Geometria Analítica e Álgebra Linear
GAAL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}.$$

Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

13 de março de 2024

Sumário

Sumário

O conjunto $\mathbb{R}^2$

Denotamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) tais x y são números reais. O número x chama-se primeira coordenada ou abcissa e o número y chama-se segunda coordenada ou ordenada.

Podemos representar geometricamente os elementos de $\mathbb{R}^2$ usando um sistema de coordenadas cartesianas, que consiste em um plano com um par de eixos perpendiculares OX e OY e que tem a mesma origem.

Exemplo

Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas, represente:

1. Os pontos $P = (1, 0)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (-3, -2)$.
2. Os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$.

Um espaço vetorial real V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$,$\vec{v} \in V$ faz corresponder um novo vetor $\vec{u} + \vec{v}$, chamado vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- A multiplicação por escalar, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\vec{v} \in V$ faz corresponder um vetor $\alpha\vec{v}$, chamado produto de α por $\vec{v}$.

Além disso, essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:

1. $\vec{u}+\vec{v}\in V$. (fechamento em relação à adição)
2. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (comutatividade)
3. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (associatividade)
4. Existe um vetor $\vec{0}\in V$, chamado vetor nulo, tal que
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u} \text{ para todo } \vec{u}\in V.$$
5. Para cada $\vec{v}\in V$, existe um vetor $\vec{-v}\in E$, chamado inverso aditivo, ou simétrico de $\vec{v}$, tal que
$$-\vec{v}+\vec{v}=\vec{0}.$$
6. $\alpha\vec{v}\in V$. (fechamento em relação à multiplicação por escalar)
7. $(\alpha+\beta)\vec{v}=\alpha\vec{v}+\beta\vec{v}$ e $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{v}+\alpha\vec{v}$. (distributividade)
8. $1\cdot\vec{v}=\vec{v}$.

O conjunto $\mathbb{R}^2$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

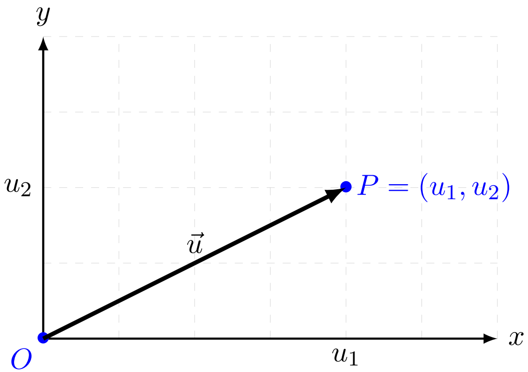
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2)$.

Representação Geométrica

Representamos um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ usando um segmento orientado com ponto inicial na origem do sistema de coordenadas e extremidade no ponto $P = (u_1, u_2)$.



Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

Norma de um vetor

O comprimento de vetor $\vec{u}$, também chamado de norma, é dado por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Exemplo

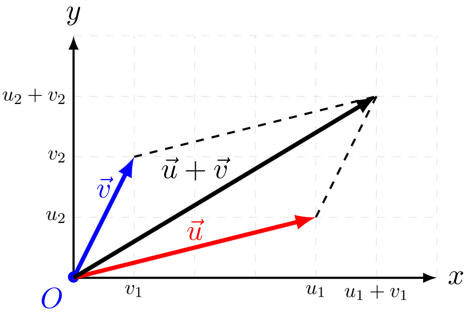
Represente no plano o vetor $\vec{u} = (1, 1)$ e calcule seu comprimento.

Representação Geométrica da Soma

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

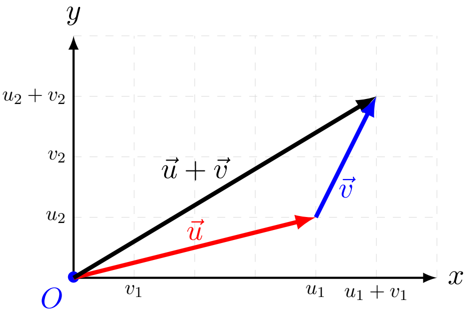
é obtido pela chamada lei do paralelogramo.



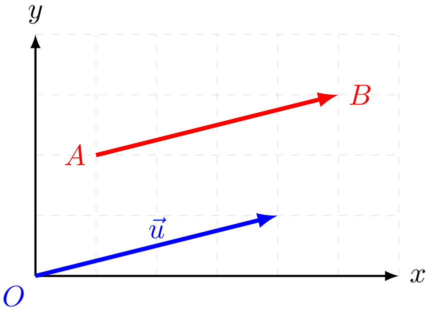
Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

é obtido pela chamada lei do paralelogramo.



