画像情報システム

第7回　フーリエ変換

木更津高専情報工学科　和崎

1. フーリエ変換

- 周期信号のフーリエ変換
  - 時間 t を変数とする周期 T の1次元信号 $f(t)$

    ⇒直流成分＋角周波数 $\omega = 2\pi / T$ とその整数倍の正弦波

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right\},}\left\{\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\,dt \\ a_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)\,dt \end{aligned}\right.$$

- a_k , b_k:フーリエ係数(a_0:直流(平均値)成分、a_1, b_1:基本波成分、その他:高調波成分)

2. 複素フーリエ変換

- 複素数によるフーリエ変換の表記
  - オイラーの公式$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\sin(\theta)$ を使って式を書き直したもの

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{a_k(e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t})\right\} + \frac{1}{2j}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{b_k(e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t})\right\}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - jb_k)e^{jk\omega t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + jb_k)e^{-jk\omega t}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}C_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty}C_{-k}e^{-jk\omega t}$$

$$\boxed{= \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{jk\omega t},}$$

$$\boxed{\begin{cases} C_0 = \dfrac{a_0}{2} \\ C_k = \dfrac{1}{2}(a_k - jb_k) \\ C_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + jb_k) \end{cases}}$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jk\omega t}dt}$$

$$\left|C_k\right| = \frac{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}{2}$$:振幅スペクトル $k = 0$ で左右対称

$$\angle C_k = Tan^{-1}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right)$$:位相スペクトル $k = 0$ で点対称

3. 離散フーリエ変換(DFT)

- 周期 T の信号を周期 τ でサンプリングした N 個のディジタルデータ *f[i]*

$$f[i] = f(i\tau) = f\left(i\frac{T}{N}\right), \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, N-1)$$

  - 離散フーリエ変換の式

$$C_k = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} f[i]e^{-jk\omega t}\tau \qquad T = N\tau,\ \omega t = \frac{2\pi}{T}i\tau = \frac{2\pi}{T}i\frac{T}{N} = \frac{2\pi}{N}i \quad \text{より}$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f[i]e^{-j\frac{2\pi}{N}ki}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)}$$

  - 離散フーリエ逆変換の式

$$\boxed{f[i] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}ki}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, N-1)}$$

4. 2次元離散フーリエ変換

- 2次元画像信号 *f[m,n]*、画素数 *M*×*N*、フーリエ係数 *F[k,l]* のとき
  - 2次元離散フーリエ変換

$$\boxed{F[k,l]=\frac{1}{MN}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1}f[m,n]e^{-j\frac{2\pi}{M}km}e^{-j\frac{2\pi}{N}ln}}$$

    - 2次元DFTは1次元DFTを繰り返すことで計算可能

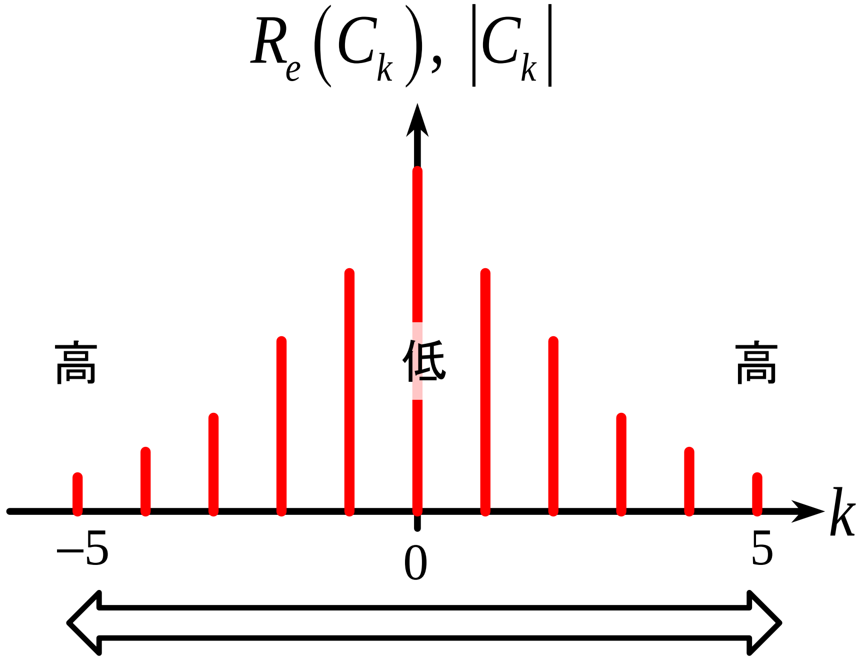
$$\boxed{\hat{F}[k,n]=\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}f[m,n]e^{-j\frac{2\pi}{M}km}} \Rightarrow \boxed{F[k,l]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{F}[k,n]e^{-j\frac{2\pi}{N}ln}}$$

