

ROBOTICS

Lecture notes

Simone Carletti

A.Y. 2023/2024

Indice

1	Controllo	2
1.1	Attuatori elettrici	3
1.1.1	Derivazione modello	4
1.1.2	Amplificatore di potenza	5
1.1.3	Torque generator	5
1.1.4	Velocity generator	6
1.1.5	Torque generator <i>vs.</i> Velocity generator	6
1.2	Trasmissions <i>aka</i> motoriduttori	7
1.3	Controllo decentralizzato a giunti indipendenti	8
1.3.1	Controllo del singolo giunto	10
1.3.2	Struttura del controllo	12
1.3.3	Attuatori saturanti	16
1.3.4	Feedforward compensation	17
1.3.5	Computed torque feedforward control	17
1.4	Controllo centralizzato ai giunti	18
1.4.1	Controllo a dinamica inversa	19
1.4.2	Controllo PD con compensazione della gravità	22
1.5	Controllo nello spazio operativo	24
1.5.1	Controllo a Jacobiano inverso	25
1.5.2	Controllo a Jacobiano trasposto	26
1.5.3	Controllo PD con compensazione della gravità	26
1.5.4	Controllo a dinamica inversa	27
1.5.5	Considerazioni generali	28
1.6	Controllo dell'interazione	28
1.6.1	Cedevolezza passiva ed attiva	29
1.6.2	Strategie di controllo dell'interazione	29
1.6.3	Controllo di rigidità (<i>compliance control</i>)	29

Capitolo 1

Controllo

Il problema del controllo del moto di un manipolatore consiste nella **determinazione** dell'andamento temporale delle coppie generalizzate (**generalized torque**), che gli attuatori devono applicare ai giunti **affinché venga eseguito il compito assegnato**, rispettando specifiche sul transitorio e sul comportamento in regime permanente.

Lo schema di controllo può essere sviluppato:

1. Nello **spazio dei giunti**
2. Nello **spazio operativo**

tenendo conto che la descrizione del compito è solitamente elaborata nello spazio operativo, mentre le azioni di controllo esercitate dagli attuatori sono definite nello spazio dei giunti.

Joint space control

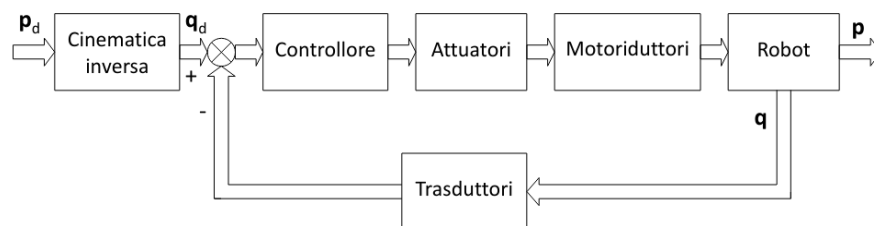


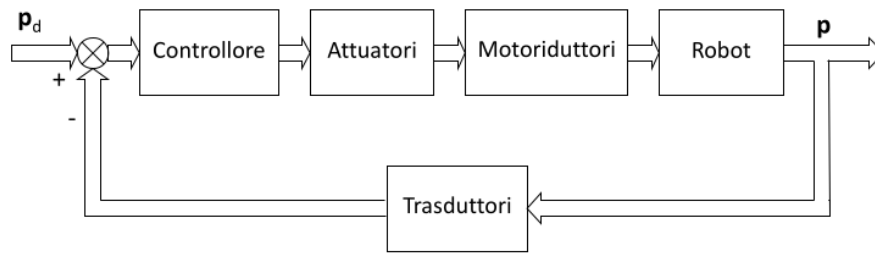
Figura 1.1: Schema generale di *joint space control*

L'azione di controllo fa sì che $q(t)$ inseguia il vettore $q_d(t)$ della traiettoria desiderata ai giunti, ricavato dalla cinematica inversa (che è comodamente disaccoppiata dal controllo).

Svantaggio: Non si ha né un feedback, né un controllo diretto sulla variabile dello spazio operativo $\mathbf{p} \Rightarrow$ dobbiamo avere una cinematica inversa perfetta (ma tolleranze di costruzione, elasticità ai giunti, giochi nei motoriduttori potrebbero causare imprecisioni).

Operational space control

Qui cerchiamo di fare inseguire un vettore \mathbf{p}_d definito nello spazio operativo. Con questa tecnica introduciamo una **complessità maggiore**, visto che la cinematica inversa è ora inclusa

Figura 1.2: Schema generale di *operational space control*

nel controllore. Il **vantaggio** però è quello di poter operare direttamente nello spazio operativo.

Anche se in primo luogo potrebbe non sembrare un vantaggio (la “misura” di \mathbf{p} è spesso ricavata indirettamente da misure ai giunti per mezzo della cinematica diretta \Rightarrow sembra come se si “ritorni” allo stesso svantaggio di imprecisione della cinematica inversa che c’era nel controllo sui giunti): questo controllo è però utile (ad esempio) come base per il controllo dell’interazione con l’ambiente.

Cosa vedremo

Vedremo che la presenza di **motoriduttori** con elevato rapporto di trasformazione tende a **linearizzare la dinamica** del manipolatore e quindi a disaccoppiare i giunti, grazie alla riduzione degli effetti non lineari \Rightarrow si giustifica in tal caso l’adozione di una strategia di **controllo decentralizzato**, a giunti indipendenti.

Questo però introduce uno svantaggio: i motoriduttori introducono possibili fenomeni di elasticità, gioco ed attriti non lineari, talora più “fastidiosi” degli effetti di accoppiamento fra i giunti. L’utilizzo di **motori ad azione diretta** elimina questi problemi ma mantiene rilevanti gli effetti non lineari e di accoppiamento fra i giunti, che non possono essere trascurati o considerati come disturbi \Rightarrow diventa opportuno in tal caso utilizzare una strategia di **controllo centralizzato**, che tenga conto della dinamica non lineare del manipolatore. **Svantaggio**: la legge di controllo è necessariamente non lineare e computazionalmente pesante.

1.1 Attuatori elettrici

Prima di introdurre i sistemi di controllo, iniziamo parlando di come poter modellare gli attuatori elettrici che andremmo ad utilizzare.

Gli attuatori maggiormente impiegati sono motori DC o brushless. Fortunatamente dal punto di vista matematico, un motore DC e un brushless dotato degli appositi sensori, possono essere modellati allo stesso modo. A seconda delle caratteristiche del regolatore inserito, il comportamento dell’attuatore può essere assimilato:

- Ad un generatore di velocità controllata (**velocity controlled**)
- Ad un generatore di coppia controllata (**torque controlled**)

In fig. 1.3 possiamo vedere il modello del motore che utilizzeremo.

Dove:

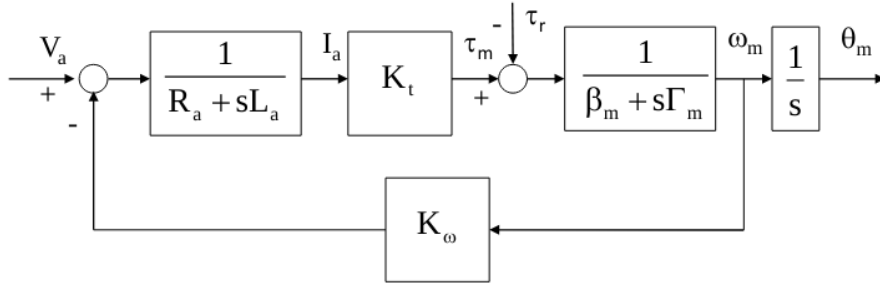


Figura 1.3: Modello del motore comandato in armatura

- ω_m e θ_m sono la velocità e la posizione angolare dell'albero motore
- V_a e I_a sono la tensione e la corrente del circuito di armatura
- τ_m è la coppia motrice, mentre τ_r è la coppia dovuta al carico

1.1.1 Derivazione modello

Partendo dal circuito illustrato in fig. 1.4 (il quale modella un motore DC), possiamo derivare il circuito mostrato in fig. 1.3.

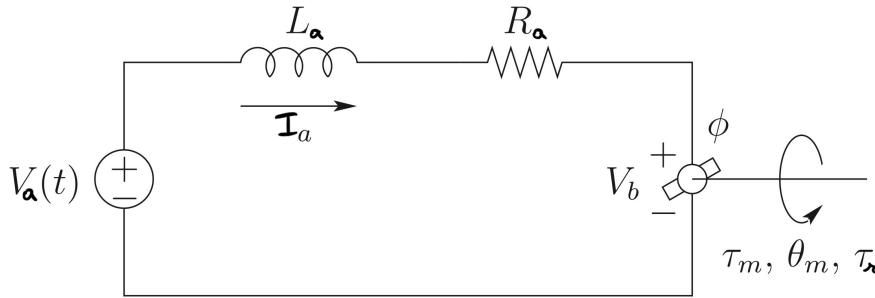


Figura 1.4: Modello circuitale del motore

Il bilancio elettrico dell'armatura è definito da:

$$L \frac{dI_a}{dt} + RI_a = V_a - V_b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} V_a &= (R_a + sL_a)I_a + V_g \\ V_g &= K_\omega \omega_m \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dove V_g è la **back-emf**, ovvero quella tensione generata dalla dal movimento delle coils del motore nel campo magnetico (e questa tensione è proporzionale alla velocità del conduttore nel campo, ovvero a ω_m). Questa tensione, tenderà ad opporsi al flusso di corrente nel conduttore.

Il bilancio meccanico è invece definito da:

$$\tau_m = (s\Gamma_m + \beta_m)\omega_m + \tau_r \quad (1.2)$$

$$\tau_m = K_i \Gamma_a \quad (1.3)$$

Dove Γ_m e β_m sono rispettivamente il momento d'inerzia e il coefficiente di attrito viscoso dell'albero motore.

Questo deriva da:

1. Ricordando da fisica 1: $F = ma \iff \tau = I\alpha$ dove I , α sono il momento di inerzia e l'accelerazione angolare
2. Considerando il motore: $\tau_m = \Gamma_m \dot{\omega}_m$
3. Ora aggiungiamo l'attrito viscoso (che come ricordiamo è proporzionale alla velocità):
 $\tau_m - \beta_m \omega_m = \Gamma_m \dot{\omega}_m$
4. Passiamo a Laplace: $\tau_m = \beta_m \omega_m + \Gamma_m s \omega_m \implies \tau_m = (s\Gamma_m + \beta_m) \omega_m \quad \square$

1.1.2 Amplificatore di potenza

Visto che solitamente V_a ha valori elevati, si tende ad utilizzare un **amplificatore di potenza** per poter comandare il motore con una tensione $V_c \ll V_a$: il nuovo circuito è illustrato in fig. 1.5.

G_v è il guadagno di tensione, mentre T_v è una costante di tempo trascurabile (poiché nell'ordine di 10-100 kHz), di conseguenza il blocco dell'amplificatore di potenza può essere assimilato al solo guadagno G_v .

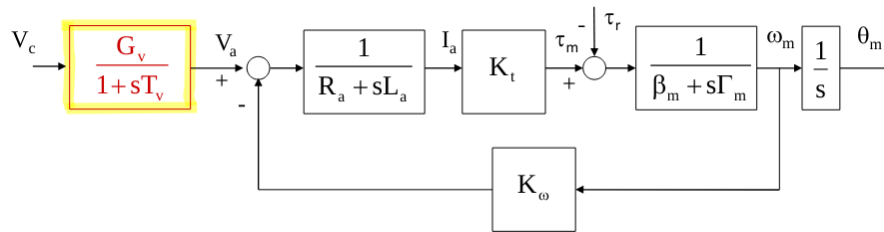


Figura 1.5: Modello motore con amplificatore di potenza

1.1.3 Torque generator

Possiamo ora completare il circuito aggiungendo una retroazione sulla corrente I_a e un compensatore che utilizzi tale feedback. Questo è illustrato in fig. 1.6.

