



## Gabarito

Questão 1. .... / 4 pts

Considere a função  $f(x, y) = -x^3 - 2xy + x + y^2$ .

- (a) Determine os pontos críticos.
- (b) Classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

**Solução:** Fazendo

$$\nabla f(x, y) = (-3x^2 - 2y + 1, -2x + 2y) = (0, 0),$$

encontramos os 2 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (-1, -1), \quad P_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} -6x & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(-1, -1) = \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8 \text{ e } f_{xx}(-1, -1) > 0, \text{ ponto de mínimo.}$$

$$\det D^2 f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -8 \text{ ponto de sela.}$$



Questão 2. .... / 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função  $f(x, y, z) = 2x - y + z - 1$  sujeito à restrição  $x^2 + 3y^2 + z^2 = 3$ .

**Solução:** Defina  $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ . Queremos encontrar  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -1 = 6\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + 3y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as 2 seguintes soluções:

$$P_1 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right), \lambda = -\frac{2}{3}; \quad P_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \lambda = \frac{2}{3};$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) = -5, \quad f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2},$$

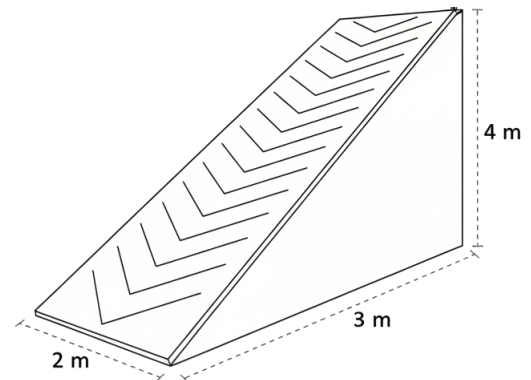
Com isso, o valor máximo absoluto é  $\frac{3}{2}$  e o mínimo é  $-5$ .



Questão 3. .... / 3 pts

A figura ao lado representa o projeto de uma rampa a ser construída.

- (a) [1 pt] Qual será a área da rampa?
- (b) [2 pts] Qual é a estimativa do erro no cálculo dessa área, sabendo-se que o erro cometido nas medidas é de no máximo 1%, isto é, 0.01 cm? Dê a porcentagem do erro em relação à medida da área.



### Solução:

- (a) Pelo Teorema de Pitágora, temos que o comprimento da rampa é dado por 5 m. Portanto, a área da rampa é  $10 m^2$ .
- (b) A fórmula para a área da rampa é dada por

$$A(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2},$$

onde  $x$  é a largura da rampa,  $y$  é a medida da base da rampa e  $z$  a altura final. Vamos usar a diferencial para estimar o erro.

$$dA = \sqrt{y^2 + z^2}dx + \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^2}}dy + \frac{xz}{\sqrt{y^2 + z^2}}dz$$

Substituindo os valores fornecidos, temos que o erro estimado é de no máximo  $0.078 m^2$ . Portanto, o erro cometido é de 0.78%.