  - 2次元離散フーリエ逆変換

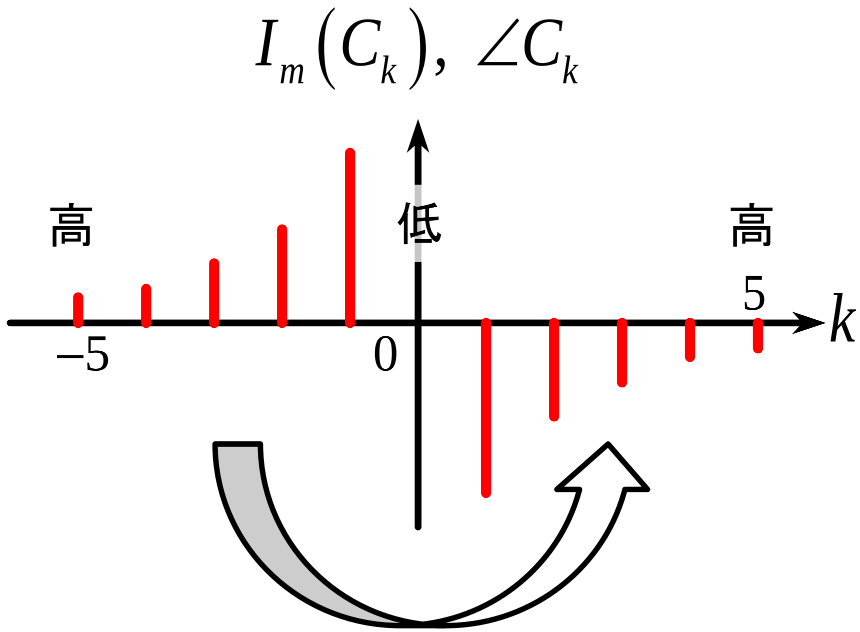
$$\boxed{f[m,n]=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}F[k,l]e^{j\frac{2\pi}{M}km}e^{j\frac{2\pi}{N}ln}}$$

