Motor de Corrente Contínua

Reginaldo J. Santos
Departamento de Matemática-ICEx
Universidade Federal de Minas Gerais
https://regijs.github.io/
22 de outubro de 2025

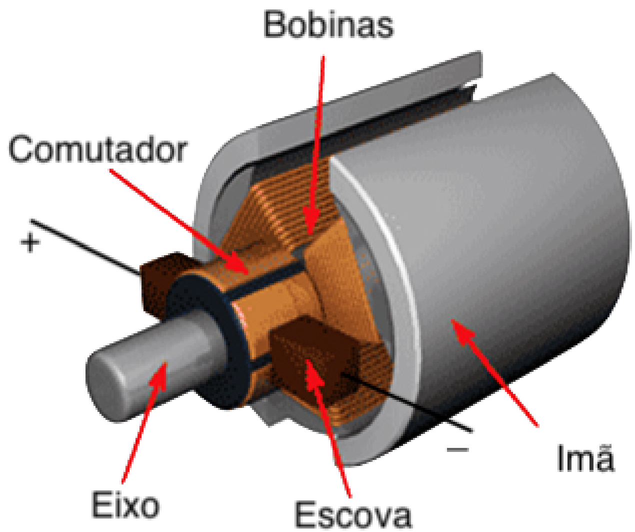

Figura 1: Motor de Corrente Contínua

Um motor de corrente contínua é composto de bobinas montadas em torno de um eixo mergulhadas em um campo magnético. As bobinas estão conectadas a uma fonte de corrente contínua através do comutador e das escovas. O comutador permite que a cada instante uma bobina seja alimentada. Quando a corrente elétrica flui através de uma bobina o campo magnético, gerado por um imã (ou outro circuito), produz um torque que é proporcional à corrente elétrica nas bobinas,

$$T_m = k_m i.$$

Quando o eixo do rotor gira a uma velocidade angular ω, as cargas que passam pelas bobinas sofrem uma queda de potencial, chamada de força contra-eletromotriz, e. A força contra-eletromotriz é proporcional à velocidade angular do rotor (que contem as bobinas),

$$e = k_e \omega.$$

Vamos supor também que o rotor, sofre um torque de atrito proporcional à velocidade angular do seu eixo,

$$T_a = \gamma \omega.$$

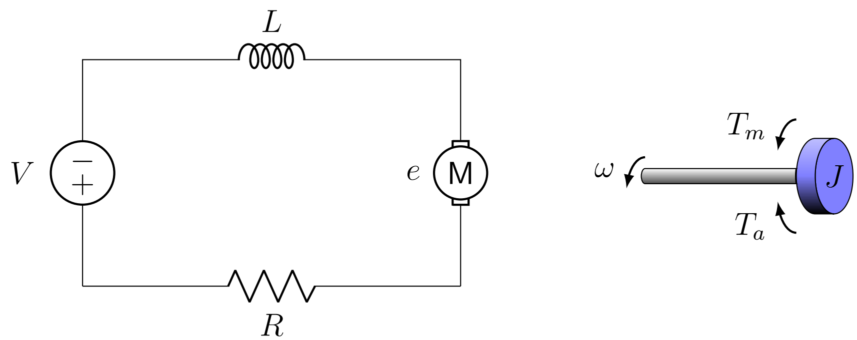

Figura 2: Circuito da Armadura e Rotor

Um motor de corrente contínua pode ser modelado como um circuito elétrico da armadura (bobinas+escovas+comutador) e o problema da rotação do rotor, com momento de inércia J, em torno do seu eixo, sujeito a um torque do motor, T_m, e um torque de atrito, T_a, no sentido contrário. Vamos supor que as bobinas do motor estão ligadas a uma fonte de corrente contínua que produz uma força eletromotriz V e que a armadura tem uma resistência R e uma indutância L.

