

IPTU IPVA 2021

Reginaldo J. Santos

Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais

<https://regijs.github.io/>

22 de janeiro de 2021

1 IPTU

O IPTU 2021 de Belo Horizonte pode ser pago em 11 parcelas, de fevereiro a dezembro. A Prefeitura está oferecendo um desconto $d = 6\%$ no IPTU 2021, nas parcelas (a partir de duas) que forem pagas em janeiro. Qual é a taxa de juros que está embutida neste desconto?

Suponha que o IPTU de um imóvel é igual a 11 parcelas de R\$ 100. Vamos supor que optamos pelo pagamento integral com desconto. Neste caso, o valor pago em janeiro seria R\$ 1034. Este é o valor do IPTU em janeiro.

Vamos supor que optamos pelo adiantamento de 10 parcelas. Neste caso pagamos em janeiro R\$ 940. Assim, ficamos com uma dívida de R\$ 1034 menos R\$ 940. Ou seja, de R\$ 94, que será paga em fevereiro com o valor de R\$ 100. Ou seja,

$$94(1 + j_1) = 100 \text{ ou } 100(1 + j_1)^{-1} = 94.$$

Logo, a taxa de juros embutida neste caso é

$$j_1 = \frac{100}{94} - 1 \approx 6.4\%.$$

Vamos supor que optamos pelo adiantamento de 9 parcelas. Neste caso pagamos em janeiro R\$ 846. Assim, ficamos com uma dívida de R\$ 1034 menos R\$ 846, que é igual a R\$ 188, que será paga em fevereiro e em março com o valor de R\$ 100 cada. A cota de fevereiro, vale em janeiro $100(1 + j)^{-1}$. A cota de março, vale em janeiro $100(1 + j)^{-2}$. Assim,

$$100(1 + j)^{-1} + 100(1 + j)^{-2} = 188.$$

Ou seja,

$$188(1+j)^2 - 100(1+j) - 100 = 0$$

Tomando a raiz positiva desta equação do segundo grau obtemos que a taxa de juros embutida neste caso é

$$j_2 = \frac{5\sqrt{213} + 25}{94} - 1 \approx 4.3 \, \%.$$

Vamos supor, agora, que aplicamos R\$ 1034 em janeiro, a uma taxa de juros mensal j , de forma que a cada mês (de fevereiro a dezembro) resgatemos R\$ 100. O valor da segunda cota em fevereiro, corresponde em janeiro a $100(1+j)^{-1}$. O valor da terceira cota em março, corresponde em janeiro a $100(1+j)^{-2}$. Assim, por diante, o valor da décima primeira cota em dezembro, corresponde em janeiro a $100(1+j)^{-11}$. Assim,

$$100(1+j)^{-1} + 100(1+j)^{-2} + \cdots + 100(1+j)^{-11} = 1034.$$

O lado esquerdo é uma progressão geométrica. Usando a fórmula para a sua soma obtemos

$$100 \frac{1 - (1+j)^{-11}}{j} = 1034.$$

Precisamos usar um método iterativo para encontrar uma solução aproximada desta equação. Escrevemos uma página iterativa que faz isso (<https://regijs.github.io/topicos/calculu.html>) Encontramos então que a taxa de juros embutida no pagamento em 11 parcelas é

$$j_{11} \approx 1.05 \, \%.$$

A conclusão é que se o contribuinte não puder pagar o valor integral com desconto em janeiro, é melhor pagar as 11 parcelas de fevereiro a dezembro.

2 IPVA

Para o IPVA, o governo de Minas Gerais está oferecendo um desconto de 3 % para o pagamento do IPVA em cota única em janeiro. Qual é a taxa de juros que está embutida neste desconto? Suponha que o IPVA de um veículo seja de R\$ 300 para pagamento em três parcelas. Ao optarmos por pagar em cota única pagaríamos R\$ 291. Estaríamos adiantando a segunda e a terceira parcelas.

Suponha que aplicamos em janeiro o valor da cota única (R\$ 291) menos o valor da primeira cota (R\$ 100) de forma a resgatar em fevereiro, a segunda cota (R\$ 100) e em março, a terceira cota (R\$ 100). O valor da segunda cota em fevereiro, corresponde em janeiro a $100(1+j)^{-1}$. O valor da terceira cota em março, corresponde em janeiro a $100(1+j)^{-2}$. Então,

$$100(1+j)^{-1} + 100(1+j)^{-2} = 291 - 100.$$

Ou seja,

$$191(1+j)^2 - 100(1+j) - 100 = 0.$$

Tomando a raiz positiva desta equação do segundo grau obtemos que a taxa de juros embutida no pagamento em três parcelas é

$$j = \frac{10\sqrt{216} + 50}{191} - 1 \approx 3.1\%.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Reginaldo J. Santos. Introdução à matemática financeira (2009). Website. <https://regijs.github.io/topicos/matfin.pdf>.