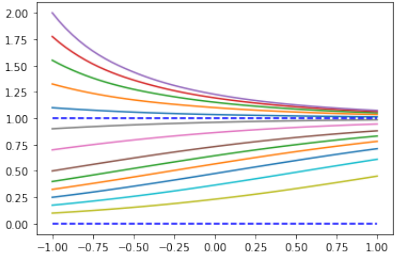
Cálculo II

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prof. Reginaldo Demarque



Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras

Sumário

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números. Uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas desta função.

Exemplo

Primeiros modelos:

1. **Crescimento Populacional Malthusiano:** $y' = ky$
2. **Crescimento Populacional Logístico:** $y' = ky(M - y)$
3. **Queda Livre de Corpos:** $h''(t) = -g$
4. **Vibrações Mecânicas:** $my'' + ky = 0$
5. **Pêndulo Simples:** $\theta'' + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0.$

Classificação

As equações diferenciais são classificadas quanto ao tipo, à ordem e à linearidade.

a. Dizemos que uma equação diferencial é ordinária, ou simplesmente EDO, quando envolver somente funções de uma variável. Caso contrário dizemos que é parcial, ou simplesmente (EDP). As duas equações anteriores são EDO's e um exemplo de EDP é a seguinte equação
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0.$$

b. Uma equação diferencial é dita de n-ésima ordem quando a maior ordem das derivadas é n.

c. Uma EDO é dita linear quando é da forma
$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^2} + \cdots + a_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y + f(t) = 0.$$
E não linear caso contrário.

Definição 1

Uma solução de uma EDO de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as derivadas até ordem n estão definidas em I e satisfazem a equação neste intervalo.

Exemplo

Considere a equação

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Note que $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{2t}$ são soluções da equação para todo $t \in \mathbb{R}$.

Uma EDO de $1^{\underline{a}}$ ordem é uma equação da forma

$$F(t, y, y') = 0.$$

Um problema da forma

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é dito problema de valor inicial (PVI). Uma solução geral de uma EDO de $1^{\underline{a}}$ ordem, é uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária, tal que toda solução particular pode ser obtida desta família por uma escolha apropriada da constante.

Modelo Populacional Malthusiano

Este tipo de modelo é razoável para descrever populações que tem recurso ilimitados para crescimento e ausência de predadores.

- $y(t)$: número de indivíduos de uma população no instante t.
- $y'(t)$: taxa de crescimento de uma população no instante t.
- Supõe-se que a taxa de crescimento de uma população é proporcional à população presente

$$y'(t) = ky(t)$$

Supondo que a população no instante $t = 0$ é y_0, determine a função $y = y(t)$. Em quanto tempo a população dobra de tamanho?

Para Casa

1. Determine uma solução geral para a equação

$$y'(t) = y(t).$$

2. Determine uma solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Campos de Direções

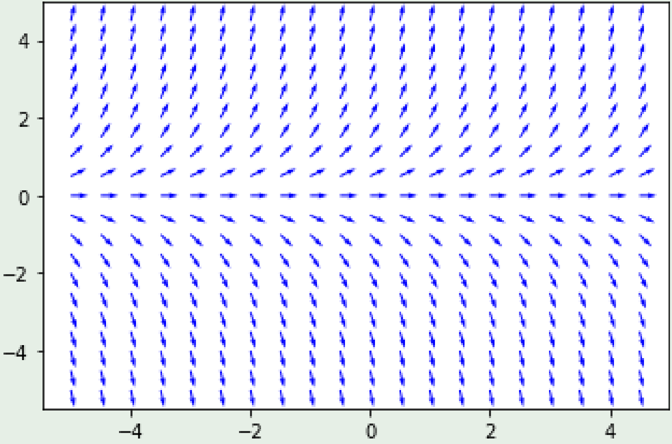
Campos de Direções são ferramentas validas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$y'(t) = f(t, y),$$

onde f é uma função dada chamada de função taxa de variação. Ele é construído desenhando-se em cada ponto de uma malha retangular um segmento de reta cujo coeficiente angular é valor de f naquele ponto.

Exemplo

Campo de direções de $y' = y$



Equações Separáveis

As EDO's de 1ª ordem separáveis são equções da forma

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Integrando esta equação em relação a x temos que

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + C.$$

Fazendo a substituição $u = y(x)$, $du = y'(x)dx$ temos que

$$\int g(u)du = \int f(x)dx + C.$$

Assim, se G é uma primitiva de g temos que

$$G(y(x)) = \int f(x)dx + C$$

Crescimento Populacional Logístico

Vimos que um modelo simples de crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional à população presente $y(t)$ naquele instante. O crescimento logístico, leva em conta que a população tem um valor máximo sustentável M. Quando a população se aproxima da capacidade máxima, os recursos tornam-se menos abundantes e a taxa de crescimento começa a diminuir. Uma relação simples que exibe esse comportamento é quando

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$

Exemplo

Considere o problema de crescimento logístico:

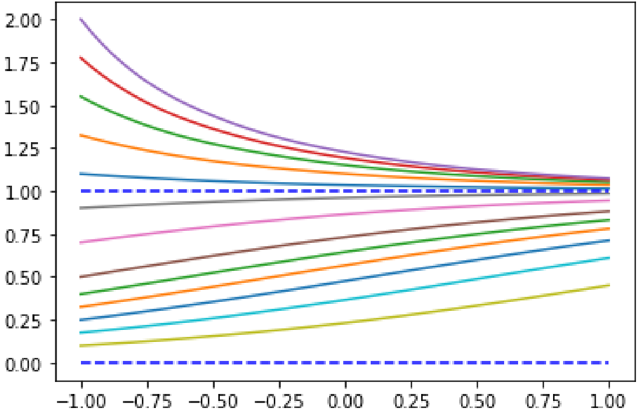
$$\begin{cases} y' = y(1-y) \\ y(0) = y_0, y_0 \geq 0. \end{cases}$$

Mostre que a solução geral é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$

Solução geral

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$



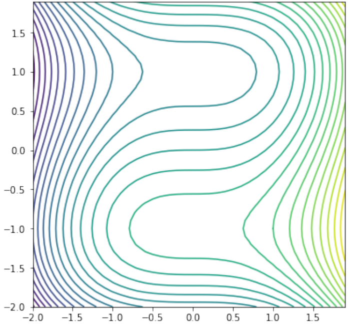
Família de Soluções para diversos valores de C.

Exemplo

$$y' = \frac{x^2}{1-y^2}$$

Solução geral

$$y^3 + x^3 - 3y = C$$



Família de Soluções para diversos valores de C.

EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

Técnina do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por fator integrante função $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

Técnina do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por fator integrante função $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \underbrace{\mu(t)p(t)}_{\mu'(t)}y = \mu(t)q(t).$$

$$\Rightarrow (\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$$

Que pode ser resolvida por integração direta. O fator integrante $\mu(t)$ pode ser obtido por

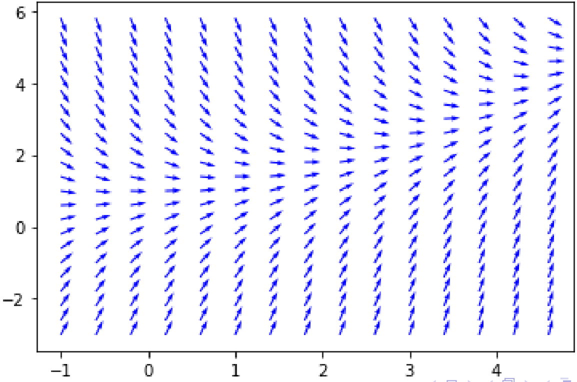
$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Exemplo

Determine a solução gerla da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(0, 1)$.