5. 複素フーリエ変換のスペクトル

- 複素フーリエ係数
  - k は基本周波数 $f_0 = 1 / T$ の倍数を示している（T は信号の周期）



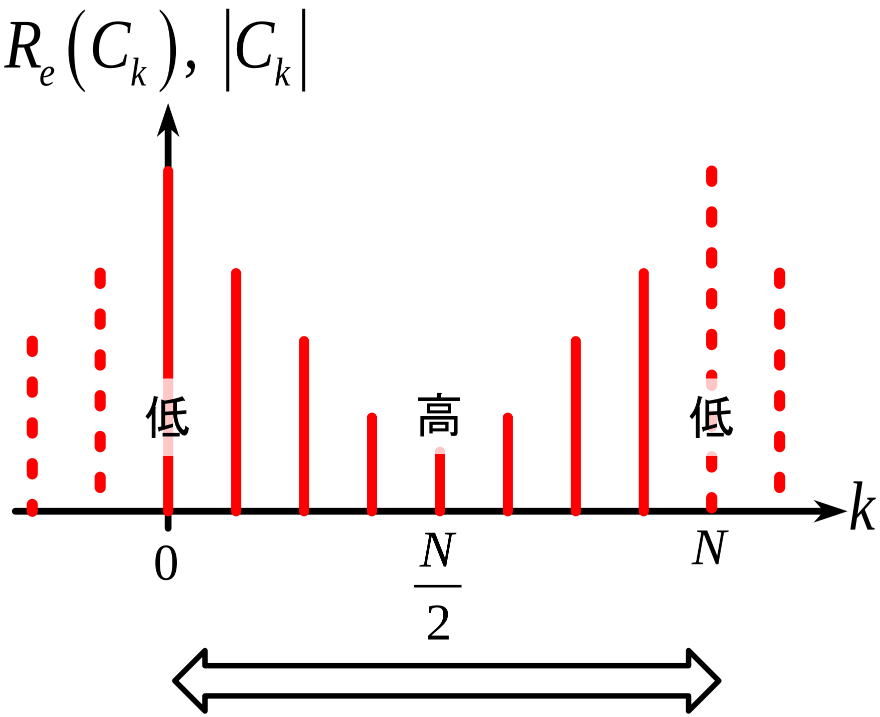
$k = 0$ で左右対称になる



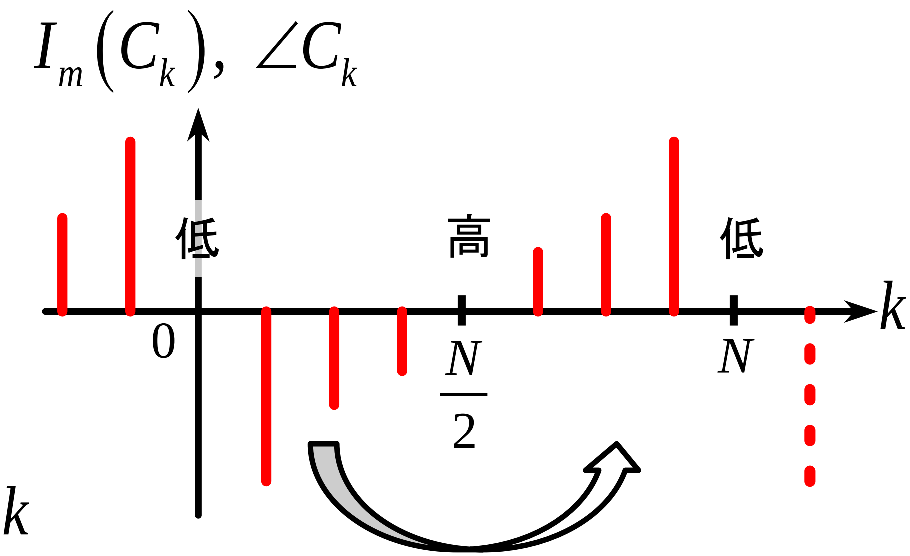
$k = 0$ で点対称になる

6. 離散フーリエ変換のスペクトル

- DFT係数
  - k は基本周波数 $f_0 = 1 / T$ の倍数を示している（$T = \tau N$ は全サンプリング時間と同じ）
  - フーリエ係数 C_k は N の周期で繰り返される



