Introdução à Matemática Financeira

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
https://regijs.github.io/

abril de 2009
Última atualização em 22 de janeiro de 2021

Sumário

1 Valor Futuro e Valor Presente de uma Quantia

Em um regime com uma taxa de juros j por período (período aqui pode ser um mês, um ano, etc), o valor futuro de uma quantia q_0 depois de um período é igual a

$$q_1 = q_0 + j \cdot q_0 = (1+j)q_0. \tag{1}$$

Aplicando-se o raciocínio acima, sucessivas vezes, temos que, se no presente eu tenho uma quantia q_0, então no futuro, depois de n períodos, a uma taxa de juros j por período, esta quantia vai valer

$$q_n = (1+j)^n q_0. \tag{2}$$

Reciprocamente, se daqui a um período eu tenho uma quantia q_1, então de (1) segue que ela vale hoje, no presente,

$$q_0 = (1+j)^{-1} q_1.$$

Se depois de n períodos eu tenho uma quantia q_n, segue de (2) que esta quantia vale hoje

$$q_0 = (1+j)^{-n} q_n.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer a atualização monetária de um valor, ou seja, se você sabe o valor de uma quantia hoje, o programa diz quanto ela valerá no futuro e reciprocamente, se você sabe o valor de uma quantia no futuro, ele diz quanto ela vale hoje. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 1. Uma loja oferece duas opções de pagamento: à vista com 2% de desconto ou em duas vezes, sem desconto, a primeira sendo paga no ato da compra. Qual a taxa de juros mensal que está embutido na venda a prazo? Resposta na página 15.

Exercício 2. Investindo uma quantia q (uma única vez!) a uma taxa de juros mensal de 1% , em quanto tempo o seu capital dobrará? Resposta na página 15.

---

2 Períodos não Inteiros - Taxas Equivalentes

Se uma taxa de juros relativamente a um determinado período é J, então a taxa correspondente a uma fração $1/n$ deste período, j, é obtida da forma que descreveremos a seguir. Como já vimos, o valor futuro de uma quantia q após o período inteiro é

$$(1 + J)q.$$

Por outro lado, o período inteiro é igual a n frações $1/n$ deste período e se a taxa correspondente a fração $1/n$ do período é j, então o valor futuro de uma quantia q após n frações $1/n$ do período é

$$(1 + j)^n q.$$

Portanto,

$$(1 + J)q = (1 + j)^n q,$$

ou seja, a taxa correspondente a um período J e a taxa correspondente a uma fração $1/n$ deste período satisfazem

$$1 + J = (1 + j)^n.$$

Neste caso, as taxas J e j são ditas **equivalentes**.

Portanto, se J é a taxa de juros correspondente a um período inteiro, então a taxa, j, correspondente a uma fração $1/n$ deste período é dada por

$$j = (1 + J)^{1/n} - 1.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer a atualização monetária de um valor em divisões de um período, ou seja, se você sabe o valor de uma quantia hoje, o programa diz quanto ela valerá no futuro em divisões de um período, no qual é conhecida a taxa de juros. Clique aqui para experimentar o programa.

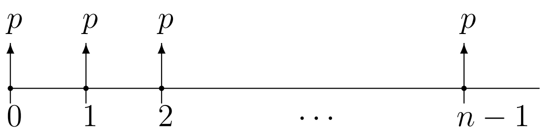
Exercício 3. Se a taxa de juros de um cheque especial é de 10% ao mês, qual é a taxa equivalente a um dia? Se o meu cheque especial fica negativo no valor de R$ 300,00 por 3 dias quanto devo pagar de juro? (chamamos de **juro** a diferença entre o valor futuro e o valor presente de uma quantia)

Exercício 4. Se em um financiamento está escrito que a taxa de juros **nominal** anual é de 12% , isto significa que a taxa mensal é igual a 1 % . Outra forma, é dizer que a taxa é de 12% ao ano com capitalização mensal. Qual é a taxa de juros **real** anual neste caso?

---

3 Valor Futuro e Valor Presente de uma Série de Pagamentos Iguais

Suponha que depositamos todo mês uma quantia fixa p numa caderneta de poupança que remunera a uma taxa fixa mensal igual j. Qual será o saldo após n meses?



