de lápices. Cada borrador le costó 125 gapes y cada lápiz, 250 gapes.

   ¿Cuál es una expresión que permite obtener la cantidad de gapes que le sobraron a la profesora? [4]

   A. $8000 - 24 \cdot 250 - 8 \cdot 125$
   B. $8000 - 8 \cdot 250 - 24 \cdot 125$
   C. $8000 - 24 \cdot 250 + 8 \cdot 125$
   D. $8000 + 8 \cdot 250 - 24 \cdot 125$

Solución: En esta pregunta, se nos pide comprender el proceso de hacer un cálculo en varios pasos. Iniciamos con 8000 gapes. La profesora compró 6 lápices para cada uno de sus 4 estudiantes. ¿Cuántos lápices compró? $6 \cdot 4 = 24$ lápices. Compró además la tercera parte del número de lápices. Por tanto, como compró 24 lápices, tuvo que haber comprado $24/3 = 8$ borradores. Cada lápiz costó 250 gapes. Como compró 24, gastó $24 \cdot 250$ gapes. No hacemos el cálculo, porque viendo las opciones de respuesta, son expresiones aún sin calcular que tienen que ver con el dinero inicial (8000) y los precios (250 y 125). Por último, cada borrador costó 125 gapes, y como compró 8, gastó $8 \cdot 125$ en borradores.

Así, tenía 8000 gapes. Compró los lápices por $24 \cdot 250$ y por tanto le quedaron $8000 - 24 \cdot 250$. Luego compró los borradores y por tanto gastó $8 \cdot 125$ gapes más. Por lo tanto, al final le quedaron $8000 - 24 \cdot 250 - 8 \cdot 125$. La opción correcta es la A.

Como un reto adicional, intente encontrar **el error** en el siguiente argumento: como gastó $24 \cdot 250$ en lápices y $8 \cdot 125$ en borradores, en total gastó $24 \cdot 250 + 8 \cdot 125$ gapes. Hay que restar esta cantidad a 8000 para saber cuántos gapes le sobraron. Por lo tanto la expresión buscada es $8000 - 24 \cdot 250 + 8 \cdot 125$.
□

5. El reloj de Paola y el de Kevin tienen 8 minutos de diferencia entre las horas que marcan. La hora que marca el reloj de Kevin tiene 5 minutos de diferencia con la hora oficial.

   De acuerdo con la información anterior, en el momento en que la hora oficial es 11:09 a. m., ¿qué hora es imposible que marque el reloj de Paola? [5]

   A. 11:06 a. m.

   B. 11:12 a. m.

   C. 11:14 a. m.

   D. 11:22 a. m.

Solución: En este caso, es fundamental entender lo que se quiere decir con la diferencia entre las horas. Como el reloj de Kevin tiene 5 minutos de diferencia con la hora oficial, puede estar 5 minutos atrasado, o 5 minutos adelantado. No nos dice que esté adelantado o atrasado, solo cuál es la diferencia entre las horas, así que hay que considerar ambas opciones. Luego, hacemos lo mismo para obtener las posibles horas que marca el reloj de Paola, que puede estar 8 minutos atrasado o adelantado respecto al de Kevin. Hagamos una tabla:

Hora oficial	Kevin	Paola
$11:09$	$11:04\ (-5)$	$10:56\ (-5-8)$
		$11:12\ (-5+8)$
	$11:14\ (+5)$	$11:06\ (+5-8)$
		$11:22\ (+5+8)$

De las opciones de respuesta, la única que no se encuentra aquí, y que por lo tanto es imposible que Camila tenga en su reloj, es la C., las 11:14 a.m. □

6. Una leona se encontraba a 10 m de distancia de un venado. La leona empezó a perseguir al venado en ese momento. Para recorrer 10 m de distancia, la leona daba 3 pasos y el venado daba 2 pasos. Además, en cada paso la leona duró 100 milisegundos y el venado, 150 milisegundos.

   Luego de que ambos animales corrieran durante 3000 milisegundos, ¿cuál era la distancia entre la leona y el venado? [6]

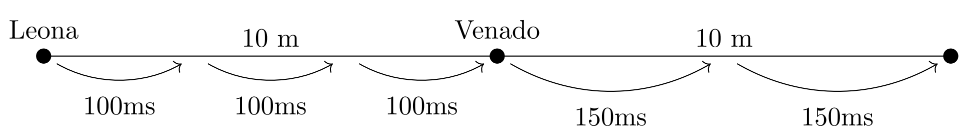
   A. 5 m

   B. 10 m

   C. 15 m

   D. 20 m

Solución: Primero, entendamos el problema y lo que nos dice. Para esto, nos puede ayudar hacer un diagrama:



Con el diagrama es fácil ver que la leona, para recorrer 10 metros, como da 3 pasos y en cada paso dura 100 milisegundos, va a durar en total 300 milisegundos. Y el venado da 2 pasos, durando en cada uno 150 milisegundos, es decir, para recorrer 10 metros dura 300 milisegundos. Es decir, ambos duran lo mismo en recorrer la misma distancia, por lo que tienen la misma velocidad.

Note entonces que cuando la leona llega donde estaba el venado originalmente, recorriendo 10 metros, el venado ya va a haber avanzado 10 metros en el mismo tiempo. Así, se mantienen siempre a la misma distancia de 10 metros. Por lo tanto, en 3000 milisegundos estarán a 10 metros de distancia. La respuesta correcta es la B.

Otra opción es calcularlo todo. Como cada paso de la leona toma 100 ms, en 3000 ms da $3000/100 = 30$ pasos, y como cada 3 pasos son 10 metros, recorre $(30/3) \cdot 10 = 100$ metros en 3000 ms. De forma similar, el venado da $3000/150 = 20$ pasos en 3000 ms, de forma que como cada 2 pasos recorre 10 metros, en 20 pasos habrá recorrido 100 metros. Así, ambos recorren la misma longitud y por tanto se mantienen a la misma distancia original: 10 metros. □

7. Para un concurso se numeran consecutivamente los boletos empezando en 1. Si se han escrito 252 dígitos en total, ¿cuántos boletos se han numerado?

   A. 118.

   B. 119.

   C. 120.

   D. 121.

Solución: En los primeros 9 boletos (1-9) se escribió un solo dígito. Nos quedan $252 - 9 = 243$ dígitos por escribir. Del 10 al 99, se escribieron dos dígitos pero, ¿cuántos números hay aquí? Si restamos $99 - 10$, no estamos contando el 10, por lo que la cantidad de números es $99 - 9 = 90$, es decir hay que restar el número anterior al primero que queremos contar. Si esto no les convence, intenten reflexionarlo hasta convencerse.

Por lo tanto, del 10 al 99 escribimos $2 \cdot 90 = 180$ dígitos. Quedan por tanto $243 - 180 = 63$ dígitos. Como los siguientes números tienen 3 dígitos, faltan $63/3 = 21$ números de escribir. Como hasta ahora llegamos al 99 y faltan 21, el último número que se escribe es $99 + 21 = 120$. Por lo tanto, se numeraron (desde el 1 al 120), 120 boletos. La opción correcta es la C.

Note que todas las opciones de respuesta están muy cerca unas de las otras, así que si uno se equivoca por un número, probablemente esa opción también esté, pero sería incorrecta. Es decir, que las opciones de respuesta, en estos casos, no nos ayudan a saber si cometimos un error. □

8. En una campaña de reciclaje, por cada botella reciclada se otorgan 150 puntos. Se requieren 400 puntos para reclamar un premio. Si el equipo de Ana obtuvo 3 premios, y quedó sin puntos, ¿cuántas botellas recicló?

   A. 6.

   B. 7.

   C. 8.

   D. 9.

Solución: En este caso lo más sencillo es hacer el problema en reversa. El equipo de Ana obtuvo 3 premios, cada uno cambiando 400 puntos, y quedaron sin puntos; por lo tanto, tenían $3 \cdot 400 = 1200$ puntos. Como cada botella reciclada otorga 150 puntos, para saber cuántas botellas reciclaron dividimos 1200/150:

$$\frac{1200}{150} = \frac{120}{15} = \frac{40 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{8 \cdot 5}{5} = 8$$

El equipo de Ana recició 8 botellas en total. La opción correcta es la C.

Otra posible solución es considerar cuántas botellas equivalen a un premio. Como cada botella son 150 puntos y cada premio son 400, ¿cuántas botellas necesitamos para hacer 400 puntos? $400/150 = 40/15 = 8/3$. Para obtener un premio, se necesitan "8/3 de botella". Por lo tanto, para tres premios se necesitan $(8/3) \cdot 3 = 8$ botellas. □

9. En una fábrica se empacó cierto producto de forma individual. La fábrica utilizó 2 máquinas para realizar este trabajo. La máquina antigua empacó 24 productos cada hora. La máquina nueva empacó 30 productos cada hora. Ayer la máquina antigua comenzó a empacar a las 7:00 a. m. y la máquina nueva comenzó a empacar a las 8:30 a. m.

¿Qué hora era cuando ambas máquinas llevaban la misma cantidad de producto empacado? [7]

A. 9:30 a.m.

B. 11:30 a.m.

C. 2:30 p.m.

D. 3:30 p.m.

Vamos a resolver el problema de tres formas distintas:

Solución: Podemos hacerlo a fuerza bruta. Para esto podemos hacer un diagrama y visualizar cuántos productos ha empacado cada máquina a lo largo del tiempo. Note que una empieza a las 7:00 y otra a las 8:30, por lo que para compararlas, es mejor ir de media hora en media hora. Como en 1 hora las máquinas antigua y nueva empacan respectivamente 24 y 30 productos, en 30 minutos empacan 12 y 15 respectivamente. Hacemos la tabla:

Hora	Antigua	Nueva
7:00	0	0
7:30	12	0
8:00	24	0
8:30	36	0
9:00	48	15
9:30	60	30
10:00	72	45
10:30	84	60
11:00	96	75
11:30	108	90

Hora	Antigua	Nueva
12:00	120	105
12:30	132	120
1:00	144	135
1:30	156	150
2:00	168	165
2:30	180	180
3:00	192	195
3:30	204	210

Vemos entonces que a las 2:30 p.m. las máquinas llevaban la misma cantidad empacada, la C. es la respuesta correcta. □

La segunda forma se relaciona con los problemas en que un depredador persigue una presa. En este caso la máquina nueva "persigue a la nueva":

Solución: Hacemos el problema paso a paso

1. Cuando inicia la máquina nueva, ¿cuánto producto empacado lleva la antigua?: Ha pasado 1:30, por lo que la máquina antigua empacó 24 productos en una hora y 12 en la otra, para un total de 36 productos.

   La máquina nueva debe cerrar la "distancia" de 36 productos, y puede hacerlo porque empaca más rápido.

2. ¿por cuánto se reduce la diferencia de producto empacado? Veamos que mientras la vieja produce 24, la nueva produce 30. De esta forma, en una hora la máquina nueva reduce la "distancia" entre ella y la vieja en 6 productos.

3. Como la máquina vieja inicia con 36 productos de ventaja, y cada hora se reduce esa diferencia en 6, es necesario que pasen $36/6 = 6$ horas desde que la nueva empezó a trabajar. Es decir, cuando pasen 6 horas, la máquina nueva habrá producido los 36 que le faltaban y ambas tendrán la misma cantidad de producto empacado.

Como la nueva inició a las 8:30, tienen la misma cantidad de producto empacado a las $8\colon 30 + 6\colon 00 = 14\colon 30 = 2\colon 30$ p.m., la opción C. $\square$

Una tercera forma es resolviendo un sistema de ecuaciones.

Solución:

Como las máquinas empacan producto de forma lineal (es decir, la cantidad de producto empacado por hora es constante), la pendiente de la antigua máquina es de 24 productos / hora, la de la nueva es 30 productos / hora y sabemos que a las 7:00 la antigua ha producido 0 y a las 8:30 la nueva ha producido 0. Podemos usar la fórmula de punto pendiente para obtener la cantidad de producto empacado por la máquina antigua $y_1(t)$ aquel empacado por la nueva, $y_2(t)$:

$$y_1(t) = 24(t-7), \quad y_2(t) = 30(t-8{,}5)$$

Así, para que $y_1(t) = y_2(t)$:

$$\begin{aligned}
24(t-7) &= 30(t-8{,}5) && \text{dividimos entre 6 a ambos lados}\\
4(t-7) &= 5(t-8{,}5) && \text{distribuimos el producto respecto de la suma}\\
4t - 4\cdot 7 &= 5t - 5\cdot 8{,}5 && \text{pasamos } 4t \text{ a restar y hacemos los cálculos}\\
-28 &= t - 42{,}5 && \text{pasamos } 42{,}5 \text{ a sumar}\\
42{,}5 - 28 &= t\\
14{,}5 &= t
\end{aligned}$$

De esta forma, ambas máquinas han empacado la misma cantidad de producto a las 14 horas y media, es decir, a las 2:30 p.m., que es la opción C. $\square$

10. Una galaxia tiene dos planetas: P y Q. Cada año del planeta P tiene 120 días terrestres. Por otra parte, en el planeta Q, cada año tiene 140 días terrestres.

    ¿Qué cantidad de años en Q tiene un habitante que tiene 7 años en P? [8]

    A. 5
    B. 6
    C. 8
    D. 9

Solución: Este es un problema de conversiones. Tenemos tres unidades: años en P, años en Q, y días terrestres, y tenemos conversiones de 1 año en P son 120 días terrestres, y 1 año en Q son 140 días terrestres. Luego, 7 años en P serían $120 \cdot 7 = 840$ días terrestres, y como cada 140 días de estos hacen 1 año en Q, dividimos esta cantidad entre 140: para hacerlo fácil, lo mejor es escribirlo como una fracción e ir cancelando factores comunes:

$$\frac{840}{140} = \frac{84\cancel{0}}{14\cancel{0}} = \frac{\cancelto{42}{84}}{\cancelto{7}{14}} = \frac{42}{7} = 6 \text{ años de Q.}$$

Lo que hicimos fue dividir primero entre 10 arriba y abajo, luego entre 2 y luego entre 7.

Otra forma más rápida es no hacer el cálculo $120 \cdot 7$ días terrestres. Si lo dejamos así, y luego decimos que cada 140 días de estos es un año de Q, dividimos entre 140:

$$\frac{120 \cdot 7}{140} = \frac{12 \cdot \cancel{10} \cdot 7}{14 \cdot \cancel{10}} = \frac{6 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{2}} = 6 \text{ años de Q.}$$

Aquí cancelamos un 0 de arriba y abajo (sacando un 10 de 120 y uno de 140 y cancelándolos), luego cambiamos 12 por $6 \cdot 2$ y 14 por $7 \cdot 2$. Y cancelamos lo factores comunes del numerador y del denominador.

Forma alternativa: Si no queremos dividir, la otra opción es pasar todo a días terrestres, incluyendo las opciones de respuesta. Sabemos que 7 años en P son 840 días terrestres, y luego las respuestas que nos dan son (usando que cada año en Q son 140 días terrestres):

A. 5 años en Q $= 5 \cdot 140 = 10 \cdot 70 = 700$ días terrestres (multipliqué el 5 por 2 y dividí el 140 entre 2 para hacer más fácil el cálculo).

B. 6 años en Q $= 6 \cdot 140 = 600 + 240 = 840$ días terrestres (hice primero $6 \cdot 100$ y le sumé $6 \cdot 40$).

C. 8 años en Q $= 8 \cdot 140 = 800 + 320 = 1120$ días terrestres.

D. 9 años en Q $= 9 \cdot 140 = 900 + 360 = 1260$ días terrestres.

Así, comparando, debe ser la B. □

11. Carlos tenía 810 gapes en la billetera al inicio del día. Él decidió regalar la tercera parte del dinero que tuviera en la billetera a cada uno de los sobrinos que llegara a su casa ese día.

¿Cuánto dinero le dio Carlos al tercer sobrino que lo visitó?

A. 81 gapes
B. 270 gapes
C. 90 gapes
D. 120 gapes
E. 30 gapes

12. Los asientos de un carrusel están numerados con 1, 2, 3, y así sucesivamente de forma consecutiva y circular. Un niño está sentado en el número 11 y otro está sentado en el número 4, que está diametralmente opuesto. Entonces, la cantidad de asientos que tiene el carrusel es[9]

A. 13
B. 14
C. 16
D. 17

1.3. Operaciones con fracciones

1. Resuelva y simplifique al máximo los siguientes productos y divisiones de fracciones. Sugerencia: Simplifique antes de hacer las operaciones, cancelando factores en común de los números en el numerador con aquellos en el denominador.

   (a) $\frac{23}{15} \cdot \frac{10}{12} =$

   (b) $\frac{81}{49} \cdot \frac{7}{45} =$

   (c) $\frac{10}{56} \cdot \frac{21}{320}$

   (d) $\frac{9}{2} \cdot \frac{5}{12}$

   (e) $\frac{64}{60} \cdot \frac{30}{8}$

   (f) $\frac{23}{27} \cdot \frac{90}{46}$

   (g) $\frac{45}{78} \cdot \frac{42}{30}$

   (h) $\frac{72}{84} \cdot \frac{175}{50}$

   (i) $\frac{91}{99} \cdot \frac{55}{13}$

   (j) $\frac{14}{9} \cdot \frac{21}{2}$

   (k) $\frac{30}{19} \cdot \frac{19}{550}$

   (l) $\frac{35}{36} \cdot \frac{84}{85}$

   (m) $\frac{41}{64} \cdot \frac{86}{82}$

   (n) $\frac{11}{95} \cdot \frac{85}{22}$

   (o) $\frac{64}{44} \cdot \frac{121}{54}$

2. El resultado de la operación

$$\left[\left(\frac{7}{12} + \frac{3}{16}\right) - \left(\frac{9}{32} - \frac{7}{40}\right)\right] \div \left(1 - \frac{13}{16}\right)$$

   es[10]

   A. $\frac{319}{30}$

   B. $\frac{319}{90}$

   C. $\frac{421}{90}$

   D. $\frac{421}{30}$

3. Si $a = 2$ y $b = 3$, la expresión

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{ab}} - 1$$

   es equivalente a[11]

   A. $\frac{23}{10}$

   B. $\frac{1}{2}$

   C. $\frac{3}{10}$

   D. $-\frac{3}{2}$

1.4. Problemas con números racionales

1. David tiene dos calculadoras P y Q. La calculadora P resuelve las operaciones normalmente. La calculadora Q cambia los números de una operación por el doble de estos. Así, por ejemplo, cuando se ingresa la operación $3 \cdot 6$, se calcula la operación $6 \cdot 12$. David realiza operaciones básicas en ambas calculadoras y se da cuenta que hay una operación que al aplicarla a una pareja de números, en cualquiera de las calculadoras, P o Q, el resultado es el mismo.

   ¿Cuál es, con certeza, la operación en la que David obtiene el mismo resultado? [12]

A. Suma.

B. Resta.

C. División.

D. Multiplicación.

Solución: Podemos hacer casos tomando un ejemplo muy básico, como 2 y 1.

A. En la calculadora P, $2 +_P 1 = 2 + 1 = 3$. En la calculadora Q, $2 +_Q 1 = 4 + 2 = 6$. Como $3 \neq 6$, no puede ser suma.

B. En la calculadora P, $2 -_P 1 = 2 - 1 = 1$. En la Q, $2 -_Q 1 = 4 - 2 = 2$, que son distintos. Así, no es la resta.

C. En P, $2 \div_P 1 = \frac{2}{1} = 2$, y en Q, $2 \div_Q 1 = \frac{4}{2} = 2$. La división podría funcionar. No podemos estar seguros aún pues solo es un ejemplo, un caso muy particular.