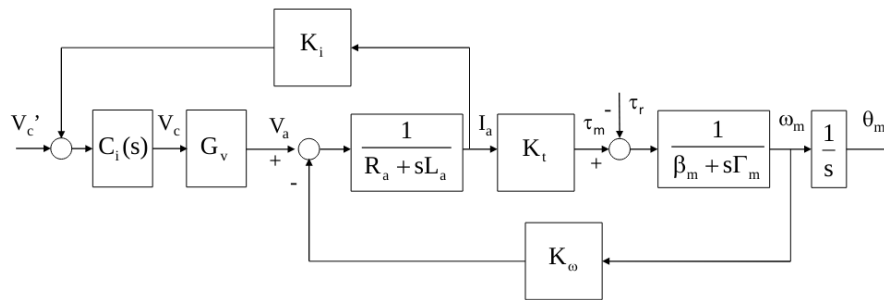


Figura 1.6: Circuito motore in modalità torque generator

In questa modalità, come accennato, il motore si comporta come un *torque-controlled generator*. Questo perchè, con $K_i \neq 0$, se si sceglie $K_i \gg R_a$ otteniamo il seguente steady-state:

$$\tau_m \approx \frac{K_t}{K_i} (V'_c - \frac{K_\omega}{G_v} \omega_m) \approx \frac{K_t}{K_i} V'_c$$

(supponendo $G_v \gg 1 \implies \frac{K_\omega}{G_v} \rightarrow 0$). Questo significa che possiamo impostare il torque del motore giocando sul voltaggio di controllo V'_c , che sarà dipendente solo da quest'ultimo (e non, e.g., dalla velocità angolare).

1.1.4 Velocity generator

Se invece rimuoviamo il feedback di corrente, ovvero $K_i = 0$, possiamo vedere come sia possibile impostare a piacimento la velocità del motore (invece della coppia, come in precedenza).

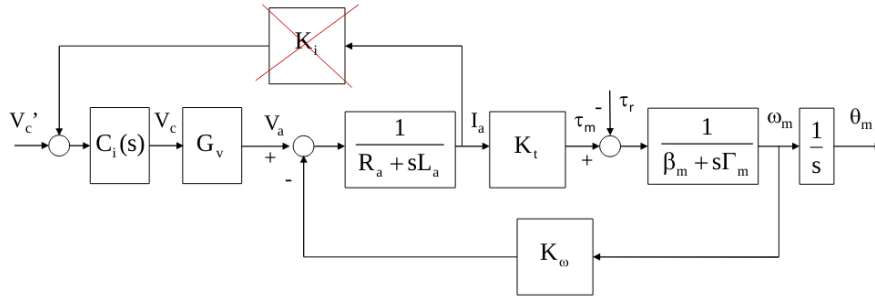


Figura 1.7: Circuito motore in modalità velocity generator

Analizzando questo caso, ricordandoci che il coefficiente di attrito viscoso meccanico β_m è trascurabile rispetto al coefficiente di attrito viscoso elettrico:

$$\beta_m \ll \frac{K_\omega K_t}{R_a}$$

Supponendo $C_i(s) = 1$ e $\tau_r = 0$, otteniamo:

$$\omega_m \approx \frac{G_v}{K_\omega} V_c'$$

Ovvero, in questo caso, possiamo impostare la velocità angolare a piacere.

1.1.5 Torque generator vs. Velocity generator

Quando ci conviene utilizzare uno invece che l'altro? In seguito vedremo che in tutte le applicazioni in cui è necessario ottenere un'elevata reiezione di coppie di disturbo, come nel caso del **controllo decentralizzato a giunti indipendenti**, è opportuno NON inserire l'anello di controllo in corrente ed utilizzare i motori come **generatori di velocità**.

Al contrario, in caso di strategie di **controllo centralizzate**, è consigliabile introdurre l'anello di retroazione in corrente ed utilizzare i motori come **generatori di coppie** (opportuni accorgimenti vengono adottati in entrambi i casi per limitare la corrente ed evitare danni ai dispositivi).

E' possibile vedere questa differenza calcolando le relazioni input/output fra ω_m e V_c' , τ_r . Da queste equazioni si può vedere che senza feedback di corrente (i.e. velocity-controlled generator) si ha una reiezione migliore della coppia di disturbo τ_r : i coefficienti legati a τ_r in questo caso sono molto minori del caso torque-controlled (\Rightarrow riduciamo di più gli effetti dei disturbi).

Semplificando:

$$\omega_m^{\text{velocity}} = \alpha_{\text{velocity}} V_c' + \lambda_{\text{velocity}} \tau_r \quad (1.4)$$

$$\omega_m^{\text{torque}} = \alpha_{\text{torque}} V_c' + \lambda_{\text{torque}} \tau_r \quad (1.5)$$

se il primo è per il caso velocity-controlled, mentre il secondo per il caso torque-controlled abbiamo che $\lambda_{\text{velocity}} \ll \lambda_{\text{torque}}$.

1.2 Trasmissions aka motoriduttori

Vediamo ora in dettaglio gli effetti che i motoriduttori utilizzati nel motore hanno sul sistema.

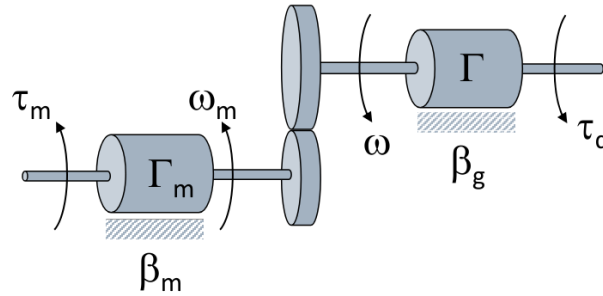


Figura 1.8: Motoriduttore

In generale, se indichiamo con k_r il rapporto di trasformazione (*gear-ratio*) di un motoriduttore ideale, abbiamo che:

$$\theta_m = k_r \theta$$

ove θ_m è la posizione angolare dell'albero motore e θ è la posizione angolare sul secondario (giunto). Dove k_r è definito come il rapporto fra i due *gears*:

$$k_r = \frac{r}{r_m} = \frac{\theta_m}{\theta} = \frac{\omega_m}{\omega}$$

Considerando attriti viscosi e coppie, possiamo scrivere le equazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} \tau_m &= \Gamma_m \dot{\omega}_m + \beta_m \omega_m + f_{r_m} \\ f_r &= \Gamma \dot{\omega} + \beta_g \omega + \tau_d \end{aligned}$$

(La forza f scambiata tra i due ingranaggi genera una coppia di reazione $f r_m$ per il moto all'asse del motore ed una coppia motrice $f r$ per il moto di rotazione del carico).

Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$\tau_m = \left(\Gamma_m + \frac{\Gamma}{k_r^2} \right) \dot{\omega}_m + \left(\beta_m + \frac{\beta_g}{k_r^2} \right) \omega_m + \frac{\tau_d}{k_r}$$

Notiamo che qualunque coppia applicata sul secondario è riportata sul primario ridotta del fattore k_r (e viceversa).

Poiché k_r è **elevato**, l'effetto di coppie di **disturbo** agenti sul secondario risulta **fortemente ridotto** sul primario. Se tali coppie dipendono non-linearmente da θ , allora la presenza di un alto fattore di riduzione tende a **linearizzare il sistema**.

Nel caso vettoriale (molteplici giunti), possiamo riscrivere alcune utili relazioni:

$$\mathbf{q}_m = \mathbf{K}_r \mathbf{q} \quad (1.6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\tau} \quad (1.7)$$

Dove quest'ultima deriva (intuitivamente) dal fatto che con l'aumentare del *gear-ratio* si diminuisce la velocità angolare ma si aumenta il torque (e viceversa).

1.3 Controllo decentralizzato a giunti indipendenti

Decentralized Joint Space Control

Nel controllo decentralizzato a giunti indipendenti **ogni** singolo **giunto** attuato è considerato come un **sottosistema SISO disaccoppiato e indipendente**, descritto da un modello dinamico approssimato. Gli **effetti di accoppiamento** non-lineari presenti nella dinamica propria del robot sono **considerati come disturbi**.

Lo schema di controllo complessivo è formato da n controllori (uno per ogni giunto), basati su reti di compensazione classiche, ciascuno agente in modo indipendente dagli altri.

Ricordiamo che il nostro obiettivo è quello di far eseguire una sequenza $\mathbf{q}(t)$ in modo che $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{q}_d(t)$.

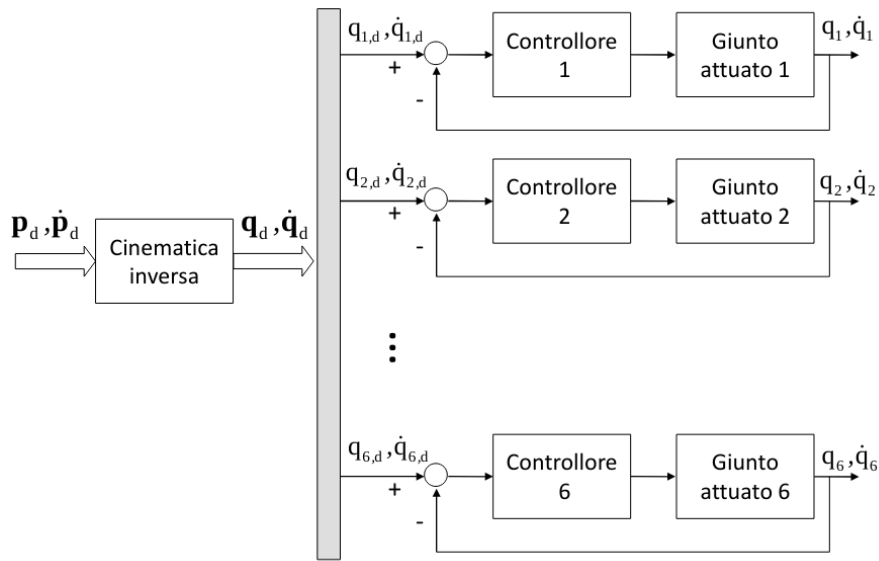


Figura 1.9: Schema generale del controllo a giunti indipendenti

Come accennato in precedenza, in questo caso andremo a controllare gli attuatori in velocità. È possibile dimostrare (vedi dopo) la seguente assunzione:

$$\mathbf{G}_v \mathbf{v}_c \approx \mathbf{K}_\omega \mathbf{K}_r \dot{\mathbf{q}}$$

L'importante di questa espressione è la proporzionalità fra \mathbf{G}_v e $\dot{\mathbf{q}}$ (velocità), che notiamo essere indipendente dai parametri del manipolatore. Inoltre questa proporzione è tanto più valida quanto velocità/accelerazioni sono piccole (per questa cosa viene in aiuto anche il gear-reduction ratio).

Dim.

Partendo dal modello dinamico $\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$ introduciamo in esso la frizione viscosa elettrica. Ovvero poniamo $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_{v, mech.} + \mathbf{F}_{v, electr.} = \mathbf{F}_{v, mech.} + \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{K}_\omega \mathbf{K}_r$.

Inoltre dal modello del motore: $\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_t \mathbf{I}_a \implies \boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{I}_a$. Sappiamo anche che $V = Ri \implies i = \frac{V}{R}$ e quindi, ricordando che $\mathbf{V}_c = \mathbf{G}_v \mathbf{V}_c'$, otteniamo $\mathbf{I}_a = \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{G}_v \mathbf{V}_c$. Unendo il tutto otteniamo $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_r \mathbf{K}_t \mathbf{R}_a^{-1} \mathbf{G}_v \mathbf{V}_c$.

Inserendo tutto nella formula del modello dinamico otteniamo:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_{v, mech.}\dot{q} + g(q) = K_r K_t R_a^{-1} G_v V_c - K_r K_t R_a^{-1} K_\omega K_r \dot{q}$$

Ovvero, raccogliendo i termini a destra (ricordando che originalmente quello era τ):

$$\tau = K_r K_t R_a^{-1} (G_v V_c - K_\omega K_r \dot{q}) \quad (1.8)$$

Quello che otteniamo fra le parentesi è l'espressione ipotizzata inizialmente. (la quasi uguaglianza viene dal fatto che $K_r \gg 1$, R_a molto piccolo, τ non troppo grosso).

□

Richiamando i capitoli precedenti, ricordiamo che il modello dinamico del manipolatore in assenza di forze scambiate con l'ambiente esterno è espresso da:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau = K_r \tau_m \quad (1.9)$$

L'ultima uguaglianza deriva dall'utilizzo dei motoriduttori (vedi (1.7)).

