Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Verificação de Aprendizagem
GAAL
03/05/2025
Turma K1 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (2,\ 3,\ -1)$, $B = (1,\ 2,\ 5)$ e a origem do sistema de coordenadas.

Solução: Sabemos que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1,\ 2,\ 5)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (2,\ 3,\ -1)$ são arestas dos triângulo. Logo, a área do triângulo é

$$\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Note que

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-17,\ 11,\ -1)\,.$$

Então, a área do triângulo é:

$$\frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2}\sqrt{411}.$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 - x_3 + x_4 = -5 \\ -3x_1 - 15x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -6 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 29 \end{cases}$$

(a) [0,5 pts] Escreva a matriz aumentada do sistema.

(b) [2 pts] Use o método de Gauss-Jordan para obter a matriz escalonada reduzida da matriz aumentada.

(c) [0,5 pts] Dê o conjunto solução do sistema.

(d) [0,5 pts] Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes.

(e) [0,5 pts] A matriz do coeficientes é invertível? Justifique.

Solução:

(a) A matriz aumentada é:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & -1 & 1 & -5 \\ -3 & -15 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & 4 & -13 & 29 \end{array}\right]$$

(b) Vamos escalonar a matriz:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 10 & -1 & 1 & -5 \\ -3 & -15 & 2 & -3 & 11 \\ 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 1 & 5 & 4 & -13 & 29 \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ -3 & -15 & 2 & -3 & 11 \\ 2 & 10 & -1 & 1 & -5 \\ 1 & 5 & 4 & -13 & 29 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_2 \to L_2 + 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -15 & 35 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} L_3 \to L_3 + L_2 \\ L_4 \to L_4 + 5L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_2 \to -L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad L_1 \to L_1 + L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(c) O sistema dado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_4 = 1 \\ x_3 - 3x_4 = 7, \end{cases}$$

cuja solução é:

$$S = \{(-5\alpha + \beta + 1,\ \alpha,\ 3\beta + 7,\ \beta)\,;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.\}$$

(d) Denote por A a matriz dos coeficientes. Logo, o posto$(A) = 2$ e nulidade$(A) = 2$.

(e) Não, pois se fosse, o sistema deveria ter solução única.

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Note que a primeira e segunda colunas são quase opostas, exceto pelo segundo termo. Com isso, vamos substituir a primeira pela soma das duas, isto é,

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad C_1 \to C_1 + C_2 \quad = \det \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Agora, basta fazer o desenvolvimento por cofatores da primeira coluna e usar a regra de Sarrus.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -2 \det \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -2 \det \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{matrix}}_{\text{regra de Sarrus}}$$

$$= -2\Big([6 - 24 + 1] - [2 - 8 + 9]\Big) = 40.$$

Solução alternativa fazendo-se o desenvolvimento apenas por linhas.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{matrix} \quad = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$= -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \to L_2 - 2L_1 \quad = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= -\det \begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -1 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 & -1 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{matrix}}_{\text{regra de Sarrus}}$$

$$= -\Big([-80 - 20] - [0 + 16 - 4]\Big) = 40.$$