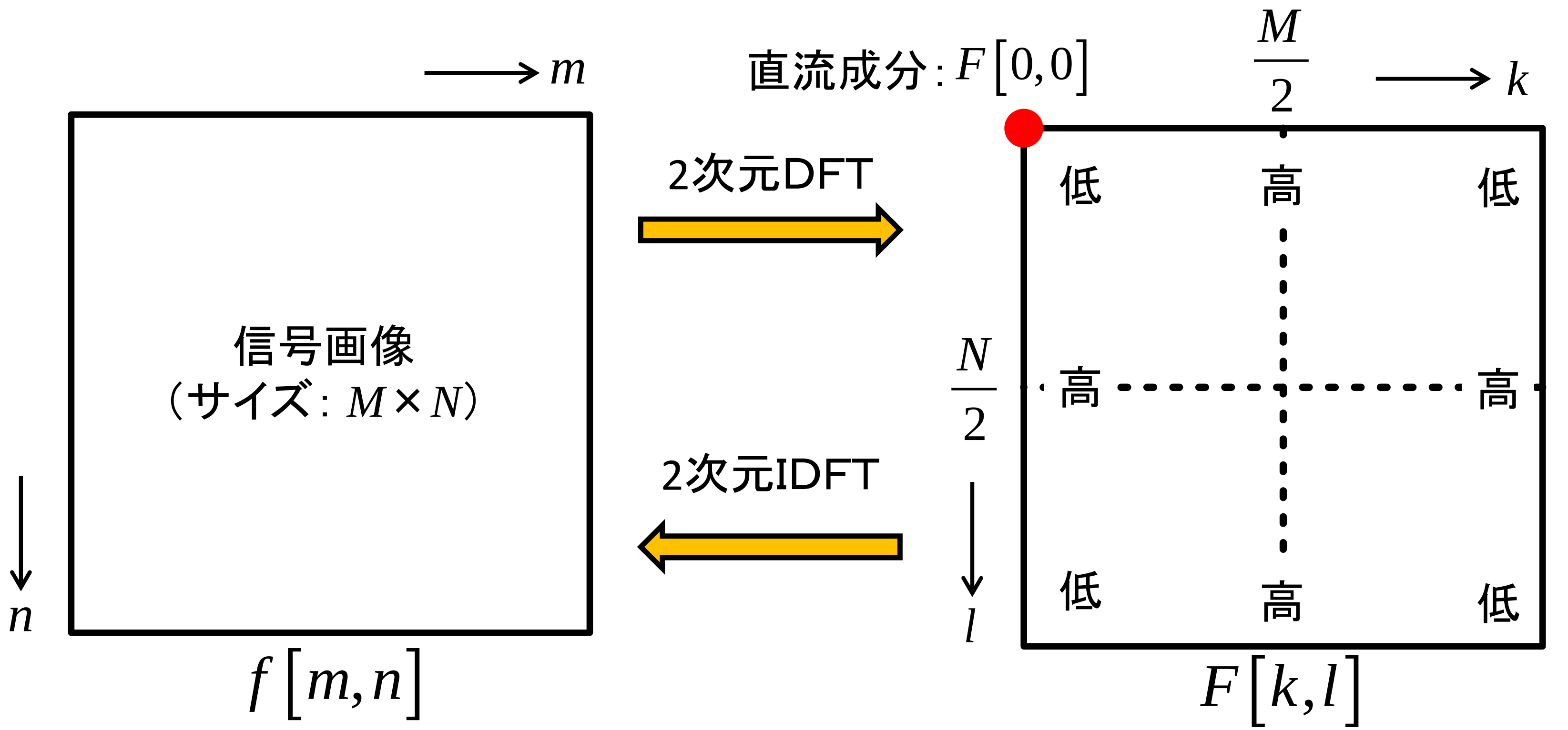
$k = N / 2$ で左右対称になる



$k = N / 2$ で点対称になる

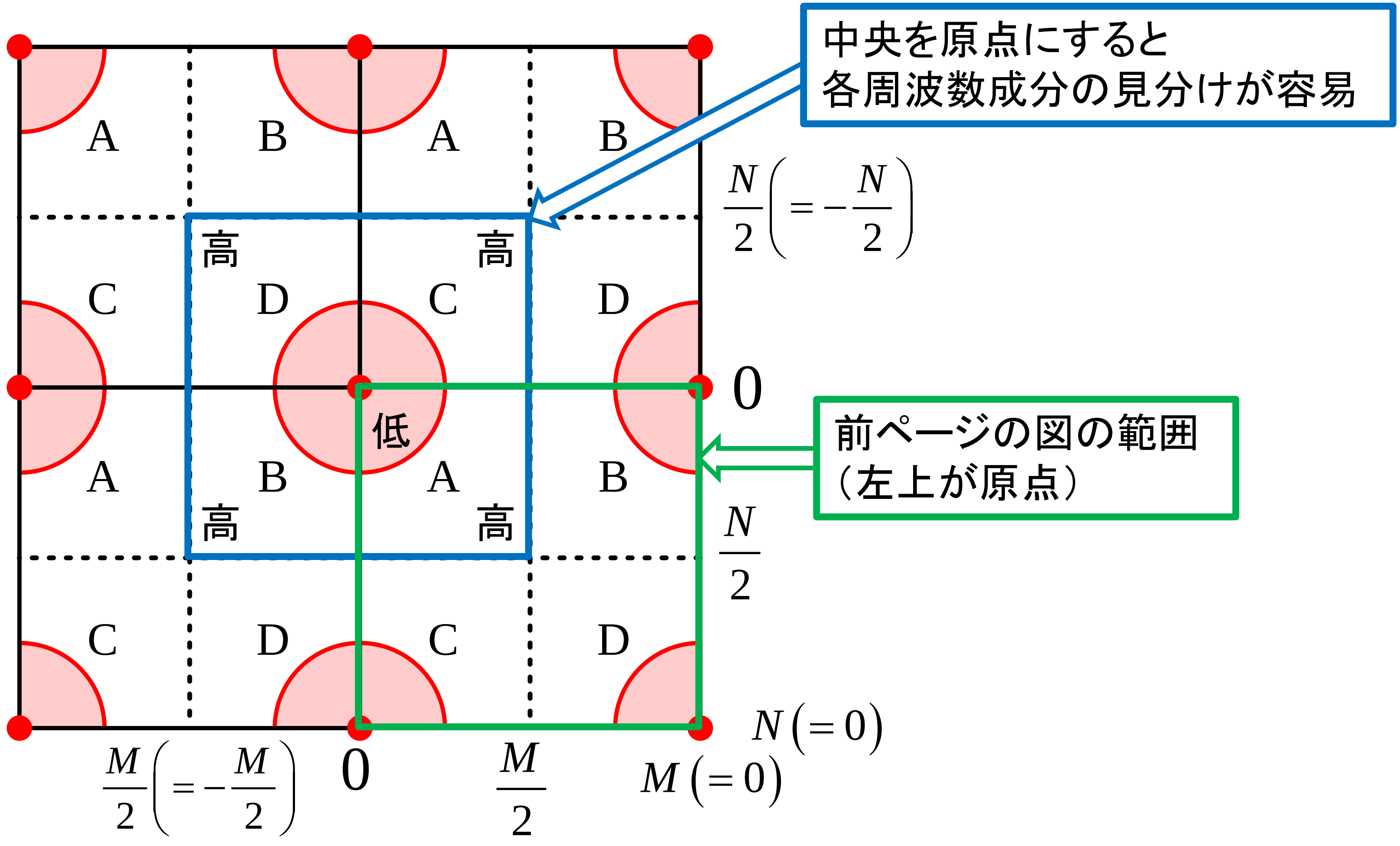
7. 2次元DFTのスペクトル

- DFT係数も2次元になる
  - 信号画像が $M \times N$ のとき、係数も $M \times N$
  - 信号画像の横方向のDFT結果が係数の横方向に、縦方向のDFT結果が係数の縦方向に現れる