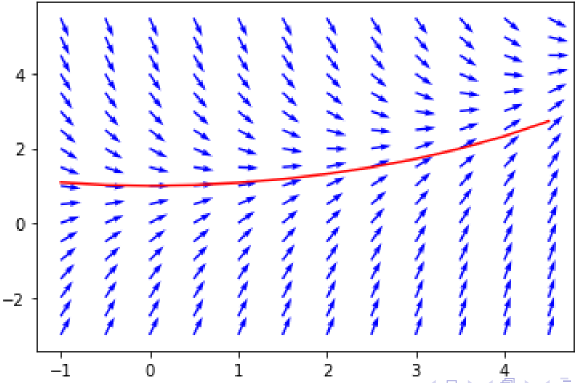


Exemplo

Determine a solução gerla da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(0, 1)$.



Sejam um corpo de massa m que está caindo e que sofre uma força de resistência do ar que é proporcional à velocidade do corpo. Adotando-se o referencial positivo para baixo, a velocidade satisfaz a equação:

$$mv' + kv = mg$$

Exemplo

Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesam 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 m/s. Determine a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre. Quanto tempo demora para a velocidade chegar a 5,1 m/s. Como varia a altura em função do tempo?

Para Casa

1. Determine a solução geral da EDO: $y' - 2y = 4 - t$
2. Resolva o PVI

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

3. Determine uma fórmula geral para as soluções da EDO: $y' + ay = g(t)$, onde a é uma constante.

Equações Exatas

Uma EDO de 1ª ordem

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

é dita equaçao diferencial exata quando existe uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Neste caso, podemos reescrever a EDO da forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Supondo que y é uma função de x, pela regra da cadeia para várias variáveis, temos que

$$\frac{d}{dx}(\psi(x, y(x))) = 0,$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente por

$$\psi(x, y(x)) = C$$

Exemplo

Resolva a EDO: $2x + y^2 + 2xyy' = 0.$

Teorema 2

Suponha que $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ *são contínuas num retângulo* $[a,b] \times [c,d]$, *então a EDO*

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Exemplo

Encontre a solução geral da EDO

$$(y\cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2e^y - 1)y' = 0$$

Para Casa

Encontre a solução geral das EDO's:

1. $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$
2. $\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1$

Existência e Unicidade de Soluções

Ao se trabalhar com equções diferenciais duas perguntas são naturais: Um problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sempre tem solução? Se sim essa solução é única?

Exemplo

O problema

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções! Para todo $c \geq 0$ são soluções do PVI

$$y(t) = \begin{cases} (t-c)^2, & t \geq c \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Lineares

Teorema 3

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas em um intervalo I contendo t_0, então o PVI tem uma única solução em I.

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções Geral

Teorema 4

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(t, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas em um retângulo*

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; a < t < b, c < y < d\}$$

contendo (t_0, y_0)*, então o PVI tem uma única solução em um intervalo contendo* t_0*.*

Exemplo

1. A única solução do problema

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é $y = \dfrac{1}{t+1}$ definida no intervalo $(1, \infty)$. Note que não existe uma solução definida em toda a reta!

2. O problema

$$\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(ty) + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem solução?

As EDO's de 2ª ordem linear são equações que podem ser escritas na forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t).$$

Uma EDO de 2ª ordem linear é dita homogênea se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \tag{1}$$

Exemplo

1. EDO Linear de 2ª ordem não-homogênea: $y'' + 4y = e^t \operatorname{sen} t$
2. EDO Linear de 2ª ordem homogênea: $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
3. EDO não-Linear de 2ª ordem: $yy'' + y' = 0$

Teorema 5 (Teorema de Existência e Unicidade das Soluções)

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \;\; y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas em um intervalo I contendo t_0, então o PVI tem uma única solução definida neste intervalo.

Exemplo

Encontre o maior intervalo no qual a solução do PVI certamente existe.

$$\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t+3)y = 0 \\ y(1) = 2, \;\; y'(1) = 1. \end{cases}$$

EDOs Lineares Homogêneas

Princípio da Superposição de Soluções

Para EDO's lineares homogêneas, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação definidas em um mesmo intervalo, então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

também o é, para quaisquer constantes c_1 e c_2.

