Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
**Professor Reginaldo Demarque**

**Verificação de Aprendizagem 2**
**Cálculo 3**
**12.025 HE, 10 de novembro**
**10/11/2025**
**Turma M2 – 2025-2**

# Gabarito

---

**Questão 1.** ........................................................................ ______/ 4 pts

(a) [2 pts] Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{3}x^3y^2}{2x^5+y^5}$$

(b) [2 pts] Sejam $u = \sqrt{r^2+s^2}$, $r = x\cos(t) + y \quad \text{e} \quad s = x + y\sin(t)$.

Determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1, y = 2, t = 0$

**Solução:**

(a) Fazendo $y = kx$, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}x^3k^2x^2}{2x^5+k^5x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3}k^2x^5}{x^5(2+k^5)} = \frac{\sqrt{3}k^2}{2+k^5}.$$

Como para cada valor de $k$ temos um valor diferente para o limite, o limite não existe.

(b) Note que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos(t), \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -x\sin(t),$$

e

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = y\cos(t).$$

Também,

$$r(1,\ 2,\ 0) = 3 \text{ e } s(1,\ 2,\ 0) = 1$$

Com isso,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{r\cos(t)}{\sqrt{r^2+s^2}} + \frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,\ 2,\ 0) = \frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{rx\sin(t)}{\sqrt{r^2+s^2}} + \frac{sy\cos(t)}{\sqrt{r^2+s^2}}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(1,\ 2,\ 0) = 0 + \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

**Questão 2.** .................................................................................. ______/ 4 pts

Considere a função $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{2}xy^3}{6} + \sin\left(x^2+2y\right)$.

(a) [1 pt] Determine $f\left(\sqrt{2},\ -1\right)$.

(b) [1 pt] Determine as derivadas $f_x, f_y, f_{xx}$ e $f_{xy}$.

(c) [2 pts] Determine a taxa de variação máxima da função $f$ no ponto $\left(\sqrt{2},\ -1\right)$ e a direção em que isso ocorre.

**Solução:**

(a) $f\left(\sqrt{2},\ -1\right) = -\frac{1}{3}$

(b)

$$f_x = 2x\cos\left(x^2+2y\right) + \frac{\sqrt{2}y^3}{6},\ f_y = \frac{\sqrt{2}xy^2}{2} + 2\cos\left(x^2+2y\right).$$

$$f_{xx} = -4x^2\sin\left(x^2+2y\right) + 2\cos\left(x^2+2y\right),\ f_{xy} = -4x\sin\left(x^2+2y\right) + \frac{\sqrt{2}y^2}{2}$$

(c) Do item anterior, temos que

$$\nabla f(x,y) = \left(2x\cos\left(x^2+2y\right) + \frac{\sqrt{2}y^3}{6},\ \frac{\sqrt{2}xy^2}{2} + 2\cos\left(x^2+2y\right)\right).$$

Portanto, a direção cuja taxa de variação é máxima é dada pelo vetor:

$$\nabla f\left(\sqrt{2},\ -1\right) = \left(\frac{11\sqrt{2}}{6},\ 3\right) \approx (2.6,\ 3)\,.$$

E a taxa de variação máxima é dada por:

$$\left\|\nabla f\left(\sqrt{2},\ -1\right)\right\| = \frac{\sqrt{566}}{6} \approx 3.97.$$

**Questão 3.** .................................................................................... ______/ 2 pts

Em quais pontos da esfera **centrada na origem** e com **raio** $\frac{\sqrt{6}}{4}$ o plano tangente é paralelo ao plano $\alpha : \; x - y + 2z = 1$?

**Solução:**

Sabemos que a esfera tem equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{8}.$$

Assim, esta esfera pode ser vista como a superfície de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ no nível $\frac{3}{8}$.

Com isso, sabemos que o vetor normal ao plano tangente à esfera em um ponto $(x, y, z)$ é dado por

$$\nabla f(x, y, z) = (2x,\; 2y,\; 2z)\,.$$

E sabemos o vetor normal do plano $\alpha$ é $\vec{n} = (1,\; -1,\; 2)$, portanto devemos ter $\nabla f$ e $\vec{n}$ devem ser paralelos, isto é,

$$\nabla f = \lambda \vec{n},$$

donde,

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} \Longrightarrow x = \frac{\lambda}{2},\; y = -\frac{\lambda}{2},\; z = \lambda.$$

Substituindo na equação da esfera, temos que

$$\frac{3\lambda^2}{2} = \frac{3}{8} \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \frac{1}{2}.$$

Logo, os pontos buscados são:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{4},\; \frac{1}{4},\; -\frac{1}{2}\right) \text{ e } P_2 = \left(\frac{1}{4},\; -\frac{1}{4},\; \frac{1}{2}\right).$$