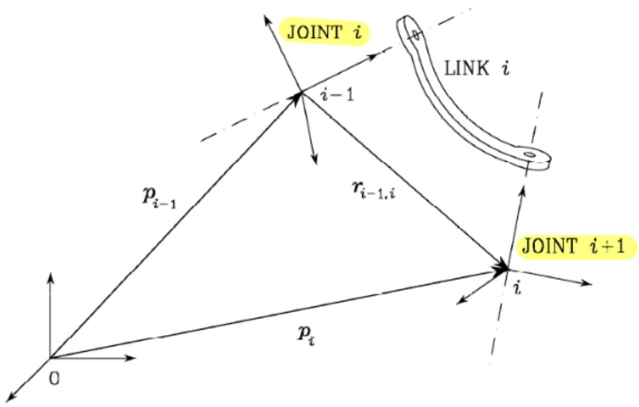
3.1.1 Costruzione dello Jacobiano geometrico

Per comprendere come “"costruire" lo Jacobiano geometrico, è utile determinare l'espressione della velocità (lineare ed angolare) di un singolo braccio.
Si consideri il generico braccio i, facente parte di una catena cinematica aperta, per la quale sono stati definiti i sistemi di riferimento secondo le convenzioni di DH.



Con riferimento alla figura sopra, possiamo affermare:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{p}}_i &= \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_{i-1,i} \triangleq \dot{\boldsymbol{r}}_{i-1,i}$ (per dim. vedi slide in italiano).

Nel caso di un **giunto prismatico** abbiamo:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = 0 \\ \boldsymbol{v}_{i-1,i} = \dot{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{z}_{i-1}\end{cases} \implies \begin{cases}\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1}\end{cases}$$

mentre per un **giunto rotoidale**:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \\ \boldsymbol{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i}\end{cases} \implies \begin{cases}\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \boldsymbol{z}_{i-1}\end{cases}$$

Richiamando la fig. 3.1 e (3.3), possiamo scomporre la matrice $\boldsymbol{J}$ come segue:

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_p(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_o(\boldsymbol{q})\end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{p,1} & \boldsymbol{J}_{p,2} & \cdots & \boldsymbol{J}_{p,n} \\ \boldsymbol{J}_{o,1} & \boldsymbol{J}_{o,1} & \cdots & \boldsymbol{J}_{o,n}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n\end{bmatrix}$$

dove $\boldsymbol{J}_{p,i}$, $\boldsymbol{J}_{o,i} \in \mathbb{R}^3$ sono le colonne di $\boldsymbol{J}_p$ e $\boldsymbol{J}_o$ (per semplicità di notazione abbiamo omesso la dipendenza da q). Da qui poi possiamo scrivere:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{p,i}\dot{q}_i \qquad , \qquad \boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{o,i}\dot{q}_i$$

e quindi: