Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Seja V o subespaço gerado pelos vetores.

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(a) Estes vetores são LI ou LD?

(b) Determine uma base para este subespaço, dentre estes vetores.

(c) Escreva os vetores que não estão na base como combinação linear dos vetores da base.

Solução: A fim de responder todos os itens, basta obtermos a matriz escalonada reduzida de A, onde suas colunas são os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \to L_3 - 4L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to -1/3 L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; L_2 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; L_3 \to L_3 + 2L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_4 \to L_4 - L_3 \\ L_2 \to L_2 - 2L_3 \\ L_1 \to L_1 - 2L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; L_1 \to L_1 - L_2 \; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Com isso, o sistam $AX = 0$ tem infinitas soluções, logo os vetores são LD.

(b) Também sabemos que uma base é formada pelos vetores associados aos pivôs da matriz escalonada, isto é, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

(c) Por fim,

$$\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3.$$

Questão 2. ....______/ 3 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 pt] Determine os autovalores de A.

(b) [2 pts] Determine uma base e a dimensão dos autoespaços de A.

Solução:

(a) Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4}.$$

Com isso,

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

(b) Neste caso, a matriz possui dois autoespaços $E_{\frac{1}{2}} = \ker(A - \frac{1}{2}I)$ e $E_{\frac{3}{2}} = \ker(A - \frac{3}{2}I)$. Vamos determiná-los.

Autoespaço $E_{\frac{1}{2}}$:

$$A - \frac{1}{2}I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\frac{1}{2}} = \{(-\beta,\ \beta);\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, uma base para $E_{\frac{1}{2}}$ é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_{\frac{1}{2}} = 1$.

Autoespaço $E_{\frac{3}{2}}$: Da mesma forma,

$$A - \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\frac{3}{2}} = \{(\beta,\ \beta);\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, fazendo $\beta = 1$ uma base para $E_{\frac{3}{2}}$ é $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_{\frac{3}{2}} = 1$.

- Questão 2

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Considere a seguinte cônica

$$x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

(a) [2 pts] Reduza a cônica à forma padrão via uma mudança de variáveis adequada.

(b) [1 pt] Qual cônica é essa?

Solução:

(a) Para isso, considere a matriz assciada à forma quadrática da equação.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A é simétrica ela é ortogonalmente diagonalizável. Note que esta é a mesma matriz da Questão 2. Neste caso, a mudança de coordenadas é dada pela matriz ortogonal Q que diagonaliza A. Então, para obter Q basta normalizar os autovetores obtidos anteriormente.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

Analogamente,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ e a mudança de variáveis: } \overline{X} = Q^t X.$$

Com isso, como os autovalores são $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{3}{2}$ temos que

$$x^2 + xy + y^2 - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{3\bar{y}^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 1.$$

(b) Na forma padrão, reconhecemos essa cônica como uma Elipse.