Technische Universität Hamburg-Harburg
Prof. Dr. Karl-Heinz Zimmermann

Hamburg, den 5. September 2008

Klausur zur Diplom-Hauptprüfung
Diskrete Mathematik II
SS 2008

______________________________ ______________

Name, Vorname　　　　Matrikelnummer

Aufgaben	1	2	3	4	5	6
Maximale Punktezahl	4	4	4	4	4	4
Erreichte Punktezahl						

Bitte beachten:

- Es sind *alle sechs* Aufgaben zu bearbeiten. Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schreiben Sie leserlich. Unleserliches wird nicht bewertet. Schreiben Sie weder mit Bleistift noch mit roter Tinte.
- Der Lösungsweg muss stets klar erkennbar sein. Die Angabe des Endergebnisses ist *nicht* ausreichend.
- Zulässige Hilfsmittel sind Skript/Buch, Übungen und eigene Aufzeichnungen. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig.
- **Tragen Sie die Lösungen in die Aufgabenblätter ein.** Falls Sie zusätzliche Blätter benötigen, kennzeichnen Sie diese bitte mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Aufgabe 1: [4 Punkte]

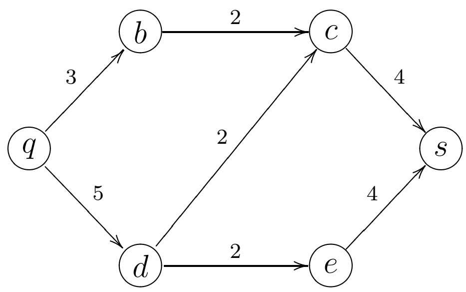
Sei G ein Kanten bewerteter, zusammenhängender Graph. Sei v ein Knoten in G derart, dass alle Kanten, die v als einen Endpunkt haben, paarweise unterschiedliche Gewichte besitzen. Bezeichne e diejenige Kante in G, die unter allen mit v inzidierenden Kanten minimales Gewicht aufweist.

Gehört die Kante e zu jedem minimalen Spannbaum von G?

Aufgabe 2: [4 Punkte]

Gegeben sei untenstehendes Netzwerk $N = (D, \gamma, q, s)$ mit Quelle q und Senke s. In die Zeichnung sind die Kapazitäten der Kanten eingetragen.

Konstruieren Sie einen maximalen Fluss auf N anhand des Algorithmus' von Ford-Fulkerson.



Aufgabe 3: [4 Punkte]

Set-Splitting:
Sei S eine n-elementige Menge und seien $S_1, \ldots, S_m$ nichtleere Teilmengen von S. Eine *2-Färbung* von S ist eine Abbildung $f : S \to \{0, 1\}$, die jedem Element von S eine von zwei Farben zuordnet. Eine 2-Färbung heißt *zulässig bzgl.* $S_1, \ldots, S_m$, wenn in jeder Teilmenge S_i wenigstens zwei Elemente existieren, die unterschiedlich gefärbt sind, $1 \leq i \leq m$.

1. Bestimmen Sie alle zulässigen 2-Färbungen von S bzgl. $S_1, \ldots, S_m$ mithilfe eines Backtracking-Algorithmus.

   Geben Sie eine Möglichkeit an, Teilbäume während des Backtrackings abzuschneiden.

2. Bestimmen Sie eine zulässige Färbung für die Menge $S = \{1, \ldots, 6\}$ bzgl. der Teilmengen

$$S_1 = \{1, 2\},\ S_2 = \{3, 4, 5\},\ S_3 = \{2, 3, 6\},\ S_4 = \{1, 4, 6\},\ S_5 = \{2, 5\}.$$

Aufgabe 4: [4 Punkte]

Nearest Codeword:
Sei C ein linearer Binärcode der Länge n; d.h., C ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{Z}_2^n$ mit Dimension k, $1 \leq k \leq n$. Jedes Codewort $c \in C$ ist eindeutig als $\mathbb{Z}_2$-Linearcombination von Basisvektoren $b^{(8)}, \ldots, b^{(k)}$ darstellbar:

$$c = c_1 b^{(1)} + \ldots + c_k b^{(k)}, \quad c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}_2.$$

Das Problem, zu einem Vektor $y \in \mathbb{Z}_2^n$ ein Codewort $c \in C$ mit minimalem Hamming-Abstand $d_H(x, y)$ unter allen Codewörtern in C zu finden, ist NP-hart.

Spezifizieren Sie einen nach dem Prinzip des simulierten Ausglühens arbeitenden Algorithmus, der dieses Problem näherungsweise löst.

Aufgabe 5: [4 Punkte]

Set-Splitting: Seien Mengen S und $S_1, \ldots, S_m$ wie in Aufgabe 3 gegeben.

Formulieren Sie das Problem, eine zulässige 2-Färbung von S bzgl. $S_1, \ldots, S_m$ zu bestimmen, als ein ILP.

Aufgabe 6: [4 Punkte]

Ein Handwerker fertigt Tische und Stühle. Er verkauft einen Tisch mit 30 Euro Gewinn und einen Stuhl mit 10 Euro Gewinn. Er arbeitet 40 Stunden pro Woche und benötigt 6 Stunden für die Fertigung eines Tisches und 3 Stunden für die Fertigung eines Stuhles. Er fertigt mindestens 3 Mal so viele Stühle wie Tische. Tische erfordern 4 Mal so viel Lagerraum wie Stühle und er verfügt über einen Lagerraum, der höchstens 4 Tische pro Woche aufnehmen kann. Er hat einen Kunden, dem er pro Woche einen Tisch verkauft.

Formulieren Sie dieses Problem als LP.