Minicurso EDOs em Espaços de Banach

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, \quad t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds$$

Prof. Luiz Viana e Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

12 à 21 de fevereiro de 2025

Sumário

Sumário

Apresentação do Minicurso

- **Ementa**: Definição de Espaços de Banach. Exponencial de Operadores Lineares Limitados. Semigrupos de classe C^0. Gerador Infinitesimal. Existência e Unicidade para o PVI. Resolvente de um operador. Semigrupos das Contrações. O Teorema de Hille-Yosida. Aplicações e perspectivas de pesquisa.
- **Material**: reginaldodr.github.io/academic/semigrupos/minicurso-2025-verao

Sumário

- Alvércio Moreira Gomes
  Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução
  Editora UFRJ, 2ª ed., Rio de Janeiro, 2005.
  Edição digital disponibilizada aqui

- Amnon Pazy
  Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.
  Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.

- S. Kesavan
  Topics in Functional Analysis and Applications
  New Age International Ltd, 2ª ed., New Delhi, 2015.

Lawrence C. Evans
Partial differential equations
volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

Morris W. Rirsch and Stephen Smale
Differential equations, dynamical systems, and linear algebra
ACADEMIC PRESS. INC., 1974.

Sumário

Definição 1

Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma norma se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

a. $\|x\| \geq 0$;
b. Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;
c. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \|\cdot\|)$ é dito um espaço normado .

Definição 2

Sejam X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X

a. converge para $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0 \implies \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

b. é de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n \geq n_1 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Exercício

(a) Em um espaço normado X, mostre que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy;

(b) Exiba um espaço normado Y no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge em Y (veja o Exemplo A.14 das Notas do Minicurso).

Espaços de Banach

Definição 3

Um espaço normado X é dito um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X.

Exemplos:

ⓐ Para cada inteiro $n \geq 1$, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|x\|_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Na verdade, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (Exercício!).

b Dados dois inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, o espaço das matrizes $m \times n$, denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $A = [a_{jk}]_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Na verdade, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (Exercício!).

Aplicações Contínuas

Definição 4

Sejam X e Y dois espaços normados. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - a\|_X < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Definição 5

Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares e contínuas de X em Y, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

a. Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X,X)$;
b. Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ por X', que é conhecido como o dual topológico de X;
c. O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotado por X^*, que é conhecido como o dual algébrico de X (veja o Apêndice A.3 das Notas do Minicurso).

Aplicações Lineares Limitadas

Dados dois espaços normados X e Y, e uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$, temos a seguinte equivalência:

$$T \text{ é contínua } \iff \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty.$$

Definição 6

Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita limitada se

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \tag{1}$$

Em outras palavras, uma aplicação linear é limitada se, e somente se, é contínua.

Exemplo:

Dados dois espaços normados X e Y, a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(X;Y) \longmapsto \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X;Y)$. É conhecido que

$\mathcal{L}(X;Y)$ é um espaço de Banach $\iff$ Y é um espaço de Banach.

Sumário

A função exponencial

A função logaritmo natural é a bijeção contínua (com inversa contínua), definida por

$$\log : x \in (0, +\infty) \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \in \mathbb{R}.$$

A inversa de $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, e usualmente escrevemos

$$e^x := \exp(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Cabe recordar que:

- $e^0 = 1$;
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução do PVI

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos constatar que a única função $x : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ solução do **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = ax, \ \ t \in [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.

Propriedades das Soluções

Denotando $x(t) = S(t)x_0$, fazemos as seguintes considerações:

a. Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t) : \underbrace{x_0}_{\text{dado inicial}} \in \mathbb{R} \longmapsto \underbrace{S(t)x_0}_{\text{Solução do PVI}} \in \mathbb{R}$$

   é uma função linear.

b. $S(0)x_0 = x(0) = x_0$, para cada x_0 fixado em $\mathbb{R}$, ou seja, $S(0)$ é exatamente a função identidade $\mathrm{I} : x \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{R}$;

c. Fixados $t, s \in [0, +\infty)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$S(t+s)x_0 = S(t)S(s)x_0.$$

Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ considere o sistema de EDOs

$$X'(t) = AX,\ \ t \in [0, +\infty),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ considere o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ \ t \in [0,+\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

A solução procurada é um caminho

$$X : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Em analogia ao caso unidimensional

$$X(t) = e^{tA}X_0$$

Recordemos que a norma em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dada por

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

para cada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definition 4.1

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A exponencial de A é dada por

$$e^{A} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \mathrm{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots. \tag{2}$$

a. A série de matrizes, dada em (2), é absolutamente convergente, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A^j\|}{j!}$$

é sempre uma série de números reais convergente.

b. $S(t)X_0 := e^{tA}X_0$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

- A aplicação $S(t) : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ possui propriedades análogas àquelas obtidas no caso unidimensional. Mais precisamente,
  - Para cada $t \in [0, +\infty)$, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}))$;
  - $S(0) : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é o operador identidade;
  - Para quaisquer $t, s \in [0, +\infty)$, vale $S(t+s) = S(t)S(s)$.
- Quantitativamente, resolver sistemas de equações diferenciais lineares requer identificar a matriz na forma canônica de Jordan similar a A. Para uma análise do comportamento das soluções, a abordagem espectral de A é uma estratégia eficaz. (veja [Morris, 1974]).

