Soluções dos Para Casa

Vetores, Matrizes e Sistemas Lineares

1. ....

Localize os pontos $A = (1,1)$, $B = (-3,0)$, $C = (4,1)$, $D = (2,-3)$ e $E = (3,-2)$ no plano cartesiano. Determine as coordenadas dos vetores abaixo e esboce um de seus representantes.

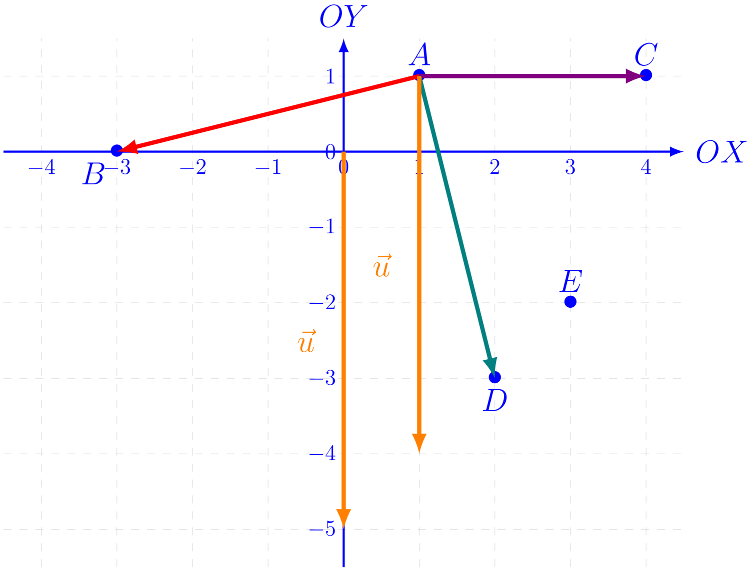
(a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

(b) $\vec{v} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{AD}$

Solução:

(a)

$$\vec{u} = (-4,-1) + (3,0) + (1,-4) = (0,-5)$$



(b) Note que $\overrightarrow{BC} = (7,\ 1)$, $\overrightarrow{EC} = (1,\ 3)$, $\overrightarrow{EA} = (-2,\ 3)$ e $\overrightarrow{AD} = (1,\ -4)$. Daí,

$$\vec{v} = 2\,(6,\ -2) + 3\,(-2,\ 3) - 2\,(1,\ -4) = (12,\ -4) + (-6,\ 9) + (2,\ -8) = (4,\ 13)$$

2. ....

Normalize os vetores $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ e $\vec{v} = (4, -\sqrt{2}, 0, -5)$.

3. ....

Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(a) Esboce o triângulo ABC que tem como vértices as extremidades dos vetores.

(b) Calcule $u' = Ru$, $v' = Rv$ e $w' = Rw$. Esboce o novo triângulo $A'B'C'$ com vértices dados pelos novos vetores.

(c) Calcule $u'' = Su$', $v'' = Sv'$ e $w'' = Sw'$. Esboce o triângulo $A''B''C''$ com vértices dados pelos novos vetores.

(d) Calcule $M = SR$. Esboce o triângulo com vértices em Mu, Mv e Mw.

Solução:

(a) Todos os esboços estão feito abaixo. Vamos fazer os cálculos dos vetores.

(b) $u' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $u'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $w'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

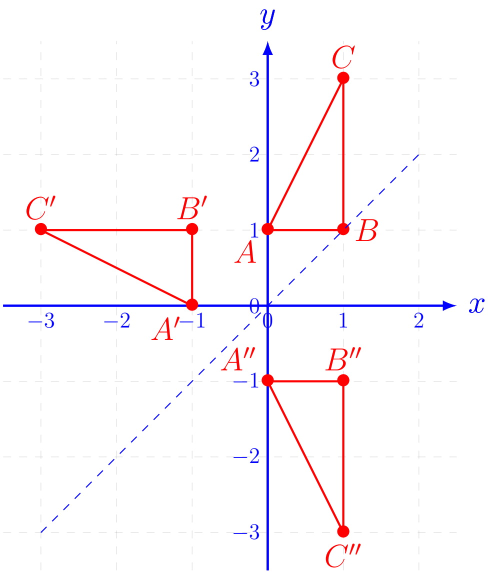
(d) Por fim,

$$M = SR = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Donde,

$Mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = u''$, $Mv = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = v''$ e

$Mw = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = w''$.