D. En P, $2 \cdot_P 1 = 2 \cdot 1 = 2$, en Q, $2 \cdot_Q 1 = 4 \cdot 2 = 8$. Son distintos, luego la multiplicación no es.

Por descarte, la opción correcta es la C.

En general es cierto, pues si a, b son dos números, $a \div_Q b = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b} = a \div b = a \div_P b$, pues podemos cancelar el 2 de arriba y abajo. □

2. Camila tiene un frasco completamente lleno de miel. Ella quiere vaciar toda la miel en 4 recipientes pequeños.

   Según esta información, ¿cuál de las siguientes opciones es imposible que suceda? [13]

   A. Los cuatro recipientes quedarían con la misma cantidad de miel.

   B. Dos recipientes quedarían con la misma cantidad de miel y los otros dos con cantidades distintas.

   C. Dos recipientes quedarían cada uno con una sexta parte de la miel, uno con la mitad y otro con la tercera parte.

   D. Dos recipientes quedarían cada uno con una tercera parte y los otros dos con una sexta parte cada uno.

3. María fue de compras el sábado, se gastó la tercera parte de lo que llevaba en un par de tenis, la cuarta parte del resto en un abrigo. Al final del día, quiere comprar un bolso cuyo precio es igual a cinco doceavos de lo que llevaba por la mañana.

   Entonces se puede asegurar con certeza que María[14]

   A. no tiene suficiente dinero para comprar el bolso.

   B. compra el bolso y no le sobra nada.

   C. compra el bolso y le sobra un doceavo de lo que llevaba.

   D. puede comprar dos bolsos iguales.

4. Lucía tiene cuatro sobrinos Alejandra, Lucía, Mario y José, decide repartir sus ahorros entre ellos de manera que a Alejandra le dio la cuarta parte, a Lucía la tercera parte del resto, a Mario la mitad de lo que quedaba y a José lo que quedó. Entonces con certeza sucederá que[15]

   A. todos recibieron la misma cantidad de dinero.

   B. Alejandra recibió menos dinero que Mario.

   C. José recibió más dinero que Lucía.

D. José recibió más dinero que Mario.

5. Pedro tiene un tanque lleno de agua y desea repartirla entre varios baldes.

   Primero llena $\frac{1}{4}$ del tanque en un balde grande. Luego reparte la mitad de lo que queda en dos baldes medianos, en partes iguales. Finalmente, llena un último balde con el resto del agua.

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

   A. El último balde contiene la misma cantidad que el balde grande.

   B. Cada balde mediano contiene más que el balde grande.

   C. El último balde contiene menos que cualquier otro balde.

   D. El agua del tanque se distribuye en partes exactamente iguales entre los cuatro baldes.

6. Isabel horneó un pastel para compartirlo con sus amigas. Primero le dio a Ana la quinta parte del pastel. Luego, le dio a Beatriz la tercera parte de lo que quedaba. Después, le dio a Carmen la mitad de lo que aún quedaba y se quedó con lo restante.

   ¿Cuál fracción del pastel se quedó Isabel?

   A. $\frac{1}{5}$

   B. $\frac{4}{15}$

   C. $\frac{7}{30}$

   D. $\frac{1}{3}$

7. Julián recorrió un sendero de montaña. En la primera hora caminó un tercio del camino. En la segunda hora recorrió la mitad de lo que le faltaba. En la tercera hora caminó la mitad de lo que aún faltaba después de la segunda hora.

   ¿Qué parte del camino le falta por recorrer después de la tercera hora?

   A. $\frac{1}{6}$

   B. $\frac{1}{8}$

   C. $\frac{1}{12}$

   D. $\frac{1}{4}$

Referencias

[1]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[2]ibíd.
[3]ibíd.
[4]ibíd.
[5]ibíd.
[6]ibíd.
[7]Calvo Díaz et al., *24 preguntas de práctica en el 2024 para la Prueba de Aptitud Académica*
[8]Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[9]OLCOMA, *Primera eliminatoria nacional nivel A*
[10]ibíd.
[11]ibíd.
[12]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[13]Rojas Rojas et al., *60 - 10 preguntas y respuestas de práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[14]Martínez, Córdoba et al., Prácticas y Consejos para el Examen de Admisión 2022
[15]ibíd.

2. Lógica

1. Considere las siguientes premisas:

   I. Toda conferencia es discurso.

   II. Algunas conferencias no son lecciones.

   De las premisas anteriores se sigue que: [1]

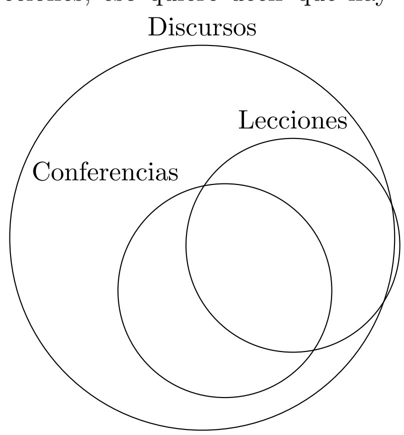
   A. Ninguna lección es discurso.

   B. Todas las lecciones son discursos.

   C. Algunos discursos no son lecciones.

   D. Todos los discursos son conferencias.

Solución: Podemos verlo en un diagrama de Venn. Como toda conferencia es discurso, el area que representa las conferencias está adentro del area que representa los discursos. A su vez, como algunas conferencias no son lecciones, eso quiere decir que hay una parte de las conferencias que no está dentro de las lecciones:



El diagrama no muestra todas las posibles situaciones. Sin embargo, lo más importante es que conferencias está dentro de discursos, y que lecciones no cubre todo conferencias, porque hay conferencias que no son lecciones. Con esta intuición, vemos que podrían haber lecciones que sean discursos, luego la A. no es. Además, podrían haber lecciones que no sean discursos. Eso tampoco lo sabemos, la B. no es.

¿Será que siempre hay algunos discursos que no son lecciones? En el dibujo así lo parece, pero pensemos, si todo discurso fuera lección, entonces como toda conferencia es discurso, necesariamente toda conferencia sería lección, por lo que esto no puede pasar. Por lo tanto, algunos discursos — en particular los que son conferencias que no son lecciones — no son lecciones. La C. es la respuesta correcta.

Para completar, vemos que aunque toda conferencia sea discurso, podrían haber discursos que no sean conferencias, entonces la D. no es. □

2. Considere las siguientes premisas:

   i) Todos los ciervos tienen cuernos.

   ii) Algunos rumiantes son ciervos.

   De las premisas anteriores se sigue que [2]

   A. algunos ciervos no son rumiantes.

   B. algunos rumiantes tienen cuernos.

   C. todos los rumiantes tienen cuernos.

D. algunos rumiantes no tienen cuernos.

Solución: Por la segunda premisa, hay rumiantes que son ciervos. Tomemos uno y digamos que se llama Steve. Como Steve es un ciervo, por la primera premisa tiene cuernos. De esta forma Steve es un rumiante ciervo con cuernos. Esto nos pemite concluir con certeza que algunos rumiantes tienen cuernos. La B. es la opción correcta.

Pensemos por qué las demás no son correctas. Es importante considerar que cuando una opción no es correcta, no significa que sea falsa siempre, sino que existen escenarios donde es falsa. La A. podría ser pero podría no ser. Es perfectamente posible que todos los ciervos sean rumiantes, y eso no contradice las premisas.

Para la C., solo sabemos que algunos rumiantes son ciervos, así que podría existir un rumiante Patricio que no sea ciervo, y como no es ciervo, podría no tener cuernos, no sabemos con certeza.

La D. tampoco podemos afirmarla con certeza. Podría suceder que todos los rumiantes fueran ciervos, en cuyo caso todos tienen cuernos. O podría pasar que, aunque algunos rumiantes no fueran ciervos, de igual forma tengan cuernos. No nos dicen que solo los ciervos tengan cuernos □

3. Considere las siguientes premisas:

   i) Si V lee, entonces L dibuja o J salta.
   ii) Si L dibuja, entonces P no corre.
   iii) L no dibuja y J no salta.

   De las premisas anteriores se sigue que [3]

   A. V lee.
   B. P corre.
   C. V no lee.
   D. P no corre.

Solución: Analicemos las opciones:

A. Si V lee, por la premisa i) tendríamos que L dibuja o J salta. Pero la premisa iii) nos dice que L no dibuja y J no salta. Por lo tanto, no puede ser cierto que V lee. De hecho, justamente por esto podemos afirmar que V no lee, es decir que la respuesta C. es la correcta.

B. ¿Podemos estar seguros de que P corre? Por la premisa ii), si P corre, entonces L no dibuja (si dibujara sabríamos que P no corre), y esto coincide con la iii). Sin embargo, también podría ocurrir que aunque L no dibuja, que P no corre, pues sabemos que si L dibuja entonces P no corre, pero esto **no implica** que si L no dibuja entonces P sí corre.

   Para poner un ejemplo, un papá le puede decir a su hijo: si ganas la carrera te doy un premio. Y el hijo se esfuerza pero al final no gana. Sin embargo, el papá igual le da un premio por su esfuerzo. Ahí, el papá dijo: Si ganas, te doy un premio. Pero esto no implica que: Si no ganas, no te doy un premio. En el caso en el que no gana, el papá puede hacer lo que quiera.

   Así mismo en este caso, si L no dibuja, la premisa ii) no nos dice nada sobre si P corre o no corre, pues solo nos da información cuando L dibuja.

   Así, no podemos afirmar con certeza que P corre o que P no corre. Así, la B. y la C. no son correctas, no se siguen de las premisas.

C. Esta es la correcta. Ver el comentario a A.

D. Ver comentario a B.

Esta puede ser una buena ocación para introducir el concepto de contrapositiva. Si tenemos una premisa de la forma "Si P entonces Q," y sabemos que Q no es cierto, entonces podemos concluir que P no es cierto. Es decir, las afirmaciones "Si P entonces Q" y "Si Q no es cierto entonces Q no es cierto" son equivalentes.

En este ejercicio, ¿cuál es la contrapositiva de i)? "Si no es cierto que L dibuje ni que J salte, entonces V no lee". O, escribiendola mejor "Si L no dibuja y J no salta entonces V no lee". Y entonces queda muy claro que por la iii) como L no dibuja y J no salta, entonces necesariamente V no lee. □

4. Considere las siguientes afirmaciones:

   1. Si Luciana se pegó la lotería, Alejandro no está en el parque.
   2. Si Alejandro está en el parque, Carlos no fue a clases hoy.
   3. Carlos fue a clases hoy.

   Si las afirmaciones anteriores son verdaderas, se concluye con certeza que

   A. Luciana se pegó la lotería.
   B. Alejandro está en el parque.
   C. Alejandro no está en el parque.
   D. Carlos está en la universidad.
   E. Luciana es la madre de Alejandro.

Solución: Reescribamos las proposiciones como L: "Luciana se pegó la lotería", A: "Alejandro está en el parque" y C: "Carlos fue a clases". Entonces las premisas son

i) Si L entonces no es cierto que A.

ii) Si A entonces no es cierto que C.

iii) C sí es cierto.

Entonces vemos claro que como C sí es cierto (Carlos si fue a clases), entonces A no es cierto por la contrapositiva de ii) (de nuevo, si Alejandro estuviera en el parque, entonces Carlos no fue a clases, pero Carlos sí fue a clases). La i) no nos dice mucho, pues si L es cierto (que Luciana se pegó la lotería) entonces no es cierto que A, que ya lo sabemos, y si L no fuera cierto, de nuevo, podría pasar cualquier cosa, que A esté en el parque o no.

Por esto, lo que sabemos con certeza es que Carlos fue a clases y que Alejandro no está en el parque. Así, la opción C. es la correcta.

Note que algunas de las opciones se pueden descartar muy fácilmente, como que Luciana es la madre de Alejandro (no se dice nada de parentezco), que Carlos está en la universidad (solo nos hablan de clases, podría ser en la escuela), y para las otras tres sí hay que ir descartando usando las premisas. □

5. Gabriel, Elena, Ignacio y Susana se reunieron para realizar una carrera de velocidad. Al final de la carrera sucedió que:

   i) Gabriel llegó a la meta antes que Susana.
   ii) Elena llegó a la meta antes que Ignacio.

iii) Gabriel llegó a la meta antes que Ignacio.

¿En qué posiciones pudo haber llegado Gabriel? [4]

A. En la primera o la segunda.

B. En la primera o la tercera.

C. En la segunda o la tercera.

D. En la segunda o la cuarta.

Solución: Tenemos que ordenar a los participantes. Digamos que A $<$ B si A llegó antes que B. Si a cada participante lo denotamos por su inicial, sabemos que G $<$ S, que E $<$ I y que G $<$ I y nos preguntan en qué posición pudo haber quedado Gabriel. Por el contexto, podemos asumir que solo ellos 4 participaron en la carrera. Y como Gabriel le ganó a dos de ellos, tuvo que haber quedado en la primera o en la segunda posición.

La opción correcta es la A. □

6. Se tienen tres lapiceros X, Y y Z: dos son verdes y uno es rojo; además, X y Y son de diferente color. Considere las siguientes proposiciones:

   I. Y es verde

   II. Z es verde

   III. X es verde

   De las anteriores, ¿cuáles se cumplen con certeza? [5]

   A. Solo II

   B. Solo III

   C. II y III

   D. I y II

Solución: Como X y Y son de distinto color, alguno de los dos es verde y el otro es rojo, pero no estamos seguros de cuál es cual. Lo que sí sabemos es que solo hay un lapicero rojo. Como este debe ser X o Y, no puede ser Z. De esta forma, con certeza Z no es rojo y por lo tanto debe ser verde. La opción correcta es la A. Solo II., pues no podemos tener **certeza** de que Y sea verde o de que X sea verde, aunque alguna de las dos sí tiene que pasar: no sabemos cuál de las dos. □

7. Fabio tiene 12 balones de futbol, 8 balones de volibol y 3 balones de basketbol en una canasta. Desde una habitacion distinta, Fabio pone a un robot a sacar una cantidad de balones de manera aleatoria. ¿Cuál es el mínimo de balones que debe pedir Fabio al robot para tener certeza de que, sin importar cuales balones saque, al entrar a la habitación vea al menos un balón de cada deporte fuera de la canasta?

   A. 21 balones

   B. 12 balones

   C. 16 balones

   D. 23 balones

   E. 3 balones

Solución: Esta es una pregunta de encontrar el peor caso posible. Es decir, preguntarse, ¿en qué situación el robot pudo haber sacado un montón de balones, pero que aún no haya sacado un balón de alguno de los deportes?

Porque claramente si tiene suerte puede sacar, de una vez, uno de cada tipo de balón distinto y ya tener los tres, pero esto no ocurre con certeza.

Si saca todos los balones, con certeza habrá uno de cada tipo de balón, pero... ¿se podrá tener esta certeza con menos?

Si saca todos los balones excepto uno, como hay 12 balones de futbol, 8 de voli y 3 de basket, sin importar si quedó uno adentro de alguno de los deportes, habrá uno afuera, pues hay más de uno de cada tipo. Fabio puede seguir teniendo certeza de que hay uno de cada deporte fuera de la canasta.

Lo mismo podemos decir si quedan 2 dentro de la canasta, pues hay al menos 3 de cada deporte.

Sin embargo, si quedaran 3 dentro de la canasta es posible que sean los tres balones de baloncesto los que queden dentro de la canasta, y no hay ninguno fuera. Por lo tanto, si Fabio pide al robot que saque 20 balones, podría sacar todos los de futbol que son 12 y todos los de voli que son 8, pero no sacar ni uno de baloncesto.

Por lo tanto, para tener certeza de que hay al menos un balón de cada tipo de deporte fuera de la canasta Fabio debe pedir al robot que saque al menos 21 balones. La opción correcta es la A. □

8. Un grupo de personas quiere comenzar a practicar algún deporte que sea adecuado a sus preferencias y habilidades, de manera que nadie se quede sin practicar uno o más deportes. A partir de estos requisitos, se toman en cuenta los siguientes aspectos:

   I. A todos les gusta mojarse y no saben andar en bicicleta.
   II. Todos pueden mantenerse a flote en el agua y no les gusta el contacto físico.
   III. Algunos pueden controlar bien los objetos esféricos y no desean recorrer largas distancias.

   De acuerdo con los aspectos anteriores, ¿qué se puede concluir, con certeza? [6]

   A. Algunos pueden practicar natación y ciclismo.
   B. Todos pueden practicar ciclismo, pero no boxeo.
   C. Todos pueden practicar natación, pero no ciclismo.
   D. Algunos pueden practicar boxeo y todos pueden practicar natación.

Solución: Veamos las opciones.

A. ¿Algunos pueden practicar natación y ciclismo? La premisa I. nos dice que no saben andar en bicicleta, y esto aplica para todos. Por lo tanto ninguno puede practicar ciclismo.

B. ¿Todos pueden practicar ciclismo? De nuevo: no saben andar en bici.

C. ¿Todos pueden practicar natación, pero no ciclismo? La premisa I. nos dice que a todos les gusta mojarse y la II. que todos pueden mantenerse a flote en el agua. Por tanto, todos pueden practicar natación. Al mismo tiempo, la I. nos dice que no saben andar en bicicleta, por lo que no pueden practicar ciclismo. Por lo tanto, esta es correcta.

D. ¿Algunos pueden practicar boxeo y todos pueden practicar natación? Es cierto que todos puede praticar natación. Pero la II. nos dice que no les gusta el contacto físico, por lo que no les gustaría el boxeo. Así, esta no puede ser.

□

9. Luis es hijo de la madre de Marta. Marta es la abuela materna de la hija de Ana. Si Luis tiene un hijo llamado Pedro. ¿Qué relación tiene Pedro con el hermano de Ana?

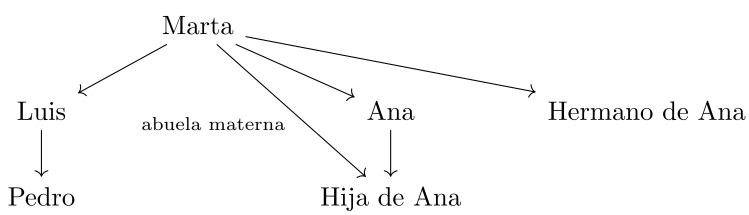
   A. Son primos.

   B. Pedro es su tío.

   C. Pedro es su sobrino.

   D. No tienen parentesco.

Solución: Empecemos por la pregunta y vayamos paso a paso. ¿Qué relación tiene Pedro con el hermano de Ana? Pedro es el hijo de Luis, y Ana tiene una hija cuya abuela materna es Marta. Como Ana es la mamá de su hija, Marta, siendo abuela materna, es la mamá de Ana. Para conectarlos, vemos que Luis es hijo de la madre de Marta. Por lo tanto, Marta y Luis comparten mamá, es decir, son hermanos. Así, tenemos el siguiente diagrama:



Note por tanto que el hermano de Ana debe ser también hijo de Marta y por tanto hermano de Luis. Como Pedro es hijo de Luis, el hermano de Ana (que es hermano de Luis) debe ser tío de Pedro. □

10. En una habitación de cuatro paredes, dos tienen una pintura, otra un televisor y la otra está vacía. Respecto a la ubicación de los objetos, ¿cuál de las siguientes opciones, con certeza, es verdadera? [7]

    A. Las pinturas están en paredes opuestas.

    B. Las pinturas están en paredes contiguas.

    C. El televisor está en una pared opuesta a la pared vacía.

    D. Una pintura está en una pared contigua a la pared vacía.

Solución: Aqui, lo mejor es ver las opciones e intentar encontrar contraejemplos, casos en los que no son ciertas:

A. Veamos que podemos poner las pinturas en paredes contiguas sin problema, y un televisor en alguna de las otras paredes, por lo que no es necesario que las pinturas estén en paredes opuestas.

