Technische Universität Hamburg-Harburg — Hamburg, den 25. Februar 2008
Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann

Klausur zur Diplom-Hauptprüfung
Diskrete Mathematik II
WS 2007/08

____________________________ ____________

Name, Vorname — Matrikelnummer

Aufgaben	1	2	3	4	5	6
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl						

Bitte beachten:

- Es sind *alle sechs* Aufgaben zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie leserlich. Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript/Buch, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- **Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein.** Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 1: [4 Punkte]

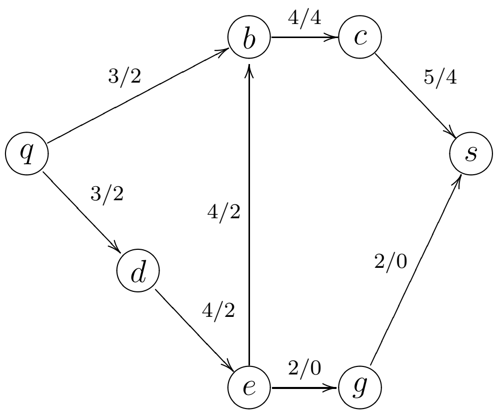
Sei G ein Kanten bewerteter, zusammenhängender Graph. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Wenn alle Kanten in G paarweise verschiedene Gewichte haben, dann haben unterschiedliche Spannbäume von G verschiedenes Gesamtgewicht.
2. Ist e eine Kante in G, deren Gewicht kleiner ist als das Gewicht jeder anderen Kante in G, dann ist e in jedem minimalen Spannbaum von G enthalten.

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk $N = (D, \gamma, q, s)$ mit Quelle q und Senke s. In die Zeichnung ist neben der Kapazität γ auch ein Fluss f auf N eingetragen; z. B. hat die Kante qd die Kapazität $\gamma(qd) = 3$ und den Flusswert $f(qd) = 2$.

Konstruieren Sie ausgehend von dem gegebenen Fluss f einen maximalen Fluss auf N anhand des Algorithmus' von Ford-Fulkerson.



Aufgabe 3: [4 Punkte]

Hitting Sets:
Sei S eine n-elementige Menge, seien $S_1, \ldots, S_m$ Teilmengen von S und sei k eine natürliche Zahl mit $0 \leq k \leq n$. Gesucht ist eine Teilmenge H von S derart, dass $|H| \leq k$ und $H \cap S_i \neq \emptyset$ für alle $1 \leq i \leq m$.

1. Spezifizieren Sie einen Backtracking-Algorithmus, der alle derartigen Mengen H (Hitting-Sets) berechnet.

   Geben Sie eine Möglichkeit an, Teilbäume während des Backtrackings abzuschneiden.

2. Bestimmen Sie alle Hitting-Sets für folgende Instanz des Hitting-Set-Problems:

$$S = \{1, \ldots, 4\},\ S_1 = \{1, 2, 3\},\ S_2 = \{2, 3, 4\},\ k = 2.$$

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Minimum Distance Problem:
Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{rl} & \min\ |x^T A x - d| \\ \text{s.d.} & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

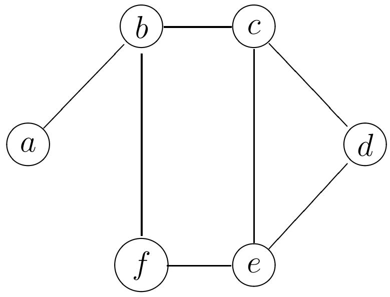
wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $d \in \mathbb{R}$ gegeben seien.

Spezifizieren Sie einen genetischen Algorithmus, der das Problem näherungsweise löst.

Aufgabe 5: [4 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge D der Knotenmenge V heißt *überdeckend*, wenn jede Kante in G mit mindestens einem Knoten in D inzidiert.

1. Formulieren Sie das Problem, eine minimale, überdeckende Menge in G zu finden, als ein ILP.
2. Bestimmen Sie mindestens zwei minimale, überdeckende Mengen im untenstehenden Graphen.



Aufgabe 6: [4 Punkte]

Eine Firma produziert vier Produkte A, B, C und D auf zwei Maschinen X und Y. Bekannt ist die Zeit (in Minuten), um eine Einheit eines Produkts auf einer der Maschinen herzustellen, und der Profit pro Einheit eines Produkts (in Euro). Die diesbezüglichen Werte sind folgender Tabelle zu entnehmen:

Produkt	Maschine X	Maschine Y	Profit
A	10	27	10
B	12	19	12
C	13	22	17
D	15	33	18

Ziehen Sie als Kenngrößen die produzierten Produkte pro Tag heran. Formulieren Sie dieses Problem als ILP, wobei es den Profit zu optimieren gilt.

Fügen Sie in das ILP lineare Nebenbedingungen für folgende Restriktionen ein:

1. Das Produkt A kann nur auf der Maschine X produziert werden.
2. Das Produkt B soll mindestens doppelt so oft pro Tag hergestellt werden wie das Produkt C.
3. Die hergestellten Produkte werden im Firmenlager einen Tag lang gelagert. Das Lager ist 50 qm groß und die Lagerung einer Einheit von Produkt A beträgt 0.1 qm, für B 0.2 qm, für C 0.15 qm und für D 0.16 qm.