Per elaborare uno schema di controllo decentralizzato ai giunti è opportuno riportare le equazioni dinamiche a monte del motoriduttore (sul primario, i.e. lato motore):

$$K_r^{-1} B(q) K_r^{-1} \ddot{q}_m + K_r^{-1} C(q, \dot{q}) K_r^{-1} \dot{q}_m + K_r^{-1} F_v K_r^{-1} \dot{q} + K_r^{-1} g(q) = \tau_m$$

(Questa equazione è ottenuta semplicemente applicando (1.6) e (1.7) a (1.9)).

È possibile notare che $B(q)$ può essere decomposto in $B(q) = \bar{B} + \Delta B(q)$, ove \bar{B} è una matrice diagonale costante e $\Delta B(q)$ è una matrice configuration-dependent. Possiamo quindi riscrivere l'ultima equazione come:

$$\begin{aligned} (\bar{B} + \Delta B(q)) K_r^{-1} \ddot{q} + C(q, \dot{q}) K_r^{-1} \dot{q} + F_v K_r^{-1} \dot{q} + g(q) &= K_r \tau_m \\ \Downarrow \\ K_r^{-1} \bar{B} K_r^{-1} \ddot{q}_m + \underbrace{K_r^{-1} \Delta B(q) K_r^{-1} \ddot{q}_m + K_r^{-1} C(q, \dot{q}) K_r^{-1} \dot{q}_m + K_r^{-1} g(q)}_{\text{disturbances}} + K_r^{-1} F_v K_r^{-1} \dot{q}_m &= \tau_m \end{aligned}$$

E, come evidenziato nell'equazione, possiamo considerare gli effetti degli altri giunti su quello corrente come **disturbi**:

$$d = K_r^{-1} \Delta B(q) K_r^{-1} \ddot{q}_m + K_r^{-1} C(q, \dot{q}) K_r^{-1} \dot{q}_m + K_r^{-1} g(q) \quad (1.10)$$

Inoltre, visto che questi termini sono moltiplicati per K_r^{-1} , **più alto è il gear-ratio e meno questi termini influenzeranno il nostro sistema** ($d \downarrow$ quando $K_r \uparrow$), portandoci così ad un sistema sempre più lineare e disaccoppiato (ovviamente c'è un limite, visto che gear-ratio altissimi non produrrebbero praticamente alcune velocità).

Riassumendo:

$$K_r^{-1} \bar{B} K_r^{-1} \ddot{q}_m + F_m \dot{q}_m + d = \tau_m \quad (1.11)$$

dove $F_m \triangleq K_r^{-1} F_v K_r^{-1}$.

Detto questo, per la parte lineare possiamo ora far riferimento alla nota teoria del controllo LTI per sistemi SISO.

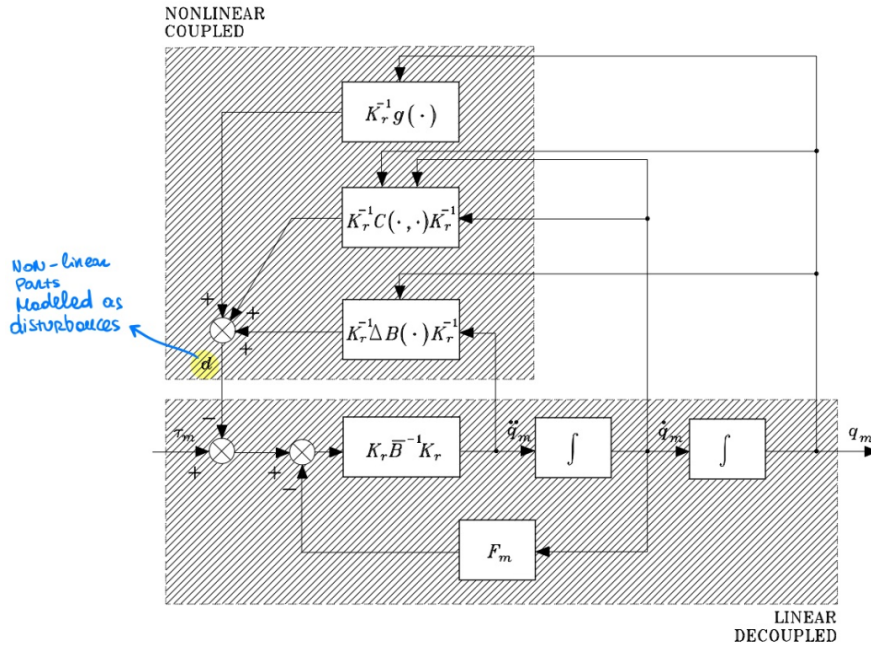


Figura 1.10: Circuito relativo a (1.11)

1.3.1 Controllo del singolo giunto

Partendo da (1.11) possiamo estrarre la relazione per un singolo giunto:

$$\Gamma \ddot{q}_m + \beta \dot{q}_m + d = \tau_m \quad (1.12)$$

dove Γ e β sono rispettivamente il momento di inerzia totale equivalente ed il coefficiente di attrito viscoso totale equivalente, definiti come segue ¹:

$$\Gamma = \frac{1}{\mathbf{K}_{ri}^2} \bar{\mathbf{B}}_{ii} \quad , \quad \beta = \frac{1}{\mathbf{K}_{ri}^2} \mathbf{F}_{mi},$$

Passando a Laplace (con condizioni iniziali nulle) otteniamo:

$$(s\Gamma + \beta)\omega_m(s) = \tau_m(s) - d(s) \quad (1.13)$$

considerando $\omega_m(s)$ come uscita, otteniamo il circuito di fig. 1.11 (da notare che questo è equivalente al modello mostrato in fig. 1.7 con $C_i(s) = 1$).

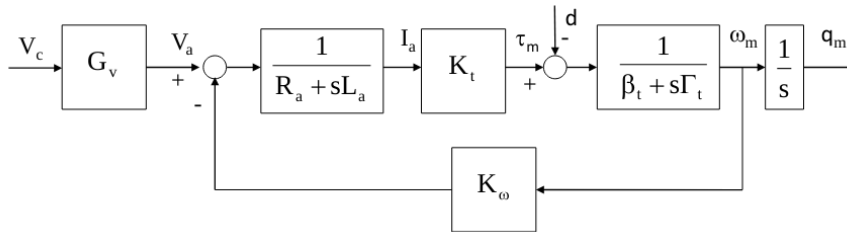


Figura 1.11: Schema a blocchi del singolo giunto

Cerchiamo ora di semplificare un po' questo modello. Possiamo iniziare supponendo L_a trascurabile, dato che le perdite ad essa associate sono solitamente molto piccole. Dall'equazione di equilibrio elettrico (1.1) possiamo quindi rimuovere L_a , e ottenere:

$$V_a - R_a I_a = K_\omega \omega_m \quad (1.14)$$

¹notando che $\mathbf{K}_{ri}^{-1} \alpha \mathbf{K}_{ri}^{-1} = (1/\mathbf{K}_{ri}^2) \alpha$

Allora, ricordando che $I_a = \tau_m K_t^{-1}$ e sostituendo τ_m con l'espressione (1.13) otteniamo

$$V_a - R_a K_t^{-1} \tau_m = K_\omega \omega_m \implies V_a - R_a K_t^{-1} ((s\Gamma + \beta)\omega_m + d) = K_\omega \omega_m$$

Riorganizzando i termini, e ignorando il termine relativo a β (visto che è trascurabile rispetto a ω_m), otteniamo:

$$\left(\frac{R_a \Gamma}{K_t K_\omega} s + 1 \right) \omega_m = \frac{1}{K_\omega} V_a - \frac{R_a}{K_t K_\omega} d$$

Da qui possiamo identificare 2 funzioni di trasferimento (a seconda di cosa consideriamo ingresso):

$$G_\omega(s) \triangleq \frac{\omega_m(s)}{V_a(s)} = \frac{1}{K_\omega(1 + sT)} \quad (1.15)$$

$$G_d(s) \triangleq \frac{\omega_m(s)}{d(s)} = -\frac{T}{\Gamma(1 + sT)} = -K_d G_\omega(s) \quad (1.16)$$

dove:

$$T = \frac{R_a \Gamma}{K_t K_\omega} \quad , \quad K_d = \frac{R_a}{K_t}$$

Da queste equazioni possiamo quindi passare allo schema a blocchi di fig. 1.12.

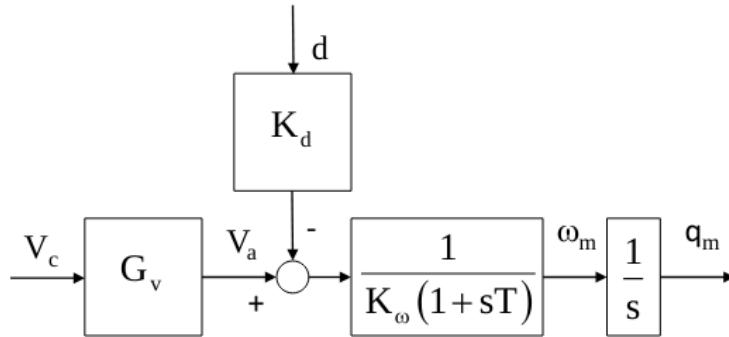
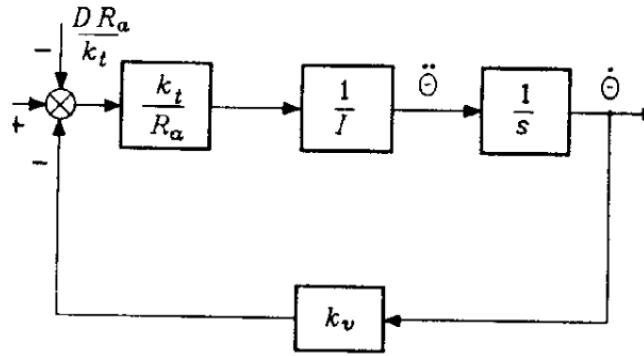


Figura 1.12: Schema a blocchi semplificato

Comparazione con le slide di Rizzo

Nelle slide è presente il seguente circuito. Anche se a prima vista potrebbe sembrare diverso è in realtà identico a quello di figura 1.12.



Ricordando la differente notazione: $I \equiv \Gamma$, $k_v \equiv K_\omega$, possiamo unire i 3 blocchi in uno unico. Partiamo dal forward path:

$$F(s) = \frac{k_t}{R_a s I}$$

Poi, incorporando il feedback, otteniamo

$$\frac{F(s)}{1 + F(s)k_v} = \frac{\frac{k_t}{R_a s I}}{1 + \frac{k_v k_t}{R_a s I}} = \frac{1}{k_v(1 + sT)}$$

Ovvero la stessa forma di quanto mostrato in fig. 1.12.

1.3.2 Struttura del controllo

In fig. 1.13 possiamo vedere lo schema di controllo generale, con retroazione su posizione, velocità e accelerazione (nota: per semplicità G_v è stato incluso nell'anello di controllo più interno).

In generale, il controllore viene progettato modo che si abbia un guadagno elevato nel blocco a monte del punto di ingresso del disturbo (per ottenere un elevato fattore di attenuazione) e in modo che ci sia un'azione integrale, affinché gli effetti della coppia di gravità vengano cancellati in regime permanente.

