

Minicurso EDOs em Espaços de Banach

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

Prof. Luiz Viana e Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

12 à 21 de fevereiro de 2025



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Exponencial
- 5 Semigrupos de Classe C^0



- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Exponencial
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Apresentação do Minicurso

- **Ementa:** Definição de Espaços de Banach. Exponencial de Operadores Lineares Limitados. Semigrupos de classe C^0 . Gerador Infinitesimal. Existência e Unicidade para o PVI. Resolvente de um operador. Semigrupos das Contrações. O Teorema de Hille-Yosida. Aplicações e perspectivas de pesquisa.
- **Material:** reginaldodr.github.io/academic/semigrupos/minicurso-2025-verao



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia**
- 3 Espaços de Banach
- 4 Exponencial
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Bibliografia



Alvécio Moreira Gomes

Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução

Editora UFRJ, 2ª ed., Rio de Janeiro, 2005.

[Edição digital disponibilizada aqui](#)



Amnon Pazy

Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.

Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.



S. Kesavan

Topics in Functional Analysis and Applications

New Age International Ltd, 2ª ed., New Delhi, 2015.





Lawrence C. Evans

Partial differential equations

volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.



Morris W. Rirsch and Stephen Smale

Differential equations, dynamical systems, and linear algebra

ACADEMIC PRESS. INC., 1974.



- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach**
- 4 Exponencial
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Definição 1

Seja X um \mathbb{K} -espaço vetorial. Uma aplicação

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

- a $\|x\| \geq 0$;
- b Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;
- c $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- d $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \| \cdot \|)$ é dito um **espaço normado**.



Definição 2

Sejam X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X

- a) **converge** para $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0 \implies \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

- b) **é de Cauchy** se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n \geq n_1 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$





Exercício

- a Em um espaço normado X , mostre que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy;
- b Exiba um espaço normado Y no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge em Y (veja o Exemplo A.14 das Notas do Minicurso).



Definição 3

Um espaço normado X é dito um **espaço de Banach** se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X .



Exemplos:

- a Para cada inteiro $n \geq 1$, \mathbb{K}^n é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|x\|_0 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Na verdade, \mathbb{K}^n é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (**Exercício!**).



- b) Dados dois inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, o espaço das matrizes $m \times n$, denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $A = [a_{jk}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Na verdade, $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (**Exercício!**).



Definição 4

Sejam X e Y dois espaços normados. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - a\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$



Definição 5

Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as **aplicações lineares e contínuas** de X em Y , com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

- a Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, X)$;
- b Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X' , que é conhecido como **o dual topológico** de X ;
- c O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotado por X^* , que é conhecido como **o dual algébrico** de X (**veja o Apêndice A.3 das Notas do Minicurso**).



Aplicações Lineares Limitadas

Dados dois espaços normados X e Y , e uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$, temos a seguinte equivalência:

$$T \text{ é contínua} \iff \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty.$$

Definição 6

Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita **limitada** se

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \quad (1)$$

Em outras palavras, **uma aplicação linear é limitada se, e somente se, é contínua.**



Exemplo:

Dados dois espaços normados X e Y , a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(X; Y) \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R}$$

é uma **norma em $\mathcal{L}(X; Y)$** , denotada por $\|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)}$. Em particular,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X; Y)} \|x\|_X$$

É conhecido que

$\mathcal{L}(X; Y)$ é um espaço de Banach $\iff Y$ é um espaço de Banach.



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Exponencial**
- 5 Semigrupos de Classe C^0



A função exponencial

A função **logaritmo natural** é a bijeção contínua (com inversa contínua), definida por

$$\log : x \in (0, +\infty) \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt \in \mathbb{R}.$$

A inversa de $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, e usualmente escrevemos

$$e^x := \exp(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Cabe recordar que:

- $e^0 = 1$;
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Solução do PVI

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos constatar que a única função $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ solução do **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = ax, & t \in [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.



Propriedades das Soluções

Denotando $x(t) = S(t)x_0$, fazemos as seguintes considerações:

- a) Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t) : \underbrace{x_0 \in \mathbb{R}}_{\text{dado inicial}} \longmapsto \underbrace{S(t)x_0}_{\text{Solução do PVI}} \in \mathbb{R}$$

é uma **função linear**.