Exemplo

Mostre que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^3$ são soluções da EDO mas não são soluções do PVI.

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2, \ \ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Para Casa

Mostre que:

1. As funções $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \operatorname{sen} x$ são soluções da EDO
$$y'' + y = 0$$
2. As funções $y_1 = 1 + \cos x$ e $y_2 = 1 + \operatorname{sen} x$ são soluções da EDO
$$y'' + y = 1,$$
mas $y_1 + y_2$ não é.
3. As funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = 1$ são soluções da EDO
$$y''y - xy' = 0,$$
mas $y_1 + y_2$ não é.

Soluções Fundamentais

No último exemplo vimos que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^3$, $\forall\ x \in (0, +\infty)$ são soluções da EDO $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ mas não do PVI

$$\begin{cases} x^2y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2,\ \ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Será possível determinar uma solução do PVI a partir dessas duas? E uma solução geral da EDO?

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, então o procedimento do exemplo anterior pode ser aplicado. Dados y_1 e y_2 duas da EDO, então o PVI terá solução desde que

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}.$$

$W[y_1, y_2](t_0)$ é chamado de Wronskiano.

Teorema 6

Se y_1 *e* y_2 *são soluções da EDO*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e se existe t_0 *tais que* $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$*, então a família de funções*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

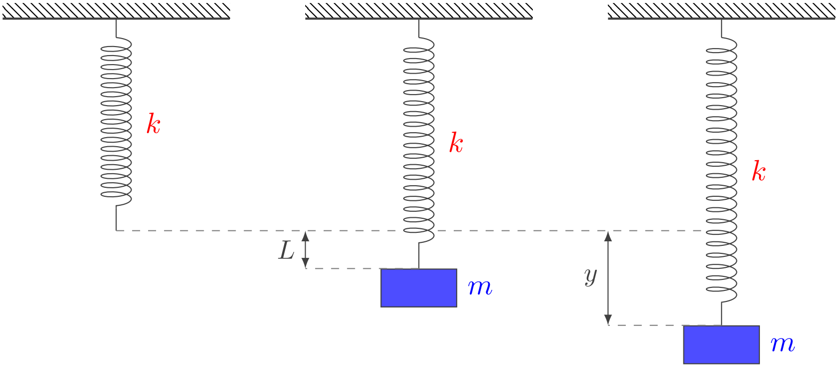
incluem todas as soluções da EDO, chamada solução geral da EDO. Neste caso, y_1 *e* y_2 *são ditas soluções fundamentais.*

Exemplo

Mostre que $y_1 = t^{1/2}$ e $y_2 = t^{-1}$ são soluções fundamentais da EDO

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \; t > 0$$

e determine a solução geral.



Considere um sistema de massa-mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola, com constante elástica k, que está presa ao teto. Se levarmos em conta um amortecimento viscoso proporcional à velocidade do corpo, então o sistema satisfaz a EDO

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde $\gamma > 0$ é a constante de amortecimento.

Uma EDO linear de 2ª ordem, homogênea, com coeficientes constantes é uma equação da forma

$$ay'' + by' + cy = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0. \tag{2}$$

Para resolver uma equação do tipo (2) vamos nos inspirar no caso de 1ª ordem. Uma EDO linear homogêna de 1ª com coeficientes constantes é da forma

$$ay' + by = 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Sabemos que as soluções para esta equação são $y(t) = ce^{-bt/a}$. Neste caso é natural supor que uma solução da EDO (2) seja da forma $y(t) = e^{\lambda t}$ para alguma constante λ. Daí, substituindo em (2) temos que

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

A última equação é dita equação característica.

Exemplo

Determinar a solução geral da EDO: $y'' + y' - 2y = 0$.

Se λ_1 e λ_2 são raízes distintas da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, t \in \mathbb{R}.$$

Raízes Reais Iguais

Exemplo

Determinar a solução geral da EDO: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Se α é a única raiz da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1e^{\alpha t} + c_2te^{\alpha t}, t \in \mathbb{R}.$$

Revisão de Números Complexos[1]

- O conjunto dos números complexos, denotado por $\mathbb{C}$, são formados pelos elementos da forma

$$z = a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \text{ com } i^2 = -1,$$

  onde estão definidas as operações de adição e multiplicação:
  - $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
  - $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- O Complexo Conjugado de z é $\bar{z} = a - bi$.
- O módulo de z é definido por $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ e vale $z\bar{z} = |z|^2$.
- Se z é raíz de um polinômio, então $\bar{z}$ também o é.

[1] Veja o apêndice do livro James Stewart, Cálculo Volume 1.

Vamos estudar inicialmente o caso

$$y'' + \beta^2 y = 0,$$

cujas soluções fundamentais são $y_1 = e^{i\beta t}$ e $y_2 = e^{-i\beta t}$. Mas como podemos escrevê-las na forma padrão $a + bi$?

Primeiramente, note que $u_1(t) = \cos(\beta t)$ e $u_2(t) = \operatorname{sen}(\beta t)$ também são soluções fundamentais da EDO. Portanto,

$$y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t).$$

A exponencial complexa

Até agora temos que

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{i\beta t} \\ y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t). \end{cases}$$

Como $y_1(0) = 1$ e $y_1'(0) = i\beta$, daí, temos que $c_1 = 1$ e $c_2 = i$. Logo,

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t).$$

Em particular, para $t = 1$, temos que

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta).$$

Curiosamente, quando $\beta = \pi$, obtemos a mais bela de todas as equações da matemática:

Equação de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

De forma geral, obtemos:

$$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

conhecida como fórmula de Euler.

Exemplo

Determine a solução geral da EDO : $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \operatorname{sen}(\beta t)), \ \ t \in \mathbb{R}.$$

Vibrações Mecânicas Livres

Vimos que o modelo para um sistema massa-mola preso no teto em um meio viscoso é:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde m é a massa, $k > 0$ é a constante elástica e $\gamma > 0$ é a constante de amortecimento.

Quando $\gamma = 0$, o sistema não tem amortecimento e podemos reescrever a equação:

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Com isso a solução geral é:

$$y = A\cos(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_0 t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

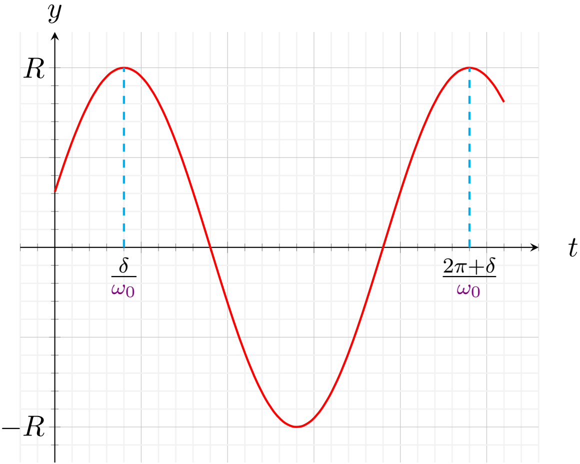
A solução pode ser reescrita como:

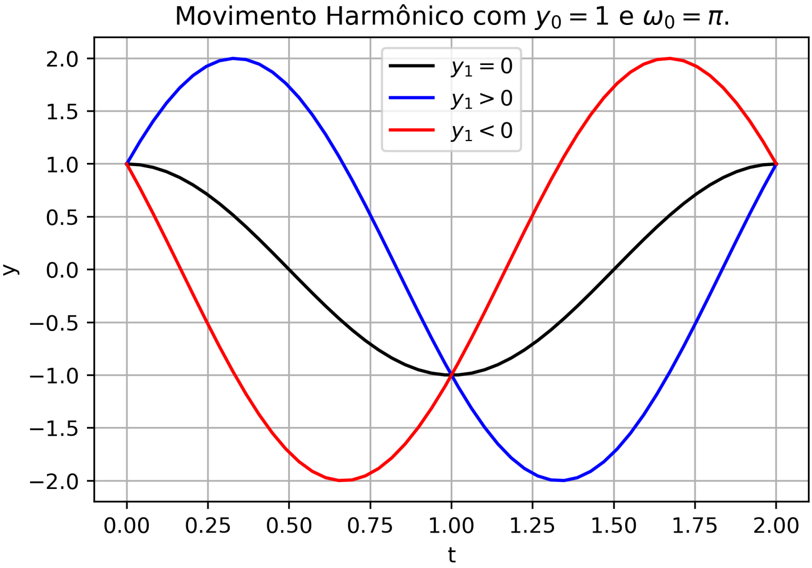
$$y = R\cos(\omega_0 t - \delta),$$

onde $A = R\cos\delta$, $B = R\,\mathrm{sen}\,\delta$. O período do movimento é $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, a frequência é $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$, a amplitude é R e o parâmetro adimensional δ é chamado de fase.

O movimento descrito é chamado movimento harmônico.

$$y = R\cos(\omega_0 t - \delta)$$




Movimento Harmônico com $y_0 = 1$ e $\omega_0 = \pi$.
$y_1 = 0$
$y_1 > 0$
$y_1 < 0$
y
t
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00

Quando o sistema é amortecido temos a equação:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0.$$

Donde temos a equação característica:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0,$$

cujas raízes são:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m},$$

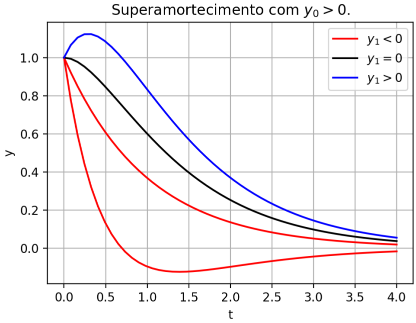
o que nos fornece 3 casos:

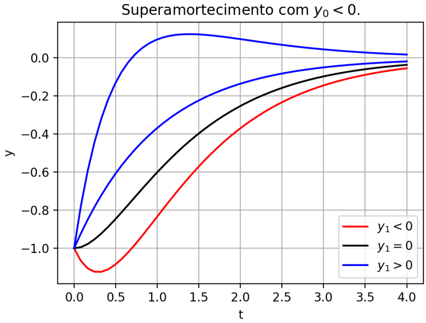
1. **Superamortecimento**: $\gamma^2 > 4mk$
2. **Subamortecimento**: $\gamma^2 < 4mk$
3. **Amortecimento Crítico**: $\gamma^2 = 4mk$

Superamortecimento

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.





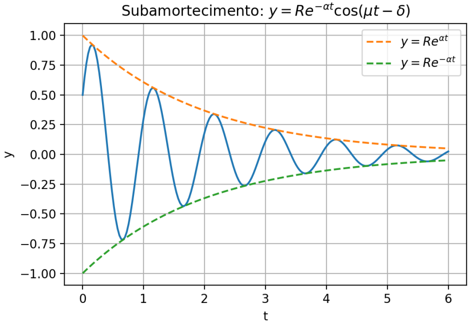
A solução é da forma

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}}(A\cos(\mu t) + B\,\mathrm{sen}(\mu t)),$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}$. Que pode ser reescrita como

$$y(t) = Re^{-\frac{\gamma t}{2m}}\cos(\mu t - \delta),$$

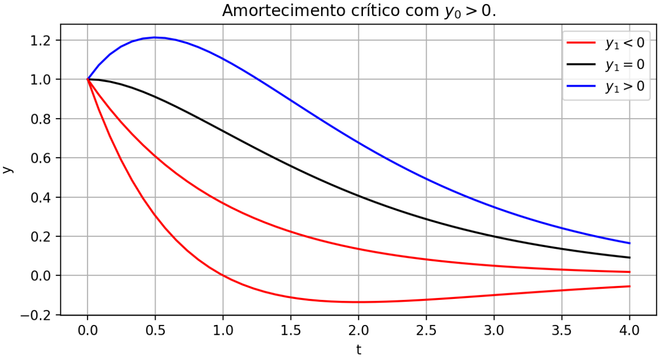
onde $A = R\cos\delta$ e $B = R\,\mathrm{sen}\,\delta$.