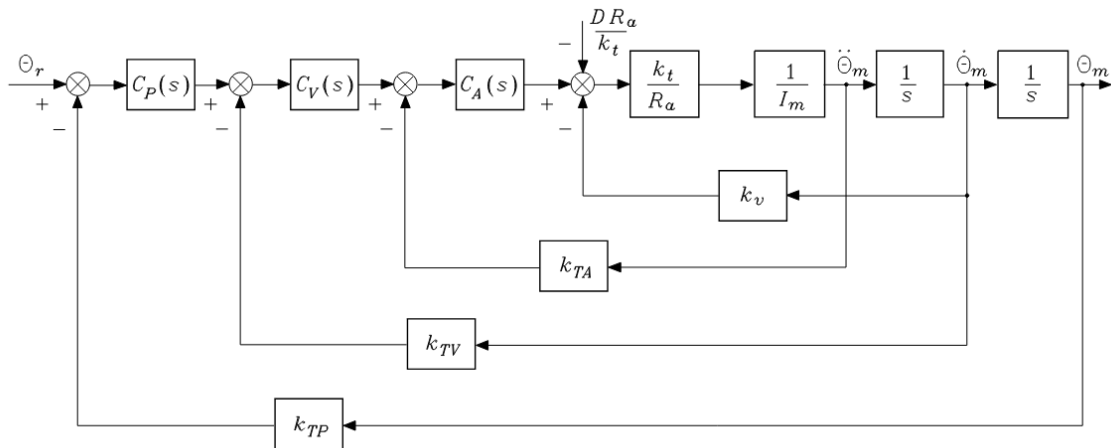


Figura 1.13: Schema generale del controllo

Queste richieste portano alla scelta di un **controllore PI (proporzionale-integrale)** della forma:

$$C(s) = K_p \frac{1 + sT_p}{s} \quad (1.17)$$

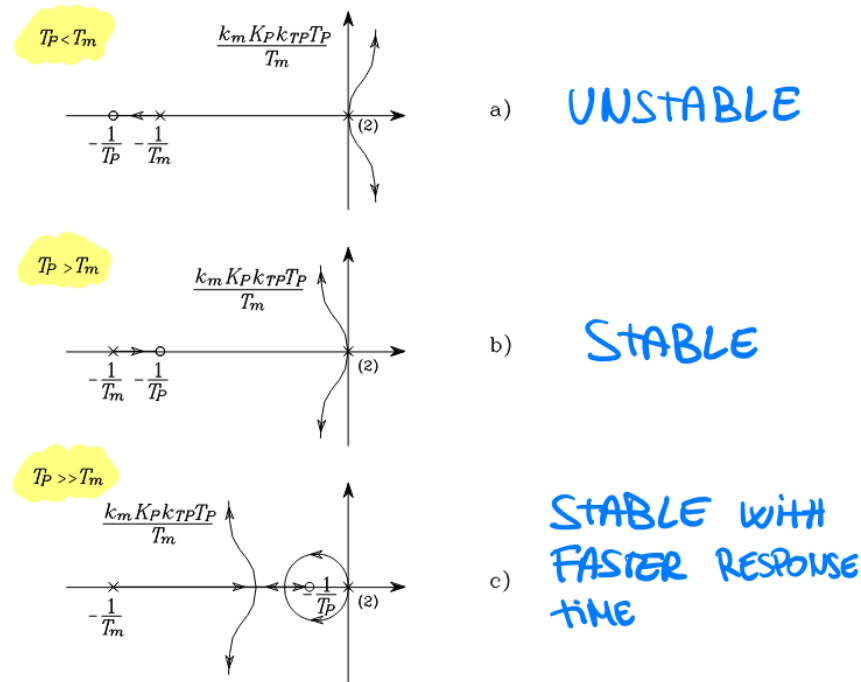


Figura 1.15: Root locus per $W(s)$ con solo retroazione sulla posizione

- Se $T_P \gg T$ si velocizza la risposta del sistema (diventano dominanti i poli complessi coniugati). Inoltre per elevati valori del guadagno K_P la pulsazione del polo reale di $W(s)$ tende a quella dello zero ($\tau \approx T_P$) e quindi il sistema risulta rappresentato in prima approssimazione dalla sola dinamica del II° ordine associata ai poli complessi coniugati
- La parte reale dei poli dominanti non può comunque essere inferiore a $-1/(2T)$

Applicando le regole dell'algebra dei blocchi, è possibile anche ricavare la funzione di trasferimento fra il disturbo D e l'uscita θ_m del sistema: $\Theta_m(s)/D(s)$.

Da questa t.f. è possibile vedere che **il fattore di attenuazione del disturbo vale $K_P K_{TP}$** . Valori troppo elevati di K_P possono però portare ad avere oscillazioni inaccettabili sull'uscita (lo smorzamento ζ risulta troppo piccolo).

Il tempo necessario per avere un'attenuazione significativa del disturbo è approssimabile come $T_R = \max\{T_P, \frac{1}{\zeta\omega_n}\}$

Retroazione di posizione e velocità

Per questo secondo caso consideriamo il seguente setup (qua $C_A(s) = 1$, $k_TA = 0$):

$$C_P(s) = K_P \quad C_V(s) = K_V \frac{1 + sT_V}{s}$$

Ovvero un'azione solo proporzionale per la posizione, mentre un'azione PI per la velocità.

Di nuovo, possiamo analizzare la stabilità del sistema tramite il root-locus della funzione di trasferimento in ciclo chiuso $W(s)$ e gli effetti dei disturbi con la funzione di trasferimento $\Theta_m(s)/D(s)$.

$$W(s) = \frac{K_P K_V}{K_\omega s^2 + K_V K_{TV} s + K_{TP} K_P K_V}$$

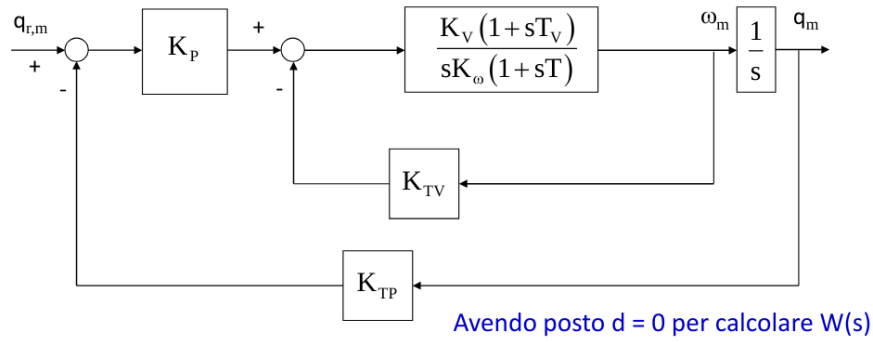


Figura 1.16: Circuito con retroazione su posizione e velocità

Saltando nuovamente la forma esplicita di $\Theta_m(s)/D(s)$, possiamo dire che in questo caso il **fattore di attenuazione del disturbo** è dato dal prodotto $K_P K_{TV} K_V$, ormai completamente definito, avendo imposto K_P e K_V per imporre i poli desiderati.

Aumentando il guadagno del feedback di posizione K_P , è possibile confinare i poli dell'anello chiuso in una regione del piano complesso con grandi valori assoluti della parte reale. Poi, la posizione effettiva può essere stabilita mediante una scelta adeguata di K_V .

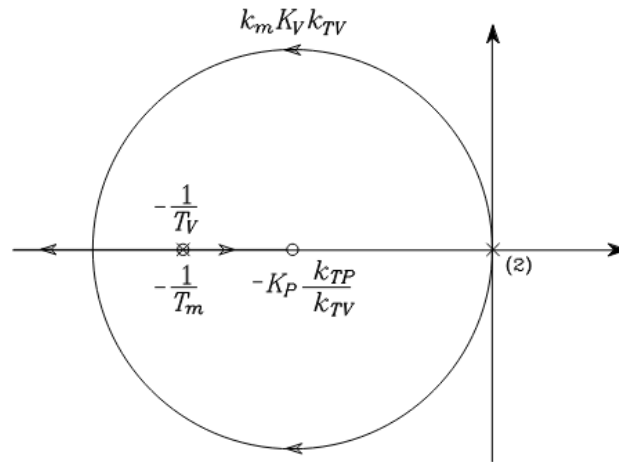


Figura 1.17: Root-locus con retroazione di velocità e posizione

Retroazione di posizione, velocità ed accelerazione

Per concludere vediamo il controllo con tutti e 3 i feedback:

$$C_P(s) = K_P \quad C_V(s) = K_V \quad C_A(s) = K_A \frac{1 + sT_A}{s}$$

Avendo a disposizione un parametro libero in più, sarebbe possibile in questo caso:

- Assegnare la dinamica desiderata al sistema ad anello chiuso
- Imporre il fattore di attenuazione del disturbo

Problema: La misura dell'**accelerazione** però **non è solitamente disponibile**. Per implementare uno schema di controllo comprendente la retroazione dell'accelerazione risulterebbe necessario ricavarla indirettamente dalle misure disponibili.

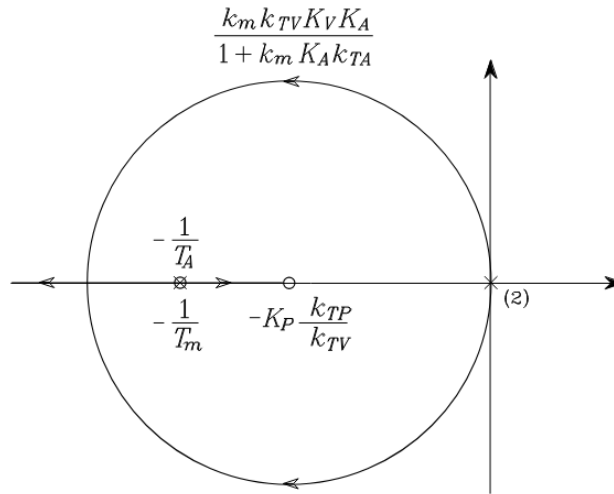


Figura 1.18: Root-locus con retroazione di accelerazione, velocità e posizione

Avendo a disposizione la misura diretta della velocità, è possibile **stimare l'accelerazione** per mezzo di un filtro del primo ordine (vedi fig. 1.19), purché avente banda sufficientemente ampia. Scegliendo questa larghezza di banda sufficientemente ampia, gli effetti dovuti ai ritardi di misurazione non sono un problema, e quindi è possibile prendere l'uscita del filtro di accelerazione come quantità per il feedback. Problemi possono comunque incorrere a causa del rumore presente sul segnale di accelerazione così ottenuto.

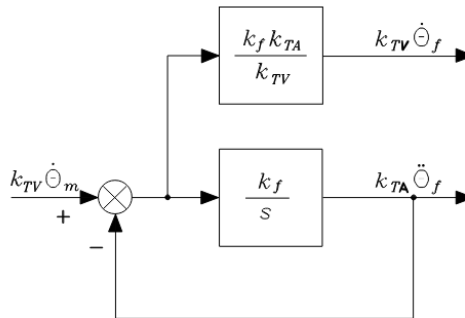


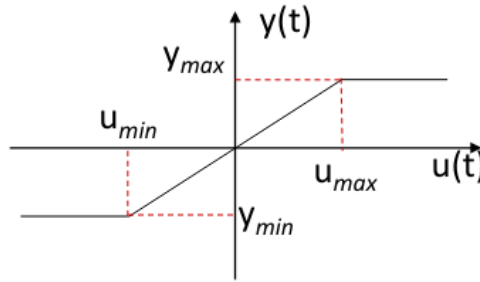
Figura 1.19: Filtro del I° ordine per la stima dell'accelerazione

1.3.3 Attuatori saturanti

In un'applicazione reale, il comportamento del sistema può allontanarsi da quello del suo modello teorico a causa di dinamiche “parassite” o non lineari, non incluse nella descrizione considerata, con evidenti conseguenze sulle prestazioni del controllo. Una di queste è ad esempio la presenza di attuatori saturanti.

Quest'ultima però può essere modellata semplicemente aggiungendo sul ramo diretto dell'anello di controllo un blocco che rappresenta la seguente relazione:

$$\begin{cases} y_{max} & , u(t) > u_{max} \\ ku(t) & , u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \\ y_{min} & , u(t) < u_{min} \end{cases}$$



L'inserimento di blocchi di **saturazione** è solitamente legato a **necessità di sicurezza e di salvaguardia** del sistema.

Quando le grandezze coinvolte (correnti, tensioni) raggiungono il valore massimo consentito ed entra in azione il blocco di saturazione, l'inseguimento della traiettoria non è più realizzato con le caratteristiche e l'accuratezza prevista. In caso di movimenti PTP non è inusuale che vengano raggiunte situazioni di saturazione: in tal caso infatti è solitamente prioritario raggiungere il più rapidamente possibile la configurazione finale desiderata, anziché rispettare la traiettoria prefissata in ogni istante.