8. 2次元DFTの周期性

- 同じものが上下左右に並ぶ
  - 1次元のDFTと同様の周期性が2次元的に生じる



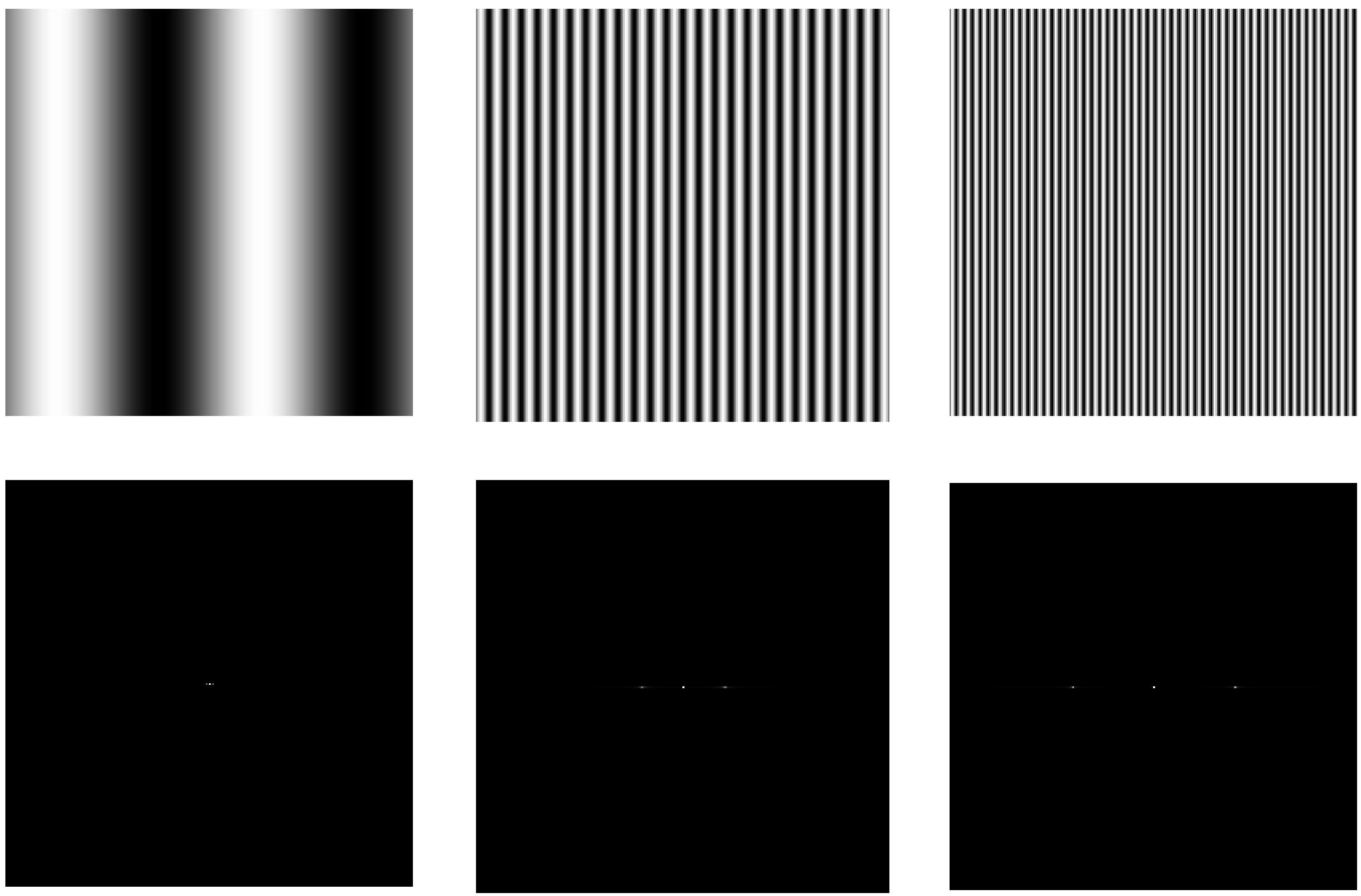
9. 2次元DFTの例(1)