EDOs para operadores lineares

Parece natural pensar sobre a resolução e a análise do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$.

Definition 4.2

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. A exponencial da T é dada por

$$e^{T} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!}, \tag{3}$$

onde $T^0 := \mathrm{I}$ e $T^{n+1} := T \circ T^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

- Não é difícil constatar que a série que define e^T converge absolutamente.
- Como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach, $e^T \in \mathcal{L}(X)$ encontra-se bem definida.
- Explorando a noção de semigrupo uniformemente contínuo, concluiremos, mais adiante, que $\mathbf{x}(t) = e^{tT}\mathbf{x_0}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X. \end{cases}$$

Neste minicurso, o principal objetivo é obter uma condição necessária e suficiente para que o problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

possua solução, onde

- X é um espaço de Banach.
- $A : D(A) \longrightarrow X$ é uma aplicação linear (não necessariamente limitada) definida em um subespaço vetorial $D(A)$ de X.

Isto será garantido pelo Teorema de Hille-Yosida, que representa um marco muito importante da teoria geral dos semigrupos.

Sumário

Definição 7

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores limitados em X quando:

1. $S(0) = \mathrm{Id}$;
2. $S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \in [0, +\infty)$;

   Dizemos que S é de classe C^0 ou fortemente contínuo se
3. $\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - \mathrm{Id})x\| = 0, \ \forall x \in X.$

   Dizemos que S é uniformemente contínuo se
4. $\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$

Exemplo

1. A exponencial e^{tA}, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.
2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do $\sup$. Então $S(t)f(s) = f(t+s)$ definie um semigrupo de classe C^0.

Proposição 8

Se S é um semigrupo de classe C^0 em X, então exite $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \forall t \in [0, T].$$

Corolário 9

Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$,

$$t \in [0, +\infty) \longmapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$

Teorema 10

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. Então,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\|S(t)\|)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log(\|S(t)\|)}{t} = \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0.$$

Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\| \leq M, \ \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um semigrupo uniformemente limitado. Se, além disso, $M = 1$, S é dito semigrupo das contrações.

Lema 11

Seja $p : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva, isto é, $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quanto $t \to +\infty$ e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [Alvercio, 2011, Lema 1.2.5]

Gerador Infinitesimal

Definição 12

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. O gerador infinitesimal de S é o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \ \forall x \in D(A).$$

Proposição 13

$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Notações

1. Dado S é um semigrupo de classe C^0 em X, vamos designar por A_h o operador linear limitado
$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \ \forall x \in X.$$
2. Escrevemos $S(t) = e^{tA}$ para dizer que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 em X.
3. Escrevemos $A \in G(M, \omega)$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0, que satisfaz a condição:
$$\|e^{tA}\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0.$$

Teorema 14

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X. Dado $x \in D(A)$, então

$$e^{(\cdot)A}x \in C^0([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(e^{tA}x\right) = Ae^{tA}x = e^{tA}Ax.$$

Existência e Unicidade de um PVI

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = e^{tA}x_0$ define uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, \ \ t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Se $x_0 \notin D(A)$ em X, então $x(t) = e^{tA}x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma solução generalizada (fraca) do PVI.

Exercício

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X. Se $x \in D(A)$ mostre que

$$e^{tA}x - e^{sA}x = \int_s^t Ae^{\xi A}x \, d\xi = \int_s^t e^{\xi A}Ax \, d\xi$$

Proposição 15

Se $S(t) = e^{tA}$ em X, então para todo $x \in X$,

$$\int_0^t e^{sA}x\,ds \in D(A) \quad \text{e} \quad A\left(\int_0^t e^{sA}x\,ds\right) = e^{tA}x - x.$$

Proposição 16

Se $S(t) = e^{tA}$ em X, então A é fechado e seu domínio é denso em X.

Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 17 (Unicidade)

Se $S_1(t) = e^{tA}$ e $S_2(t) = e^{tA}$ em X, então $S_1 = S_2$.

Definição 18

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X. Defina $A^0 = \mathrm{Id}$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1});\ A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x),\ \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 19

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X.