1.3.4 Feedforward compensation

Quando è richiesto l'inseguimento di traiettorie con elevati valori di velocità e di accelerazione, è possibile ridurre l'errore di inseguimento utilizzando i valori del riferimento in velocità (ed in accelerazione) per calcolare termini di compensazione in avanti (feedforward compensation), da sommare all'azione del controllore posto sul ramo diretto.

Si noti che, in generale, calcolare derivate non è possibile (perché dovremmo "predire il futuro"). In questo caso però essendo la traiettoria nota a priori, non ci sono problemi.

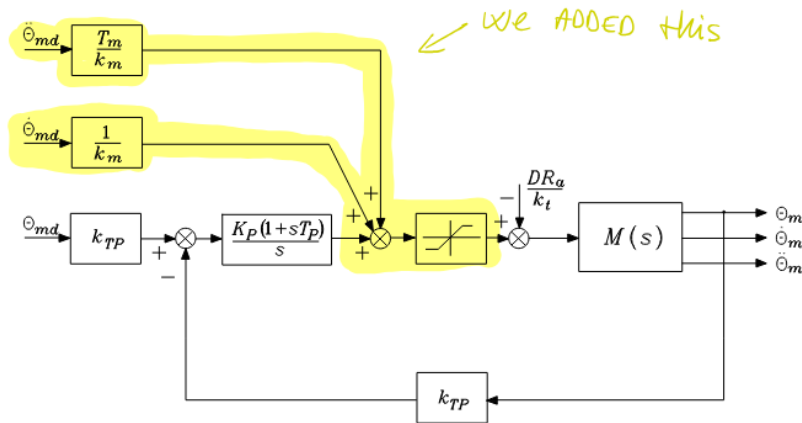


Figura 1.20: Schema a blocchi del controllo con feedback di posizione e feedforward compensation decentralizzato

1.3.5 Computed torque feedforward control

È possibile aggiungere un altro blocco di feedforward. Richiamando (1.11):

$$K_r^{-1} \bar{B} K_r^{-1} \ddot{q}_m + F_m \dot{q}_m + d = \tau_m$$

se vogliamo reiettare perfettamente il disturbo d potremmo provare a calcolarci in anticipo il valore di d , per poi sommarlo nel lato destro dell'equazione.

$$\mathbf{K}_r^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{K}_r^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{F}_m \dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau}_m + \mathbf{d}$$

Ponendo $\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_d$ ci basta usare (1.10) per calcolarci \mathbf{d} (offline).

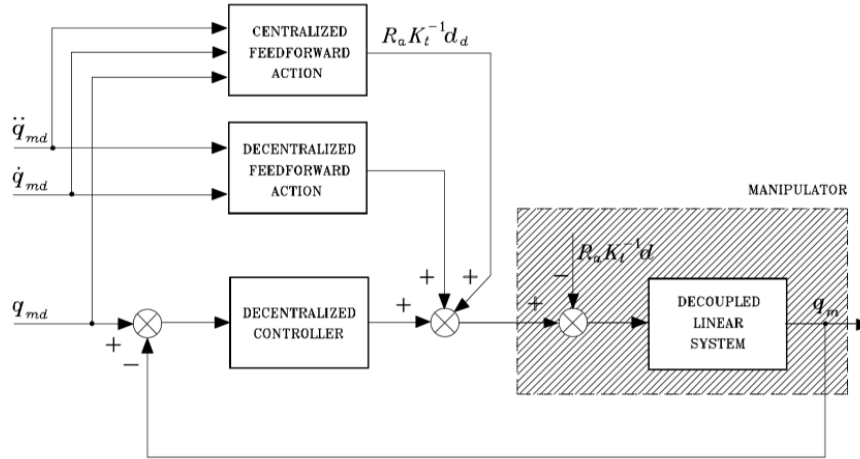


Figura 1.21: Circuit with computed torque feedforward control

1.4 Controllo centralizzato ai giunti

Centralized Joint Space Control

In alcuni casi il **controllo decentralizzato** a giunti indipendenti **può risultare inadeguato**. Questo accade, ad esempio, quando:

- sono **richieste velocità operative elevate** \implies le coppie di disturbo strutturato dipendenti dalla velocità (di Coriolis, centrifughe) influiscono pesantemente sul comportamento dei giunti
- i **motori sono ad azione diretta** \implies a causa dell'assenza dei motoriduttori ($\mathbf{K}_r = \mathbf{I}$) non si beneficia di alcuna riduzione degli effetti non lineari e di accoppiamento fra i giunti

In tali casi gli effetti delle coppie di disturbo \mathbf{d} possono determinare errori troppo elevati di inseguimento della traiettoria.

Poiché in questi casi non è possibile ridurre sufficientemente gli effetti indotti dalle coppie di disturbo \mathbf{d} , diventa conveniente cercare di eliminare direttamente tali coppie, ricorrendo ad una **strategia di controllo contenente termini non lineari di compensazione**.

Si parla di **controllo centralizzato** perché la coppia applicata a ciascun giunto risulta funzione anche delle variabili di posizione e velocità degli altri giunti, a differenza di quanto accade nel controllo a giunti indipendenti.

Negli schemi di controllo centralizzato il manipolatore è considerato come un **unico sistema MIMO**, con n ingressi (le coppie applicate ai giunti) e n uscite (le posizioni dei giunti) che interagiscono fra loro secondo relazioni non lineari. La **legge di controllo** centralizzato dovrà tenere conto del modello dinamico del manipolatore ed essere **non-lineare** (visto che il modello è non lineare).

Idea principale

Il principale approccio di controllo centralizzato è detto a **dinamica inversa**, perché la coppia di comando è ricavata dall'equazione dinamica del manipolatore a partire dalla conoscenza delle variabili giunto (posizioni e velocità), ovvero dalla risoluzione del problema della dinamica inversa.

Ovvero usando il modello dinamico:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = \tau$$

ci calcoliamo τ , che poi andiamo a fornire ai nostri attuatori, che quindi in questo caso saranno in modalità **torque-controlled**.

Ora usiamo attuatori torque-controlled

Come accennato in questo caso abbiamo bisogno di generatori di coppia.

Richiamando la forma semplificata del bilancio elettrico di armatura (1.14), possiamo scrivere:

$$I_a = R_a^{-1}(V_a - K_\omega\omega_m) = R_a^{-1}(G_vV_c - K_\omega\omega_m)$$

Dove l'ultima uguaglianza deriva dall'amplificatore di potenza: $V_a = G_vV_c$. Di conseguenza, ricordando (sempre al modello del motore: vedi fig. 1.3), che $\tau_m = K_tI_a$, possiamo scrivere:

$$\tau = K_r\tau_m = K_rK_tI_a = K_rK_tR_a^{-1}(G_vV_c - K_\omega\omega_m)$$

che si può notare essere uguale a (1.8).

Visto che però vogliamo avere un motore torque-controlled (come possiamo ricordare) è necessario inserire la corrente in retroazione. Per magia (forse vedi sezione 1.1.3) diciamo che il termine con K_ω diventa trascurabile e quindi:

$$I_a = R_a^{-1}(G_vV_c) = G_iV_c$$

Di conseguenza

$$\tau = K_rK_tG_iV_c = u$$

ove u è il vettore di comandi disponibili per il controllo.

1.4.1 Controllo a dinamica inversa

L'approccio di controllo a dinamica inversa è basato sull'idea di ottenere una **linearizzazione della dinamica del sistema per mezzo di una retroazione non lineare** degli stati tale da condurre ad un sistema lineare e disaccoppiato rispetto ad un nuovo vettore di accelerazioni di comando da progettare. Ovvero utilizziamo la tecnica nota come **feedback linearization**.

Prima di cominciare, per comodità definiamo il modello della dinamica come:

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = \tau = u \quad (1.18)$$

dove:

$$n(q, \dot{q}) \triangleq C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q)$$

Supponendo di poter calcolare esattamente $B(q)$ e $n(q, \dot{q})$, definiamo il nostro comando di controllo come

$$u = B(q)\ddot{y} + n(q, \dot{q})$$

questo perchè, così facendo, riusciamo ad ottenere una **linearizzazione esatta del sistema**:

$$\begin{aligned}
 B(q)\ddot{q} + \cancel{n(q, \dot{q})} &= \tau = u = B(q)y + \cancel{n(q, \dot{q})} \\
 &\Updownarrow \\
 \cancel{B(q)}\ddot{q} &= \cancel{B(q)}y \\
 &\Updownarrow \\
 \ddot{q} &= y
 \end{aligned}$$

Il sistema risultante è costituito da n doppi integratori: la i-esima componente y_i del nuovo comando influenza solo il comportamento della i-esima coordinata giunto q_i , che risulta indipendente dal moto degli altri giunti.

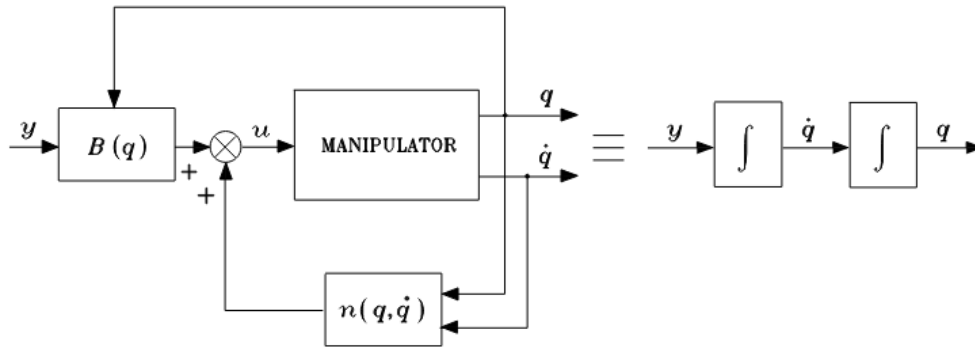


Figura 1.22: Feedback linearization

La scelta più semplice per il nuovo comando y è data da una legge di **controllo di tipo PD**:

$$y = -K_P q - K_D \dot{q} + r$$

che quindi, sostituendo a $\ddot{q} = y$, otteniamo il seguente sistema di equazioni del secondo ordine:

$$\ddot{q} + K_D \dot{q} + K_P q = r \quad (1.19)$$

asintoticamente stabile se le matrici K_P e K_D sono definite positive. Scegliendo in particolare K_P e K_D diagonali, il sistema rimane disaccoppiato e ad ogni variabile giunto viene assegnata la dinamica corrispondente ai guadagni imposti con:

$$K_P = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \dots, \omega_{nn}^2\} \quad K_D = \text{diag}\{2\zeta\omega_{n1}, \dots, 2\zeta\omega_{nn}\}$$

Il vettore di riferimento r è definito a partire dalla traiettoria desiderata, pianificata ai giunti, come:

$$r \triangleq \ddot{q}_d + K_D \dot{q}_d + K_P q_d$$

Possiamo ora analizzare la dinamica dell'errore di inseguimento, sostituendo la definizione di r a (1.19):

$$(\ddot{q}_d - \ddot{q}) + K_D(\dot{q}_d - \dot{q}) + K_P(q_d - q) = 0 \implies \ddot{e} + K_D \dot{e} + K_P e = 0$$

se $e(0) = 0$ e $\dot{e}(0) = 0$, l'errore converge a 0 con velocità e caratteristiche determinate da K_P e K_D .

Il sistema risultante è mostrato in fig. 1.23, dove notiamo due anelli: quello più interno è l'anello di linearizzazione, mentre quello esterno è il controllo (ora lineare) del nostro sistema.