- 縦線に対する応答
  - 横方向のみ交流成分があることに注意

入力画像

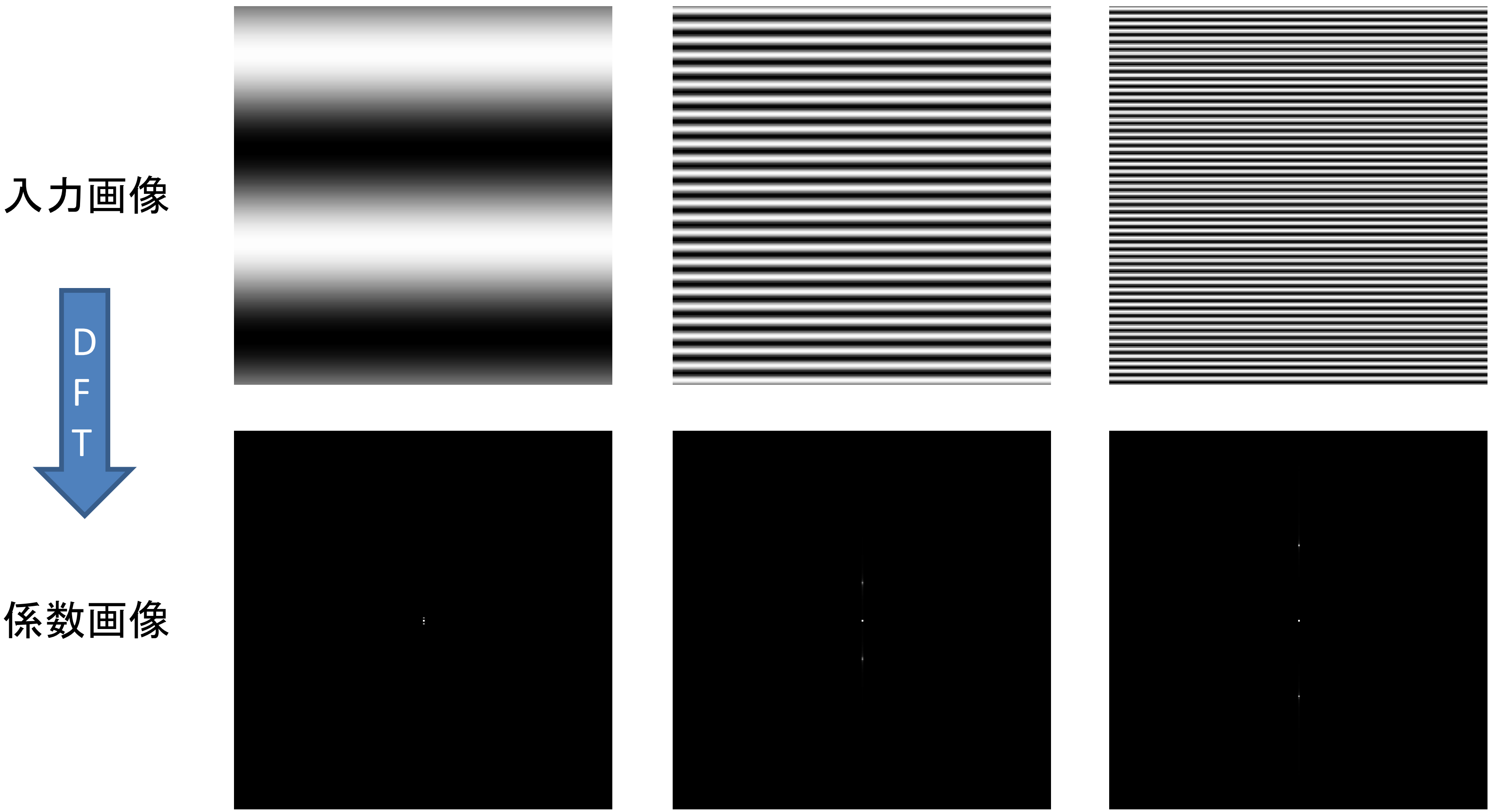
DFT

係数画像



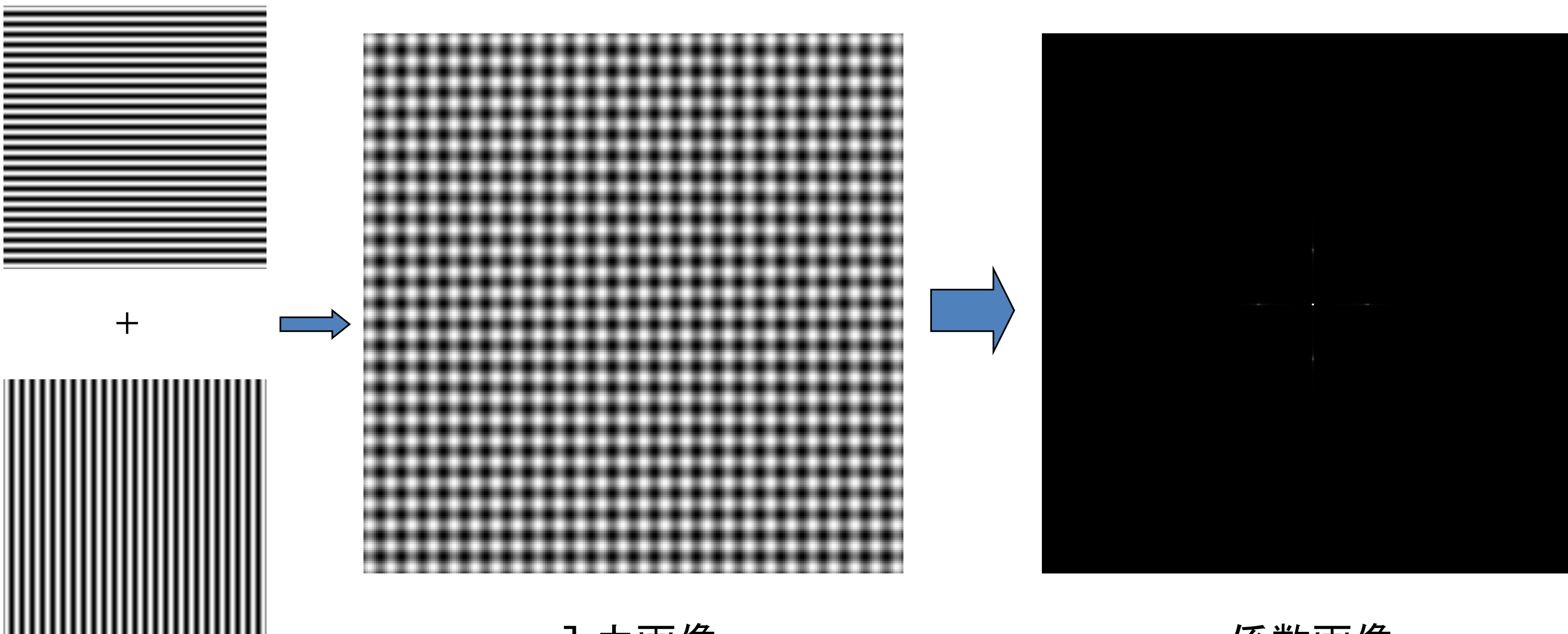
9. 2次元DFTの例(2)

- 横線に対する応答
  - 縦方向のみ交流成分があることに注意



9. 2次元DFTの例(3)

