Technische Universität Hamburg-Harburg
Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann

Hamburg, den 16. Oktober 2006

Klausur zur Diplom-Hauptprüfung
Diskrete Mathematik II
SS 2006

Name, Vorname

Matrikelnummer

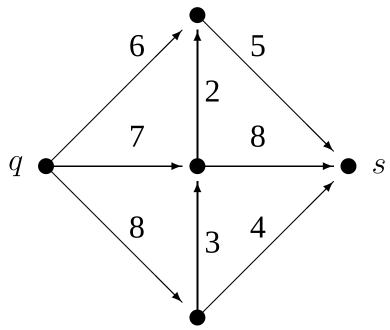
Aufgaben	1	2	3	4	5	6
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl						

Bitte beachten Sie noch die folgenden Punkte:

- Es sind *alle sechs* Aufgaben zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie leserlich. Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- **Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein.** Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

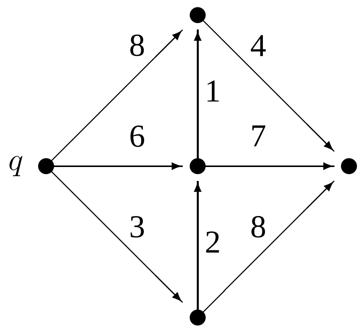
Aufgabe 1: [4 Punkte]

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk N. Finde einen maximalen Fluss auf N anhand des Algorithmus' von Ford-Fulkerson und gib den zugehörigen minimalen Schnitt an.



Aufgabe 2: [4 Punkte]

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk N. Konstruiere kürzeste Wege vom Knoten q zu allen übrigen Knoten in N anhand des Algorithmus' von Dijkstra.



Aufgabe 3: [4 Punkte]

Maximum Set Splitting:
Sei M eine Menge von nichtleeren Teilmengen einer Menge S. Gesucht ist eine Partition P von S in zwei Teilmengen P_1 und P_2 derart, dass die Summe der Mächtigkeit aller Elemente in M, die nicht ganz in P_1 oder P_2 liegen, minimal ist. D. h., die Zielfunktion ist

$$f_{S,M}(P) = \sum_{\substack{N \in M \\ N \not\subseteq P_1 \\ N \not\subseteq P_2}} |N|.$$

Spezifiziere einen Backtracking-Algorithmus, der eine optimale 2-Partition P von S bzgl. M berechnet.

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Minimum Generalized 0-1 Assignment Problem:
Seien m und n natürliche Zahlen. Sei $A = (a_{ij})$ eine ganzzahlige $m \times n$-Matrix, $b = (b_i)$ ein ganzzahliger Vektor der Länge m und $C = (c_{ij})$ eine binäre $m \times n$-Matrix. Gesucht ist eine binäre $m \times n$-Matrix $X = (x_{ij})$, die in jeder Spalte genau eine 1 enthält, die Ungleichung $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i$, $1 \leq i \leq m$, erfüllt und folgenden Ausdruck minimiert:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Spezifiziere einen nach dem Prinzip des simulierten Ausglühens (Simulated Annealing) arbeitenden Algorithmus, der dieses Zuordnungsproblem näherungsweise löst.

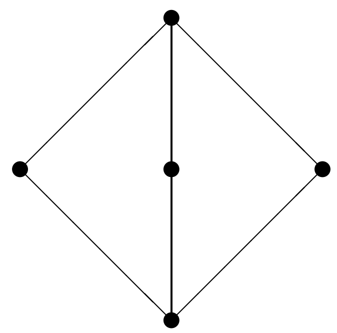
Aufgabe 5: [4 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge E' von E heißt eine *Kantenüberdeckung* von G, wenn jeder Knoten in G mit mindestens einer Kante aus E' inzidiert. Eine *minimale Kantenüberdeckung* von G ist eine Kantenüberdeckung von G mit minimaler Mächtigkeit.

Gib eine minimiale Kantenüberdeckung für untenstehenden Graphen G an.

Formuliere das Problem, eine minimale Kantenüberdeckung für den untenstehenden Graphen G zu finden, als ganzzahliges lineares Programm.

Sind die Ecken dieses ganzzahligen linearen Programms ganzzahlig?



Aufgabe 6: [4 Punkte]

Eine Firma hat sieben neue Projekte eingeworben. Jedes Projekt soll zwei Jahre laufen, erfordert pro Jahr ein bestimmtes Kapital (in Mio. Euro) und besitzt einen Mehrwert (in Mio. Euro). Die folgende Tabelle listet die Projekte auf:

Projekte	Mehrwert	benötigtes Kapital Jahr 1	Jahr 2
A	12	5	5
B	10	4	4
C	8	4	2
D	6	2	2
E	6	2	3
F	8	3	2
G	0	1	1
verfügbares Kapital		15	15

Es können nicht alle Projekte bearbeitet werden, weil pro Jahr nur jeweils 15 Mio. Euro zur Verfügung stehen. Zudem gibt es Abhängigkeiten zwischen den Projekten:

- Die Projekte C und E müssen gleichzeitig durchgeführt werden (implemented simultaneously), falls sie überhaupt durchgeführt werden.
- Die Projekte A, B und D schließen sich gegenseitig aus (mutually exclusive).
- Wenn Projekt F durchgeführt wird, dann muss auch Projekt G durchgeführt werden.

Formuliere dieses Problem als ganzzahliges lineares Programm, wobei der Mehrwert zu maximieren ist.

Aufgabe 6: [4 Punkte]

A company plans seven new projects. Each projects will last for two years and requires some investment per year (in M Euro) and has a Net Present Value (NPV, in M Euro). The following table lists the projects,

Projects	NPV	Investment Required	
		Year 1	Year 2
A	12	5	5
B	10	4	4
C	8	4	2
D	6	2	2
E	6	2	3
F	8	3	2
G	0	1	1
Capital Funds Available		15	15

It is not possible to undertake all projects, as the available Captial Funds are limited to 15M Euro per year. Moreover, there are dependencies between the projects:

- Projects C and E must be implemented simultaneously, if they are implemented at all.
- Projects A, B, and D are mutually exclusive.
- If project F is undertaken, then also project G must be undertaken.

Formulate this problem as integral linear program which maximizes the NPV.