B. Igual que en la anterior, también es posible que las pinturas estén en paredes opuestas, por lo que no es necesario — no se sabe con certeza — que las pinturas estén en paredes contiguas.

C. El televisor está en una pared opuesta a la pared vacía. Tampoco es necesario. Podemos poner el televisor opuesto a una pintura y por tanto estará contiguo a la pared vacía, que debe ser una de las dos que quedan.

D. Por último, intentemos hacer que ninguna pintura esté en una pared contigua a la pared vacía, y veamos que no es posible: si una pintura no está contigua a la pared vacía, solo es posible que esté opuesta a esta pared (solo hay cuatro paredes, una será la vacía, otras dos serán contiguas a esta vacía y una será opuesta). ¡Pero tenemos dos pinturas, y solo una pared opuesta a la pared vacía! No podemos poner ambas pinturas en la misma pared. Por lo tanto, aunque pongamos una pintura opuesta a la pared vacía, la otra tendrá que estar contigua a la pared vacía. De esta forma, sabemos con certeza que una pintura está en una pared contigua a la pared vacía. La opción correcta es la D.

□

11. Después de hacer una encuesta en la población A, conformada por 425 mujeres y 325 hombres, se obtiene la siguiente información:

Tipo de población	**Total**
Niños en escuela	225
Jóvenes en el colegio	175
Adultos menores de 65 años	250
Adultos mayores de 65 años	100

Considere las siguientes afirmaciones:

I. De cada 75 adultos mayores, 13 son mujeres.

II. Por cada 7 colegiales hay 9 escolares.

III. De cada 30 escolares, 13 son hombres.

De las afirmaciones anteriores, ¿cuáles se cumplen con certeza? [8]

A. Solo II

B. Solo III

C. I y II

D. II y III

Solución: Veamos las afirmaciones una por una

I. De cada 75 adultos mayores, 13 son mujeres: Sabemos que hay 100 adultos mayores, que hay en total 425 mujeres y 325 hombres. Sin embargo, con sabemos cómo se distribuye el si son hombres o mujeres. En un caso muy hipotético, solo hay niños varones y hay 100 jóvenes varones, por lo que ya con estos son todos los hombres de la población, y los adultos mayores todos serían mujeres, de cada 75, las 75 son mujeres. Así, no sabemos con certeza que esto ocurre con la información que tenemos.

II. Por cada 7 colegiales hay 9 escolares: Si tenemos 175 colegiales y 225 escolares. Si agrupamos los colegiales de 7 en 7 obtenemos $175/7 = 25$ grupos, y si agrupamos los escolares de 9 en 9 obtenemos $225/9 = 25$ grupos. Notamos entonces que por cada grupo de 7 colegiales hay un grupo de 9 escolares, pues son la misma cantidad de grupos. De esta forma, esta es una afirmación que se cumple con certeza.

En otras palabras lo que nos dice esta afirmación es que la razón de colegiales a escolares es igual a $7/9$. I.e., que $175/225 = 7/9$.

III. De cada 30 escolares, 13 son hombres: De nuevo, no tenemos información sobre disribución de hombres y mujeres en cada uno de los rangos de edad. Es posible que todos los escolares sean niños, como dijimos en el caso anterior, de forma que no sabemos con certeza que de cada 30 escolares 13 sean hombres.

Concluimos que la única afirmación que se cumple con certeza es la II. Así, la respuesta correcta es la A. □

12. En una fábrica se empacan 96 bombillos en cajas de 8. Cada caja debe haber estrictamente más bombillos en perfecto estado que defectuosos. ¿Cuál de las siguientes opciones es imposible que ocurra?
   A. Solo se empacaron 32 bombillos defectuosos.
   B. Se empacaron más de 48 bombillos en perfecto estado.
   C. Se empacaron 36 bombillos defectuosos.
   D. Solo se empacaron 55 bombillos en perfecto estado.

Solución:

Primero, leamos la pregunta ¿cuál de las siguientes opciones es imposible que ocurra? Por tanto, hay 3 que sí pueden ocurrir y solo una que es imposible Como en cada caja hay 8 bombillos y debe haber estrictamente más bombillos en perfecto estado que defectuosos en cada caja, debe haber al menos 5 buenos y como máximo 3 malos en cada caja. ¿Cuántas cajas se producen? $96/8 = 12$. Hay 12 cajas. Como cada caja tiene al menos 5 bombillos buenos, hay al menos $12 \cdot 5 = 60$ bombillos buenos. Al mismo tiempo, hay a lo sumo (máximo) $12 \cdot 3 = 36$ bombillos malos. Como debe haber al menos 60 bombillos en perfecto estado no es posible que solo se hayan empacado 55.´

No es difícil ver a partir de nuestro análisis que las otras tres afirmaciones son posibles. Así, la respuesta correcta es la D. □

13. Una empresa chocolatera empaca su producción en paquetes con 13 chocolates cada uno. La producción del lunes fue de 195 chocolates. Se sabe que en cada paquete hay más chocolates blancos que chocolates amargos, entonces no es posible que se hayan producido [9]
   A. 105 unidades de chocolate blanco.
   B. Exactamente 90 unidades de chocolate blanco.
   C. 90 unidades de chocolate amargo.
   D. más de 90 unidades de chocolate blanco.

Solución: Notemos que la pregunta es de imposibilidad: "**no** es posible que se hayan producido ...".

En cada paquete hay 13 chocolates, y hay más chocolates blancos que amargos. Por lo tanto, debe haber menos de 6 chocolates amargos (si hubiese una cantidad mayor o igual que 7, entonces quedan menos de 6 chocolates no amargos en el paquete y necesariamente habría más amargos que blancos). ¿Cuántos paquetes se hicieron el lunes? $195/13 = 15$. Por lo tanto: en cada paquete hay 6 chocolates amargos o menos y hay 15 paquetes, luego hay $15 \cdot 6 = 90$ unidades de chocolate amargo o menos.

De momento esto no contradice ninguna de las opciones. Pero si — del contexto — asumimos que solo hay chocolates blancos y amargos, entonces el hecho de que haya máximo 90 chocolates amargos nos dice que hay como mínimo $195 - 90 = 105$ chocolates blancos. Por lo tanto, no es posible que se hayan producido exactamente 90 unidades de chocolates blanco, pues son menos que las 105 requeridas.

La opción correcta es la B. □

14. En un vivero hay 60 árboles pequeños de diferentes tipos: 31 guanacastes, 19 cenízaros y 10 almendros. Los árboles serán sembrados en una finca por 30 estudiantes. Cada estudiante sembrará dos árboles. Según la información anterior, ¿cuál de las siguientes situaciones ocurrirá con certeza? [10]
   A. Uno o más estudiantes sembrarán dos cenízaros.
   B. Uno o más estudiantes sembrarán dos guanacastes.
   C. Uno o más estudiantes sembrarán un guanacaste y un almendro.

D. Uno o más estudiantes sembrarán un guanacaste y un cenízaro.

Solución: En esta, como en el ejercicio de la habitación con las dos pinturas, la tele y la pared vacía, lo ideal es ir viendo cada opción e intentar encontrar un contraejemplo, algo que nos permita afirmar que no hay certeza de que ocurra.

A. Uno o más estudiantes sembrarán dos cenízaros: ¿será posible que ningún estudiante siembre dos cenízaros, es decir, que siembre como máximo uno? Sí, tenemos 30 estudiantes. Si 21 de estos siembran un cenízaro cada uno, todos los cenízaros se siembran pero ningún estudiante sembraría 2. Por lo tanto, esta opción no es la correcta.

B. Tenemos 30 estudiantes que siembran 31 guanacastes. Si ningún estudiante sembrara dos guanacastes, cada uno sembraría como máximo uno, y el máximo posible de guanacastes sería 30. Como han de sembrarse 31, esto no puede ocurrir, de forma que algún estudiante sembrará dos guanacastes. Así, sabemos con certeza que algún estudiante sembrará dos guanacastes. La opción correcta es esta, la B.

C. ¿Podrán dividirse los guanacastes y los almendros de forma que ningún estudiante siembre uno de cada uno? Podemos pedir a 5 estudiantes que cada uno siembre 2 almendros. Como hay 10 almendros, ya todos quedan sembrados y ninguno de los estudiantes que sembró un almendro sembrará un guanacaste pues ya sembró sus dos árboles. Por lo tanto, no sabemos con certeza que algún estudiantes sembrará un guanacaste y un almendro.

D. De la misma forma que en la anterior, si pedimos a 15 estudiantes que siembren 2 guanacastes cada uno y al número 16 le pedimos que siembre un guanacaste y un almendro, tenemos que quedan sembrados todos los guanacastes, pero ninguno de los estudiantes que sembró uno sembró también un cenízaro. Por lo tanto, no sabemos con certeza que algún estudiantes vaya a sembrar un guanacaste y un cenízaro.

Este es un ejemplo de lo que llamamos el principio del palomar, un principio aparentemente obvio pero que tiene implicaciones muy importantes en las matemáticas: "Si tenemos $n+1$ pájaros que van a dormir en n palomares (casitas de pájaros), al menos un palomar terminará con 2 pájaros o más."

En nuestro caso, los guanacastes eran como las palomas, que van a ser sembrados por un estudiante, y los estudiantes como los palomares. Como hay más guanacastes que estudiantes, al menos un estudiante siembra dos guanacastes. □

15. En una empresa, la sala A tiene únicamente hombres, mientras que la sala B tiene 20 mujeres y varios hombres. Si se transfieren 10 personas de la sala B a la sala A, ¿cuál de las siguientes afirmaciones se cumple con certeza?

A. La sala A tendrá al menos una mujer.

B. La sala B quedará compuesta únicamente por mujeres.

C. La sala A tendrá más hombres que mujeres.

D. La sala B tendrá, al menos, 10 mujeres.

Solución: Como en la anterior, veamos si podemos imaginar contraejemplos para las opciones que nos presentan

A. No necesariamente. Sabemos que la sala B tiene varios hombres. Si en particular tuviera más de 10 hombres, y las 10 personas que se transfieren de la B a la A son hombres, entonces la sala A seguiría teniendo solo hombres.

B. Tampoco es necesario. La sala B tiene 20 mujeres y varios hombres. Si las 10 personas que se transfieren son mujeres, “varios hombres” siguen estando en la sala B.

C. Podría ser que la sala A tuviera solo uno o dos hombres y nadie más. Luego si se transfieren 10 mujeres de la B a la A, la sala A tendría más mujeres que hombres.

D. Para que quedaran menos de 10 mujeres en la sala B, considerando que esta inicia con 20 mujeres, sería necesario que al menos 11 de estas se pasen a la sala A. Pero esto no ocurre pues sabemos que son 10 las personas que se transfieren de B a A. Por lo tanto, necesariamente quedarán al menos 10 mujeres en la sala B. La opción correcta es la D.

□

16. Para una fiesta hay tazas verdes, tazas amarillas y tazas blancas. Las blancas son tantas como las verdes y las amarillas juntas. En la fiesta solamente se utilizaron las dos terceras partes del total de las tazas.

Según la información anterior, con certeza, ¿cuáles tazas se usaron? [11]

A. Algunas tazas verdes.

B. Algunas tazas blancas.

C. Algunas tazas amarillas.

D. Todas las tazas verdes.

E. Todas las tazas blancas.

Solución: Utilizamos el mismo método que antes:

A. Sabemos que hay tantas blancas como verdes y amarillas juntas. Por lo tanto, las blancas corresponden a la mitad de las tazas. Si las verdes fueran menos que las amarillas, al ser también menos que las blancas, representan menos de la tercera parte de las tazas. Como en la fiesta se utilizan dos terceras partes, podríamos usar solo blancas y amarillas, y que las verdes entren dentro de esa tercera parte que no se usó.

B. Si las tazas blancas no se usan, como representan la mitad de las tazas, necesariamente como máximo se pudo haber utilizado la otra mitad de las tazas. Pero nos dicen que se utilizaron las dos terceras partes de las tazas, una fracción mayor a la mitad. Así, no es posible que se utilizaran solo verdes y amarillas, pues representan la mitad de las tazas y se usaron más de la mitad. Así, con certeza algunas tazas blancas fueron utilizadas. Esta es la opción correcta

C. Similar al caso de las tazas verdes, si las amarillas fueran menos que las verdes, podemos escoger que nuestros dos tercios de tazas usadas correspondan únicamente a tazas blancas y verdes.

D. Como en el análisis de la A., podemos incluso ver que no es necesario que se utilizen tazas verdes del todo.

E. Si utilizamos todas las tazas verdes y todas las amarillas y llenamos el resto con blancas, no vamos a necesitar todas las blancas (pues si no estaríamos usando todas las tazas, y esto no pasa). Así, es posible que no usemos todas la blancas.

□

17. En una habitación con tragaluces hay 4 cables paralelos, y en cada uno caben a lo sumo 8 camisas. Al tender la ropa, cada camisa debe estar sostenida por al menos 2 prensas en el mismo cable (no puede

guindar de dos cables distintos), y cada prensa puede sostener a lo sumo dos camisas. Marco debe tender 20 camisas. ¿Cuál es el mínimo número de prensas que debe utilizar para tenderlas?

A. 22 prensas.

B. 23 prensas.

C. 24 prensas.

D. 25 prensas.

Solución: Imagine que guindamos 4 camisas en un cable. Cada una necesita dos prensas pero entre dos de ellas pueden compartir una prensa. Para usar la menor cantidad de prensas, lo ideal es que cada prensa agarre dos camisas. Todas pueden hacer esto excepto las de los extremos. Esto nos permite ver que para guindar cuatro camisas, la menor cantidad de prensas que requerimos es de 5, pues ocupamos: pcpcpcpcp donde p es prensa y c es camisa. En general note que vamos a necesitar una prensa más que la cantidad de camisas que estamos guindando en un mismo cable (cada camisa requiere una prensa, pero necesitamos una última para utilizar dos en la última camisa que guindemos. Por lo tanto, como tenemos 20 camisas y en cada cable caben a lo sumo 8, vamos a necesitar usar tres o cuatro cables. En general, note que estamos usando una prensa por camisa, es decir 20 prensas, y necesitamos una más por cada cable que estemos utilizando. Como la menor cantidad de cables que necesitamos es 3, entonces necesitamos utilizar como mínimo 23 prensas.

□

18. Una comerciante compró latas de frutas para vender 10 cada día. Sucedió que el primer día logró vender las 10 latas, sin embargo, en los restantes vendió cada día una menos que el día anterior, razón por la cual, en el tiempo previsto para la venta todavía le quedaban 6 latas.

¿Cuántos días le tomó vender todas las latas de frutas? [12]

A. 4

B. 5

C. 6

D. 9

E. 10

Solución: El primer día vendió 10, en el segundo 9, y así. Hagamos una tabla

Día	1	2	3	4
Latas vendidas	10	9	8	7
Latas que esperaba vender	10	10	10	10
Total hasta ese día	10	19	27	34
Total que esperaba haber vendido	10	20	30	40
Déficit en latas vendidas	0	1	3	6

Nos dicen que en el tiempo previsto para la venta todavía le quedaban 6 latas. Vemos en la tabla anterior que el día en el que tenía un déficit de 6 latas (es decir, un total de 6 latas que pensó que ya habría vendido pero aún no había logrado venderlas) es justamente el cuarto día. Por tanto, ella esperaba vender todas en cuatro días. Sin embargo, va a necesitar un día más (en el día 4 vendió 7, así que en el día 5 venderá las 6 que le quedan) para terminar. Así, le tomó 5 días vender todas las latas de frutas. □

19. Un tablero 5x5 se colorea como el de ajedrez, con las esquinas todas de color negro. Hay 25 ranas, una en cada cuadro. En un momento dado, cada rana salta a uno de los cuadros vecinos, sin contar esquinas. Con certeza se cumple que:

A. Un cuadro blanco queda vacío.
B. Hay un cuadro en el que caen tres ranas.
C. Un cuadro negro termina con dos o más ranas.
D. Un cuadro negro queda vacío.

Solución: Notemos que cuando una rana salta a un cuadro vecino, cambia de color. El tablero 5x5 tiene 25 cuadritos, y si contamos, nos damos cuenta de que hay 13 negros y 12 blancos (agrupando las primeras 4 filas, hay 10 negros y 10 blancos, y en la última fila hay 3 negros y 2 blancos, por el hecho de que las esquinas sean negras.

Por lo tanto, empezamos con 13 ranas en negro que saltan a 12 cuadros blancos. Esto quiere decir (por el principio del palomar), que queda un cuadro blanco con dos ranas. No es necesario que un cuadro blanco quede vacío (vale la pena ver cómo saltarían las ranas para que no quede ninguno cuadrito blanco vacío). Tampoco es necesario que haya un cuadro en el que caigan tres ranas. De hecho, si todas las ranas saltan hacia la derecha pero las de la última columna a la izquierda, la primera columna queda vacía y el resto tienen una rana en cada cuadro, excepto la cuarta columna que tiene 2.

Por otro lado, tenemos 12 ranas en blanco que saltan a 13 cuadros negros. Por tanto, no es posible que todos los cuadros negros queden ocupados (hay más casas que habitantes). Así, debe quedar un cuadro negro vacío. La respuesta correcta es la D.

Note que no es necesario que un cuadro negro quede con dos ranas o más: en la primera fila, las ranas en blanco pueden saltar a la derecha y quedan en cuadros distintos. En la segunda y en la cuarta pueden saltar hacia abajo, y en la tercera y quinta hacia arriba, de forma que se intercambian de fila y no caen dos en el mismo cuadro. □

Referencias

[1]Acuña Chacón et al., *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*
[2]ibíd.
[3]ibíd.
[4]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[5]ibíd.
[6]Rojas Rojas et al., *60 - 10 preguntas y respuestas de práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[7]ibíd.
[8]Acuña Chacón et al., *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*
[9]Modificado de Martínez, Córdoba et al., Prácticas y Consejos para el Examen de Admisión 2022
[10]Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[11]ibíd.
[12]ibíd.

3. Sucesiones

1. Analice la siguiente secuencia y encuentre la ley que se da en ella:

$$0, 3, 8, 15, 24, \ldots$$

De acuerdo con la ley que se da en la secuencia anterior, ¿cuál es el número correspondiente a la posición 11? [1]

   A. 99
   B. 120
   C. 132
   D. 143

Solución: Una estrategia usual para encontrar patrones es calcular las diferencias entre términos consecutivos y ver si estas tienen un patrón más sencillo. Para que sea más fácil después referirnos a ellos, digamos que el término n-ésimo de la sucesión es T_n:

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+7} 15 \xrightarrow{+9} 24 \longrightarrow \cdots$$

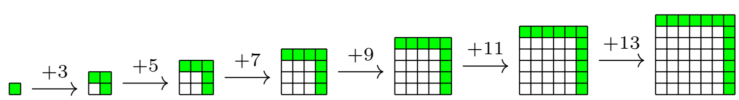
Las diferencias son los números impares, por lo tanto, podemos calcular que a 24 hay que sumarle 11, luego a este se le suma 13, etc. Completamos la secuencia hasta la posición 11:

$$0 \xrightarrow{+3} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{+7} 15 \xrightarrow{+9} 24 \xrightarrow{+11} 35 \xrightarrow{+13} 48 \xrightarrow{+15} 63 \xrightarrow{+17} 80 \xrightarrow{+19} 99 \xrightarrow{+21} 120$$

Así que el número correspondiente a la posición 11 es $T_{11} = 120$, la opción B.

