

**Diskrete Mathematik**  
**Klausur zur Bachelor-Prüfung und Diplom-Hauptprüfung**  
**Sommersemester 2009**

\_\_\_\_\_  
Name, Vorname

\_\_\_\_\_  
Matrikelnummer

Aufgaben	1	2	3	4	5	6	7	8
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl								

**Bitte ankreuzen:**

- ☐ Bachelor-Prüfung **DM I**: Es sind die Aufgaben 1, 2, 3, 4 zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- ☐ Bachelor-Prüfung **DM II**: Es sind die Aufgaben 5, 6, 7, 8 zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
- ☐ Diplom-Hauptprüfung **DM II**: Es sind die Aufgaben 5, 6, 7, 8 zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

**Bitte folgende Punkte beachten:**

- Schreiben Sie leserlich, Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript/Buch, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein. Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

**Aufgabe 1:**

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt:

$$2^{n+1} < 1 + (n + 1) \cdot 2^n.$$

Benutzen Sie vollständige Induktion.



**Aufgabe 2:**

Ein Examen besteht aus 12 Aufgaben. Auf wie viele Arten können den Aufgaben (ganzzahlige) Punkte zugewiesen werden, wenn insgesamt 100 Punkte zu vergeben sind?

Wie ändert sich die Lösung, wenn zusätzlich jede Aufgabe mindestens 5 Punkte erhalten soll?

*Translation:* An exam has 12 problems. How many ways can (integer) points be assigned to the problems if the total of the points is 100?

How does the solution change, when additionally each problem is worth at least 5 points?



### Aufgabe 3:

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{cccc} & w & x & y & z \\ \begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Geben Sie eine Relation  $R$  als Menge geordneter Paare an, die obige Matrix  $A$  als Adjazenzmatrix besitzt.
2. Prüfen Sie, ob die Relation  $R$  reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist.
3. Wie sieht man einer Adjazenzmatrix an, ob die zugehörige Relation antisymmetrisch ist?



**Aufgabe 4:**

1. Berechnen Sie das Inverse von 37 im Restklassenring  $\mathbb{Z}_{55}$ .
2. Wie viele Einheiten und Nullteiler enthält der Ring  $\mathbb{Z}_{55}$ ?





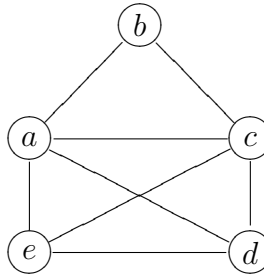
### Aufgabe 5:

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Eine *Kantenüberdeckung* von  $G$  ist eine Teilmenge  $F$  von  $E$ , so dass jeder Knoten  $v \in V$  mit mindestens einer Kante  $e \in F$  inzidiert, d. h.,  $v \in e$ .

1. Spezifizieren Sie einen Backtracking-Algorithmus, der eine minimale Kantenüberdeckung von  $G$  findet.

Geben Sie eine Möglichkeit an, Teilbäume während des Backtrackings abzuschneiden.

2. Ermitteln Sie per Inspektion alle minimalen Kantenüberdeckungen des folgenden Graphen:





**Aufgabe 6:**

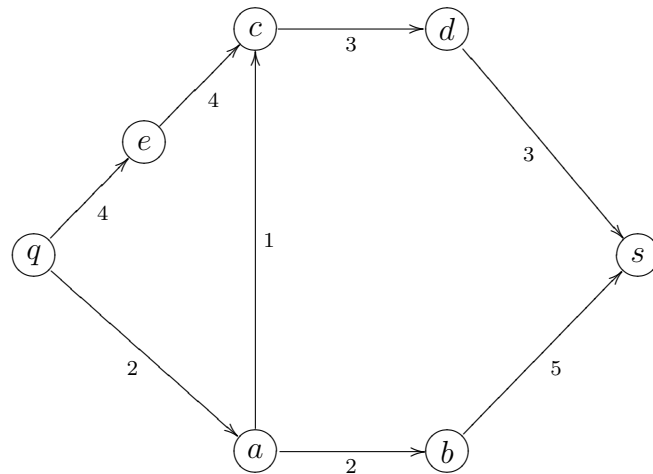
Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

Spezifizieren Sie einen nach dem Prinzip des simulierten Ausglühens arbeitenden Algorithmus, der das Problem, eine minimale Kantenüberdeckung von  $G$  zu finden, näherungsweise löst.



**Aufgabe 7:**

Bestimmen Sie einen maximalen Fluss im unten angegebenen Netzwerk. Geben Sie auch den zugehörigen minimalen Schnitt an.





### Aufgabe 8:

In einer Studie wurde festgestellt, dass Gerichte wie Hot Dogs oder Hamburger zu wenig Vitamin A und C sowie Ballaststoffe enthalten. Um Abhilfe zu schaffen, sollten derartige Gerichte Beilagen aus weißem Kohl, Karotten und Gurken enthalten. Die folgende Tabelle fasst die numerischen Daten zusammen: vorgeschriebene Mengen von Vitaminen und Ballaststoffen pro Gericht, ihr Anteil in der Nahrung und die anfallenden Kosten:

Nahrung	Karotten roh	Weißer Kohl roh	Gurken eingelegt	Notwendig pro Gericht
Vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
Vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
Ballaststoffe [g/kg]	30	20	10	4 g
Kosten [Euro/kg]	0.75	0.5	0.15	-

Die Beilagen aus Karotten, weißem Kohl und Gurken sollen zu einem möglichst günstigen Preis angeboten werden, wobei die vorgegebenen Mengen an Vitaminen und Ballaststoffen einzuhalten sind.

Formulieren Sie dieses Problem as LP.

*Translation:* A study found out that dishes like hot dogs or house-style hamburgers do not comport with nutritional regulations and the report mentioned explicitly the lack of vitamins A and C and dietary fiber. To rectify these shortcomings, the menus should be augmented with side dishes created from white cabbage, carrots, and pickled cucumber.

The following table summarizes the numerical data: the prescribed amount of vitamins and fiber per dish, their content in the food, and the unit price of the food.

food	carrot raw	white cabbage raw	cucumber pickled	required per dish
vitamin A [mg/kg]	35	0.5	0.5	0.5 mg
vitamin C [mg/kg]	60	300	10	15 mg
dietary fiber [g/kg]	30	20	10	4 g
price [Euro/kg]	0.75	0.5	0.15	-

At what minimum additional price per dish can the requirements of the study be satisfied?

Provide a linear program.



