Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da $2^{\underline{a}}$ Prova – Cálculo IV – 21/10 – 11:00 - 13:00

Questão 1 (4 pontos): Um arame tem forma da curva obtida como interseção da porção da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, $y\geq 0$, com o plano $x+z=2$. Sabendo-se que a densidade em cada ponto do arame é dada por $f(x,y,z)=xy$, calcule a massa total do arame.

Solução: Sabemos que a massa total do arame é dada pela seguinte integral de linha

$$M=\int_C f\,ds,$$

onde $C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4,\ y\geq 0\\ x+z=2.\end{cases}$

Substituindo a segunda equação na primeira e completando quadrado vemos que

$$C:\begin{cases} 2(x-1)^2+y^2=2,\ y\geq 0\\ z=2-x\end{cases}.$$

Com isso, obtemos a seguinte parametrização para C

$$\alpha(t)=(1+\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t,1-\cos t),\ \ t\in[0,\pi].$$

Daí,

$$M=\int_C f\,ds=\int_0^\pi f(\alpha(t))\|\alpha'(t)\|dt=\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{2}\operatorname{sen} t+\sqrt{2}\cos t\operatorname{sen} t\,dt=4.$$

Questão 2 (3 pontos): Calcule a integral $\displaystyle\int_C F\cdot dr$, onde $F(x,y)=(e^{x^2}+y,x)$ ao longo da curva C parametrizada por $\alpha(t)=(\operatorname{sen}^3 t-\operatorname{sen} t+1,\operatorname{sen} t)$, $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Solução: Note que F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (simplesmente conexo) e $\dfrac{\partial F_2}{dx}=\dfrac{\partial F_1}{dy}=1$. Daí, o campo é conservativo e a integral independe do caminho. Como $\alpha(0)=(1,0)$ e $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,1)$, tome o caminho $\beta(t)=(1,t),\ t\in[0,1]$, daí,

$$\int_C F\cdot dr=\int_0^1 F(\beta(t))\cdot\beta'(t)dt=\int_0^1 dt=1.$$

Questão 3 (3 pontos): Calcule a integral $\displaystyle\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, nos seguintes casos:

a) C é o círculo de centro $(2,0)$ e raio 1;

b) C é a elipse $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Solução:

a) Note que $\dfrac{\partial F_2}{dx} = \dfrac{\partial F_1}{dy}$ e F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Seja B a região limitada por C, ou seja, a bola de centro $(2,0)$ e raio 1. A região B está contida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que é um aberto onde F é de classe C^1, daí, podemos aplicar o Teorema de Green. Assim,

$$\int_C F \cdot dr = \iint_B \frac{\partial F_2}{dx} - \frac{\partial F_1}{dy} dxdy = 0,$$

onde C está orientada no sentido anti-horário.

b) Desta vez a região limitada pela elipse C contém a origem $(0,0)$ onde o campo não está definido. Neste caso, tome $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ e D a região entre C e C_1. Note que a região D está contida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que é um aberto onde F é de classe C^1, daí, podemos aplicar o Teorema de Green. Assim,

$$\int_{C \cup C_1} F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial F_2}{dx} - \frac{\partial F_1}{dy} dxdy = 0 \Rightarrow \int_C F \cdot dr = -\int_{C_1} F \cdot dr,$$

onde C deve estar orientada no sentido anti-horário e C_1 no sentido horário.

Com isso, considere a parametrização $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$ para C_1, daí,

$$\int_C F \cdot dr = -\int_{C_1} F \cdot dr = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$