Con un poco más de experiencia, reconocemos este patrón (el de sumar impares entre términos consecutivos) como el patrón de diferencias entre los números cuadrados perfectos:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{+7} 16 \xrightarrow{+9} 25 \xrightarrow{+11} 36 \xrightarrow{+13} 49$$
$$1^2 \xrightarrow{+3} 2^2 \xrightarrow{+5} 3^2 \xrightarrow{+7} 4^2 \xrightarrow{+9} 5^2 \xrightarrow{+11} 6^2 \xrightarrow{+13} 7^2$$



Por lo que comparando ambas sucesiones, vemos que en la del ejercicio cada término es el cuadrado perfecto asociado a su posición menos uno:

$0 = 1^2 - 1,$	$3 = 2^2 - 1,$	$8 = 3^2 - 1,$	$15 = 4^2 - 1,$	$\ldots$
T_1	T_2	T_3	T_4	$\ldots$

Por lo tanto, podemos afirmar que el término en la posición n es $n^2 - 1$. En particular, el término en la posición 11 es $T_{11} = 11^2 - 1 = 121 - 1 = 120$. Este método nos sirve más cuando el término que se pide está en una posición grande, pues entonces es muy lento ir haciendo las sumas una por una. □

2. Analice la siguiente secuencia y descubra la ley que se da en ella

$$1, 4, 10, 19, \ldots$$

Con base en la secuencia y su ley se puede asegurar con certeza que el sexto término corresponde a [2]

A. 31
B. 46
C. 50
D. 64

Solución: Analizamos las diferencias

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+9} 19 \rightarrow \cdots$$

Vemos que las diferencias son justamente los múltiplos de 3: $3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots$. Por lo tanto, completando hasta el sexto término

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+9} 19 \xrightarrow{+12} 31 \xrightarrow{+15} 46 \xrightarrow{+18} 64$$

Concluimos que el sexto término es el 46. La opción correcta es la B. □

3. Analice la siguiente secuencia y encuentre la ley que se da en ella:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \\ S_2 &= S_1 + 2 \\ S_3 &= S_2 + 3 \\ S_4 &= S_3 + 4 \\ S_5 &= S_4 + 5 \\ S_6 &= S_5 + 6 \end{aligned}$$

De acuerdo con la ley que se da en la secuencia anterior, ¿cuál de las siguientes opciones representa una expresión equivalente a S_{12}? [3]

A. $S_{10} + 22$
B. $S_{10} + 23$
C. $S_{11} + 22$
D. $S_{11} + 23$

Solución: Podemos ver que cada término es igual al término anterior más su propia posición, es decir, $S_n = S_{n-1} + n$ $(*)$. Por lo tanto, esperaríamos que $S_{12} = S_{11} + 12$. Esta opción no está entre las respuestas, lo que no significa que sea incorrecta, sino que debemos encontrar otra forma de expresar lo mismo.

Lo que sí podemos hacer es descartar las opciones C. y D., pues ya sabemos que S_{12} es 12 más que S_{11}, cosa que no puede pasar si la C. o la D. ocurren.

Veamos las opciones A. y B. Notamos que se refieren a S_{10}, pero nuestra fórmula solo tiene S_{12} y S_{11}. ¿Cómo vamos a saber qué tiene que ver S_{10} con S_{12}? La clave es que podemos expresar S_{11} - utilizando nuestra misma fórmula $(*)$ - en términos de S_{10}: $S_{11} = S_{10} + 11$. Tenemos por tanto que

$$\begin{cases} S_{12} = S_{11} + 12 \\ S_{11} = S_{10} + 11 \end{cases}$$

Así que sustituimos la segunda ecuación en la primera:

$$S_{12} = (S_{10} + 11) + 12 = S_{10} + 23$$

De esta forma, la opción correcta es la B. □

4. Analice las siguientes igualdades y descubra la ley que se da en ellas:

$$2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1$$
$$5^2 - 4^2 = 2 \cdot 4 + 1$$

De acuerdo con la ley, ¿cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $100^2 - 99^2$? [4]

   A. $2 \cdot 98 + 1$
   B. $2 \cdot 99 + 1$
   C. $2 \cdot 99^2 + 1$
   D. $2 \cdot 100 + 1$
   E. $2 \cdot 100^2 + 1$

Solución: ¿Cuál es el patrón de las igualdades anteriores? Notamos que el número que se multiplica por 2 al lado derecho es el mismo número cuyo cuadrado está siendo restado al cuadrado de su sucesor (el número +1). Por lo tanto, podríamos describir el patrón como:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2 \cdot n + 1$$

De acuerdo con esta ley, para analizar $100^2 - 99^2$, vemos que $n = 99$ en este caso y por tanto obtenemos que $100^2 - 99^2 = 2 \cdot 99 + 1$. La opción correcta es la B. $\square$

5. Considere la siguiente sucesión:

$$1, 4, 8, 11, 22, 25,$$

¿Cual es el octavo término de la sucesión?

   A. 53
   B. 50
   C. 55
   D. 51
   E. 52

Solución: De nuevo, analizamos primero las diferencias, para ver si encontramos algún patrón:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+4} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{+11} 22 \xrightarrow{+3} 25$$

Aquí, no parece que haya un patrón tan claro en la sucesión de diferencias. Quizás lo que más llama la atención es que una vez de por medio siempre se suma 3. Pero los otros valores (+4, +11), ¿qué relación tienen?

Aquí es donde hay que relacionar ambas sucesiones. También podemos empezar a pensar en combinaciones de patrones intercalados. Vemos que término de por medio se suma 3, ¿y en los otros casos? Note que es al 4 al que se le suma 4 y es al 11 al que se le suma 11. Por lo tanto, parece que lo que ocurre es que se suman a si mismos, o lo que es lo mismo, que se duplican:

$$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+3} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{+3} 25 \xrightarrow{\times 2} 50 \xrightarrow{+3} 53 \xrightarrow{\times 2} 106 \xrightarrow{3} \cdots$$

De esta forma, el octavo término de la sucesión es 53. Lo opción correcta es la A. $\square$

6. Analice las siguientes igualdades y descubra la ley o regla en ellas:

$$N_1 = 1$$
$$N_2 = 2^2 + 1$$
$$N_3 = 3^2 + 2$$
$$N_4 = 4^2 + 3$$
$$N_5 = 5^2 + 4$$

De acuerdo con esta ley, ¿cuál es una expresión equivalente a N_{235}? [5]

A. $234^2 + 234$
B. $234^2 + 235$
C. $235^2 + 234$
D. $235^2 + 235$

Solución: En este tipo de preguntas de sucesiones, necesitamos saber dónde buscar el patrón. Aquí, por ejemplo, no es difícil ver cuál sería el siguiente término, $N_6 = 6^2 + 5$, y el siguiente, y el siguiente. Pero como nos piden el número 235, no es viable hacer uno por uno hasta llegar al 235. En estos casos, conviene descubrir una relación entre el número de término, o el índice (el numerito pequeño bajo la N) y el valor de ese término. En este caso es fácil ver que el término n-ésimo va a ser $n^2 + (n-1)$, es decir, el cuadrado del índice más el número anterior al índice.

Por lo tanto, $N_{235} = 235^2 + 234$, es decir, la C. Note que las respuestas son todas muy parecidas, entonces hay que asegurarse de marcar bien, con cuidado. □

7. Considere la siguiente secuencia de igualdades:

$$N_1 = 2$$
$$N_2 = 2$$
$$N_3 = 6$$
$$N_4 = 6$$
$$N_5 = 10$$
$$N_6 = 10$$

Si se continúa la secuencia, ¿a cuánto equivale N_{116}? [6]

A. 226
B. 228
C. 230
D. 232

Solución: En esta pregunta, el patrón es bastante claro rápidamente: dejamos igual, sumamos 4, dejamos igual, sumamos 4, etc. Quizás el mayor problema es que nos piden el término número 116, por lo que no es viable ponernos a calcular término por término, necesitamos encontrar un atajo.

Como van en parejas, una forma sería intentar emparejar los términos y crear una nueva sucesión. Así, podemos decir que la pareja 1 es la de N_1 y N_2, y toma un valor de 2. La pareja 2 es la de N_3 y N_4 y toma el valor de 6. Y así sucesivamente. De hecho, la posición del segundo término de la pareja será, en cada caso, el doble del número de pareja en la que est[a. Afirmamos que la pareja número

k es la que contiene a los valores N_{2k-1} y N_{2k}. Si a V_k es el valor que toman ambos elementos de la pareja k, tenemos una nueva sucesión,

$$V_1 = 2,\ V_2 = 6,\ V_3 = 10,\ V_4 = 14, \ldots.$$

Y, como $116 = 2 \cdot 58$, N_116 está en la pareja 58 y toma el valor V_{58}. Como en cada paso se suman 4, tenemos que preguntarnos cuantos pasos hay de V_1 a V_58. Para esto, podemos ver que de V_1 a V_2 hay 1 paso. De V_1 a V_3 hay 2 pasos, y así sucesivamente, de V_1 a V_{58} hay 57 pasos (note que no son 58, sino 58-1 pasos) de +4. Por esto, el valor V_{58} es $V_1 + 57 \cdot 4 = 2 + 228 = 230$. De esta forma la respuesta correcta es la C.

Podemos generalizar este proceso. Las sucesiones donde el valor que se va sumando de un término a otro es constante se llaman sucesiones - o progresiones - aritméticas. Si a_n es una sucesión aritmética donde la diferencia entre términos consecutivos es constante d, entonces para llegar de a_1 a a_n damos $n - 1$ pasos de $+d$ cada uno, lo que nos permite concluir que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ es una fórmula general para sucesiones *aritméticas*. $\square$

8. Considere la siguiente secuencia:

$$\frac{1}{n^2+1},\ \frac{3}{n^4+2},\ \frac{5}{n^6+3},\ \ldots$$

¿Cuál es la expresión que continúa la secuencia? [7]

A. $\dfrac{7}{n^8+3}$

B. $\dfrac{6}{n^8+3}$

C. $\dfrac{7}{n^8+4}$

D. $\dfrac{7}{n^8+5}$

Solución: No nos dejemos asustar por el n que está ahí. Al final, en una secuencia de este tipo, con variables, generalmente hay que fijarse en los números, y en aquellos que van variando. Nos fijamos en los numeradores (los números en la parte superior de las fracciones): $1, 3, 5$, y vemos que son los números impares. Esperamos, por tanto, que el numerador de la siguiente expresión sea 7.

Ahora, fijémonos en el denominador, en el sumando que tiene una potencia de n: va n^2, n^4, n^6... los exponentes son los números pares. Así, el siguiente debería tener un n^8 más algún otro sumando. Estos otros sumandos van $+1, +2, +3$, así que el siguiente debería ser $+4$. Podemos por tanto concluir que la siguiente expresión en la secuencia debería tener numerador 7 y denominador $n^8 + 4$. Es decir, la respuesta es $\dfrac{7}{n^8+4}$, la opción C. $\square$

9. Analice la secuencia:

$$2,\ 3,\ 5,\ 2,\ -2,\ 3,\ 9,\ \ldots$$

¿Cuál es el siguiente término?

A. 5.

B. 2.

C. 3.

D. 16.

Solución: Nos fijamos en la sucesión de diferencias:

$$2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{-3} 2 \xrightarrow{-4} -2 \xrightarrow{+5} 3 \xrightarrow{+6} 9 \longrightarrow \cdots$$

Vemos que la magnitud (el valor absoluto) de las diferencias va aumentando de 1 en 1: $1, 2, 3, 4, \ldots$. Y el signo va alternando cada dos, va $+, +, -, -, +, +, \ldots$. Así, podemos esperar que la magnitud de la siguiente diferencia sea $7 = 6 + 1$ y que su signo sea $-$, pues ya hubo dos positivos seguidos.

De esta forma, el siguiente término debe ser $9 - 7 = 2$. La opción correcta es la B. □

10. Considere la siguiente secuencia, donde n es un número entero positivo:

$$3n - 1,\ 3n + 2,\ 3n + x,\ 3n + 8,\ \ldots$$

¿Cuál es el valor de x?[8]

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

Solución: De nuevo, no hemos de asustarnos por las expresiones algebraicas. De hecho, note que todos los términos son $3n$ más algo. Así, podemos fijarnos en esa constante, que va $-1, 2, x, 8$. ¿Qué número calzaría bien en esta secuencia? Del -1 al 2 hay 3 de diferencia. Del 2 al 8 hay 6 de diferencia. Por lo tanto, tendría sentido que del 2 al x hubiesen 3 de diferencia y de x al 8 otros tres, de forma que la sucesión es artimética. Por lo tanto, $x = 2 + 3 = 5$, y notemos que satisface muy claramente el patrón de las diferencias constantes. □

11. Considere la siguiente sucesión:

$$3x + 5,\ 4x + 7,\ 5x + 10,\ 6x + 14,\ \ldots$$

Continuando con el patrón, ¿cuál es el séptimo término de la sucesión?

A. $9x + 35$
B. $7x + 35$
C. $7x + 32$
D. $9x + 32$
E. $9x + 40$

Solución: Nos fijamos en el término constante y en el término de grado 1 (el que tiene x) por separado. La sucesión de términos constantes va así: $5, 7, 10, 14$. Calculamos sus diferencias:

$$5 \xrightarrow{+2} 7 \xrightarrow{+3} 10 \xrightarrow{+4} 14$$

Las diferencias van aumentando 1 a la vez. Por lo tanto, esperaríamos que los siguientes sean $14+5 = 19,\ 19 + 6 = 25,\ 25 + 7 = 32,\ 32 + 8 = 40,\ \ldots$.

Ahora nos fijamos en la sucesión de términos con x: $3x, 4x, 5x, 6x$, van sumando de x en x (los coeficientes, de 1 en 1). De esta forma, los siguientes son $7x,\ 8x,\ 9x,\ 10x,\ \ldots$.

Uniendo ambas conclusiones, obtenemos que la sucesión, hasta la posición 7, va así:

$$3x + 5,\ 4x + 7,\ 5x + 10,\ 6x + 14,\ 7x + 19,\ 8x + 25,\ 9x + 32$$

La opción correcta es la D. □

Referencias

[1]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[2]Martínez, Córdoba et al., Prácticas y Consejos para el Examen de Admisión 2022
[3]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[4]Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[5]Calvo Díaz et al., *24 preguntas de práctica en el 2024 para la Prueba de Aptitud Académica*
[6]Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[7]Acuña Chacón et al., *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*
[8]ibíd.

1. Camila tiene 36 lápices, 60 borradores y 84 reglas. Desea hacer paquetes que contengan la misma cantidad de cada tipo de objeto, sin que sobre ninguno. ¿Cuál es la mayor cantidad de paquetes que puede hacer?
   A. 6
   B. 12
   C. 15
   D. 18

Solución: Probemos con las opciones

1. Si hiciera 6 paquetes, cada paquete tendría que contener $36/6 = 6$ lápices, $60/6 = 10$ borradores y $84/6 = 14$ reglas. Es decir, es posible hacer 6 paquetes. ¿será la mayor cantidad posible?
2. Si hiciera 12 paquetes, como es el doble de paquetes que en la opción anterior, a cada paquete le quedaría la mitad de lo que tuvo en el anterior, es decir 3 lápices, 5 borradores y 7 reglas. Si lo desea, verifique que $36/12 = 3$, $60/12 = 5$ y $84/12 = 7$. ¿Será esta la mayor cantidad de paquetes posible?
3. Si hiciera 15 paquetes, note que cada paquete tendría $36/15 = 2{,}4$ lápices. Esto no tiene sentido, pues se asume que no podemos cortar lápices (o borradores o reglas). Es decir, necesitamos que la cantidad de paquetes "divida" (i.e. que al dividir entre esta obtengamos un número entero, sin decimales) a cada una de las cantidades de objetos. No es posible hacer 15 paquetes.
4. Si hiciera 18 paquetes, cada paquete tendría $36/18 = 2$ lápices, pero 60 no es divisible entre 18 (obtenemos residuo 6 pues $18 \cdot 3 + 6 = 60$) así que la cantidad de borradores no podría ser la misma en todos los paquetes.

De esta forma, la B. y C. no son posibles, y como $12 > 6$ y piden la mayor cantidad de paquetes que puede hacer, entonces la opción correcta es la B.

Hay una forma estándar de hacer este tipo de problemas, con la herramienta llamada máximo común divisor (mcd). Anteriormente notamos que para que una cantidad de paquetes sea válida, debe dividir a las cantidades de objetos. Es decir, que si la cantidad de paquetes es d, entonces $d \mid 36$, $d \mid 60$ y $d \mid 84$, donde "|" significa "divide". Para esto podríamos calcular los conjuntos de divisores positivos de cada número y tomar el mayor que sea común a todos (de ahí el nombre "máximo común divisor"):

$$D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$
$$D_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$
$$D_{84} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84\}$$

Vemos que, en efecto, $12 = \text{mcd}(36, 60, 84)$. Este proceso puede resultar tedioso. En cambio, podemos hacer uso de los números primos que componen cada uno de estos números. Podemos, paso a paso, ir quitando de todos los números los primos que tengan en común, y cuando ya no tengan factores (divisores) comunes, el producto de todos los factores que sacamos debe darnos el mcd:

$$\begin{array}{ccc|l} 36 & 60 & 84 & \text{el 2 es factor común: dividimos cada uno entre 2} \\ 18 & 30 & 42 & \text{tienen otro 2 en común} \\ 9 & 15 & 21 & \text{tienen el 3 como divisor común} \\ 3 & 5 & 7 & \text{ya no tienen divisores comunes: } \text{mcd}(36,60,84) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

Este proceso, además, tiene la ventaja de que los números que quedan abajo (los que ya no tienen factores comunes) son justamente las cantidades de material que queda en cada paquete. Hay 12 paquetes con 3 lápices, 5 borradores y 7 reglas cada uno. □

2. Isabel compró 2 naranjas, 4 mangos y algunas peras. Luego, ella agregó más frutas de cada tipo y así duplicó la cantidad de peras. Ahora ella tiene la misma cantidad de naranjas, mangos y peras.

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es, con certeza, verdadera? [1]

   A. Isabel agregó una cantidad impar de mangos y una cantidad impar de naranjas.
   B. Isabel agregó una cantidad impar de mangos y una cantidad par de naranjas.
   C. Isabel agregó una cantidad par de mangos y una cantidad impar de naranjas.
   D. Isabel agregó una cantidad par de mangos y una cantidad par de naranjas.

Solución: Esta pregunta es difícil de hacer en abstracto. Una opción es hacer ejemplos y descartar opciones. Como al duplicar las peras, también agregó naranjas y mangos y todos tuvieron la misma cantidad, no podía tener muy poquitas peras, 1 o 2, pues entonces al duplicarlas tiene 4 o menos, y como agregó mangos, ya tiene más de 5 mangos. Hagamos algunos ejemplos.