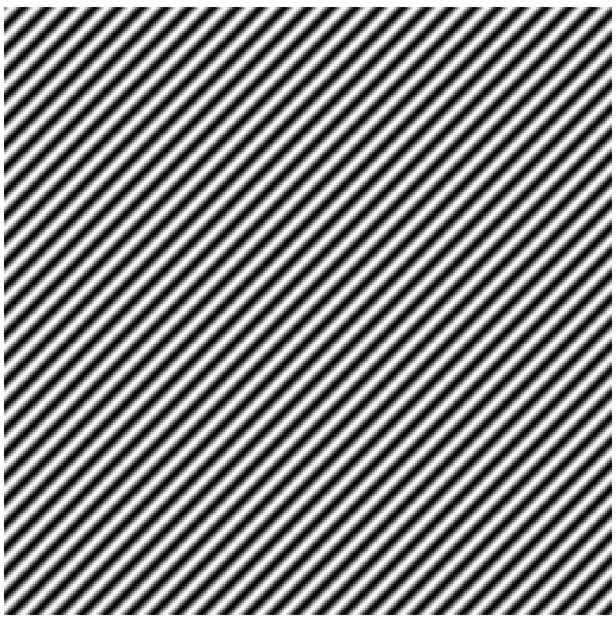
- 格子状の線に対する応答
  - 縦方向と横方向が独立して存在

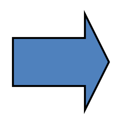


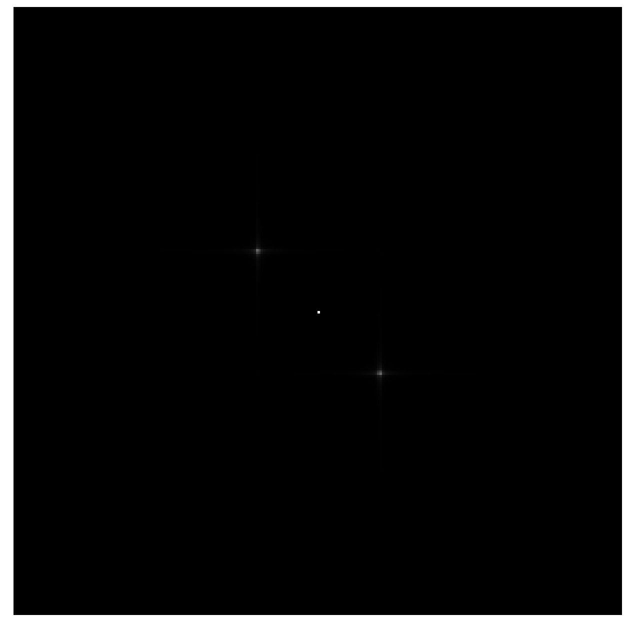
入力画像　　　係数画像

9. 2次元DFTの例(4)