Dizemos que um segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$ também representa um vetor $\vec{u}$ quando os dois têm mesmo comprimento, direção e sentido. Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

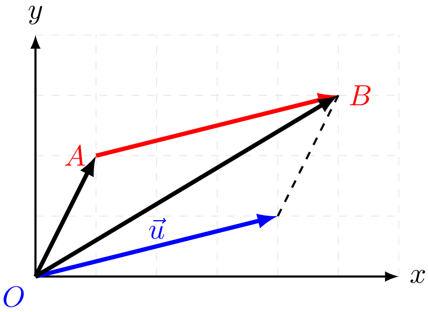
De uma forma geral temos que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Exemplo

Dados $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$, $C = (-1, 0)$ e $D = (0, 1)$. Mostre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e calcule sua norma.

Basta usar a lei do paralelogramo.



Se $\vec{u} = (x, y)$, então

$$\overrightarrow{OA} + \vec{u} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow (a_1 + x, a_2 + y) = (b_1, b_2),$$

donde

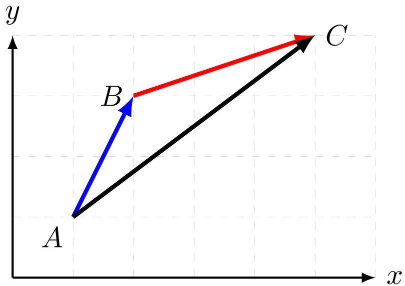
$$\begin{cases} x = b_1 - a_1 \\ y = b_2 - a_2. \end{cases}$$

Em resumo, dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, escrevemos

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Além disso, se tomarmos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, podemos escrever a soma da seguinte forma:

$$\color{blue}{\overrightarrow{AB}} + \color{red}{\overrightarrow{BC}} \color{black}{= \overrightarrow{AC}.}$$

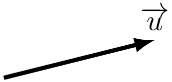


Para Casa 1

Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$ e $E = (3, -2)$ no plano cartesiano. Determine as coordenadas dos vetores abaixo e esboce um de seus representantes.

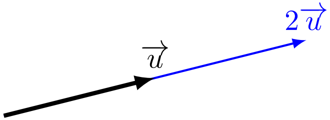
1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2. $\vec{v} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$

Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.

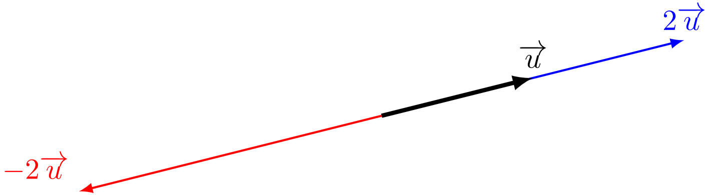


Representação Geométrica do Produto por Escalar

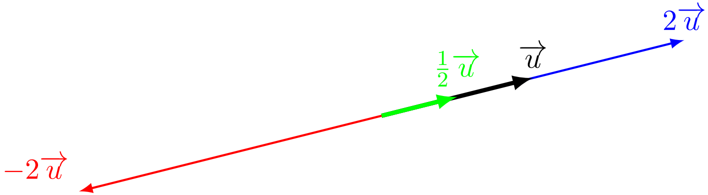
Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



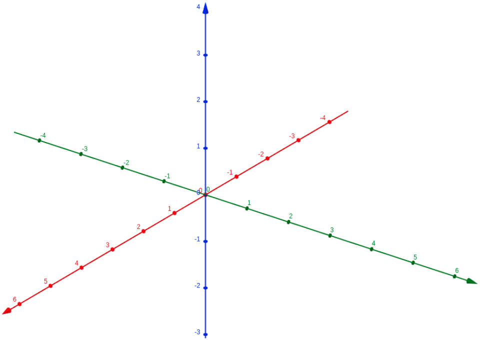
Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



O conjunto $\mathbb{R}^3$

Denotamos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto formado pelas triplas ordenadas (x, y, z) tais x, y e z são números reais.

Podemos representar geometricamente os elementos de $\mathbb{R}^3$ usando um sistema de coordenadas cartesianas, que consiste na escolha de três eixos com a mesma origem, OX, OY e OZ, mutuamente perpendiculares e que a orientação positiva é escolhida de acordo com a regra da mão direita.