Si tenía 3 peras, al final terminó con $3 \cdot 2 = 6$ de cada fruta. Es decir, tuvo que agregar 4 naranjas y 2 mangos. Como ambas son cantidades pares, esto nos permite descartar la A., la B. y la C., por lo que necesariamente es la D., la que queda.

Para dar la solución completa, notemos que al final, como cada tipo de fruta terminó con la misma cantidad, y esta cantidad es el *doble* de la cantidad de peras originales, debe ser par (es 2 por algún número). Digamos que n es la cantidad original de peras, de forma que terminamos con $2n$ de cada tipo de fruta. Tuvimos que haber agregado entonces $2n-2$ naranjas y $2n-4$ mangos, que son ambos resta de números pares y por lo tanto son pares. □

3. Tres fuentes de agua se encienden automáticamente con diferente frecuencia: una cada 5 minutos, la segunda cada 6 minutos y la tercera cada 12. Si las tres se activan al mismo tiempo a las 3:00 p.m., ¿a qué hora se volverán a encender juntas por primera vez después de ese momento?

   A. 3:24 p.m.
   B. 3:30 p.m.
   C. 4:00 p.m.
   D. 4:30 p.m.

Solución: Quizás el método más directo es probando con las opciones. Podemos verificar cada una para ver si es verdad que las tres fuentes de agua simultáneamente a esa hora, y elegir la opción más cercana al tiempo inicial en el que esto ocurre.

A. A las 3:24 p.m. han pasado 24 minutos desde el inicio. Pero la fuente que se enciende cada 5 minutos no se enciende a los 24 minutos, sino a los 5, 10, 15, 20, 25, etc., es decir, en los múltiplos de 5. Esta no puede ser.

B. A las 3:30 p.m. han pasado 30 minutos. Pero 12 no divide a 30, por lo que la fuente que se enciende cada 12 minutos no se enciende en este momento, sino a los 12, 24, 36, etc. Esta no puede ser.

C. A las 4:00 p.m. han pasado 60 minutos. Veamos que tanto 5, 6, y 12 dividen a 60. Luego las tres fuentes en efecto se encienden a los 60 minutos, de forma que esta puede ser. Como además es la menor de las opciones que quedan, podemos concluir que esta es la respuesta correcta.

D. A las 4:30 p.m. han pasado 90 minutos, pero 12 no divide a 90, luego no puede ser esta opción.

Vale la pena entender lo que está detrás de este tipo de ejercicios. Veremos dos métodos que no dependen de las opciones de respuesta. Primero, veamos después de cuantos minutos se enciende cada una

Fuente 1	5	10	15	20	25	$\overline{30}$	35	40	45	50	55	$\overline{60}$
Fuente 2	6	$\underline{12}$	18	$\underline{24}$	$\overline{30}$	$\underline{36}$	42	$\underline{48}$	54	$\overline{\underline{60}}$	66	$\underline{72}$
Fuente 3	$\underline{12}$	$\underline{24}$	$\underline{36}$	$\underline{48}$	60	$\underline{72}$	$\underline{84}$	$\underline{96}$	$\underline{108}$	$\underline{120}$	$\underline{132}$	$\underline{144}$

Por lo tanto, las tres vuelven a encenderse simultáneamente después de una hora, es decir, a las 4:00.

Este método es muy lento, pues necesitamos escribir todos los múltiplos de 5, de 6, de 12 hasta encontrar la primera vez que coincidían.

Vemos que cada fuente se prende cuando la cantidad de minutos transcurridos es un múltiplo del intervalo de tiempo asociado. En consecuencia, las tres fuentes coinciden cuando el número de minutos transcurridos es múltiplo de 5, de 6 y de 12 simultáneamente. Por lo tanto, lo que queremos encontrar es el mínimo común múltiplo (mcm) de estos tres valores.

Una forma más eficiente de encontrar este mínimo común múltiplo es la siguiente. Como 5, 6 y 12 deben dividir a este mcm, sabemos que cada factor de alguno de ellos lo divide, por ejemplo el 3 (divide a 6), el 4 (divide a 12), etc. Sin embargo, como queremos que sea mínimo, si hay algún factor que divide a varios (por ejemplo, el 3 divide tanto a 6 como a 12), no queremos contarlo muchas veces. Así, podemos hacer el siguiente algoritmo: Anotamos los tres (o más) números que tenemos, y en cada paso, escogemos un factor primo de alguno de ellos, y dividimos por ese factor todos los números que podamos. Los que no podamos, los dejamos sin dividir.

5	6	12	el 2 divide al 6 y al 12, aunque no al 5
5	3	6	el 2 divide al 6, aunque no divide a los demás
5	3	3	el 3 divide a sus dos apariciones, pero no al 5
5	1	1	el 5 divide al 5
1	1	1	ya todos quedaron en 1: $\mathrm{mcd}(5, 6, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Esto es confirmado por lo que encontramos haciendo la tabla. □

4. Iveth y Marta tienen igual número de monedas de 20 gapes. Ambas deciden agruparlas en bolsitas, de la siguiente forma:

   - Iveth puso 7 monedas en cada bolsita.
   - Marta puso 5 monedas en cada bolsita.

   Si al final Marta tiene 4 bolsitas más que Iveth, ¿de cuánto dinero disponía cada una? [2]

   A. 2800 gapes
   B. 1400 gapes
   C. 700 gapes
   D. 280 gapes
   E. 200 gapes

Solución: Podemos hacer este problema utilizando las soluciones:

A. $2800/20 = 140$, de forma que cada una tendría 140 monedas. Como Iveth pone 7 monedas en cada bolsa, al final tendría $140/7 = 20$ bolsitas. Por su parte, Marta pone 5 monedas en cada bolas, luego tendría $140/5 = 14 \cdot 10/5 = 14 \cdot 2 = 28$ bolsitas. Pero entonces Marta tendría 8 bolsitas más que Iveth, no 4.

B. $1400/20 = 70$ monedas cada una. Iveth por tanto tendría $70/7 = 10$ bolsas, y Marta, $70/5 = 7 \cdot 2 = 14$ bolsas. En este caso, Marta sí tiene 4 bolsas más que Iveth. Así la respuesta es la B.

Otra forma muy directa: utilizando ecuaciones. Si Iveth tiene x bolsitas, María tiene $x + 4$ bolsitas. Como cada bolsita de Iveth tiene 7 monedas, Iveth tendría $7x$ monedas, y como cada bolsita de María tiene 5 monedas, ella tiene $5(x + 4)$ monedas. Como ambas tienen la misma cantidad de monedas, igualamos y resolvemos:

$$\begin{aligned} 7x &= 5(x+4) \\ 7x &= 5x + 5 \cdot 4 \\ 7x - 5x &= 20 \\ 2x &= 20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Así Iveth tiene 10 bolsitas, luego tenía $7 \cdot 10 = 70$ monedas de 20 gapes (y Marta tiene 14 bolsitas, $14 \cdot 5 = 70$ monedas) y por tanto en total $70 \cdot 20 = 1400$ gapes. □

5. Una empresa dispone de tres contenedores con capacidad para 90 kg, 180 kg y 150 kg, respectivamente. En cada uno se colocan sacos de frijoles del mismo peso cada saco, de forma que los contenedores se llenen y los sacos sean del mayor peso posible. ¿Cuántos kilogramos debe pesar cada saco de frijoles? [3]

    A. 15
    B. 30
    C. 45
    D. 90

Solución: Revisamos las opciones.

A. Si cada saco pesara 15 kg, en el primer contenedor cabrían $90/15 = 90/(3 \cdot 5) = 30/5 = 6$ sacos, en el segundo $180/15 = 60/5 = 12$ sacos y en el tercero $150/15 = 10$ sacos. Esta opción es posible, ¿será el mayor peso posible?

B. Si cada saco pesa 30 kg, en el primer contenedor cabrían $90/30 = 9/3 = 3$, en el segundo $180/30 = 18/3 = 6$ y en el tercero $150/30 = 15/3 = 5$ sacos. Esta también es posible y el peso es mayor que en la A.

C. Si los sacos pesaran 45 kg, en el contenedor de 90 kg cabrían 2, en el de 180 cabrían 4, pero en el de 150 kg cabrían solo 3, pero sobrando 15kg de espacio, pues 45 no divide 150. En esta opción no se cumple que los contenedores se llenen, así que no puede ser.

D. Se los sacos pesaran 90kg, de nuevo no se puede llenar el contenedor de 150 kg, por lo que no es posible.

De esta forma, la opción correcta es la B.

Nuestro otro método es viendo que el peso de los sacos debe dividir el peso máximo de cada contenedor, es decir, es un divisor común de 90, de 180 y de 150, y queremos que sea el mayor. Calculando con el algoritmo:

$$\begin{array}{ccc|l} 90 & 180 & 150 & 2 \\ 45 & 90 & 75 & 3 \\ 15 & 30 & 25 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & \text{No hay más divisores comunes: } \operatorname{mcd}(90,180,150) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \end{array}$$

El peso de cada saco es 30 kg. $\square$

6. Una fábrica de una zona industrial tiene tres timbres para la realización de diferentes procesos. Uno suena cada hora y cuarto, el segundo cada hora y veinte, el tercero cada hora y media. Si los tres suenan simultáneamente a las 10 de la mañana del domingo, ¿cuándo es la próxima vez que volverá a suceder? [4]

   A. A las 10 de la noche del lunes
   B. A las 10 de la noche del martes
   C. A las 10 de la mañana del jueves
   D. A las 10 de la mañana del miércoles

Solución: Empecemos con el método de revisar las opciones de respuesta:

A. De las 10 a.m. del domingo a las 10 p.m. del lunes transcurren 36 horas, o $36 \cdot 60 = 2160$ minutos (12 de las 10 a.m. a las 10 p.m., otras 12 de las 10 p.m. a las 10 a.m. del lunes y otras 12 de las 10 a.m. a las 10 p.m.). El primer timbre suena cada hora y cuarto, es decir, cada 75 minutos. ¿Será que a los 2160 minutos suena el primer timbre? Basta ver si es divisible entre 75, pues suena en los múltiplos de 75: $2160/75 = 216 \cdot 10/(5 \cdot 15) = 216 \cdot 2/15 = 6 \cdot 36 \cdot 2/(3 \cdot 5) = 2 \cdot 36 \cdot 2/5$ y esta ya no se puede simplificar más. Así que 2160 no es divisible entre 75 y el primer timbre no suena en este momento. Esta opción no puede ser.

B. De las 10 a.m. del domingo a las 10 p.m. del martes transcurre un día más, 24 horas más, que en la opción anterior, es decir, transcurren $36 + 24 = 60$ horas, que son 3600 minutos. $3600/75 = 36 \cdot 10 \cdot 10/(5 \cdot 5 \cdot 3) = 12 \cdot 2 \cdot 2 = 48$, luego 75 sí divide 3600 y el primer timbre sí suena a esta hora. El segundo suena cada hora y veinte, i.e. cada 80 minutos, y $3600/80 = 45$ así que sí suena a las 10 p.m. del martes. Y como el tercero suena cada 90 minutos y 3600 es divisible entre 90 (360 es divisible entre 9 pues la suma de sus dígitos $3 + 6 + 0 = 9$ es divisible entre 9, esta es una regla de divisibilidad del 9), entonces el tercero también suena a esta hora. Por tanto, los tres timbres suenan simultáneamente a las 10 p.m., y como el resto de las opciones ocurren después, concluimos que la B. es la opción correcta.

Vemos que en este caso el análisis de las respuestas es bastante engorroso, pues hay que ir una por una y son cálculos en los que podemos equivocarnos con facilidad.

Podemos utilizar otro método, el tercer que usamos en el ejercicio 3, para calcular el mínimo común múltiplo de $75, 80$ y 90, los intervalos de tiempo en minutos en los que suena cada timbre:

75	80	90	el 5 divide a todos
15	16	18	el 2 divide a 16 y a 18
15	8	9	el 3 divide a 15 y a 18
5	8	3	el 5 divide a 5
1	8	3	el 3 divide a 3
1	8	1	ya solo queda el $8 = 2^3$
1	1	1	$\text{mcm}(75, 80, 90) = 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^3$
			$\text{mcm}(75, 80, 90) = 10 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 8 = 3600$

Los timbres volverán a sonar en 3600 minutos, que son $3600/60 = 360/6 = 60$ horas, que son $48 + 12$ dos días y medio. Por tanto, si sonaron simultáneamente a las 10 a.m. del domingo, dos días después son las 10 a.m. del martes, y medio día más son las 10 de la noche del martes. Así la respuesta es la B. $\square$

7. Tres campanas suenan cada cierto tiempo: la primera cada 10 minutos, la segunda cada 15 minutos y la tercera cada 18 minutos. Si las tres suenan juntas a las 12:00 p.m., ¿a qué hora volverán a sonar juntas por primera vez?
    A. 12:30 p.m.
    B. 12:45 p.m.
    C. 1:00 p.m.
    D. 1:30 p.m.

Solución: Vamos a calcular el mínimo común múĺtiplo de 10, 15 y 18 de una forma un poco distinta, para ver otro método. Es perfectamente válido utilizar los otros métodos que hemos visto anteriormente, como en 3 y en 6.

Factoricemos cada número en primos: $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$ y $18 = 2 \cdot 9 = 2 \cdot 3^2$. El mínimo común múltiplo, para que sea divisible entre estos 3, debe tener en su factorización prima un 2, un 5 y un 3^2 para poder cancelarlos al dividir entre 10, 15 o entre 18. Por lo tanto, $\text{mcm}(10, 15, 18) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 10 \cdot 9 = 90$. Así, las campanas sonarán de nuevo en 1 hora y media, es decir, a la 1:30 p.m. La respuesta correcta es la D.

Resumiendo el método recién visto, lo que hacemos es expresar cada número en su factorización prima y para encontrar el mcm se utilizan todos los primos de las descomposiciones, y cada uno se eleva a la mayor potencia con la que apareció. En este caso, como $10 = 2 \cdot 5$, $15 = 3 \cdot 5$ y $18 = 2 \cdot 3^2$, el mcm tiene que tener a 2, 5 y a 3 en su factorización. Además, basta con 2^1, con 5^1 pues no salen con exponentes mayores. Pero el 3 va elevado a la 2 pues en la factorización de 18 sale 3^2 y es la mayor potencia que toma entre las distintas factorizaciones. Por eso pudimos concluir que el mcm debía de ser $2 \cdot 3^2 \cdot 5$. □

8. Tres autobuses salen de una terminal al mismo tiempo. Uno regresa cada 20 minutos, otro cada 30 minutos y el tercero cada 50 minutos. ¿Después de cuánto tiempo volverán a coincidir los tres en la terminal?
    A. 2 horas y 30 minutos
    B. 4 horas
    C. 5 horas
    D. 6 horas

Solución: Note que $\text{mcm}(20, 30, 50) = 10 \cdot \text{mcd}(2, 3, 5) = 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 10 \cdot 3 = 300$. Aquí sacamos primero el 10, que es un divisor común de todos y notamos luego que el 2 el 3 y el 5 son primos, luego no tienen en común nada. Es decir, que para que algo sea divisible entre estos tres números, tiene que ser divisible entre $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Es decir, para que algo sea divisible entre 20, 30 y 50, tiene que ser divisible entre 10, y luego, lo que queda al dividir entre 10 tiene que ser múltiplo de 2, 3 y de 5, es decir, de 30. Por lo tanto $\text{mcd}(20, 30, 50) = 30 \cdot 10 = 300$.

Convertimos 300 minutos en horas, $300/60 = 5$ horas. De esta forma la opción correcta es la C.

Por completitud, comparemos con el método de la 7:

$$\begin{array}{ccc|l} 20 & 30 & 50 & 2 \\ 10 & 15 & 25 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \text{mcm}(20, 30, 50) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 10 \cdot 30 = 300 \end{array}$$

□

9. Un profesor tiene 72 marcadores, 90 lápices y 108 bolígrafos. Desea repartirlos en paquetes idénticos que contengan de los tres útiles. Al final, no le sobró nada. ¿Cuál es el mayor número de paquetes que pudo haber formado?

   A. 6
   B. 9
   C. 12
   D. 18

Solución: Este nos recuerda al ejercicio 5. Notemos que, como no le sobra nada y los paquetes son idénticos, los 72 marcadores se reparten completamente, igual que los 90 lápices y los 108 bolígrafos. Es decir, que la cantidad de paquetes tiene que dividir a 72, a 90 y a 108. Como queremos la mayor cantidad de paquetes posible, estamos buscando el máximo común divisor de estos tres números.

Podemos usar el mismo método de 5. En este caso vamos a ver otro método que también es válido. La idea es descomponer cada número en sus factores primos. Así,

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2^3 = 8 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & 72 = 2^3 \cdot 3^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \cdot 5 = 10 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 108 & 2^2 = 4 \\ 27 & 3^3 \\ 1 & 108 = 2^2 \cdot 3^3 \end{array}$$

Luego, para que un número divida a estos tres, su en su factorización prima el exponente de cada factor debe ser menor o igual que en las descomposiciones anterior. Por ejemplo, 5 no puede dividir a un factor común de 72, 90 y de 108, pues no divide ni a 72 ni a 108. Otro ejemplo, 3^2 sí divide a todos, pero 3^3 no, porque aunque divide a 108, no divide a $90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$, ya que el exponente en 3 es menor en 90 que en 3^3.

Así, una forma de encontrar el mcd es tomar todos los primos que están presentes en *todas* las descomposiciones primas, y elevarlos al menor exponente que encontremos en estas factorizaciones. De esta forma, sabemos que divide a todos y que no puede ser más grande pues dejaría de dividir alguno de los números. Así, 2 y 3 son los primos que están en todas las factorizaciones. La menor potencia de 2 que sale es 2, en el 90, y la menor que sale para 3 es 3^2, tanto en 72 como en 90. Así, $\text{mcd}(72, 90, 108) = 2 \cdot 3^2 = 18$. La mayor cantidad de paquetes que podemos hacer es 18. Cada paquete tiene $72/18 = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2} = 2^2 = 4$ marcadores, $90/18 = \frac{2 \cdot 5 \cdot 3^2}{2 \cdot 3^2} = 5$ lápices y $108/18 = \frac{2^2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3 = 6$ bolígrafos. □

10. La compañía ABC tiene un letrero cuyas letras parpadean (se encienden y se apagan) cada cierto tiempo. Sin embargo, por una falla dejaron de sincronizarse, y ahora la A parpadea cada 4 segundos, la B parpadea cada 7, y la C parpadea cada 6 segundos. Si en un momento de la noche las tres parpadearon al mismo tiempo, ¿cuál es la menor cantidad de segundos que deben pasar antes de que vuelvan a prenderse a la vez?

    A. 17
    B. 84
    C. 42
    D. 168
    E. 63

Solución: Calculamos $\text{mcm}(4, 7, 6)$. $4 = 2^2$, 7 es primo y $6 = 2 \cdot 3$. Por lo tanto, recordamos que una forma de calcular el mcm es tomar todos los primos con los mayores exponentes que tengan. Así, $\text{mcm}(4, 7, 6) = 2^2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$. De esta forma la opción correcta es la C. □

11. Carlos tiene una cantidad entera de canicas. Si las agrupa de 4 en 4 sobran 3, si las agrupa de 5 en 5 sobran 4, y si las agrupa de 6 en 6 sobran 5. ¿Cuál es el menor número posible de canicas que puede tener Carlos?