- 斜め線に対する応答
  - 縦方向と横方向が融合





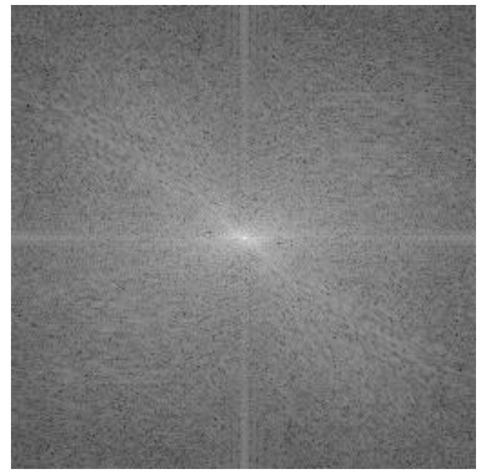


入力画像　　　係数画像

9. 2次元DFTの例(5)

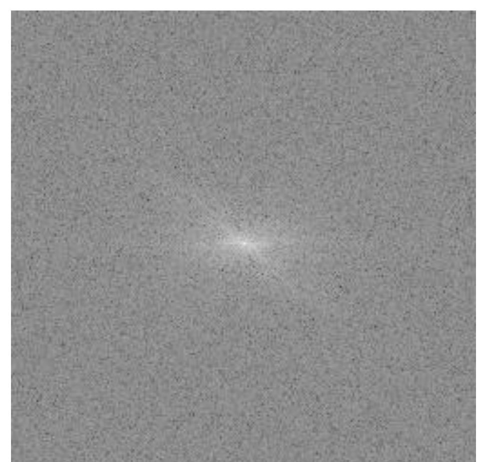
- 標準画像の例

ノイズなし



低周波成分が強い

ノイズ付加



高周波成分もかなり分布

課題（1）

- 課題22
  - DFTを行うプログラムを作成せよ
  - N個のサンプリングデータについてDFTを行い、フーリエ係数と振幅スペクトルを $k=0$〜$N-1$ の範囲で解答として提出
    - 1行目には、提出者のユーザID（例：j08400）だけを書き込んで改行し、2行目以降に以下の出力を書き込むこと
    - 出力は1係数あたり $k{:}R_e(C_k),\ I_m(C_k),\ |C_k|$ とし、1係数ごとに改行を行うこと（余分な空白・改行等を含めないこと）
    - 数値は、k は整数部3桁、区切り記号の ： と , は半角、k 以外の値は8桁（内、小数部4桁）の書式指定を行うこと
    - 2次元DFTへの拡張を考慮し、複素数入力でも正しく計算できるようにプログラミングすること
    - 複素数は適切なデータ構造で実現し、DFTに必要な複素数演算については自作すること
    - ファイル名の拡張子は、.txt とすること
    - In22-?.txtが解析を行う入力ファイルとなる
      - 最初に整数値として、Nが置かれている
      - 引き続いて、N個のデータが置かれている
      - 区切り記号は全て, （カンマ）

課題（2）

- 課題23（発展課題）
  - 2次元DFTを行うプログラムを作成せよ
  - 入力画像について2次元DFTを行い、以下の係数画像を解答画像として提出
    - 提供しているBMPファイルの読み書きプログラム(bmpfile.c)は、配列の添え字[0][0]が画像の左下の画素を表しているので、注意すること
      - BMP形式の仕様によるもの
    - 原点を中央とした振幅スペクトル画像とする
      - Mが偶数のときは、$k=-M/2$ ～ $k=0$ ～ $k=(M/2)-1$ となるように表示
      - Mが奇数のときは、$k=-(M-1)/2$ ～ $k=0$ ～ $k=(M-1)/2$ となるように表示
      - N,l についても同様
    - 以下の式に基づいて振幅スペクトルのパワー $P(x,y)$ を画素値とする
      - $|C_k| < 10^{-5}$ は 10^{-5} として計算すること
      - **画素値の範囲にも注意**し、最大値・最小値を超える値は最大値・最小値とすること

$$\boxed{P(x,y) = 1.5 \times 20 \times (5 + \log|C_k(x,y)|)}$$