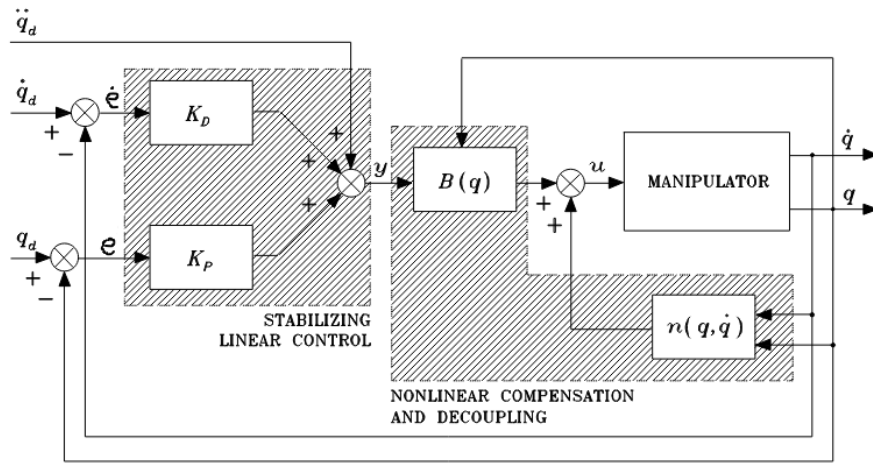


Figura 1.23: Schema a blocchi del controllo a dinamica inversa nello spazio dei giunti

Problemi

L'ipotesi di linearizzazione esatta presuppone la capacità di calcolare *online* le matrici $\mathbf{B}(\mathbf{q})$ e $\mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ in modo esatto. Nella pratica però questo non è sempre possibile. Per compensare a questi errori è necessario utilizzare altre tecniche, ad esempio algoritmi di controllo robusto.

Supponiamo di avere solo delle approssimazioni delle matrici, che chiameremo $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})$ e $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\mathbf{y} + \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\mathbf{y} + \mathbf{B}^{-1}(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{y} + (\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}} - \mathbf{I})\mathbf{y} + \mathbf{B}^{-1}(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n}) \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y}) \\
 &\Downarrow \\
 \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P\mathbf{e} &= \boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y})
 \end{aligned}$$

where

$$\boldsymbol{\eta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{y}) \triangleq (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{B}})\mathbf{y} - \mathbf{B}^{-1}(\hat{\mathbf{n}} - \mathbf{n})$$

Il sistema ottenuto non è più lineare e disaccoppiato.

Per fortuna, **nella pratica**, il metodo della dinamica inversa **risulta abbastanza robusto** anche nel caso di linearizzazione approssimata, per cui viene usato sia senza ulteriori modifiche, sia con l'aggiunta di un termine robustificante.

Vari schemi visti come dinamica inversa

Tra gli schemi a dinamica inversa con linearizzazione approssimata, che non prevedono l'inserimento di termini robustificanti, possiamo includere:

- **Controllo a giunti indipendenti:** questo approccio precedentemente analizzato può essere considerato come un caso particolare di controllo a dinamica inversa con linearizzazione approssimata, ottenuto ponendo:

$$\hat{B}(q) = \bar{B} \quad , \quad \hat{n}(q, \dot{q}) = 0$$

- **Metodo della coppia calcolata** (o controllo a dinamica inversa in feedforward): già visto in sezione 1.3.5
- **Controllo PD con compensazione della gravità**, che vediamo nella prossima sezione; questo controllo può essere visto come dinamica inversa ponendo:

$$\hat{B}(q) = I \quad , \quad \hat{n}(q, \dot{q}) = g(q)$$

1.4.2 Controllo PD con compensazione della gravità

Nel caso in cui si voglia assegnare al manipolatore una **postura di equilibrio costante** (anziché una traiettoria completa), è possibile realizzare un controllore tale da garantire la stabilità asintotica globale di tale postura.

Facendo riferimento a (1.14): $B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = u$, definiamo il controllo come:

$$u \triangleq g(q) + K_P(q_d - q) - K_D\dot{q}$$

Così facendo, sostituendo u a (1.14), otteniamo:

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} + g(q) = g(q) + K_P(q_d - q) - K_D\dot{q} \quad (1.20)$$

Ovvero si riescono a cancellare gli effetti della gravità.

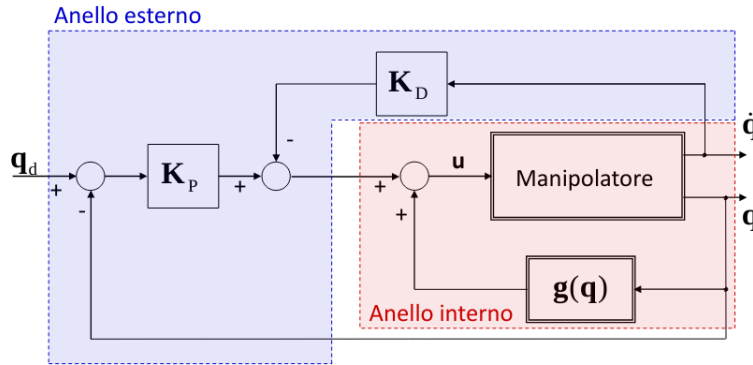


Figura 1.24: Controllo PD con compensazione della gravità

(notare che nel circuito non è presente \dot{q}_d : questo poichè essendo q_d costante la sua derivata è nulla)

Analizzando il sistema risultante da (1.20), possiamo vedere che l'unico punto di equilibrio è dato da $q = q_d$:

$$\begin{aligned} x \text{ punto di equilibrio} &\iff \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{pmatrix} = 0 & (1.21) \\ &\iff B(q)\overset{0}{\ddot{q}} + C(q, \dot{q})\overset{0}{\dot{q}} + F_v\overset{0}{\dot{q}} = K_P(q_d - q) - K_D\overset{0}{\dot{q}} \\ &\iff 0 = K_P(q_d - q) \\ &\iff q = q_d \end{aligned}$$

Ovvero proprio quello che volevamo: stabilità in una postura costante \mathbf{q}_d .

Per fare un esempio, immagina il robot in figura 1.25: il motori dovranno applicare delle coppie (i quali valori dipendono dal valore di \mathbf{u} mostrato prima) per far rimanere il braccio in questa posizione statica.

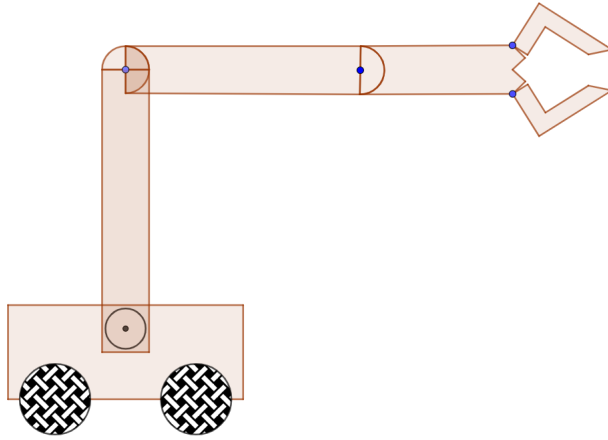


Figura 1.25: Esempio di compensazione gravità

Dimostrazione stabilità

Per dimostrare le caratteristiche di stabilità del punto di equilibrio corrispondente alla postura desiderata, è possibile applicare il **metodo diretto di Lyapunov**. Definiamo $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{q}_d - \mathbf{q}$ e consideriamo come funzione di Lyapunov:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e} > 0 \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$$

Dove possiamo interpretare il primo termine come l'energia cinetica del sistema ed il secondo come l'energia potenziale immagazzinata grazie alle rigidità equivalenti date dai guadagni delle retroazioni delle posizioni ai giunti.

In questa funzione è stato scelto come stato del sistema il vettore $(\mathbf{e}, \dot{\mathbf{q}})^T$ che, dal punto di vista dell'equilibrio, è equivalente a quanto usato in (1.21):

$$\gamma \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{q}_d \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \implies \dot{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{e}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d^0 \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$$

Ora passiamo allo studio del segno di \dot{V} lungo le traiettorie del sistema (come è richiesto dal metodo di Lyapunov). Derivando (ricordando che $\dot{\mathbf{q}}_d = \mathbf{0}$, essendo \mathbf{q}_d costante), otteniamo:

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_P \mathbf{e}$$

procediamo sostituendo a $B(q)\ddot{q}$ la forma di esso fornita da (1.20) (ricordando la definizione di $e \triangleq q_d - q$):

$$\begin{aligned} B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F_v\dot{q} &= K_P e - K_D \dot{q} \\ \Updownarrow \\ B(q)\ddot{q} &= -C(q, \dot{q})\dot{q} - F_v\dot{q} + K_P e - K_D \dot{q} \\ \Downarrow \\ \dot{V} &= \dot{q}^T (-C(q, \dot{q})\dot{q} - F_v\dot{q} + K_P e - K_D \dot{q}) + \frac{1}{2} \dot{q}^T \dot{B}(q)\dot{q} - \dot{q}^T K_P e \end{aligned}$$

Raccogliendo i termini rimasti si ha

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})) \dot{q} - \dot{q}^T (F_v + K_D) \dot{q}$$

dove la cancellazione a 0 è fatta grazie alla *null-property* di quella differenza (si può dimostrare dalle equazioni della dinamica).

Allora:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T (F_v + K_D) \dot{q}$$

che risulta essere **semi-definita negativa**. È solo **semi-definita** poichè è presente solo \dot{q} : $\dot{V} = 0$ per $\dot{q} = 0$ ma per qualsiasi e .

Possiamo però ora osservare che comunque $\dot{V} = 0 \iff \dot{q} = 0$, e di conseguenza anche $\ddot{q} = 0$. Ricordando da (1.21) che $(\dot{q}, \ddot{q}) = (0, 0)$ è la condizione di equilibrio, possiamo dire che \dot{V} si annulla solo per l'unico punto di equilibrio del sistema. Dal teorema di *La Salle-Krasowski* risulta pertanto globalmente asintoticamente stabile, come desiderato.

Thm. *La Salle-Krasowski*

Supponi che un sistema dinamico sia rappresentato da $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, dove \mathbf{x} è il vettore dello stato e $f(0) = 0$.

Se prendiamo una funzione V tale che:

$$\begin{cases} V(\mathbf{x}) > 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases}$$

(i.e. V positiva e \dot{V} semi-definita negativa), **ma**

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0$$

allora abbiamo che l'**origine** $\mathbf{x} = 0$ è **asintoticamente stabile**. ◇

1.5 Controllo nello spazio operativo

La **traiettoria** desiderata da applicare al manipolatore è **spesso pianificata nello spazio operativo**, mentre gli schemi di controllo analizzati finora sono tutti definiti nello spazio dei giunti. **In tutti questi casi**, il riferimento di posizione ai giunti deve essere determinato

a partire da quello cartesiano per mezzo della **cinematica inversa** (i riferimenti di velocità ed accelerazione sono spesso determinati per differenziazione numerica, dato che la cinematica inversa delle velocità e soprattutto delle accelerazioni può risultare troppo gravosa).

Una diversa soluzione al problema può essere trovata definendo lo **schema di controllo direttamente nello spazio operativo** anziché in quello dei giunti.

Poiché le variabili disponibili (misurabili) sono quelle ai giunti (posizione ed eventualmente la velocità), è necessario in questo caso utilizzare la **cinematica diretta** per determinare le variabili cartesiane da confrontare con il riferimento desiderato. Si definiscono così anelli di controllo in retroazione in cui **l'inversione cinematica della traiettoria è sostituita dalla trasformazione delle coordinate**, racchiusa nell'anello di controllo stesso.

Tutti gli **schemi di controllo realizzati nello spazio operativo sono "pesanti"** dal punto di vista computazionale: questo può portare a serie limitazioni sulla scelta del passo di campionamento e conseguentemente a degradate prestazioni del controllo. Nonostante questo, a differenza degli schemi di controllo nello spazio dei giunti (che sono solitamente idonei ad ottenere un buon controllo del moto), gli schemi di controllo nello spazio operativo sono basilari nel caso in cui il manipolatore sia in **contatto con l'ambiente esterno** ed il compito da svolgere richieda (anche) il **controllo delle forze scambiate**.

Gli schemi di controllo nello spazio operativo sono tipicamente riconducibili a due schemi generali:

- **Controllo a Jacobiano inverso**
- **Controllo a Jacobiano trasposto**

In entrambi i casi nel ramo in retroazione viene inserita la cinematica diretta per la determinazione di \mathbf{p} a partire da \mathbf{q} ; il vettore \mathbf{p} viene poi confrontato con il vettore \mathbf{p}_d della traiettoria desiderata pianificata, costruendo così il vettore dell'errore (o deviazione) nello spazio operativo: $\Delta \mathbf{p} \triangleq \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$ (dal punto di vista della notazione il Siciliano usa \mathbf{x} : $\mathbf{p} \equiv \mathbf{x}$).