Pela segunda Lei de Newton:

$$J\frac{d\omega}{dt} = T_m - T_a = k_m i - \gamma\omega.$$

Pela segunda lei de Kirchoff:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + k_e\omega = V.$$

Essas equações podem ser escritas na forma do sistema de equações diferenciais não homogêneo:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{\gamma}{J} & \frac{k_m}{J}\\ -\frac{k_e}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{V}{L}\end{bmatrix}.$$

Este sistema pode ser escrito como

$$X' = AX + F,$$

em que

$$X = \begin{bmatrix}\omega\\ i\end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix}-\frac{\gamma}{J} & \frac{k_m}{J}\\ -\frac{k_e}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix}0\\ \frac{V}{L}\end{bmatrix}.$$

A solução geral deste sistema é da forma

$$X(t) = X_p(t) + c_1X_1(t) + c_2X_2(t),$$

em que $X_p(t)$ é uma solução particular e $X_h(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t)$ é a solução geral do sistema homogêneo $X' = AX$. Para este sistema

$$X_p(t) = -A^{-1}F = \begin{bmatrix}\frac{V\,k_m}{k_ek_m+\gamma R}\\ \frac{\gamma V}{k_ek_m+\gamma R}\end{bmatrix}.$$

é uma solução particular. O polinômio característico da matriz A é

$$p(t) = \det(A - tI_2) = t^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{\gamma}{J}\right)t + \frac{k_ek_m + \gamma R}{JL}.$$

$$\Delta = (R+\gamma)^2 - 4JL(k_ek_m + \gamma R).$$

Os autovalores da matriz A são as raízes de $p(t)$:

$$\lambda_1 = \frac{-(R+\gamma) - \sqrt{(R+\gamma)^2 - 4JL(k_ek_m + \gamma R)}}{2JL},$$

$$\lambda_2 = \frac{-(R+\gamma) + \sqrt{(R+\gamma)^2 - 4JL(k_ek_m + \gamma R)}}{2JL}.$$

Se $\Delta > 0$, então os autovalores são reais, distintos e negativos. Se $\Delta < 0$ os autovalores são complexos conjugados e a parte real é negativa. Se $\Delta = 0$, então o único autovalor é negativo. Assim, a solução particular $X_p(t)$ é a solução estacionária, pois $\lim_{t\to\infty} X_h(t) = \bar{0}$. Portanto em regime estacionário um motor de corrente contínua gira com uma velocidade angular

$$\omega_e = \frac{k_m}{k_ek_m + \gamma R}V.$$

Exemplo 1. Vamos considerar um motor que tem os seguintes parâmetros: $J = \frac{1}{100}$ kg.m^2, $\gamma = \frac{1}{10}$ N.m.s, $k_e = \frac{1}{100}$ V/rad/sec, $k_m = \frac{1}{100}$ N.m/Amp, $R = 1$ ohm, $L = \frac{1}{2}$ H.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -\frac{1}{50} & -2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 \\ 2V \end{pmatrix}.$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\sqrt{1598}-40}{10} & \frac{\sqrt{1598}+40}{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0 & 1.0 \\ 0.0025 & 7.9975 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{1598}+60}{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1598}-60}{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -9.9975 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0025 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{2V}{\frac{\sqrt{1598}+40}{10}+\frac{\sqrt{1598}-40}{10}} \\ \frac{2V}{\frac{\sqrt{1598}+40}{10}+\frac{\sqrt{1598}-40}{10}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.2502V \\ 0.2502V \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{100V}{1001} \\ \frac{1000V}{1001} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{100V}{1001} \\ \frac{1000V}{1001} \end{pmatrix} + c_1 e^{-9.9975t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.0025 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2.0025t} \begin{pmatrix} 1 \\ 7.9975 \end{pmatrix}$$

Referências Bibliográficas

[1] Reginaldo J. Santos. *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias.* Imprensa Universitária da UFMG, Belo Horizonte, 2016.