Amortecimento crítico

A solução é da forma

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma t}{2m}}.$$



Para Casa

Esboce os gráficos das soluções dos problemas abaixo.

1. Suponha que uma massa de 4,5 kg estica uma mola x5cm. A massa é deslocada 2,5 cm para baixo e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial de apontando para cima de 30 cm/s.
2. Uma massa de 20g estica uma mola 5 cm. Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de 400 dinas·s/cm e que a massa é puxada pra baixo mais 2 cm de depois é solta.

Equações não-homogêneas

É fácil ver que se $y_p(t)$ é uma solução de uma EDO não-homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

y_1 e y_2 são soluções fundamentais da EDO homogênea correspondente, então a solução geral da equação não-homogênea é

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

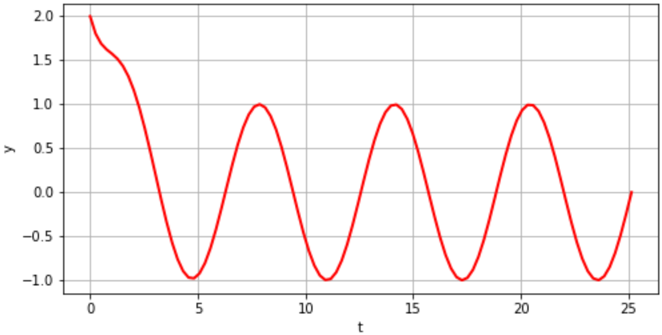
Exemplo

Se no modelo de vibrações mecânicas existir uma força externa $F = F(t)$, então teremos um problema de oscilação forçada que é modelado pela seguinte equação não-homogênea:

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t).$$

Neste caso, como determinar a solução do seguinte problema cuja força externa é periódica?

$$y'' + 2y' + y = 2\cos(t).$$


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
0
5
10
15
20
25
t

Método dos Coeficientes a Determinar

Este método funciona para qualquer EDO não-homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_k(t),$$

onde

$$F_i(t) = e^{\alpha t}[(a_0 + \ldots + a_n t^n)\cos(\beta t) + (b_0 + \ldots + b_m t^m)\,\mathrm{sen}(\beta t)].$$

Neste caso, deve-se procurar, para cada F_i, uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s e^{\alpha t}[(A_0 + \ldots + A_q t^q)\cos(\beta t) + (B_0 + \ldots + B_q t^q)\,\mathrm{sen}(\beta t)],$$

em que $q = \max\{n, m\}$, s é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhuma parcela de y_p seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \ldots, A_q, B_0, \ldots, B_q$ são coeficientes a serem determinados.

Exemplo

Encontre a solução geral das seguintes equações:

a. $y'' + y' = 2 + t^2$.
b. $y'' - 2y' + y = e^t + t$
c. $y'' + 4y = e^t \cos t$

Vibrações Mecânicas Forçadas

conteúdo...

Método da Variação dos Parâmetros

Este método funciona para qualquer EDO linear de 2ª ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

para o qual se conheça duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente em um intervalo I onde o wronskiano é não nulo.

Sabemos que a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

O método da variação dos parâmetros consiste em procurar uma solução particular da EDO não homogênea que tenha a forma da solução geral da homogênea, mas substituindo os parâmetros c_1 e c_2 por funções a determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, ou seja, da forma

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

com a condição de que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$

Exemplo

Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + y = \sec t \\ \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2. \end{cases}$$