    A. 59

    B. 119

    C. 123

    D. 239

Solución: Veamos las opciones. Si agrupamos 59 canicas de 4 en 4, haciendo la división larga obtenemos $59 = 4 \cdot 14 + 3$ así que nos sobran 3. Si las agrupamos de 5 en 5, $59 = 5 \cdot 11 + 4$ y sí sobran 4. Y si lo hacemos de 6 en 6, $59 = 6 \cdot 9 + 5$ y sí sobran 5. De forma que la opción 59 es factible. Como nos piden el menor número posible de canicas, 59 es la menor entre las opciones y ya comprobamos que sirve, esta debe ser la opción correcta.

Si quisiéramos resolver este problema lógicamente, hay un pequeño truco que lo simplifica. Si agregamos una canica más, vemos que ahora podemos agrupar de 4 en 4 sin que sobre nada, pues con las que sobraban se forma un nuevo grupo de 4. Igual si agrupamos de 5 en 5 o de 6 en 6, pues en cada caso solo falta una para formar un grupo más. Por tanto, si n es la cantidad de canicas, $n + 1$ es un múltiplo común de 4, de 5 y de 6. Como nos piden que n sea lo menor posible, $n + 1$ debe ser el mínimo común múltiplo. Calculándolo obtenemos 60. Así $n = 59$. □

12. Xochilt tiene 24 mangos, 40 piñas y 56 manzanas, y quiere formar la mayor cantidad de paquetes con fruta de forma que todos los paquetes sean iguales y que no quede fruta sobrante. Con certeza, cada paquete contiene

    A. 3 mangos.

    B. 4 piñas.

    C. 8 manzanas.

    D. 5 piñas y 9 manzanas.

Solución: La cantidad de paquetes debe dividir 24, 40 y 56, y ser la mayor posible, luego debe ser el máximo común divisor. Calculándolo:

$$\begin{array}{ccc|l} 24 & 40 & 56 & 2 \\ 12 & 20 & 28 & 2 \\ 6 & 10 & 14 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & \text{mcd}(24, 40, 56) = 2^3 = 8 \text{ pues ya no hay factores comunes} \end{array}$$

Lo bueno de este método es que los números que nos quedan abajo: 3, 5, 7 son justamente lo que queda al dividir entre 8, entre el mcd. Así, cada paquete contiene 3 mangos, 5 piñas y 7 manzanas. La opción correcta es la A. □

13. Una impresora antigua imprime 80 hojas por hora, mientras que una impresora nueva imprime 100 hojas por hora. La impresora antigua comienza a trabajar a las 7:00 a. m. y la nueva comienza a imprimir a las 8:00 a. m. ¿A qué hora ambas habrán impreso la misma cantidad de hojas?

    A. 1:00 p. m

    B. 12:30 a. m.

    C. 12:00 a. m.

    D. 11:30 m.d.

Solución: Este problema puede confundirse con uno de mínimo común múltiplo. Sin embargo, note que no hay algo que se esté repitiendo cada cierto tiempo, además de que las impresoras no inician al mismo tiempo. En este caso, en cambio, la idea para resolverlo es preguntarse: ¿cuántas hojas habrá impreso la impresora vieja cuando la nueva inicia a trabajar? En las horas sucesivas ¿cuántas más ha impreso la antigua respecto de la nueva? ¿En qué momento se equiparan?

Como la impresora nueva inicia una hora después que la antigua, la antigua habrá impreso 80 hojas. A las 9:00 a.m., una hora después, la antigua tendrá 160 hojas, mientras que la nueva 100. Es decir, una diferencia de 60 hojas. Note que en la siguiente hora, a las 10:00 a.m., la nueva habrá producido 20 hojas más que la antigua, pues produce 100 contra las 80 de esta última. De esta forma, la diferencia se habrá reducido a 40 hojas.

Con este argumento, a las 9:00 a.m. la antigua ha producido 80 hojas más que la nueva, pero cada hora después de eso, la nueva produce 20 más que la nueva. Es decir, se reduce esta diferencia de producto en 20 hojas. Como $80 = 4 \cdot 20$, bastan 4 horas para que se equiparen. En efecto, a la 1:00 p.m., 4 horas después de que iniciara la nueva y 5 horas después de que iniciara la antigua, la nueva habrá producido $4 \cdot 100 = 400$ hojas, y las antigua, $5 \cdot 80 = 400$. Por lo tanto la respuesta correcta es la A.

Una forma alternativa de hacer este problema es con una ecuación. Cuando han pasado h horas desde las $9:00 a.m.$, la impresora nueva ha impreso $100 \cdot h$ hojas, mientras que la antigua, $80 \cdot (h+1)$, pues ha trabajado por una hora más.

$$\begin{aligned} 100h &= 80(h+1) \\ 100h &= 80h + 80 \\ 20h &= 80 \\ h &= 4 \end{aligned}$$

Por lo que han impreso la misma cantidad de hojas ($4 \cdot 100 = 400 = 5 \cdot 80$) a la 1:00 p.m., cuatro horas después de las 9 p.m. □

14. Analice las siguientes proposiciones:

    I. Si un número natural es un cuadrado perfecto entonces tiene exactamente 3 divisores.

    II. Si un número natural tiene exactamente tres divisores positivos entonces es un cuadrado perfecto. [5]

    De ellas son verdaderas

    A. Solamente I
    B. Solamente II
    C. I y II
    D. Ninguna

15. Si el sucesor del producto de dos números primos distintos es un número primo entonces se puede asegurar con certeza que la suma de esos dos números primos es un número[6]

    A. par
    B. primo
    C. impar
    D. compuesto

4. Razones y proporciones

1. El peso de 3 manzanas equivale al de 2 peras, y el de 4 naranjas equivale al de 3 peras. ¿Cuántas naranjas se necesitan para igualar el peso de 9 manzanas?

   A. 6.
   B. 7.
   C. 8.
   D. 9.

Solución: Tenemos que 3 manzanas equivalen en peso a 2 peras. Por lo tanto, 9 manzanas (que son 3 grupos de 3) equivalen a $3 \cdot 2 = 6$ peras (3 grupos de 2 peras). Ahora, bien, como cada grupito de 3 peras equivalen a 4 naranjas, 6 peras equivalen a $2 \cdot 4 = 8$ naranjas. Así, en peso 9 manzanas equivalen a 6 peras que a su vez equivalen a 8 naranjas. La respuesta correcta es la C.

$$MMM = PP$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccc} MMM & & PP \\ MMM & = & PP \\ MMM & & PP \end{array}$$

$$PPP = NNNN$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{ccccc} MMM & & PP & & NNN \\ MMM & = & PP & = & NNN \\ MMM & & PP & & NN \end{array}$$

$\square$

2. Se necesitan 4 litros de pintura para cubrir 28 m^2 de pared. ¿Cuántos litros se necesitan para cubrir 49 m^2?

   A. 9 litros
   B. 8 litros
   C. 7 litros
   D. 6 litros

Solución: 4 litros de pintura cubren 28 m^2. Entonces, cada litro cubre una cuarta parte, es decir $28/4 = 7\ m^4$. Así, para cubrir 49 m^2, sabiendo que un litro cubre 7 m^2, necesitamos $49/7 = 7$ litros. La respuesta correcta es la C.

Si lo hacemos con regla de 3, note que la proporcionalidad es directa. Entre más metros cuadrados de pared necesitamos más litros de pintura. Por tanto, decimos "4 litros es a 28 metros cuadrados como X es a 49 metros cuadrados, y lo escribimos"

$$\frac{4L}{X} = \frac{28m^2}{49m^2} \implies X = \frac{4L \cdot 49\cancel{m^2}}{28\cancel{m^2}} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{49}^{\,7}}{\cancel{4} \cdot \cancel{7}} L = 7L.$$

$\square$

3. Cinco grifos llenan un tanque en 12 horas. ¿Cuántas horas tardarían 3 grifos en llenarlo?

A. 8 horas

B. 15 horas

C. 18 horas

D. 20 horas

Solución: Veamos ahora que entre más grufos estén llenando el tanque, menos tiempo dura este en llenarse. Por lo tanto, la proporcionalidad es inversa. Primero analicémoslo y luego veamos cómo hacer regla de tres.

Si cinco grifos duran 12 horas en llenar un tanque, uno solo va a durar 5 veces más, es decir, un grifo dura $12 \cdot 5 = 60$ horas en llenar ese tanque. Esto lo podemos expresar como que se necesitan 60 horas-grifo para llenar un tanque. Luego, utilizando tres grifos requerimos la tercera parte de esto. Así, con tres grifos llenando el mismo tanque duraríamos $60/3 = 20$ horas. La respuesta correcta es la D.

Note que en todos los casos, el producto de la cantidad de grifos por la cantidad de horas que duran nos da lo mismo: $5 \cdot 12 = 1 \cdot 60 = 3 \cdot 20$. Esto nos quiere decir que la noción de 60 horas-grifo tiene sentido. Por ejemplo, para hacer 60 horas grifo con 30 grifos necesitamos 2 horas.

Para plantear una regla de 3 en este caso, hacemos eso mismo. Como la proporcionalidad es inversa, en lugar de dividir multiplicamos. "5 grifos por 12 horas llenan el mismo tanque que 3 grifos por X". Esto quiere decir que

$$5 \text{ grifos} \cdot 12 \text{ horas} = 3 \text{ grifos} \cdot X \implies X = \frac{5 \cdot 12}{3} h = \frac{60}{3} h = 20h$$

□

4. Ocho obreros construyen una pared en 25 días trabajando 6 horas por día. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros para construir la misma pared si trabajan 5 horas al día?

A. 25 días

B. 27 días

C. 24 días

D. 22 días

Solución: Tenemos 3 variables: obreros, días y horas por día. Entre más obreros, menos días duran (proporcionalidad inversa). Entre más horas por día, menos días duran (proporcionalidad inversa). Pensémoslo como antes: "8 obreros trabajando 6 horas por día duran 25 días construyendo una pared". ¿Cuántas horas-obrero se necesitaron? 6 horas al día por 25 días son $6 \cdot 25 = 150$ horas cada obrero. Como hay 8 obreros, se necesitaron en total $150 \cdot 8 = 1200$ horas-obrero en total para construir la pared. Ahora, si tenemos 10 obreros, para completar 1200 horas-obrero cada uno debe trabajar $1200/10 = 120$ horas. Como trabajan 5 horas al día, para hacer 120 horas necesitan $120/5 = 24$ dias. Así, la respuesta correcta es la C.

Haciéndolo directo: "8 obreros por 6 horas al día por 25 días hacen lo mismo que 10 obreros por 5 horas al día por X". Así

$$8 \cdot 6 \cdot 25 = 10 \cdot 5 \cdot X \implies X = \frac{8 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot \cancel{25}^{\cancel{5}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{10}^{\cancel{2}}} = 24 \text{ días}$$

□

5. Una receta para preparar 12 galletas utiliza 300 gramos de harina. Si se desea preparar 90 galletas con la misma receta, ¿cuántos kilogramos de harina se necesitan?

   A. 1.5

   B. 2.25

   C. 2.0

   D. 1.75

Solución: En este caso la proporcionalidad es directa. Podemos decir "300 gramos divididos en 12 galletas equivalen a X divididos en 90 galletas." Es decir:

$$\frac{300g}{12} = \frac{X}{90} \implies X = \frac{90 \cdot \cancelto{100}{300}}{\cancelto{4}{12}} g = 4500g/2 = 2250g = 2{,}25kg$$

Así que la respuesta correcta es la B.

También podemos hacerla por pasos. Si son 300 gramos para 12 galletas, son $300/12 = 100/4 = 25$ gramos por galleta, y así para 90 galletas se necesitan $25 \cdot 90 = 25 \cdot 100 - 25 \cdot 10 = 2500 - 250 = 2250$ gramos, que son 2,25 kilogramos. $\square$

6. En una obra, 6 personas pueden construir un muro en 10 días, trabajando al mismo ritmo.

   ¿Cuántos días tardarían 15 personas en construir el mismo muro?

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 8

Solución: Es proporcionalidad inversa: "6 personas por 10 días hacen lo mismo que 15 personas por X". Para construir el muro se necesitan $6 \cdot 10 = 60$ días-persona (i.e. una persona duraría 60 días), luego 15 personas duran $60/15 = 4$ días. La respuesta correcta es la A. $\square$

7. Se preparan jugos usando una mezcla de fruta y agua en razón 2:5. Si se tienen 14 litros de fruta, ¿cuántos litros de agua se necesitan para mantener la misma proporción?

   A. 28

   B. 21

   C. 35

   D. 24

Solución: Nos dicen que por cada los litros de fruta y agua están en razón 2:5. Es decir, por cada 2 litros de fruta necesitamos 10 de agua. Así, como 14 litros de fruta son 7 veces 2, entonces vamos a necesitar $7 \cdot 5 = 35$ litros de agua para mantener la proporción. En otras palabras,

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

La respuesta correcta es la C. $\square$

8. Tres grifos abiertos simultáneamente pueden llenar un tanque en 8 horas. Si solo se abren dos de esos grifos, ¿cuánto tardarán en llenarlo?

   A. 10

   B. 11

   C. 12

   D. 16

Solución: Entre más grifos, sale más agua y por tanto el tiempo se reduce. Es decir, tenemos un caso de proporcionalidad inversa. Si 3 grifos llenan el tanque en 8 horas, entonces el número total de grifo-horas es:

$$3 \times 8 = 24 \text{ grifo-horas}$$

Es decir, usando un solo grifo duraríamos 24 horas. Si se abren 2 grifos duraríamos

$$\frac{24}{2} = 12 \text{ horas}$$

La opción correcta es la C. □

9. Un taller imprime 360 panfletos en 6 horas con 3 impresoras trabajando al mismo ritmo. Si se quieren imprimir 600 panfletos en 5 horas, ¿cuántas impresoras se necesitan?

   A. 4

   B. 5

   C. 6

   D. 7

Solución: Este es un caso de proporcionalidad mixta: 360 panfletos en 6 horas por 5 impresoras. Así 360 panfletos requieren $6 \cdot 3 = 18$ impresora-horas (una sola impresora tardaría 18 horas en imprimir los 360 panfletos). Por tanto, una impresora-hora produce $360/18 = 60/3 = 20$ panfletos. Para hacer 600 panfletos necesitamos por tanto $600/20 = 60/2 = 30$ impresora-horas. Si queremos hacerlo en 5 horas, vamos a necesitar $30/5 = 6$ impresoras. La respuesta correcta es la C.

Recapitulando: 360 panfletos en 6 horas con 3 impresoras nos dice que si usamos solo una impresora duraríamos el triple: 360 panfletos en 18 horas con 1 impresora. Si usamos solo 1 hora, entonces el número de panfletos es 20 panfletos en 1 hora con 1 impresora. Luego, para llegar a 600 panfletos, podríamos hacer 600 panfletos en 30 horas con 1 impresora. Si usamos 5 impresoras, el tiempo se divide entre 5: 600 panfletos en 6 horas con 5 impresoras. □

10. [7] En una fábrica, por cada artículo que termine una persona trabajadora le entregan 2 bonos. Por cada 3 bonos le dan un almuerzo gratis. César tuvo derecho a 18 almuerzos gratis en el año y no le sobraron bonos.

    ¿Cuál es el número de artículos que César entregó ese año?

    A. 3

    B. 12

    C. 27

    D. 54

E. 108

Solución: Lo hacemos yendo para atrás. Los 18 almuerzos gratis equivalen a $18 \cdot 3 = 30 + 24 = 54$ bonos (cada almuerzo gratis requiere 3 bonos). Como le dan 2 bonos por cada artículo terminado, para obtener 54 bonos necesita haber terminado $54/2 = 27$ artículos. La respuesta correcta es la C. □

11. Patricia quiere comprar un desayuno. Ella tiene monedas tipo P y tipo Q para pagar el desayuno. De las monedas tipo P necesitaría 245. Por cada 7 monedas tipo P necesitaría 5 tipo Q.

    ¿Cuántas monedas tipo Q necesita Patricia? [8]

    A. 35
    B. 49
    C. 168
    D. 175

Solución: Agrupemos las 245 monedas tipo P en grupos de 7: obtenemos $245/7 = 210/7 + 35/7 = 30 + 5 = 35$ grupos. Cada grupo de 7 monedas tipo P podemos canjearlo por un grupo de 5 monedas tipo Q. Haciendo esto obtenemos $35 \cdot 5 = 150 + 25 = 175$ monedas tipo Q. Así, Patricia requiere 175 monedas tipo Q. La respueseta correcta es la D. □

12. Considere las siguientes equivalencias:

    I. 10 tazas de agua = 2000 ml.
    II. 16 cucharadas de agua = 200 ml.

    ¿Cuántas tazas se obtienen de 240 cucharadas de agua? [9]

    A. 15
    B. 24
    C. 30
    D. 48

Solución: Hacemos las conversiones. Como 16 cucharadas de agua son 200 ml, entonces como $240/16 = 120/8 = 60/4 = 15$, 240 cucharadas de agua son 15 veces 16 cucharadas de agua, que equivalen a 15 veces 200 ml, que es $15 \cdot 200 = 30 \cdot 100 = 3000ml$. Luego, cada $2000ml$ son 10 tazas de agua, y $3000/2000 = 1{,}5$, entonces 3000 mililitros son una y media veces 2000 mililitros, y por tanto equivale a $1{,}5 \cdot 10 = 15$ tazas de agua. La respuesta es la A.

Otra forma de pensarlo: como $2000ml = 200ml \cdot 10$, entonces 10 tazas de agua equivalen a $10 \cdot 200ml$ que equivale a $10 \cdot 16 = 160$ cucharadas de agua (pues cada 200 ml son 16 cucharadas de agua). Y ahora sí, usando regla de tres

$$\frac{240 \text{ cucharadas}}{160 \text{ cucharadas}} = \frac{X}{10 \text{ tazas}} \implies X = \frac{10 \cdot 240}{160} = \frac{240}{16} = \frac{120}{8} = \frac{60}{4} = 15 \text{ tazas.}$$

□

Referencias

[1]Calvo Díaz et al., *24 preguntas de práctica en el 2024 para la Prueba de Aptitud Académica*
[2]Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[3]Modificación de Acuña Chacón et al., *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*
[4]ibíd.
[5]OLCOMA, *Primera eliminatoria nacional nivel A*
[6]Modificado de ibíd.
[7]Ejercicio 21 de Rojas, Martínez et al., Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021
[8]Rojas Rojas, Bolaños Valerio et al., *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*
[9]Acuña Chacón et al., *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*

5. Métodos para encontrar incógnitas

1. Mirta, Óscar y Gloria son estudiantes universitarios. Gloria ganó 50 créditos más que Óscar. Óscar ganó el triple de créditos que Mirta.

   Si entre los tres han ganado más de 78 créditos pero menos de 99, entonces, es posible que[1]

   A. Mirta haya ganado 7 créditos.
   B. Óscar haya ganado 12 créditos.
   C. Óscar haya ganado 15 créditos.
   D. Gloria haya ganado 59 créditos.
   E. Óscar y Mirta juntos hayan ganado 44 créditos más que Gloria.

Solución: En esta pregunta, nos piden escoger una opción que sea posible. Es decir, el resto serían imposibles.

Analicemos y procesemos la información: si designamos por la inicial de su nombre la cantidad de créditos que ganó cada estudiante, tenemos las siguientes relaciones

$g = o + 50$	Gloria ganó 50 créditos más que Óscar.
$o = 3m$	Óscar ganó el triple de créditos que Mirta.
$78 < m + o + g < 99$	Entre los trés ganaron entre 78 y 99 créditos.