- b) $S(0)x_0 = x(0) = x_0$, para cada x_0 fixado em \mathbb{R} , ou seja, $S(0)$ é exatamente a função identidade $I : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$;
- c) Fixados $t, s \in [0, +\infty)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$S(t+s)x_0 = S(t)S(s)x_0.$$



Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ considere o sistema de EDOs

$$X'(t) = AX, \quad t \in [0, +\infty),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$



Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ considere o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

A solução procurada é um caminho

$$X : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

Em analogia ao caso unidimensional

$$X(t) = e^{tA} X_0$$



Exponencial de Matrizes

Recordemos que a norma em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dada por

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

para cada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Definition 4.1

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. A exponencial de A é dada por

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots \quad (2)$$



- a A série de matrizes, dada em (2), é **absolutamente convergente**, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A^j\|}{j!}$$

é sempre uma série de números reais convergente.

- b $S(t)X_0 := e^{tA}X_0$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$



- © A aplicação $S(t) : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ possui propriedades análogas às obtidas no caso unidimensional. Mais precisamente,
- Para cada $t \in [0, +\infty)$, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}))$;
 - $S(0) : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ é o operador identidade;
 - Para quaisquer $t, s \in [0, +\infty)$, vale $S(t + s) = S(t)S(s)$.
- © Quantitativamente, resolver sistemas de equações diferenciais lineares requer identificar a matriz na forma canônica de Jordan similar a A . Para uma análise do comportamento das soluções, a abordagem espectral de A é uma estratégia eficaz. (veja [Morris, 1974]).



EDOs para operadores lineares

Parece natural pensar sobre a resolução e a análise do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach e $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(X)$.



Definition 4.2

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. A **exponencial** da T é dada por

$$e^T := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!}, \quad (3)$$

onde $T^0 := I$ e $T^{n+1} := T \circ T^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

- Não é difícil constatar que a série que define e^T **converge absolutamente**.
- Como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach, $e^T \in \mathcal{L}(X)$ encontra-se bem definida.
- Explorando a noção de **semigrupo uniformemente contínuo**, concluiremos, mais adiante, que $\mathbf{x}(t) = e^{tT} \mathbf{x}_0$ é a única solução de

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X. \end{cases}$$



Neste minicurso, o principal objetivo é obter uma condição necessária e suficiente para que o problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X, \end{cases}$$

possua solução, onde

- X é um espaço de Banach.
- $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \longrightarrow X$ é uma aplicação linear (não necessariamente limitada) definida em um subespaço vetorial $D(\mathbf{A})$ de X .

Isto será garantido pelo Teorema de Hille-Yosida, que representa um marco muito importante da teoria geral dos semigrupos.



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Exponencial
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Definição 7

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

① $S(0) = \text{Id};$

② $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in [0, +\infty);$

Dizemos que S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

③ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - \text{Id})x\|_X = 0, \forall x \in X.$

Dizemos que S é **uniformemente contínuo** se

④ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - \text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$





Exemplo

- 1 A exponencial e^{tA} , quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.
- 2 Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup, isto é,

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

Então $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ dada por $[S(t)f](s) = f(t+s)$, onde $t \in [0, +\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ e $f \in X$, define um semigrupo de classe C^0 .



Princípio da Limitação Uniforme

Teorema 8 (Banach-Steinhaus)

Sejam X e Y dois espaços normados, com X Banach, e consideremos uma família

$$\mathcal{F} = \{T_i : X \longrightarrow Y; i \in I\} \subset \mathcal{L}(X, Y),$$

não necessariamente enumerável, com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$, temos

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < \infty.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty.$$

Em outras palavras, a limitação pontual da família \mathcal{F} implica a sua limitação uniforme.



Proposição 9

Se S é um semigrupo de classe C^0 em X , então existem $\mu \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4)$$

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Corolário 10

Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$,

$$t \in [0, +\infty) \mapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$



Definição 11

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X . O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in D(A).$$

Proposição 12

$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.



Dado S é um semigrupo de classe C^0 em X , vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in X.$$

Existência e Unicidade de um PVI

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

Se $x_0 \notin D(A)$ em X , então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma solução generalizada (fraca) do PVI.

Teorema 13

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então

$$S(\cdot)Ax \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$



Exercício

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Se $x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax d\xi$$



Proposição 14

Sejam X um espaço de Banach. Se $u : [a, b] \longrightarrow X$ é contínua, então u é integrável. Além disso,

① $\left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt$

② Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então

$$A \left(\int_a^b u(t) dt \right) = \int_a^b A(u(t)) dt \in Y.$$



Proposição 15

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. então para todo $x \in X$,

- a $\int_0^t S(\xi)x \, d\xi \in D(A).$
- b $A \left(\int_0^t S(\xi)x \, d\xi \right) = S(t)x - x.$
- c A é fechado.
- d $D(A)$ é denso em X .

Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.



Proposição 16 (Unicidade)

Se $S_1(t) = e^{tA}$ e $S_2(t) = e^{tA}$ em X , então $S_1 = S_2$.