1.5.1 Controllo a Jacobiano inverso

Negli schemi a Jacobiano inverso si presuppone che la deviazione $\Delta \mathbf{p}$ sia sufficientemente piccola e che quindi la corrispondente deviazione nello spazio dei giunti possa essere calcolata attraverso lo Jacobiano inverso come:

$$\Delta \mathbf{q} = \mathbf{J}_a^{-1}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{p}$$

Il sistema risultante può essere visto come un sistema meccanico con una molla generalizzata a n dimensioni nello spazio dei giunti, la cui rigidità è data dalla matrice dei guadagni. Il ruolo di tale sistema è portare la deviazione $\Delta \mathbf{q}$ a zero. Se la matrice dei guadagni è diagonale, la molla generalizzata corrisponde a n elementi elastici indipendenti, uno per ogni giunto.

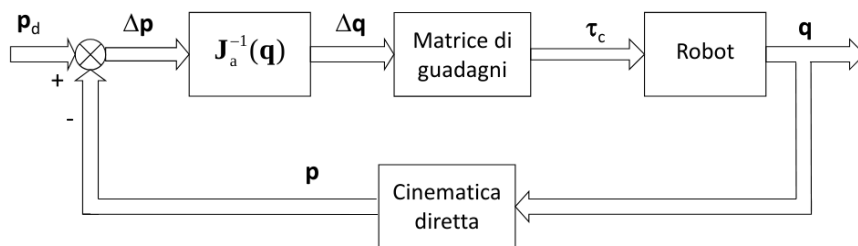


Figura 1.26: Schema a Jacobiano inverso

1.5.2 Controllo a Jacobiano trasposto

Negli schemi a Jacobiano trasposto l'errore $\Delta \mathbf{p}$ nello spazio operativo viene direttamente moltiplicato per una matrice di guadagni. L'uscita di tale blocco può essere considerata come la forza elastica generata da una molla generalizzata, la cui funzione è di ridurre o cancellare la deviazione $\Delta \mathbf{p}$. In altre parole la forza risultante guida la punta operativa lungo una direzione tale ridurre $\Delta \mathbf{p}$.

La forza elastica definita nello spazio operativo viene quindi trasformata nella corrispondente coppia da applicare ai giunti per mezzo dello Jacobiano trasposto (secondo le relazioni della statica viste).

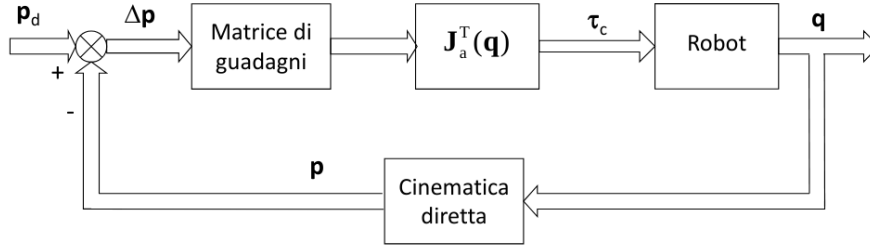


Figura 1.27: Schema a Jacobiano trasposto

Per questi schemi generali (sia questo che quello a Jacobiano inverso) **non è né garantita la stabilità asintotica** né l'accuratezza di inseguimento della traiettoria, che dovranno essere assicurate dall'impiego di specifiche leggi di controllo, inserite in schemi dell'uno o dell'altro tipo.

1.5.3 Controllo PD con compensazione della gravità

Vediamo nuovamente una tecnica di controllo PD con compensazione della gravità, questa volta però nello spazio operativo.

Sia \mathbf{p}_d la posa costante desiderata per la punta operativa; **obiettivo** del controllo è **garantire** che **asintoticamente** si abbia $\mathbf{p}_d - \mathbf{p} = \mathbf{0}$.

È possibile dimostrare che tale richiesta è soddisfatta dalla legge di controllo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})(\mathbf{K}_P(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}) - \mathbf{K}_D\mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \quad (1.22)$$

costituita da una compensazione non lineare delle coppie di gravità, definita nello spazio dei giunti, e da una legge lineare di tipo PD definita nello spazio operativo.

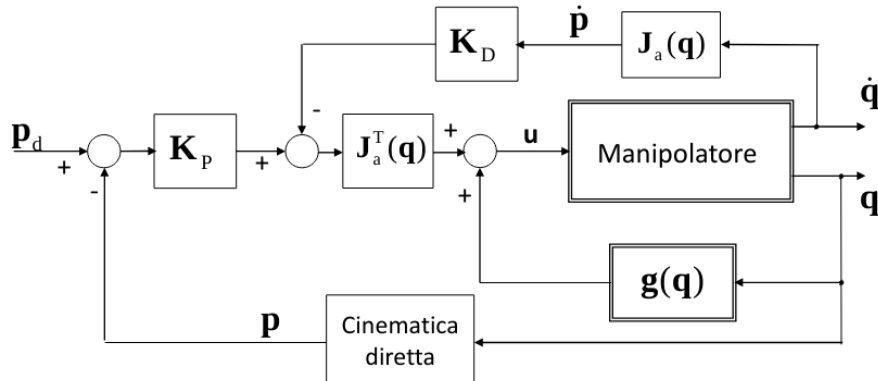


Figura 1.28: Schema circuitale controllo PD con compensazione della gravità

Dimostrazione stabilità

Con passaggi simili a quelli seguiti nello spazio dei giunti, si può dimostrare che il sistema raggiunge una postura di equilibrio asintoticamente stabile. Partiamo nuovamente selezionando una funzione di Lyapunov (di nuovo $e \triangleq p_d - p$):

$$V(\dot{q}, e) = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q} + \frac{1}{2} e^T K_P e > 0 \quad \forall \dot{q}, e \neq 0$$

e analizziamone il segno:

$$\dot{V} = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{B}(q) \dot{q} + \dot{e}^T K_P e = \dot{q}^T B(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{B}(q) \dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_P e$$

dove abbiamo usato il fatto che $\dot{x}_d = 0$, $\dot{x} = J_A(q) \dot{q} \implies \dot{e} = \dot{x}_d - \dot{x} = -J_A(q) \dot{q}$. Raccogliendo, richiamando di nuovo la *null-property* di $\dot{B}(q) - 2C(q, \dot{q})$ e sostituendo a $B(q) \ddot{q}$ la forma di esso fornito da (1.20), otteniamo:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T F \dot{q} + \dot{q}^T (u - g(q) - J_A^T(q) K_P e)$$

dove, se sostituiamo ad u la forma del controllo di (1.22), otteniamo:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T F \dot{q} - \dot{q}^T J_A^T(q) K_D J_A(q) \dot{q}$$

e possiamo vedere che, per qualsiasi traiettoria del sistema, $\dot{V} \leq 0$ e $\dot{V} = 0 \iff \dot{q} = 0$ (allora, per La Salle-Krasowski abbiamo stabilità asintotica). Seguendo lo stesso ragionamento per la stabilità visto in sezione 1.5.3, possiamo dire che il sistema raggiunge la postura di equilibrio asintoticamente stabile corrispondente a:

$$J_A^T(q) K_P e = 0$$

e, sotto l'assunzione che lo Jacobiano abbia *full-rank*, risulta

$$e = 0$$

ovvero ciò che volevamo.

Possiamo infine notare che questo schema (analogo a quello visto nello spazio dei giunti), è un esempio di controllo nello spazio operativo a Jacobiano trasposto.

1.5.4 Controllo a dinamica inversa

In sezione 1.4.1 avevamo visto il controllo a dinamica inversa nello spazio dei giunti, dove avevamo selezionato il controllo $u = B(q)y + n(q, \dot{q})$, che sotto l'ipotesi di linearizzazione esatta portava ad un sistema di n doppi integratori $\ddot{q} = y$ (Il comando dell'anello esterno y era stato quindi progettato per garantire l'inseguimento di una traiettoria q_d nello spazio dei giunti).

È possibile ora **riprogettare tale comando y direttamente nello spazio operativo** per ottenere l'inseguimento di una traiettoria cartesiana p_d . Derivando la relazione della cinematica diretta delle velocità $\dot{p} = J_A(q) \dot{q}$ si ottiene l'espressione dell'accelerazione cartesiana:

$$\ddot{p} = J_A(q) \ddot{q} + \dot{J}_A(q, \dot{q}) \dot{q}$$

che “suggerisce” di definire \mathbf{y} come (ricordando che $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$):

$$\mathbf{y} \triangleq \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P\mathbf{e} - \dot{\mathbf{J}}_A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}})$$

(il ragionamento per la scelta di questa forma è lo stesso fatto in sezione 1.4.1).

Con questa definizione di \mathbf{y} infatti si ottiene:

$$\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_P\mathbf{e} = \mathbf{0}$$

e scegliendo \mathbf{K}_P e \mathbf{K}_D (diagonali) definite positive, si assegna la dinamica all'errore di inseguimento, garantendone la convergenza a zero.

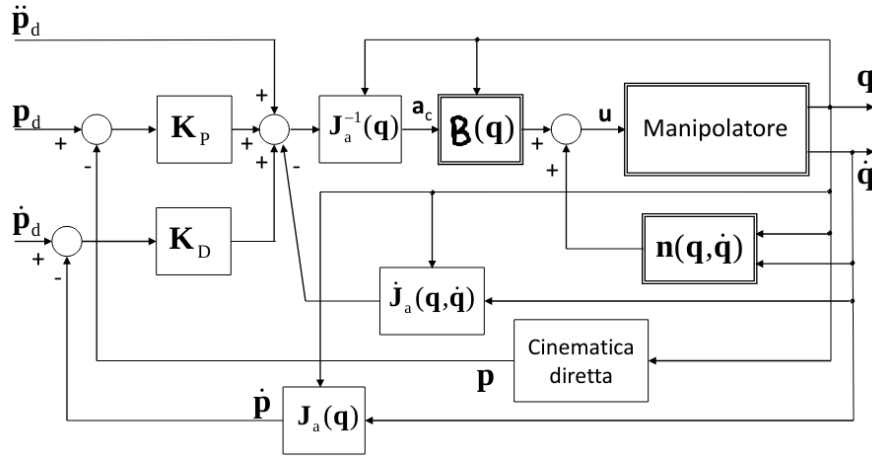


Figura 1.29: Controllo a dinamica inversa nello spazio operativo

1.5.5 Considerazioni generali

Tutti gli schemi di **controllo** sviluppati **nello spazio operativo richiedono** il calcolo dello **Jacobiano**, che è influenzato dalla **presenza di singolarità e di ridondanza**.

Ad esempio, in caso di passaggio per una configurazione singolare gli algoritmi di controllo potrebbero "bloccarsi" e "bloccare" il manipolatore in una configurazione diversa da quella desiderata (poichè $\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P\mathbf{e} = 0$ ma con $\mathbf{e} \neq 0$).

Inoltre, lo sviluppo degli schemi considerati presuppone l'utilizzo di una rappresentazione minima dell'assetto (data dalla terna di angoli, che compare nella definizione di \mathbf{p}); in caso contrario si dovrebbe fare ricorso allo Jacobiano geometrico con un aumento della complessità dell'analisi di stabilità.

1.6 Controllo dell'interazione

Molti compiti prevedono il contatto della punta operativa con superfici esterne o la manipolazione di oggetti. Per compiere questo tipo di operazioni non è sufficiente controllare il moto del manipolatore, ma è necessario saper gestire la sua interazione con l'ambiente esterno.

La grandezza che descrive in modo efficace la condizione di interazione, e che deve essere controllata in modo diretto o indiretto, è quindi la **forza di contatto** sulla punta operativa. L'idea base per il controllo della forza è quella di agire sulla cedevolezza (**compliance**) del sistema robotambiente, in modo passivo o attivo.

1.6.1 Cedevolezza passiva ed attiva

Il sistema formato dal manipolatore e dall'ambiente esterno con cui è in contatto è rappresentato da una **molla generalizzata equivalente**, di cui si impone il coefficiente (matrice nel caso a più dimensioni) di rigidità (ovvero il suo reciproco, cioè la cedevolezza).

Il **controllo** della cedevolezza può avvenire in maniera **passiva**, mediante l'inserimento di appositi dispositivi installati al polso del robot che reagiscono in modo opportuno a forze esterne.

