Soluções dos Para Casa

Matrizes e Sistemas Lineares

4. ....

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

5. ....

(a) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.

(b) Calcule M^3, onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a)

$$AB^t = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 11.$$

(b)

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^3 = M^2 M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

9. ....

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solução: Multiplicando-se a 2ª linha por 2 e somando-se à primeira, temos

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ y + 11z = 2 \end{cases}$$

Donde conclui-se que

$$x = 2z - \frac{1}{3} \text{ e } y = 2 - 11z$$

10. ....

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Como a matriz A é a mesma pra ambos os sistemas, podemos escalonar a matriz aumentada $[A|B\ C]$, uma vez que o mesmo escalonamento serve para os dois sistemas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & | & -2 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & | & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 & -4 \end{bmatrix} L_2 \to -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & | & -4 & -4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso vemos que o sistema $AX = C$ não tem solução, pois a última linha do escalonamento foi $0 = 1$, um absurdo.

Quanto ao sistema $AX = B$, temos que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = | \\ y + z = |, \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$X = \{(-3\alpha + 3|, -\alpha + |, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

11. ....

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & | & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & | & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & | & 3 \end{bmatrix} L_3 \leftrightarrow L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 - L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_3 \\ \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Voltando ao formato de sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_6 = 1 \\ x_5 + x_6 = 2. \end{cases}$$

Fazendo $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$ e $x_6 = \gamma$ escrevemos a solução geral:

$$S = \{(-2\alpha + 3\beta + 6, \alpha, -11, \beta, -4, \gamma);\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

12. ....

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z\left(a^2 - 1\right) = a + 1, \end{cases}$$

Solução: Para isso, vamos colocar o sistema na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 2 & | & 5 \\ 2 & 3 & a^2 - 1 & | & a + 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & a^2 - 3 & | & a - 3 \end{bmatrix} L_2 \to L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2 - 3 & | & a - 4 \end{bmatrix}$$

A partir desta matriz, podemos concluir que o sistema:

- não terá soluções quando $a^2-3=0$ e $a-4\neq 0$, isto é, quando $a=\pm\sqrt{3}$
- terá infinitas soluções quando $a^2-3=0$ e $a-4=0$, isto é, nunca terá infinitas soluções.
- terá uma única solução quando $a^2-3\neq 0$ e $a-4\neq 0$, isto é, quando $a\neq\pm\sqrt{3}$ e $a\neq 4$.

Em resumo, se $a=\pm\sqrt{3}$ o sistema não tem soluções, se $a\neq\pm\sqrt{3}$ o sistema tem uma única solução.

13. ....

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&2\\1&-1&2&1\\1&3&3&2\end{bmatrix}$$

Solução: Primeiramente vamos escalonar com a matriz A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&1&2&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] L_2\to L_2-L_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right] L_3\to L_3+L_2$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-1&-1&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{array}\right]$$

Como zeramos a última linha da matriz linha-equivalente à matriz, temos que A não é invertível.

Agora, vamos escalonar a matriz B.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&2&-1&2&0&1&0&0\\1&-1&2&1&0&0&1&0\\1&3&3&2&0&0&0&1\end{array}\right] \begin{array}{l}L_2\to L_2-L_1\\L_3\to L_3-L_1\\L_4\to L_4-L_1\end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&-2&1&-1&1&0&0\\0&-2&1&0&-1&0&1&0\\0&2&2&1&-1&0&0&1\end{array}\right] \begin{array}{l}L_1\to L_1-L_2\\L_3\to L_3+2L_2\\L_4\to L_4+L_2\end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&3&0&2&-1&0&0\\0&1&-2&1&-1&1&0&0\\0&0&-3&2&-3&2&1&0\\0&0&3&1&-2&0&1&1\end{array}\right] L_4\to L_3+L_4 \left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&3&0&2&-1&0&0\\0&1&-2&1&-1&1&0&0\\0&0&-3&2&-3&2&1&0\\0&0&0&3&-5&2&2&1\end{array}\right]$$

Neste passo já sabemos que B é invertível, pois o sistema homogêneo associado a ela tem solução única. Vamos continuar o escalonamento para encontrar a inversa.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&3&0&2&-1&0&0\\0&1&-2&1&-1&1&0&0\\0&0&-3&2&-3&2&1&0\\0&0&0&3&-5&2&2&1\end{array}\right] \begin{array}{l}L_1\to L_1+L_3\\L_2\to 3L_2+2L_3\end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to 3L_1 - 2L_4 \\ L_2 \to 3L_2 + L_4 \\ L_3 \to 3L_2 - 2L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{9}L_3 \\ L_4 \to \frac{1}{3}L_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

Logo,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$