Após o primeiro mês, o saldo é de $(1+j)p$ mais o depósito do segundo mês p. Após o segundo mês, o saldo é de $(1+j)^2p+(1+j)p$ mais o depósito do segundo mês p. E assim por diante, após n meses o saldo é

$$s_n = (1+j)^n p + (1+j)^{(n-1)} p + \cdots + (1+j)p$$

Assim, o saldo em n meses após n pagamentos iguais a p é dado por uma soma de uma progressão geométrica, que é dada por

$$s_n = (1+j)\frac{(1+j)^n - 1}{j}p$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web que dá o valor desta soma, ou seja, se você fornece o valor do depósito por período, o programa diz qual o saldo após n períodos e reciprocamente, se você fornece o saldo após n períodos, ele diz quanto deverá ser o valor do depósito por período para que em n períodos se alcance aquele saldo. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 5. Suponha que uma pessoa deposite mensalmente 10 % de seu salário numa caderneta de poupança, que rende 1 % ao mês, pensando em se aposentar em 20 anos. Quantos salários ela terá disponível após este período?

Suponha, agora, que eu tenha uma caderneta de poupança, que rende juros mensais j, com um saldo inicial s_0 e que todo mês eu faça um retirada de p. Após a retirada do primeiro mês, o saldo será $s_1 = (1+j)s_0 - p$. Após a retirada do segundo mês, o saldo será de $s_2 = (1+j)s_1 - p = (1+j)^2 s_0 - [(1+j)p + p]$. Após a retirada do n-ésimo mês o saldo será

$$s_n = (1+j)^n s_0 - [(1+j)^{n-1} + \ldots + (1+j)p + p].$$

ou seja,

$$s_n = (1+j)^n s_0 - \frac{(1+j)^n - 1}{j} p.$$

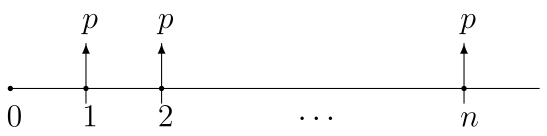
Se após n meses o saldo é igual a zero, então o valor da retirada, p, deve ser

$$p = \frac{j}{1-(1+j)^{-n}} s_0.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web que dá o saldo após cada retirada, ou seja, se você fornece o valor do saldo inicial e a taxa de juros, o programa diz o valor da retirada mensal e o saldo após cada retirada para que após n períodos o saldo seja igual a zero. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 6. Se após anos de depósitos em uma caderneta de poupança, que rende 1% ao mês, uma pessoa conseguiu um saldo igual a 100 salários seus. Quanto tempo este saldo poderá pagar a sua aposentadoria integral?

Agora, vamos considerar o problema de um financiamento de uma quantia q em n parcelas iguais a p, a uma taxa de juros por período igual a j.



Para determinarmos o valor atual q, correspondente a uma série de pagamentos iguais a p, vamos considerar todos os pagamentos no instante zero. A primeira parcela vale $(1+j)^{-1}p$ no instante zero. A segunda parcela vale $(1+j)^{-2}p$, a terceira, $(1+j)^{-3}p$ e assim por diante. A n-ésima parcela vale no instante zero $(1+j)^{-n}p$. Assim,

$$q = (1+j)^{-1}p + (1+j)^{-2}p + \cdots + (1+j)^{-n}p.$$

Assim, uma série de pagamentos iguais a p, num regime de juros j por período, corresponde a um valor à vista é o resultado de uma soma de uma progressão geométrica, que é dada por

$$q = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j}p$$

Exercício 7.

Exercício 8. Um telefone sem fio é vendido por uma loja em duas opções: 9 $\times$ R\$ 24,70 (com entrada) ou R\$ 168,00 à vista. Se você tem a opção de aplicar o seu dinheiro a uma taxa de juros mensal de 1% , qual a forma de pagamento mais vantajosa neste caso. Justifique. (Sugestão: calcule o valor atual das nove parcelas (1+8) num regime de taxa de juros de 1% ao mês e compare com o valor à vista.)

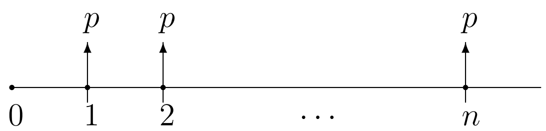
4 Sistema de Financiamento com Prestações Constantes

Este sistema de financiamento é conhecido como **Sistema Francês** ou **Tabela Price**.

4.1 Sem Entrada

Como já vimos na seção anterior, se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p, a uma taxa de juros por período igual a j, então

$$q = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j} p \tag{3}$$



Exercício 9. Mostre que se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p, a uma taxa de juros por período igual a j, então o valor da prestação é dada por

$$p = \frac{j}{1-(1+j)^{-n}} q$$

Exercício 10. Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R$ 129,00 ou em 0+4 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês. Qual o valor da prestação na segunda opção de pagamento?

Vamos calcular a tabela de amortização de um financiamento com prestações constantes, sem entrada.

Cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de **amortização** (diminuição na dívida), ou seja, para $k = 1, \dots, n$,

$$p_k = j_k + a_k$$

O juro é calculado sobre o saldo devedor no mês anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1},$$

onde j é a taxa de juros e d_{k-1} é o saldo devedor no mês $k-1$. E assim, a amortização é igual a

$$a_k = p_k - j_k.$$

O saldo devedor imediatamente depois de paga a parcela p_k é igual a

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Exercício 11. Prove a seguinte fórmula para o saldo devedor d_k:

$$d_k = (1+j)d_{k-1} - p_k.$$

Qual o significado desta fórmula?

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer o cálculo das prestações e da tabela de amortização para os dois sistemas de financiamento: tabela price e sistema SAC (que veremos mais adiante). Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 12. Escreva a tabela de amortização do Exercício 10.

Agora, vamos considerar o problema inverso, suponha que conhecemos o valor do débito inicial d_0 e o valor das prestações fixas e queremos determinar a taxa de juros embutida no financiamento. Para isto temos que resolver a equação (3):

$$q = \frac{1-(1+j)^{-n}}{j} p$$

para j. Observe que esta não é uma equação simples de se resolver para n maior que 2. No caso geral precisamos usar um método para resolver esta equação de forma aproximada. Vamos usar um método iterativo chamado **método de Newton**. Um método iterativo começa com uma aproximação inicial da solução, x_0, e gera uma nova aproximação a partir da anterior. Este processo é repetido, até que se atinja a precisão desejada ou que um número máximo de iterações seja atingido. No caso do método de Newton, se x_{k-1} é a aproximação anterior, a nova aproximação da solução de $F(x) = 0$ é a solução de uma aproximação linear da equação, ou seja, a solução de

$$F'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + F(x_{k-1}) = 0,$$

onde F' é a derivada de F. Assim, a aproximação x_k é dada por

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}.$$

Neste caso específico

$$F(x) = \frac{1 - (1 + x)^{-n}}{x} p - q.$$

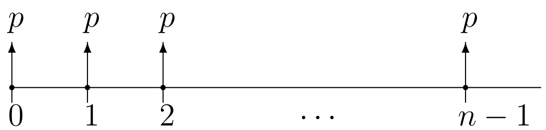
e a derivada de $F(x)$

$$F'(x) = p \left(\frac{n(1 + x)^{-(n+1)}}{x} - \frac{1 - (1 + x)^{-n}}{x^2} \right).$$

Escrevemos um programa que roda em uma página da web, que usa este método para determinar a taxa de juros. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 13. Verifique que realmente a taxa de juros do exemplo anterior é 4,85 % .

4.2 Com Entrada



Este caso é semelhante ao anterior, apenas substituindo n por $n-1$ e q por $q-p$ na equação (3), pois o número de parcelas do financiamento é realmente $n-1$ e não n e o valor a ser financiado é realmente $q-p$ e não q. Assim, para determinarmos o valor da prestação p basta resolvermos a equação

$$q - p = \frac{1 - (1 + j)^{-(n-1)}}{j} p$$

para p.

Exercício 14. Mostre que se uma quantia q é financiada em n parcelas iguais a p, a uma taxa de juros por período igual a j, sendo a primeira paga no ato do financiamento, então o valor da prestação é dada por

$$p = \frac{j}{1+j-(1+j)^{-(n-1)}}q \tag{4}$$

Exercício 15. Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R$ 129,00 ou em 1+3 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês. Qual o valor da prestação na segunda opção de pagamento?

Para calcular a tabela de amortização de um financiamento com prestações constantes, com entrada, o processo é o mesmo que sem entrada. Vamos repetir para enfatizar o processo.

Cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de **amortização** (diminuição na dívida), ou seja, para $k = 1, \ldots, n$,

$$p_k = j_k + a_k$$

O juro é calculado sobre o saldo devedor no mês anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1},$$

onde j é a taxa de juros e d_{k-1} é o saldo devedor no mês $k-1$. E assim, a amortização é igual a

$$a_k = p_k - j_k.$$

O saldo devedor imediatamente depois de paga a parcela p_k é igual a

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Escrevemos um programa que roda em uma página na web para fazer o cálculo das prestações e da tabela de amortização para os dois sistemas de financiamento: tabela price e sistema SAC. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 16. Escreva o exemplo da tabela de amortização do Exercício 15.