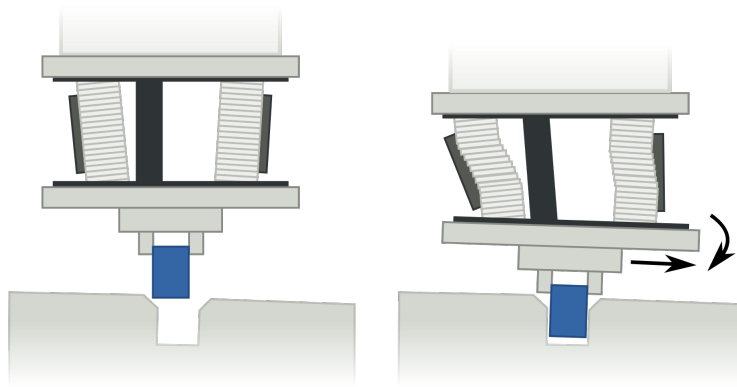


Figura 1.30: Esempio di *Remote Center of Compliance*

Ad esempio, Un **RCC** (*Remote Center of Compliance*) inserisce una cedevolezza passiva fra robot e superficie esterna, “disaccoppiando” le forze e le coppie di contatto: le forze generano solo traslazioni, le coppie solo rotazioni.

Tali dispositivi sono però poco versatili, di limitato utilizzo e non sono adatti ad applicazioni più evolute, che richiedano il controllo dei movimenti del robot mentre sono applicate forze controllate su oggetti ed elementi dell'ambiente esterno.

Si passa quindi ad un **controllo attivo** della cedevolezza, cioè ad un controllo attivo dell'interazione (il prezzo da pagare è ovviamente costituito da un aumento della complessità del controllo e necessità di conoscere (in modo più o meno accurato) le caratteristiche degli elementi con cui il robot entra in contatto).

1.6.2 Strategie di controllo dell'interazione

Le strategie di controllo dell'interazione possono essere distinte in due categorie principali:

- **Controllo indiretto della forza:** ottenuto attraverso uno schema di controllo del moto, senza la chiusura esplicita di un anello di forza. Tra le principali tecniche troviamo controllo della rigidità (o della cedevolezza) e controllo di impedenza.
- **Controllo diretto della forza:** prevedono la chiusura di un anello di forza, in aggiunta ad un anello interno di posizione o di velocità; possono includere il contemporaneo controllo di posizione e forza lungo direzioni appropriate (controllo ibrido).

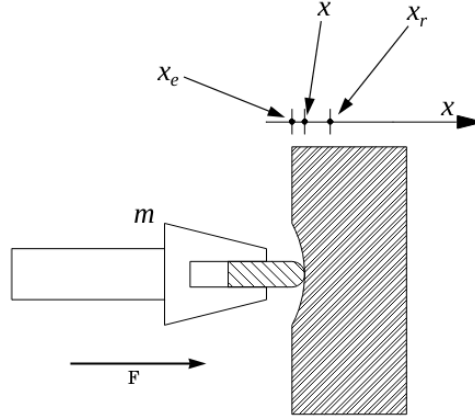
1.6.3 Controllo di rigidità (*compliance control*)

Prima di vedere il caso generale, introduciamo un caso semplificato per aiutarci a capire.

Caso semplificato

Il concetto alla base del controllo di rigidezza può essere ben rappresentato nel caso semplificato ad 1 grado di libertà, ovvero sotto l'ipotesi che la forza applicata dalla punta del manipolatore sia diretta lungo la sola direzione perpendicolare alla superficie di contatto.

Partiamo supponendo che la rigidezza della superficie non sia infinita. A causa di tale cedevolezza la punta provoca una deformazione, anche se estremamente piccola, della superficie stessa:



Sia x la posizione della punta lungo la direzione di applicazione della forza, x_e la posizione della superficie “a riposo” e x_r la posizione di riferimento (interna alla superficie stessa e quindi non raggiungibile nella pratica). La forza applicata dal manipolatore è data da:

$$f_e = K_e(x - x_e)$$

ove K_e è il coefficiente di rigidezza dell'oggetto con cui il robot è in contatto.

L'equazione dinamica del sistema robot + ambiente esterno può essere scritta come (ovvero $F = ma = m\ddot{x}$ + legge di Hooke):

$$m\ddot{x} + K_e(x - x_e) = f_c$$

ove m è la massa equivalente del manipolatore nella direzione x e f_c è la forza di comando applicata (si suppone che la gravità non eserciti alcuna azione lungo la direzione x).

Si consideri quindi una legge di controllo di tipo puramente PD (per l'ipotesi introdotta non è richiesta compensazione della gravità lungo x)

$$f_c = K_P(x_r - x) - K_D\dot{x}$$

con x_r costante.

Sostituendo l'espressione di f_c nell'equazione dinamica del sistema si ottiene:

$$m\ddot{x} + K_e(x - x_e) = K_P(x_r - x) - K_D\dot{x} \implies m\ddot{x} + K_D\dot{x} + (K_e + K_P)x = K_ex_e + K_Px_r$$

Scegliendo K_D e K_P positivi, il sistema risulta asintoticamente stabile. In condizione di equilibrio $(\dot{x}, \ddot{x}) = (0, 0)$ si ha:

$$(K_e + K_P)x = K_ex_e + K_Px_r$$

da cui si ricava la **posizione** raggiunta dalla punta in condizioni **di equilibrio**:

$$\bar{x} = \frac{K_e x_e + K_p x_r}{K_e + K_p}$$

e la forza applicata in questo stato di equilibrio risulta quindi:

$$\bar{f}_e = K_e(\bar{x} - x_e)$$

Attraverso K_p e x_r è possibile assegnare il valore desiderato per la forza da applicare all'equilibrio. Si ottiene così un **controllo indiretto della forza** mediante le sole retroazioni di posizione e di velocità.

Oss.

Il guadagno K_D non ha alcuna influenza sul comportamento del sistema in regime permanente, ma solo sulla stabilità del sistema e sulla velocità con cui viene raggiunta la condizione di stazionarietà. Il valore della forza all'equilibrio dipende sia dalla posizione x_e dell'oggetto con cui il manipolatore è in contatto, sia dal suo coefficiente di rigidità K_e . **Solo conoscendo il valore di questi parametri è possibile assegnare esattamente la forza all'equilibrio.**

Caso generale

Nel caso completo (a n gradi di libertà), possiamo rappresentare il legame fra le forze generalizzate applicate dal manipolatore \mathbf{F}_e e lo spostamento elementare come

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} d\mathbf{x} \\ \boldsymbol{\omega} dt \end{bmatrix}$$

ove \mathbf{K} è la matrice di rigidità dell'ambiente, simmetrica e semi-definita positiva.

In assenza di accoppiamenti fra le componenti di traslazione e di rotazione, la matrice risulta diagonale, inoltre, è solo semi-definita positiva, perché l'ambiente potrebbe non resistere a forze lungo tutte le direzioni.

Il vettore dello spostamento elementare può essere trasformato nelle coordinate operazionali ($d\mathbf{p} = (d\mathbf{x}, d\boldsymbol{\alpha})^T$) ricordando il legame esistente fra lo Jacobiano geometrico e quello analitico, dato da:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_A(\mathbf{p})\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix} \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \quad (1.23)$$

ove l'espressione di $\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha})$ dipende dalla particolare rappresentazione scelta per l'assetto della punta. Possiamo quindi esprimere quindi \mathbf{F}_e come:

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{K}\mathbf{T}_A(\mathbf{p})d\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{T}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e) \quad (1.24)$$

ove \mathbf{p}_e è il vettore della posa dell'ambiente a riposo.

Le coppie generalizzate risultanti (presenti nel modello dinamico del manipolatore) sono quindi date da:

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_e = \underbrace{\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{T}_A^T(\mathbf{p})}_{\mathbf{J}^T(\mathbf{q})} \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{T}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e)}_{\mathbf{F}_e}$$

Questa relazione può essere vista anche come:

$$\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e)$$

dove

$$\mathbf{K}_A(\mathbf{p}) \triangleq \mathbf{T}_A^T(\mathbf{p}) \mathbf{K} \mathbf{T}_A(\mathbf{p}) \quad (1.25)$$

è la matrice di rigidezza (*rigidity*) dell'ambiente, espressa nelle coordinate operazionali (funzione delle coordinate stesse!). Se esiste, \mathbf{K}_A^{-1} è la matrice di cedevolezza (*compliance*).

Controllo

Consideriamo allora l'equazione dinamica del manipolatore, comprensiva del contributo delle forze scambiate con l'ambiente esterno (ponendo $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{p}_d - \mathbf{p}$):

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{u} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_e$$

e l'algoritmo di controllo PD con compensazione della gravità, sviluppato nello spazio operazionale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) (\mathbf{K}_P \mathbf{e} - \mathbf{K}_D \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}})$$

Unendo le due equazioni, e ponendoci in condizione di calcolo dell'equilibrio $(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = (0, 0)$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \cancel{\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) &= \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}) \left(\mathbf{K}_P \mathbf{e} - \cancel{\mathbf{K}_D \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}} \right) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_e \\ &\Downarrow \\ \mathbf{J}_A^T(\mathbf{q})\mathbf{K}_P \mathbf{e} &= \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_e \\ &\Downarrow \\ \mathbf{e} &= \mathbf{K}_P^{-1} (\mathbf{J}_A^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{F}_e \\ &\Downarrow \\ \mathbf{e} &= \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{T}_A^T(\mathbf{p})\mathbf{F}_e \end{aligned}$$

dove l'ultima implicazione è stata fatta richiamando (1.23): $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_A(\mathbf{q})\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \implies \mathbf{T}_A(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}) \implies \mathbf{T}_A^T(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q}))^T \mathbf{J}^T(\mathbf{q})$.

Poi, ricordando la definizione di \mathbf{F}_e da (1.24) e quella di $\mathbf{K}_A(\mathbf{p})$ da (1.25) possiamo scrivere:

$$\mathbf{e} = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{T}_A^T(\mathbf{p})\mathbf{F}_e = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{T}_A^T(\mathbf{p}) \mathbf{K} \mathbf{T}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e) = \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e)$$

e quindi all'equilibrio:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e) \\ &\Downarrow \text{espandi } \mathbf{e} \\ \mathbf{p}_d - \mathbf{p} &= \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e) \\ &\Downarrow \text{sposta } \mathbf{p}_d \text{ a destra} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_d - \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_e) \\ &\Downarrow \text{espandi la molt. con la parentesi a dx} \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_d - \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})\mathbf{p} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})\mathbf{p}_e \\ &\Downarrow \text{isola } \mathbf{p} \\ \mathbf{p} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})\mathbf{p} &= \mathbf{p}_d + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})\mathbf{p}_e \\ &\Downarrow \\ (\mathbf{I} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p}))\mathbf{p} &= \mathbf{p}_d + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p})\mathbf{p}_e \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p}))^{-1} (\mathbf{p}_d + \mathbf{K}_P^{-1} \mathbf{K}_A(\mathbf{p}) \mathbf{p}_e)$$

da cui è possibile anche ricavare il vettore delle forze generalizzate $\bar{\mathbf{F}}_e$ applicate all'equilibrio, applicando il valore di \mathbf{p} trovato a (1.24). Quest'ultimo ($\bar{\mathbf{F}}_e$) è funzione di \mathbf{K}_P^{-1} , che può essere considerata come la cedevolezza attiva (*active compliance*) del robot, e della posa di riferimento \mathbf{p}_d , oltre che delle caratteristiche fisiche e geometriche dell'ambiente (\mathbf{K} e \mathbf{p}_e).

È possibile controllare la rigidità \mathbf{K}_P del robot (o la sua cedevolezza \mathbf{K}_P^{-1}), in modo che "il robot prevalga sull'ambiente" o viceversa, lungo le diverse direzioni:

- valori elevati degli elementi diagonali di \mathbf{K}_P rendono rigido il robot lungo le direzioni in cui si vuole controllare la posizione
- mentre valori bassi degli elementi diagonali di \mathbf{K}_P rendono "cedevole" il robot lungo le direzioni in cui si vuole controllare la forza

Nelle slide in italiano ora qua fa il controllo di impedenza, controllo diretto della forza e moto vincolato, che però noi skippiamo.