Con esto, analicemos las opciones:

A. Si $m = 7$, entonces por las ecuaciones $o = 3 \cdot 7 = 21$ y $g = 21 + 50 = 71$. Entre los tres por tanto ganaron $m+o+g = 7+21+71 = 99$. Pero nos dicen que ganaron menos de 99 créditos. Por tanto esta no es posible.

B. Si $o = 12$, entonces $12 = o = 3m$ implica que $m = 4$ y $g = o + 50 = 12 + 50 = 62$. Suman $m + o + g = 4 + 12 + 62 = 78$. Pero nos dicen que ganaron más de 78 créditos. Esta tampoco es posible.

C. Si $o = 15$, $m = o/3 = 15/3 = 5$ y $g = o + 50 = 15 + 50 = 65$. De esta forma $m + o + g = 5 + 15 + 65 = 85$ que sí está entre 78 y 99. Por lo tanto, la opción C. es posible, de forma que es la opción correcta.

D. Si $g = 59$, $o = g - 50 = 9$ y $m = o/3 = 3$. Suman $59 + 9 + 3 = 71$ que es menor a 78.

E. Si Óscar y Mirta juntos ganaron 44 créditos más que Gloria, en ecuación esto es $o+m = 44+g$. Pero como $g = o + 50$, podemos sustituir la g para obtener $\cancel{o} + m = 44 + \cancel{o} + 50$ y así $m = 94$. Como Óscar tiene el triple de créditos de Mirna, claramente se pasan de los 99 que tienen entre los 3.

$\square$

Una forma alternativa de resolver este problema es resolver el sistema para saber en qué rangos podían andar los creditajes de cada estudiante. Como $g = o + 50$ y $o = 3m$, sustituyendo $g = 3m + 50$. Así, tenemos que $m + o + g = m + 3m + 3m + 50 = 7m + 50$. Como $78 < m + o + g < 99$,

$$78 < 7m + 50 < 99$$
$$78 - 50 < 7m < 99 - 50$$
$$28 < 7m < 49$$
$$\frac{28}{7} = 4 < m < \frac{49}{7} = 7$$

Así, m debe estar entre 4 y 7, sin incluirlos. Como $o = 3m$, entonces $12 = 3 \cdot 4 < o < 21 = 3 \cdot 7$. Por último, como $g = o + 50$, entonces $12 + 50 = 62 < g < 21 + 50 = 71$. Con esto, podemos descartar muy rápidamente la A., la B. y la D. La E. también podemos descartarla, pues como $12 < o < 21$ y $4 < m < 7$, entonces $16 < m + o < 28$, que claramenete no puede ser 44 créditos más que g.

2. Una profesora tenía 10 000 gapes y compró 4 cuadernos y 2 lápices para cada una de sus 5 clases. Sabiendo que cada cuaderno cuesta 200 y cada lápiz 100, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el dinero restante?

   A. $10000 - 20 \cdot 200 - 10 \cdot 100$.

   B. $10000 - 5(200 + 100)$.

   C. $10000 - 4 \cdot 200 - 2 \cdot 100$.

   D. $10000 - 5(4 \cdot 200 - 2 \cdot 100)$.

3. En un terreno hay 130 árboles, de los cuales 94 son árboles altos y el resto son medianos. Hay 48 árboles jóvenes y la cuarta parte de los árboles medianos son jóvenes.

   ¿Cuántos de los árboles altos son viejos?[2]

   A. 27

   B. 36

   C. 55

   D. 82

4. El peso de 2 platos es igual al peso de 3 botellas y el peso de 3 vasos es igual al de 2 botellas.

   ¿Cuántas botellas se necesitan para tener el peso de 8 platos y 6 vasos?[3]

   A. 12

   B. 16

   C. 21

   D. 34

5. En una fábrica se empacó cierto producto de forma individual. La fábrica utilizó 2 máquinas para realizar este trabajo. La máquina antigua empacó 24 productos cada hora. La máquina nueva empacó 30 productos cada hora. Ayer la máquina antigua comenzó a empacar a las 7:00 a. m. y la máquina nueva comenzó a empacar a las 8:30 a. m.

   ¿Qué hora era cuando ambas máquinas llevaban la misma cantidad de producto empacado?[4]

   A. 9:30 a. m.

   B. 11:30 a. m.

   C. 2:30 p. m.

   D. 3:30 p. m.

6. Cierto año, Rebeca tenía 20 años y sus dos hermanos 6 y 7 años.

   ¿Cuál es el menor número de años que debe transcurrir, a partir de ese año, para que la edad de Rebeca llegue a ser menor que la suma de las edades que tendrán sus dos hermanos?[5]

   A. 28

   B. 16

   C. 9

   D. 8

   E. 7

7. En la escuela Aprendamos hay 150 estudiantes, de los cuales 95 son de primer ciclo y el resto de segundo ciclo. Si 70 de los estudiantes son varones y la quinta parte de los estudiantes de segundo ciclo son varones, ¿Cuántos estudiantes de primer ciclo son mujeres? [6]

   A. 11
   B. 36
   C. 59
   D. 80

8. Si hace 5 años la persona P tenía el cuádruplo de la edad de la persona Z y dentro de 5 años tendrá el doble de la edad de Z, ¿cuántos años tiene P? [7]

   A. 15
   B. 20
   C. 25
   D. 30

9. La diferencia entre dos números enteros positivos es 48. Si se divide el mayor entre el menor el cociente es 6 y el residuo es 3.

   ¿Cuál deducción es correcta?

   A. La suma del número mayor y el número menor da un número impar.
   B. La suma de los dígitos del número mayor es impar.
   C. El séxtuplo del cuadrado del número mayor es un número par.
   D. La suma de las cifras del número menor es par.
   E. El producto de los dígitos del número mayor es par.

6. Técnicas de Conteo

1. En una caja se colocan siete tiras de papel. En cada una de ellas se ha escrito del 0 al 6 un número entero distinto. Se sacan 2 tiras al azar.

   ¿Cuál es el mayor número de parejas de tiras que pueden sacarse tales que la suma de los números que las identifican sea 6? [8]

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

   E. 6

   Solución: El 0 tiene que ir con el 6 para que sumen 6, el 1 con el 5, el 2 con el 4. Hasta ahí hay 3 parejas, y note que ninguno de estos podría ir con otra pareja, pues si no sumarían distinto. El único número que queda es el 3. Pero no puede tener pareja, pues tendría que ser él mismo para que $3 + 3 = 6$. Sin embargo, todas las tiras tienen números distintos, así que esta pareja es imposible. Por lo tanto, el mayor número de parejas que pueden sacarse son 3 parejas. La respuesta correcta es la C.

   Algunos detalles que vale la pena recalcar: aunque nos hablaban de azar, no entró a jugar nada de probabilidad, sino simplemente de ver cómo se podían emparejar los números. Es importante leer bien, para ver por ejemplo que el 3 no puede emparejarse consigo mismo pues todas las tiras tienen enteros distintos. Y por último, darnos cuenta de que como la pareja se saca en simultáneo, es lo mismo la pareja 2,4 que la pareja 4,2, así que solo se cuenta una vez. Si por error las contamos doble, obtendríamos 6 parejas, pero la respuesta sería incorrecta. □

2. Rafael debe digitar una contraseña de 6 dígitos para desbloquear la pantalla de inicio de su computadora, pero no recuerda los últimos 2 dígitos. Lo que recuerda es que al sumar esos 2 dígitos el resultado es 10 y al multiplicarlos el resultado es mayor a 10.

   ¿Cuántas posibilidades de contraseña tiene Rafael para digitar? [9]

   A. 4

   B. 7

   C. 9

   D. 10

   Solución: Primero notamos que no importan los primeros cuatro dígitos, pues de esos Rafael sí se acuerda.

   Para los últimos dos, sabemos que suman 10, luego no puede estar el 0 (no hay otro dígito del 0 al 9 que con 0 sume 10), y las opciones son 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82 y 91. Además, al multiplicarlos el resultado es mayor a 10. Esto descarta tanto al 19 como al 91. Por tanto, nos quedan 28, 37, 46, 55, 64, 73 y 82, que son 7 opciones. Note que sí es importante el orden de los dígitos para una contraseña. Por lo tanto la respuesta es la B. □

3. ¿Cuántos productos distintos se pueden obtener al multiplicar dos de los siguientes números: 3, 5, 6, 7 y 9 sin repetirlos? [10]

   A. 9

   B. 10

C. 20

D. 25

Solución: Hagamos una tablita de multiplicar. Como no se repiten, no tomamos en cuenta la diagonal. Además, como contamos productos distintos y la tabla de multiplicar es simétrica respecto a la diagonal (pues a por b es lo mismo que b por a) no los tomamos en cuenta:

	3	5	6	7	9
3		15	18	21	27
5			30	35	45
6				42	54
7					63
9					

Vemos que de las opciones que quedan todos los productos son distintos. Por tanto, la respuesta correcta es la B., hay 10 productos distintos.

Si no quisieramos hacer la tabla, podríamos pensar en lo siguiente. Primero, tengo 5 formas de escoger mi primer número, y como no puedo repetir, tengo 4 formas de escoger el segundo. Hasta aquí hay 20 productos. Sin embargo, estoy contando ab y ba como combinaciones distintas, cuando no lo son pues dan lo mismo. Como cada una la estoy contando dos veces, divido entre 2: $5 \cdot 4/2 = 20/2 = 10$. El tema es asegurarnos de que no haya productos repetidos dentro de estos 10 $\square$

4. Bryan tiene un restaurante y para el almuerzo ofrece 3 opciones de carbohidrato, 2 de proteína, y 3 de ensalada. ¿Cuántas formas tiene un cliente de armar su almuerzo?

   A. 8

   B. 15

   C. 18

   D. 20

   E. 25

Solución: Por cada una de las 3 opciones de carbohidrato, hay 2 de proteína, de forma que hay $3 \cdot 2 = 6$ combos de carbohidrato-proteína, y por cada uno de esos hay 3 de ensalada así que en total hay $6 \cdot 3$ formas de armar un almuerzo. La respuesta correcta es la C.

En un diagrama de arbol, si los carbohidratos son A de arroz, Y de yuca y T de tortilla, las proteínas son R de res y P de pollo, y las ensaladas son M de mostaza, G de griega y C de césar, entonces tenemos las siguientes opciones (la idea es simplemente visualizarlo, en el examen basta con hacer el producto y asegurarnos de no estar contando dos veces alguna combinación o permutación):

$$
\begin{array}{lll}
 & & \nearrow M \to ARM \\
 & \nearrow R & \to G \longrightarrow ARG \\
A & & \searrow L \longrightarrow ARL \\
 & \searrow P & \to M \to APM \\
 & & \searrow G \longrightarrow APG \\
 & & \searrow L \longrightarrow APL
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
 & & \nearrow M \to YRM \\
 & \nearrow R & \to G \longrightarrow YRG \\
Y & & \searrow L \longrightarrow YRL \\
 & \searrow P & \to M \to YPM \\
 & & \searrow G \longrightarrow YPG \\
 & & \searrow L \longrightarrow YPL
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
 & & \nearrow M \to TRM \\
 & \nearrow R & \to G \longrightarrow TRG \\
T & & \searrow L \longrightarrow TRL \\
 & \searrow P & \to M \to TPM \\
 & & \searrow G \longrightarrow TPG \\
 & & \searrow L \longrightarrow TPL
\end{array}
$$

$\square$

5. ¿Cuántos diferentes ordenamientos de cuatro letras se pueden hacer con M, S, R, A, O de modo que cada uno comience en S y termine en A? [11]

   A. 9

   B. 10

   C. 20

   D. 25

Solución: Importante, note que no nos dice que no se puedan repetir letras. Además, sí importa el orden de las letras cuando nos hablan de ordenamientos (o de palabras); SMRA es distinta de SRMA. La primera ya está fija, es S. Para la última, nos dicen que debe ser A, pero tanto la segunda como la tercera puede ser cualquiera de las cinco. Esto podemos resumirlo en un diagramita como este:

$$\begin{array}{ccccl} \underline{1} & \underline{5} & \underline{5} & \underline{1} & = 25 \\ \mathrm{S} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \\ & \mathrm{S} & \mathrm{S} & & \\ & \mathrm{R} & \mathrm{R} & & \\ & \mathrm{A} & \mathrm{A} & & \\ & \mathrm{O} & \mathrm{O} & & \end{array}$$

Y el producto de la cantidad de opciones es el número de escogencias que tenemos. De nuevo para visualizar podemos hacer una tabla 5×5, donde la columna es la segunda letra y la fila es la tercera letra:

	M	S	R	A	0
M	SMMA	SSMA	SRMA	SAMA	S0MA
S	SMSA	SSSA	SRSA	SASA	S0SA
R	SMRA	SSRA	SRRA	SARA	S0RA
A	SMAA	SSAA	SRAA	SAAA	S0AA
O	SMOA	SSOA	SROA	SAOA	S0OA

□

6. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar de manera que el dígito de las unidades sea 0 y los otros sean tres dígitos del 1 al 7, distintos entre sí? [12]

   A. 18

   B. 120

   C. 210

   D. 343

Solución: Lo hacemos como el anterior; notamos que sí importa el orden, pues por ejemplo 1230 es distinto de 3210:

$$\begin{array}{ccccl} \underline{7} & \underline{6} & \underline{5} & \underline{1} & = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 42 \cdot 5 = 210 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 2 & 2 & 2 & & \\ 3 & 3 & 3 & & \\ 4 & 4 & 4 & & \\ 5 & \cancel{5} & \cancel{5} & & \\ 6 & 6 & 6 & & \\ 7 & 7 & \cancel{7} & & \end{array}$$

Donde los números cruzados simplemente son ejemplos, nos sirven para recordar que una vez que escogimos el primer dígito, no podemos volver a usar ese, por lo que se reducen en 1 las opciones para el siguiente. En la práctica uno no muestra las opciones, simplemente dice "para el primer dígito tengo 7 opciones, para el segundo tengo 6 pues debe ser distinto al primero, y similarmente para el tercero tengo 5 opciones. Para el último dígito me dicen que debe ser el 0, solo hay una opción. Por lo tanto, el total de escogencias es $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$". La opción correcta es la C. □

7. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar utilizando solamente el 1 y el 7? [13]
   - A. 5
   - B. 6
   - C. 7
   - D. 8

Solución: En este caso, podemos repetir dígitos (no nos dicen lo contrario) y sí es importante el orden: 117 es distinto de 171. Tenemos dos opciones por dígito:

$$\begin{array}{cccl} \underline{\ 2\ } & \underline{\ 2\ } & \underline{\ 2\ } & = 2^3 = 8 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 7 & 7 & 7 & \end{array}$$

Por tanto la opción correcta es la D., hay 8 números con estas características. □

8. De un grupo de 7 estudiantes, se deben seleccionar 3 para formar una comisión estudiantil. ¿De cuántas formas distintas se puede hacer esta selección?
   - A. 18
   - **B. 35**
   - C. 56
   - D. 210

Solución: Este es un caso interesante. No nos están diciendo que hayan rangos en la comisión estudiantil, al menos no a la hora de escogerla. Por tanto, es lo mismo escoger a los estudiantes Ana, Beto y Carlos, que a Beto, Carlos y Ana. ¡Son los mismos tres, es la misma comisión! Por lo tanto, hemos de tener cuidado con contar varias veces la misma comisión.

Para resolver este problema, lo que hacemos es imaginar que sí importara el orden. Es decir, vamos a contar varias veces cada comisión, pero luego vamos a dividir por el número de veces que estamos contando una misma comisión.

Lo que sí es evidente es que las tres personas de la comisión son distintos. Así para la primera persona hay 7 opciones, para la segunda hay 6 y para la tercera hay 5:

$$\underline{\ 7\ } \quad \underline{\ 6\ } \quad \underline{\ 5\ } \quad = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

De momento tenemos contadas 210 comisiones. Tomemos una, digamos que es la que dijimos: Ana, Beto y Carlos, ABC. ¿Cuántas veces la estamos contando? Estamos contándola una vez por cada ordenamiento, por cada permutación distinta de los tres estudiantes que hagamos. Hay seis: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, que vienen de pensar: pude haber escogido cualquiera de los tres de primero, y luego quedan dos opciones para escoger el segundo (el tercero queda definido pues solo queda una opción):

$$\underline{\ 3\ }\quad \underline{\ 2\ }\quad \underline{\ 1\ } \quad = 3! = 6$$

Aquí, 3! (tres factorial) es el producto de todos los números del 1 al 3.

Vemos entonces que cada comisión la estamos contando 6 veces. Así, dividimos 210 entre 6 para obtener el número de comisiones distintas que podemos escoger: $210/6 = 105/3 = 35$ comisiones. La opción correcta es la B.

Este es el número de combinaciones (cuando hablamos de combinación no importa el orden) de 3 objetos tomados de un grupo de 7. Otra forma de decirlo: es la cantidad de escogencias de 3 objetos de un grupo de 7. Se le llama comunmente "7 escoge 3" y se le denota por $\binom{7}{3}$ (note que no hay una barra entre el 7 y el 3. No hay que confundirlo con una fracción). □

9. De un grupo de 5 candidatos en un programa de cocina, un chef va a escoger 3 que pasan a la siguiente ronda. ¿De cuántas formas distintas puede escoger el juez a los tres afortunados?
   - A. De 6 formas.
   - B. De 8 formas.
   - C. De 10 formas.
   - D. De 12 formas.

Solución: Digamos que los siete estudiantes son A, B, C, D, E, F y G. Vamos escogiendo la comisión un estudiante a la vez. Para escoger el primero, tenemos 7 opciones. Luego, para escoger al segundo tenemos 6 opciones, pues podemos escoger cualquiera de los que no hemos escogido aún, y de forma similar para escoger al tercero nos quedan 5 opciones. Hasta el momento, ¿cuántos escenarios tenemos? Por ejemplo, pensemos en el caso donde escogimos a A de primero. Entonces, para escoger el segundo, podría ser B, C, D, E, F o G, es decir, tenemos las parejas AB, AC, AD, AF, AE y AG. Y luego, para cada una de estas parejas tenemos 5 opciones para agregar en el último lugar, por lo que tendríamos

	AB	AC	AD	AE	AF	AG
+B	—	ACB	ADB	AEB	AFB	AGB
+C	ABC	—	ADC	AEC	AFC	AGC
+D	ABD	ACD	—	AED	AFD	AGD
+E	ABE	ACE	ADE	—	AFE	AGE
+F	ABF	ACF	ADF	AEF	—	AGF
+G	ABG	ACG	ADG	AEG	AFG	—

Note que las de la diagonal no se pueden porque ya el estudiante que queremos agregar fue escogido. Así para cada una de las 6 parejas tenemos 5 opciones que podemos agregar, lo que nos da 30 opciones totales que inician con A. Luego, como el resto se hacen de la misma manera, tenemos 30 para A, 30 para B, etc. así para cada posible estudiante de inicio. Como hay 7, el total de opciones sería de $7 \cdot 30 = 210$. Hicimos uso de la regla del producto. Hay 7 opciones para el primero, luego 6 para el segundo y luego 5 para el tercero, es decir hay $7 \cdot 5 \cdot 6 = 210$ opciones.