Agora, vamos considerar o problema inverso, suponha que conhecemos o valor do débito inicial d_0 e o valor das prestações fixas e queremos determinar a taxa de juros embutida no financiamento. Para isto temos que resolver a equação (4):

$$p = \frac{j}{1+j-(1+j)^{-(n-1)}}q$$

para j. Observe que esta não é uma equação simples de se resolver para n maior que 3. Precisamos usar um método iterativo para resolver esta equação. Vamos usar novamente o método de Newton. Um método iterativo começa com uma aproximação inicial da solução, x_0, e gera uma nova aproximação a partir da anterior, repetidamente, até que se atinja a precisão desejada. No caso do método de Newton, se x_{k-1} é a aproximação anterior, a nova aproximação da solução de $F(x) = 0$ é a solução de uma aproximação linear da equação, nas proximidades da aproximação anterior da solução, ou seja, a solução de

$$F'(x_{k-1})(x - x_{k-1}) + F(x_{k-1}) = 0,$$

onde F' é a derivada de F. Assim, a aproximação x_k é dada por

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}.$$

Neste caso específico

$$F(x) = \frac{1 - (1+x)^{-(n-1)}}{x} p + p - q.$$

e a derivada de $F(x)$

$$F'(x) = p\left(\frac{(n-1)(1+x)^{-n}}{x} - \frac{1-(1+x)^{-(n-1)}}{x^2}\right).$$

Escrevemos um programa que roda em página da web, que usa este método para determinar a taxa de juros. Clique aqui para experimentar o programa.

Exercício 17. Verifique que realmente a taxa de juros do exemplo anterior é 4,85 % .

5 Sistema de Financiamento com Amortizações Constantes

Este sistema de financiamento é conhecido como SAC. Neste sistema o débito é dividido em parcelas iguais que serão as amortizações correspondentes a cada parcela.

Tabela de Amortização

Assim como no sistema francês, cada prestação é composta de uma parcela de juro e uma parcela de amortização, ou seja, para $k = 1, \ldots, n$, temos

$$p_k = a_k + j_k.$$

Agora, neste caso, a amortização em cada período é dada por

$$a_k = \frac{d_0}{n}.$$

A parcela de juro é, assim como no sistema francês, calculada sobre o saldo devedor no período anterior, ou seja,

$$j_k = j \cdot d_{k-1}.$$

O saldo devedor imediatamente após ter sido paga a parcela p_k é dado por

$$d_k = d_{k-1} - a_k.$$

Exercício 18. Prove a seguinte fórmula para o saldo devedor d_k:

$$d_k = (1 + j)d_{k-1} - p_k$$

Exercício 19. Escreva a solução do exemplo do Exercício 10, mas agora no sistema SAC: Uma bicicleta é vendida numa loja com duas opções de pagamento: à vista por R$ 129,00 ou em 0+4 pagamentos com juros de 4,85 % de juros ao mês, no sistema SAC. Observe que as prestações são decrescentes. Clique aqui para usar o programa que calcula a tabela de amortização.

---

6 Páginas Interativas

Escrevemos alguns programas que rodam em páginas da web para alguns cálculos financeiros:

- Tabelas de Atualizações Monetárias - para calcular o valor futuro (ou atual) de uma quantia sujeita a valorização a uma taxa constante.
- Tabelas de Depreciações Monetárias - para calcular o valor futuro (ou atual) de uma quantia sujeita a depreciação a uma taxa constante.
- Tabelas de Atualizações para Períodos não Inteiros - para calcular os valores futuros de uma quantia em frações de um período, no qual é conhecida a taxa de juros.
- Tabela de Série de Pagamentos Iguais - se você fornece o valor do depósito por período, o programa diz qual o saldo após n períodos e reciprocamente, se você fornece o saldo após n períodos, ele diz quanto deverá ser o valor do depósito por período para que em n períodos se alcance aquele saldo.
- Tabela de Saldos após Retiradas Iguais - fornece o valor da retirada mensal e o saldo após cada retirada para que após n períodos o saldo seja igual a zero.
- Tabelas de Financiamentos - para calcular as tabelas de financiamento do sistema de amortizações constantes (SAC) e do sistema francês (Tabela Price).
- Cálculo da Taxa de Juros pelo Método de Newton - para calcular a taxa de juros praticada na tabela Price, sendo conhecidos o valor do débito e das prestações (fixas).

7 Respostas dos Exercícios

1.
$$0,98 \cdot q_1 = \frac{q_1}{2} + (1+j)^{-1}\frac{q_1}{2}$$
$$0,98 = \frac{1}{2} + \frac{(1+j)^{-1}}{2}$$
$$(1+j)^{-1} = 2 \cdot 0,98 - 1 = 0,96$$
$$j = \frac{1}{0,96} - 1 \approx 0,04167$$

2.
$$2q_0 = (1+j)^n q_0$$
$$2 = (1+j)^n$$
$$\ln 2 = n \ln(1+j)$$
$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+j)} = \frac{\ln 2}{\ln 1,01} \approx 70 \text{ meses}$$

Referências Bibliográficas

[1] Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner, and Sheila C. Zani. *Progressões e Matemática Financeira*. SBM, Rio de Janeiro, 4a. edition, 2001.