Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da $2^{\underline{a}}$ Prova – Cálculo IV – 09/06 – 11:00 - 13:00

Questão 1 (4 pontos):

Solução: Fazendo $x = t$, obtemos a seguinte parametrização para a curva dada: $\alpha(t) = (t, t, 2t^2)$, onde $0 \leq t \leq 1$, visto que $y \geq 0$ e $z \leq 2$.

Neste caso, como a massa do arame é a integral de linha da função densidade de massa, temos que

$$\int_C f ds = \int_0^1 f(t, t, 2t^2)\|(1, 1, 4t^2)\|dt = \int_0^1 2t\sqrt{2 + 16t^2}dt = \frac{13\sqrt{2}}{4}.$$

Questão 2 (3 pontos): Sabemos que o trabalho W é dado pela integral de linha do campo ao longo do quadrado. Como o campo F é de classe C^1 em todo $\mathbb{R}^2$, podemos usar o Teorema de Green, daí, sendo $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ a região limitada pelo quadrado dado, temos que

$$W = \int_{\partial R} F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(\cos y^2 + x) - \frac{\partial}{\partial y}(xy) \right) dxdy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1 - x \; dxdy = 4.$$

Solução:

Questão 3 (3 pontos):

Solução: Note que o campo F é C^1 em todo $\mathbb{R}^2$ e que

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y \,\texttt{sen}\, x + 3x^2y^2 + e^{y^2}) = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2 \cos x).$$

Neste caso, sabemos que a integral de linha independe do caminho ligando os extremos da curva. Podemos ver que a curva C é uma curva simples com ponto inicial em $(0, 0)$ e ponto final em $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Assim, considere a curva C_1 dada pelo segmento de reta ligando esses pontos parametrizado por $\alpha(t) = (t, 0)$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Com isso,

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(t, 0) \cdot (1, 0)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \; dt = 0.$$