¡No tan rápido! Cuando hacemos estos problemas necesitamos tener cuidado. ¿Y si estamos contando un mismo comité varias veces? En efecto, notemos que los comités ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA son el mismo, por ejemplo, pero - de forma erronea - contamos cada uno porque el orden es distinto. Pero para solucionar esto, podemos preguntarnos, un mismo comité, ¿de cuantas formas podemos ordenarlo? Justamente como el anterior, de 6 maneras, pues podemos escoger cualquiera de los tres miembros de primero, luego quedan 2 para el segundo lugar y el que queda queda de último, es decir $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ opciones. Como cada comité lo estamos contando un total de 6 veces, para encontrar cuantos comités distintos hay, dividimos $210/6 = 35$. Hay 35 comités distintos. □

10. ¿Cuántas palabras diferentes de 4 letras se pueden formar usando las letras A, B, C, D, E, si ninguna letra se repite?

Solución: Como hablamos de palabras, aquí sí que importa el orden. Para la primera letra tenemos 5 opciones, y como no podemos repetir, en cada letra sucesiva tenemos una opción menos:

$$\underline{\ 5\ }\quad\underline{\ 4\ }\quad\underline{\ 3\ }\quad\underline{\ 2\ }\quad = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 10\cdot 12 = 120$$

Por tanto, tenemos **120 palabras distintas** de 4 letras usando A,B,C,D y E sin repetir letras. □

11. En una heladería, un cliente puede pedir su helado en una de dos formas distintas:

- En vaso pequeño, mediano o grande (3 opciones), eligiendo 1 o 2 bolas de helado.
- O en cono normal o azucarado (2 opciones), también eligiendo 1 o 2 bolas de helado.

En ambos casos, puede escoger los sabores de entre 7 disponibles, y si elige 2 bolas, los sabores deben ser iguales.

¿Cuántas formas distintas hay de pedir un helado?

Solución: Tenemos 5 formas de elegir la presentación. Puede ser en vaso pequeño mediano o grande, o en cono normal o azucarado. Luego, hay dos opciones en cantidad de bolas de helado, 1 o 2, y para cada una de estas escogencias debe escoger entre 7 sabores (importante que si escoge dos bolas de helado deba igual escoger el mismo sabor. Si no, hay que hacer dos casos distintos). Por tanto, tenemos

$$\underline{\text{ 5 presentaciones }}\quad\underline{\text{ 2 cantidades de helado }}\quad\underline{\text{ 7 sabores }}\quad = 5\cdot 2\cdot 7 = 70 \text{ combinaciones}$$

□

12. En la heladería del frente, sólo ofrecen helado en cono: ya sea normal o azucarado. Sin embargo, permiten 1, 2 o 3 bolas de helado, y aunque solo tienen 5 sabores, sí permiten combinarlos, y en el orden en el que usted prefiera. ¿Cuántas formas hay de pedir en esta heladería?

Solución: En este caso se vuelve más complejo, pues claramente si eligimos 3 bolas de helado hay muchas más opciones que si elegimos 2 o 1. Por tanto. Lo hacemos por casos:

1. Si escogemos una bola de helado, tenemos 2 opciones para el cono y 5 opciones para el sabor. En total, 10 opciones.
2. Si escogemos 2 bolas de helado, tenemos 2 opciones para el cono, y 5 opciones de sabor para cada bola, pues se pueden repetir. Además, como nosotros escogemos el orden de los sabores, es distinto pedir chocolate fresa que fresa chocolate. Así, en total hay $2\cdot 5\cdot 5 = 50$ formas de escoger un helado pidiendo 2 bolas.
3. Similar al anterior, si escogemos 3 bolas de helado, tenemos 2 opciones para el cono y 5 sabores a escoger por cada bola. Un total de $2\cdot 5^3 = 2\cdot 125 = 250$ opciones en este caso.

Por lo tanto, en total tenemos $10 + 50 + 250 = 310$ formas de escoger un helado en este local. Note que al final sumamos las opciones pues son excluyentes. Si usted pidió 2 bolas no puede pedir 3 al mismo tiempo, así que no se mezclan los distintos casos. □

13. ¿Cuántos números impares de cuatro cifras se pueden construir con los dígitos $0, 1, 2, 4, 5, 7$?

    A. 540

    B. 600

    C. 648

    D. 729

Solución: Primero, tres observaciones:

- Los dígitos se pueden repetir.
- El último dígito debe ser impar: 1, 5 o 7.
- Los números no pueden iniciar en 0. Un número como 0312 es de tres cifras, no de cuatro.

Con esto, contemos nuestras opciones:

$$\begin{array}{cccc}
\underline{\ 5\ } & \underline{\ 6\ } & \underline{\ 6\ } & \underline{\ 3\ } \\
1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 5 \\
4 & 2 & 2 & 7 \\
5 & 4 & 4 & \\
7 & 5 & 5 & \\
 & 7 & 7 &
\end{array} = 5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 30 \cdot 18 = 540$$

La respuesta correcta es la A. $\square$

14. Una caja tiene 18 bolas, 8 son rojas y las otras verdes. Si se saca una bola al azar, la probabilidad de que esa bola sea verde es[14]

    A. $\frac{4}{9}$

    B. $\frac{5}{9}$

    C. $\frac{9}{4}$

    D. $\frac{9}{4}$

7. Geometría

1. Un sastre pretendía cortar de un pedazo de tela un mantel de cierta área y de forma cuadrada, pero no fue posible obtenerlo así. Por esto, decidió cortarlo en forma rectangular, de tal manera que tuviera por ancho el lado del cuadrado disminuido en 2 y por largo el lado del cuadrado aumentado en 2.

   Entonces, el área del mantel rectangular resultó con respecto a la del cuadrangular [15]

   A. igual.

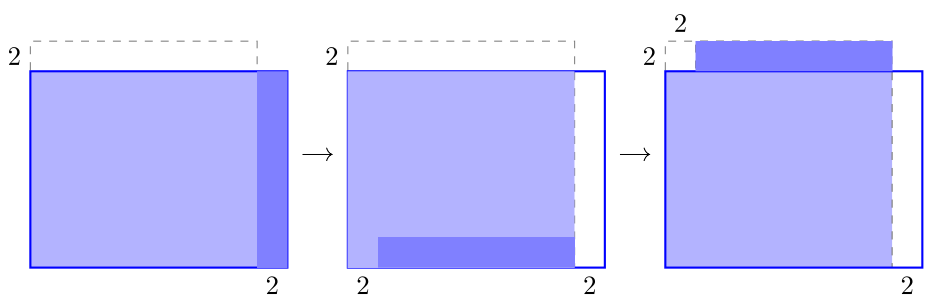
   B. 2 unidades cuadradas menor.

   C. 4 unidades cuadradas menor.

   D. 2 unidades cuadradas mayor.

   E. 4 unidades cuadradas mayor.

Solución: Dibujemos el trozo de tela del sastre. Punteado era el deseo original, y el de la línea continua fue el que terminó haciendo.



Vemos entonces que el trozo de tela que terminó cortando el sastre es un poco más pequeño que el cuadrado original. De hecho, es más pequeño por $2 \cdot 2 = 4$ unidades cuadradas, el cuadradito que le falta en la tercera figura para completar todo el cuadrado.

Algebraicamente, tenemos que si l es el lado del cuadrado, entonces el área del cuadrado original es de l^2. Por otro lado el ancho del rectángulo que terminó cortando es de $l-2$ y su largo $l+2$, de forma que su área es de

$$(l-2)(l+2) = l \cdot l + l \cdot 2 - 2 \cdot l - 2 \cdot 2 = l^2 + 2l - 2l - 4 = l^2 - 4.$$

Es decir, 4 unidades cuadradas menos que el cuadrado original. La respuesta correcta es la B.

Este es un ejemplo de la fórmula notable “diferencia de cuadrados:”

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

□

2. Un cuadrilátero P tiene 32 cm de perímetro y 48 cm^2 de área. Un cuadrado Q posee un perímetro igual a la cuarta parte del perímetro del cuadrilátero P.

   ¿Cuál es la diferencia entre las áreas del cuadrilátero P y el cuadrado Q? [16]

   A. 12 cm^2

   B. 23 cm^2

   C. 28 cm^2

   D. 39 cm^2

E. 44 cm^2

Solución: El perímetro del cuadrado Q es de

$$P_Q = \frac{1}{4}P_P = \frac{1}{4}32\text{cm} = 8\text{cm}$$

Donde P_F representa el perímetro de una figura F (en este caso F se cambia por el cuadrilátero P o por el cuadrado Q). Como todos los lados son iguales, el lado l del cuadrado mide la cuarta parte del perímetro $l = 8\text{cm}/4 = 2\text{cm}$. Y por tanto, el área del cuadrado es de $A_Q = l^2 = 2^2\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2$. La diferencia entre las áreas de P y Q es de

$$A_P - A_Q = 48\text{cm}^2 - 4\text{cm}^2 = 44\text{cm}^2$$

Donde usamos la misma idea, A_F es el área de la figura F (P o Q). La respuesta correcta es la E. □

3. Un terreno rectangular tiene un perímetro de 60 metros y el largo es el doble del ancho. ¿Cuánto mide el ancho?

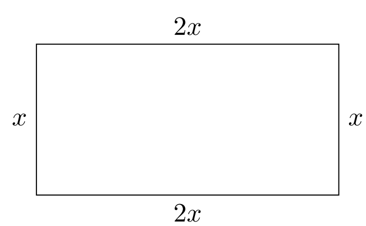
   A. 10 m

   B. 12 m

   C. 15 m

   D. 18 m

Solución: Hagamos una figura



Aquí pusimos x al ancho y por tanto el largo es $2x$. Tenemos entonces que el perímetro es la suma de todos los lados $P = x + 2x + x + 2x = 6x$ y es igual a 60 metros. Por tanto el ancho mide $x = 60/6 = 10$ metros. La respuesta correcta es la A. □

4. La altura de un triángulo es el doble de su base. Si el área del triángulo es 144cm^2, ¿cuánto mide su base?

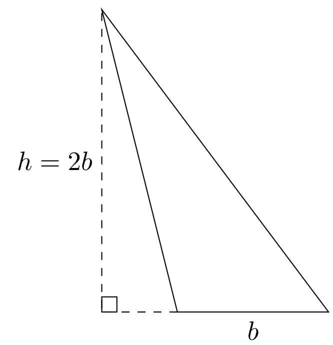
   A. 6 cm

   B. 8 cm

   C. 9 cm

   D. 12 cm

Solución: De nuevo hacemos una figura para orientarnos

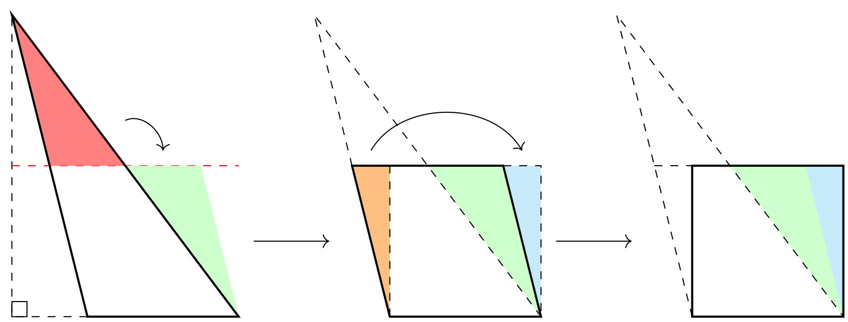


El área sabemos que es

$$A = 144\text{cm}^2 = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot 2b}{2} = b^2$$

Sabemos que $144 = 12^2$ (vale la pena repasar cuáles son los cuadrados perfectos, al menos hasta 15), luego la base del triángulo mide $b = 12\text{cm}$

Como una curiosidad, podemos obtener un cuadrado de lado b a partir de este triángulo:



□

5. En Papa John's venden pizzas de 8 pulgadas y de 10 pulgadas de diámetro. Si la pizza grande cuesta 5000 colones y la pequeña 4000, el precio por pulgada cuadrada de la pizza pequeña es

   A. 25 % más que el de la pizza grande.

   B. 10 % más que el de la pizza grande.

   C. 10 % menos que el de la pizza grande.

   D. El mismo que el de la pizza grande.

Solución: Primero, note que nos preguntan el precio por **pulgada cuadrada**, una medida de área. Por tanto, necesitamos medir el área de las pizzas. El radio de la pizza pequeña es de $8/2 = 4$ pulgadas y el de la grande es $10/2 = 5$ pulgadas. Así, sus áreas son

$$A_p = \pi \cdot 4^2 \,\text{in}^2 = 16\pi \,\text{in}^2 \qquad A_g = \pi \cdot 5^2 \,\text{in}^2 = 25\pi \,\text{in}^2$$

Calculando el precio por pulgada cuadrada, el de la pizza pequeña es $4000/(16\pi) = 1000/(4\pi) = 250/\pi$ colones por pulgada cuadrada y el de la grande es $5000/(25\pi) = 1000/(5\pi) = 200/\pi$. Por tanto, para calcular el porcentaje del precio por pulgada cuadrada de la pizza pequeña relativo al de la pizza grande, dividimos:

$$\frac{250/\pi}{200/\pi} = \frac{250}{200} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4} = 1{,}25 = 125\,\%.$$

Es decir, el precio por pulgada cuadrada de la pizza pequeña es un 25 % más que el de la pizza grande.

(Aunque no lo parezca, con aumentar un 25 % el diámetro de una pizza, el área aumenta en más del 50 %, de hecho, va a ser $1{,}25^2 = 1{,}5625$ veces el área de la pequeña, un 56 % más). □

6. El largo de un terreno rectangular es el doble de su ancho. Si el terreno tiene un área de 288 metros cuadrados, ¿cuál es su largo?

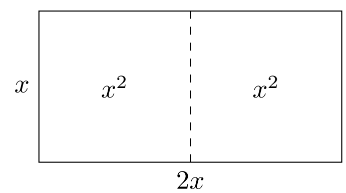
   A. 12 m

   B. 24 m

   C. 36 m

   D. 96 m

Solución: Hacemos un dibujo



Si x es el ancho del terreno, $2x$ es el largo y su área es $288\text{m}^2 = 2x^2$, por lo que $x^2 = 144\text{m}^2$. De esta forma $x = 12$ m. El largo del terreno es, por tanto $2x = 24$ m. □

7. André, asumiendo que su finca tenía forma cuadrada, midió uno solo de los lados y obtuvo que medía 120 m. Daniel midió ambos lados de la finca y, en el lado que midió André, Daniel obtuvo una medida 10 % menor que la de André. Al medir el otro lado, obtuvo un 20 % más que con el primero. Ambos calculan el área que piensan que tiene la finca. Con certeza

   A. Obtienen áreas iguales

   B. El área obtenida por Daniel es mayor que la obtenida por André.

   C. El área obtenida por André es mayor que la obtenida por Daniel.

   D. No hay suficiente información para responder.

Solución: Si L es el lado que midió André, este obtuvo 120 metros y Daniel obtuvo un 10 % menos, es decir el 90 %, que es $0{,}9 \cdot 120 = 9 \cdot 12 = 90 + 18 = 108$ metros. Después midió el segundo lado y obtuvo un 20 % más que con el primero, es decir, un 120 % de 108, que sería $1{,}2 \cdot 108 = 1{,}2 \cdot 100 + 1{,}2 \cdot 8 = 120 + 9{,}6 = 129{,}6$ metros. Ahora podemos calcular las áreas que obtuvo cada uno.

Como André asumió que era cuadrada, obtuvo un área de (en metros cuadrados ambas)

$$120 \cdot 120 = 12 \cdot 12 \cdot 100 = 14400$$

y Daniel una de

$$108 \cdot 129{,}6 = 100 \cdot 129{,}6 + 8 \cdot 129{,}6 = 12960 + 800 + 160 + 72 + 4{,}8 = 13760 + 236{,}8 = 13996{,}8$$

Por tanto con certeza André obtuvo un área mayor que la de Daniel.

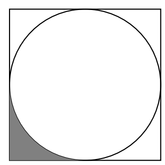
Duramos mucho haciendo cálculos. Que pasa si olvidamos la medida de 120 m, y simplemente decimos que x fue la medida obtenida por André, entonces podemos simplificarlo todo.

El área obtenida por André fue de x^2, y Daniel obtuvo, para el lado que midió André, $0{,}9x$ (un $10\,\%$ menos), y con el otro, un $20\,\%$ más que $0{,}9x$, es decir $1{,}2 \cdot 0{,}9x$. Así el área que obtiene Daniel es de $0{,}9x \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}9x = 0{,}9^2 \cdot 1{,}2x^2$. Para ver si $0{,}9^2 \cdot 1{,}2x^2$ es mayor o menor que x^2, basta ver si $0{,}9^2 \cdot 1{,}2$ es mayor o menor que 1, pues x^2 es un número positivo.

$$0{,}9^2 \cdot 1{,}2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{12}{10} = \frac{81 \cdot 12}{100 \cdot 10} = \frac{810 + 162}{1000} = \frac{972}{1000} < 1$$

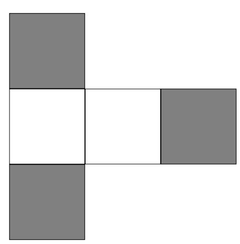
Y con bastantes menos cálculos, obtenemos que la medida que obtuvo Daniel es menor (¿en qué porcentaje?) que la que obtuvo André. □

8. En la figura se muestra un círculo inscrito en un cuadrado cuyo perímetro es 32 cm. El área, en centímetros cuadrados, de la región sombreada con gris corresponde a



   A. 12π
   B. $16 - 4\pi$
   C. $64 - 4\pi$
   D. $4\pi - 8$

9. En la figura adjunta se muestra un *pentaminó*, que es una figura compuesta por 5 cuadrados congruentes en donde cada uno tiene al menos un lado en común con otro cuadrado. Si el perímetro de la figura es de 60 cm, entonces el área de la región sombreada con gris, en centímetros cuadrados, corresponde a



   A. 25
   B. 27
   C. 36
   D. 75

Bibliografía

OLCOMA, Comisión de. *Primera eliminatoria nacional nivel A*. 2012. URL: https://olcoma.ac.cr/images/nacional/examant/1elim/1_nivel1_2012_e.pdf.

Rojas, N., L. Martínez et al. Explicaciones, Recomendaciones y Práctica. Prueba de Aptitud Académica UCR-UNA 2021. En: (Semanario Universidad 2386 sep. de 2021).

Martínez, L., J. Córdoba et al. Prácticas y Consejos para el Examen de Admisión 2022. En: (Semanario Universidad ago. de 2022).

Acuña Chacón, R. et al. *Cuaderno de ejercicios para la prueba de aptitud académica del TEC*. Segunda edición. Instituto Tecnológico de Costa Rica, 2023.

Rojas Rojas, G. et al. *60 - 10 preguntas y respuestas de práctica para la Prueba de Aptitud Académica*. Editorial UCR, 2023. ISBN: 978-9968-02-063-3. URL: https://editorial.ucr.ac.cr/interes-general/item/2633-60-10-preguntas-y-respuestas-de-pr%C3%A1ctica-para-la-prueba-de-aptitud-acad%C3%A9mica.html.

Calvo Díaz, K. et al. *24 preguntas de práctica en el 2024 para la Prueba de Aptitud Académica*. Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Costa Rica, 2024.

Rojas Rojas, G., J. Bolaños Valerio et al. *Práctica para la Prueba de Aptitud Académica*. Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Costa Rica. URL: https://paa.ucr.ac.cr/resources/otros/practica/practica.pdf.