4. ....

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -6 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

5. ....

(a) Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.

(b) Calcule M^3, onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a)

$$AB^t = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 11.$$

(b)

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M^3 = M^2 M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. ....

(a) Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.

(b) Um retângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$ e $C = (0, 5, -4)$. Determine o ponto D.

7. ....

(a) Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B.

(b) Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C.

8. ....

(a) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.

(b) Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

9. ....

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

Solução: Multiplicando-se a 2ª linha por 2 e somando-se à primeira, temos

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ y + 11z = 2 \end{cases}$$

Donde conclui-se que

$$x = 2z - \frac{1}{3} \text{ e } y = 2 - 11z$$

10. ....

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Como a matriz A é a mesma pra ambos os sistemas, podemos escalonar a matriz aumentada $[A|B\ C]$, uma vez que o mesmo escalonamento serve para os dois sistemas.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & -7 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} L_2 \to -L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Com isso vemos que o sistema $AX = C$ não tem solução, pois a última linha do escalonamento foi $0 = 1$, um absurdo.

Quanto ao sistema $AX = B$, temos que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + z = 4, \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$X = \{(9 - 3\alpha, 4 - \alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

11. ....

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+x_5=2 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4+x_5+2x_6=3 \\ x_1+2x_2-3x_4+2x_5+x_6=4 \\ 3x_1+6x_2+x_3-9x_4+4x_5+3x_6=9, \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2\to L_2-L_1 \\ L_3\to L_3-L_1 \\ L_4\to L_3-3L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} L_3\leftrightarrow L_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} L_3\to L_3-L_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1\to L_1-L_3 \\ L_4\to L_4-3L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Voltando ao formato de sistema:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4-x_6=0 \\ x_3+2x_6=1 \\ x_5+x_6=2. \end{cases}$$

Fazendo $x_2=\alpha$, $x_4=\beta$ e $x_6=\gamma$ escrevemos a solução geral:

$$S=\{(-2\alpha+3\beta+\gamma,\alpha,1-2\gamma,\beta,2-\gamma,\gamma);\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

12. ....

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y+2z=5 \\ 2x+3y+z\left(a^2-1\right)=a+1, \end{cases}$$

Solução: Para isso, vamos colocar o sistema na forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & a^2-1 & a+1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-3 & a-3 \end{bmatrix} L_2 \to L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{bmatrix}$$

A partir desta matriz, podemos concluir que o sistema:

- não terá soluções quando $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 \neq 0$, isto é, quando $a = \pm\sqrt{3}$
- terá infinitas soluções quando $a^2 - 3 = 0$ e $a - 4 = 0$, isto é, nunca terá infinitas soluções.
- terá uma única solução quando $a^2 - 3 \neq 0$ e $a - 4 \neq 0$, isto é, quando $a \neq \pm\sqrt{3}$ e $a \neq 4$.

Em resumo, se $a = \pm\sqrt{3}$ o sistema não tem soluções, se $a \neq \pm\sqrt{3}$ o sistema tem uma única solução.

13. ....

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: Primeiramente vamos escalonar com a matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a última linha da matriz linha-equivalente é zero, temos que A não é invertível.

Agora, vamos escalonar a matriz B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - L_2 \\ L_3 \to L_3 + 2L_2 \\ L_4 \to L_4 + L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} L_4 \to L_3 + L_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Neste passo já sabemos que B é invertível, pois o sistema homogêneo associado a ela tem solução única. Vamos continuar o escalonamento para encontrar a inversa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 + L_3 \\ L_2 \to 3L_2 + 2L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to 3L_1 - 2L_4 \\ L_2 \to 3L_2 + L_4 \\ L_3 \to 3L_2 - 2L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 7 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 4 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to \frac{1}{3}L_1 \\ L_2 \to \frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \to -\frac{1}{9}L_3 \\ L_4 \to \frac{1}{3}L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$