2ª Prova de
Análise Funcional
Escola de Verão 2021

Instruções

- A prova terá duração de 24 horas contando a resolução e o envio.
- Deve-se enviar somente a resolução das questões.
- Deve-se enviar um único arquivo no formato pdf.
- Deve-se digitalizar as questões na ordem correta.
- A resolução deve estar **escrita a mão e a caneta**.
- Não é necessário repetir o enunciado das questões.
- A interpretação das questões faz parte dos critérios de avaliação.
- Responda cada questão de maneira clara e organizada.

Total de Pontos: 7,5.

1. [2,5 pts] Seja $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ um aplicação contínua e seja $C = (C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Defina $J : C \longrightarrow C$ por
$$Jf(x) = \int_0^1 K(x,\xi)f(\xi)d\xi.$$
Mostre que $J \in \mathcal{K}(C)$. J possui inversa?

2. [2,5 pts] Sejam H um espaço de Hilbert e $(x_n) \subset H$ uma sequencia ortonormal. Assumindo-se que vale a Desigualdade de Bessel
$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x_n, y)|^2 \leq \|y\|^2, \ \forall y \in H,$$
prove que $x_n \rightharpoonup 0$ em $\sigma(H, H')$.

3. [2,5 pts] Seja $T : \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definido por $Tx = \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_n}{2^n}, \ldots\right)$, onde $x = (x_n) \in \ell^2$. Mostre que $T - \lambda I$ é invertível para todo λ tal que $|\lambda| > \frac{1}{2}$ e que $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\ell^2)$.