Technische Universität Hamburg-Harburg
Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann

Hamburg, den 20. Februar 2009

Klausur zur Diplom-Hauptprüfung
Diskrete Mathematik II
WS 2008/09

Name, Vorname ______________________ Matrikelnummer ____________

Aufgaben	1	2	3	4	5	6
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl						

Bitte beachten:

- Es sind *alle sechs* Aufgaben zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie leserlich. Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript/Buch, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- **Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein.** Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 1: [4 Punkte]

Bewerber A ist qualifiziert für Jobs J_2, J_4 und J_5; Bewerber B ist qualifiziert für Jobs J_1 und J_3; Bewerber C ist qualifiziert für Jobs J_1 J_3 und J_5; und Bewerber D ist qualifiziert für Jobs J_3 und J_5.

Modellieren Sie diese Situation anhand eines Graphen.

Ermitteln Sie eine maximale Zuordnung anhand eines Netzwerk-Algorithmus'.

Bestimmen Sie einen minimalen Schnitt im Graphen.

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Gegeben sei ein Graph G anhand einer Adjazenzmatrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A' \\ A'' & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Gestalt besitzt dieser Graph?

Gegeben sei ein Graph H anhand einer Adjazenzmatrix der Form

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}.$$

Welche Gestalt hat dieser Graph?

Aufgabe 3: [4 Punkte]

Metric Dimension:

Die *metrische Dimension* eines zusammenhängenden Graphen G ist die minimiale Kardinalität einer auflösenden Menge für G. Das Problem des Auffindens der metrischen Dimension eines zusammenhängenden Graphen ist NP-hart.

Erläuterungen:

Sei $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ eine Menge von Knoten in G und v ein Knoten in G. Die Folge $r(v|W) = (d(v, w_1), \ldots, d(v, w_k))$ bezeichnet die Abstände zwischen v und den Knoten in W. Eine Menge W heißt *auflösend*, wenn je zwei Knoten v und v' in G unterschiedliche Folgen $r(v|W)$ und $r(v'|W)$ haben.

Spezifizieren Sie einen Backtracking-Algorithmus, der die metrische Dimension eines zusammenhängenden Graphen ermittelt.

Geben Sie eine Möglichkeit an, Teilbäume während des Backtrackings abzuschneiden.

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Quadratic Assignment Problem:

Gegeben seien zwei endliche Mengen P (Einrichtungen) und L (Plätze) gleicher Kardinalität, eine Gewichtsfunktion $w : P \times P \to \mathbb{R}_{>0}$ und eine Abstandsfunktion $d : L \times L \to \mathbb{R}_{>0}$.

Gesucht wird eine Bijektion $f : P \to L$, die die folgende Kostenfunktion minimiert:

$$\sum_{a,b \in P} w(a,b) \cdot d(f(a), f(b)).$$

Dieses Problem ist NP-hart.

Spezifizieren Sie einen Algorithmus, der nach dem Prinzip des Simulated Annealing arbeitet und dieses Problem näherungsweise löst.

Aufgabe 5: [4 Punkte]

Zeige, dass der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen konvex ist.

Zeige, dass eine analoge Aussage für die Vereinigung konvexer Mengen nicht gilt.

Aufgabe 6: [4 Punkte]

Ein Zementhersteller produziert zwei Arten von Zement: Granulat und Pulver. Er kann nicht mehr als 1600 Zementsäcke pro Tag herstellen. An einen Händler liefert er pro Tag mindestens 500 Säcke pulverisierten Zements. Die Herstellung eines Sackes pulverisierten Zements benötigt 0.24 Minuten; die Herstellungsdauer eines Sackes Granulat ist doppelt so hoch. Die Zementanlage läuft 8 Stunden pro Tag. Der Gewinn für einen Sack Granulat beträgt 4 Euro und für einen Sack Pulver 3 Euro.

Formulieren Sie dieses Problem als ein LP, wobei es den Gewinn zu optimieren gilt.

Lösen Sie dieses LP graphisch.