



## Gabarito

Questão 1. .... / 3 pts

Considere os vetores

$$\vec{u} = (2, 1, -1), \text{ e } \vec{v} = (1, 2, -1).$$

- (a) [2 pts] Determine o ângulo entre eles.
- (b) [0,5 pts] Diga se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI ou LD. Justifique.
- (c) [0,5 pts] Determine um vetor que seja ortogonal a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  simultaneamente.

### Solução:

- (a) Note que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5, \|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ e } \|\vec{v}\| = \sqrt{6}.$$

Com isso,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{6}.$$

Portanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0.585685543457151 \text{ rad}.$$

- (b) São LI, pois não são múltiplos.
- (c) Basta tomar o produto vetorial

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, 1, 3).$$



Questão 2. .... / 3 pts

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

- (a) [2 pts] Determine  $\ker(A)$ .  
(b) [1 pt] Determine uma base para o  $\ker(A)$ .

### Solução:

- (a) Sabemos que  $\ker(A)$  é o subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^5$ , formado pelos vetores  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  tais que

$$AX = \vec{0}.$$

Para isso, vamos obter a forma escalonada reduzida de  $A$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow 2L_3 - 3L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow \frac{1}{7}L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 7L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Convertendo para sistemas, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

E, assim

$$\ker(A) = \{(-2x_3 + x_5, x_3 - x_5, x_3, -x_5, x_5), x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

- (b) Assim, uma base é:

$$\mathcal{B} = \{(-2, 1, 1, 0, 0), (1, -1, 0, -1, 1)\}.$$

- (c) E portanto,  $\dim \ker(A) = 2$ .



Questão 3. .... / 4 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) [1,5 pts] Determine os autovalores de  $A$ .  
(b) [2 pts] Determine uma base para cada autoespaço.  
(c) [0,5 pts]  $A$  é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz  $P$  que diagonaliza  $A$  e a matriz diagonal  $D$  semelhante a  $A$ .

### Solução:

- (a) Primeiramente, vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2 (\lambda-1)^2.$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2.$$

(b)

**Autoespaço associado à  $\lambda = 1$ :** Note que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_1 = \{(\alpha, \beta, 0, 0); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

**Autoespaço associado à  $\lambda = 2$ :** Note que

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_2 = \{(-2\gamma, -4\gamma, \gamma, 0); \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_2 = \{(-2, -4, 1, 0)\}.$$



(c)  $A$  não é diagonalizável pois  $A$  é uma matriz de ordem 4 que possui apenas 3 autovetores linearmente independentes.