Technische Universität Hamburg-Harburg
Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann

Hamburg, den 15. Oktober 2007

Klausur zur Diplom-Hauptprüfung
Diskrete Mathematik II

SS 2007

______________________________ ______________

Name, Vorname Matrikelnummer

Aufgaben	1	2	3	4	5	6
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl						

Bitte beachten:

- Es sind *alle sechs* Aufgaben zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie leserlich. Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript/Buch, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- **Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein.** Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

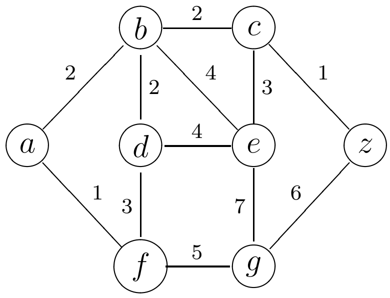
Aufgabe 1: [4 Punkte]

Seien n und m positive ganze Zahlen. In einem Computernetzwerk gibt es n Server und n Festplatten. Jeder Server ist kompatibel mit m Festplatten und jede Festplatte ist kompatibel mit m Servern.

Ist es möglich, an jeden Server eine kompatible Festplatte anzuschließen? Hinweis: Gesucht ist eine vollständige Paarung.

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk N. Konstruiere kürzeste Wege vom Knoten a zu allen übrigen Knoten in N anhand des Algorithmus' von Dijkstra.

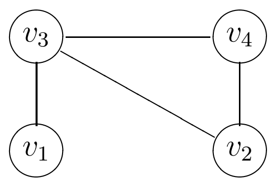


Aufgabe 3: [4 Punkte]

Minimum Edge-Dominating Set:
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Für jede Teilmenge $F \subseteq E$ definiere $m_G(F)$ als die Menge aller Kanten in G, die mit wenigstens einer Kante in F einen Knoten gemeinsam haben. Im Falle $m_G(F) = E$ heißt F eine *Kanten dominierende Menge* in G.

- Spezifizieren Sie einen Backtracking-Algorithmus, der eine minimale, Kanten dominierende Menge in G berechnet.

  Geben Sie eine Möglichkeit an, Teilbäume während des Backtrackings abzuschneiden.
- Geben Sie alle minimalen, Kanten dominierenden Mengen im untenstehenden Graphen an.



Aufgabe 4: [4 Punkte]

Set Packing:
Sei $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ eine Familie von endlichen Mengen. Gesucht ist eine Teilfamilie $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$, von $\mathcal{C}$ derart, dass je zwei verschiedene Mengen C_{i_u} und C_{i_v}, $1 \leq u < v \leq k$, der Teilfamilie disjunkt sind.

Spezifizieren Sie einen nach dem Prinzip des simulierten Ausglühens (Simulated Annealing) arbeitenden Algorithmus, der das Problem, eine maximale Teilfamilie $(C_{i_1}, \ldots, C_{i_k})$ von $\mathcal{C}$ zu finden (d. h., maximales k), näherungsweise löst.

Aufgabe 5: [4 Punkte]

Seien $c_1, \ldots, c_6$ nichtnegative reelle Zahlen. Betrachten Sie das folgende LP:

$$\begin{array}{rl} & \max c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6. \\ \text{s.d.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_4 \leq 1 \\ & x_5 + x_6 \leq 1 \\ & x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 6 \end{array}$$

Finden Sie eine optimale Lösung dieses LP.

Aufgabe 6: [4 Punkte]

Eine Firma möchte vier neue Projekte starten. Jedes Projekt soll drei Jahre laufen, erfordert pro Jahr ein bestimmtes Kapital (in Mio. Euro) und besitzt einen Mehrwert (in Mio. Euro). Die folgende Tabelle listet die Projekte auf:

Projekte	Mehrwert	benötigtes Kapital		
		Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3
1	0.2	0.5	0.3	0.2
2	0.3	1.0	0.8	0.2
3	0.5	1.5	1.5	0.3
4	0.1	0.1	0.4	0.1
verfügbares Kapital		3.1	2.5	0.4

Formulieren Sie dieses Problem als ILP, wobei es den Mehrwert zu optimieren gilt.

Fügen Sie in das ILP lineare Nebenbedingungen für folgende Restriktionen ein:

- Die Projekte 1 und 2 schließen sich gegenseitig aus (mutually exclusive), d. h., von den Projekten 1 und 2 kann höchstens eines durchgeführt werden.
- Das Projekt 1 dauert nur zwei Jahre und wird höchstens in den Jahren 1 und 2 ausgeführt.
- Die Projekte 3 und 4 müssen gleichzeitig durchgeführt werden (implemented simultaneously), falls sie überhaupt durchgeführt werden.
- Wenn Projekt 2 ausgeführt wird, dann auch Projekt 3.