

Assignment #1 [Theory]

Realtime Systems

1. What is the utilization of a single CPU?

$$\begin{aligned} P_1 &= D_1 = 5, C_1 = 2; \\ P_2 &= D_2 = 7, C_2 = 4. \end{aligned}$$

단일 CPU상에서 이용률 U (Utilization)는 다음과 같이 정의된다.

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{P_i}$$

n : 프로세서의 작업 수

따라서 주어진 상황에서 이용률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U = \frac{C_1}{P_1} + \frac{C_2}{P_2}$$

이를 계산하면 다음과 같이 이용률을 구할 수 있다.

$$U = \frac{2}{5} + \frac{4}{7} \cong 0.9714 \text{ (97.14\%)}$$

2. What is the RM (Rate Monotonic) utilization bound?

비율 단조 스케줄링(Rate-Monotonic scheduling)은 실시간 작업을 스케줄링하는 방법 중 하나로, 주기가 짧은 작업에 더 높은 우선순위를 부여하는 정적 우선순위 할당 방식이다.

비율 단조 스케줄링의 이용률 상한은 $U_b(n)$ 으로 표현되고, 다음과 같다.

$$U_b(n) = n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

n : 작업의 수

*Liu & Layland가 1973년 저술한 "Scheduling algorithms for multiprogramming in a hard real-time environment" 논문에서 증명되었음

이 이용률 상한은 n 개의 작업이 전체 작업을 스케줄링할 수 있는 경우가 항상 존재할 수 있는 한계 값을 의미한다. 이용률 한계보다 같거나 낮은 이용률을 가지는 상황에 대해서, 비율 단조 스케줄링의 모든 작업은 지연 없이 실행이 가능함이 알려져 있다.

3. Let RM Utilization bound $U_b(n) = n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

What is $U_b(3)$?

비율 단조 스케줄링(Rate-Monotonic scheduling)의 이용률 상한(Utilization bound)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_b(n) = n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

n : 작업의 수

따라서 $n=3$ 일 때 $U_b(3)$ 의 값을 구하면

$$U_b(3) = 3 \left(2^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \cong 0.7798 \text{ (77.98\%)}$$

4. Let RM Utilization bound $U_b(n) = n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$

Prove $U_b(\infty) = \ln 2$.

$U_b(\infty) = \ln(2)$ 을 증명하기 위해 n 이 ∞ 로 갈 때의 극한을 구하면

$$U_b(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

$t = 2^{\frac{1}{n}} - 1$ 로 치환하면, $n \rightarrow \infty$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이고 $n = \ln(2) \frac{1}{\ln(t+1)}$ 이다.

이를 위 식에 대입하고, $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ 을 이용하여 정리하면

$$U_b(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \ln(2) \frac{t}{\ln(1+t)} = \ln(2) \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t}} = \ln(2)$$

<The end of the assignment>