Exemplo

1. Determine os pontos $(1, 3, 1)$ e $(3, -2, 2)$ no sistema cartesiano.
2. Esboce o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $z = 3$.

O conjunto $\mathbb{R}^3$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3)$.

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Do mesmo modo,

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Exemplo

Dados $A = (0, 3, 1)$, $B = (2, 3 - 1)$ e $C = (0, 1, 0)$ determine $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vetores no $\mathbb{R}^n$

De modo geral, denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto formado pelas n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$.

Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

De forma análoga, também definimos a norma (ou comprimento) de um vetor do $\mathbb{R}^n$ por

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ então

$$\vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Um vetor unitário é um vetor que tem norma 1. Dado qualquer vetor não nulo $\vec{v}$, sempre podemos obter um vetor unitário $\vec{u}$ com mesmo sentido de $\vec{v}$, basta fazer

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

Esse processo é chamada de normalização de $\vec{v}$. Alguns textos usam a notação $\hat{v}$ e o chamam de versor.

Exemplo

Normalize o vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$.

Para Casa 2

Normalize os vetores $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ e $\vec{v} = (4, -\sqrt{2}, 0, -5)$.

Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente.

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 4 tipos de alimentos diferentes,

	Alimento			
Vitamina	1	2	3	4
A	0.140	0.580	0.150	0
B	0.08	0	1.30	0.08
C	0	0	26	38
E	1.60	0	6.90	0.2

Cada alimento é uma variável, ou seja,

x_i representa a quantidade (em "pacotes" de 100g) do alimento i que deve ser consumido diariamente, com $i = 1, \ldots, 4$.

Com isso, se quisermos saber qual a quantidade de cada alimentos devemos consumir, para se ter a quantidade mínima de cada vitamina, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 = 3, \\ 0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 = 1.1, \\ 26x_3 + 38x_4 = 60, \\ 1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 = 11, \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.150 \\ 1.30 \\ 26 \\ 6.90 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos mais à frente que este sistema tem a seguinte solução

$$x_1 \approx 4.63,\ x_2 \approx 3.93,\ x_3 \approx 0.484 \text{ e } x_4 \approx 1.25.$$

Isto é, para se ingerir a quantidade mínima de cada tipo de vitamina devemos consumir:

463.0 gramas do alimento 1
393.0 gramas do alimento 2
48.4 gramas do alimento 3
125.0 gramas do alimento 4

Definição 1

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

No exemplo anterior, escrevemos o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 1.3 \\ 26 \\ 6.9 \end{bmatrix}, \ \text{e } \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Sumário

Matrizes

Uma matriz A, de tamanho $m \times n$, é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas, e será representada como:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a_{ij} é o elemento ou a entrada de posição i, j da matriz A. Denotamos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ cujos elementos são números reais.

Quando $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n. Neste caso, os elementos da $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam diagornal principal de A.

Exemplo

São exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$ $C = A + B$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A soma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Multiplicação por escalar

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$, $B = \alpha A$, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, isto é,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A multiplicação da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar $\alpha = -3$ é a matriz

$$B = -3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Com a soma e a multiplicação por escalar, o conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial!

Em particular, o conjunto das matrizes linha ou das matrizes coluna formam o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

De agora em diante, não usaremos mais a notação $\vec{v}$ para representar um vetor. Escreveremos simplesmente v e no contexto ficará claro que se trata de um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$, definimos o produto de A por B como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz A, de ordem $m \times n$, pode ser interpretada como uma transformação que leva vetores de $\mathbb{R}^n$ em vetores $\mathbb{R}^m$.

Exercício

1. A matriz $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rotaciona qualquer vetor do plano 90° no sentido anti-horário. Verifique esboçando no plano os vetores $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u = Rv$.
2. A matriz $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ reflete um vetor em relação à reta $y = x$. Verifique esboçando no plano os vetores u do item anterior e o vetor $w = Su$.

Neste sentido, o produto de matrizes desempenha o papel de composição de funções.

Exercício

Verifique isso calculando a matriz $M = SR$, onde R e S são as matrizes do exercício anterior e esboce os vetores u e Mu.

Para Casa 3

Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1. Esboce o triângulo ABC que tem como vértices as extremidades dos vetores.
2. Calcule $u' = Ru$, $v' = Rv$ e $w' = Rw$. Esboce o novo triângulo $A'B'C'$ com vértices dados pelos novos vetores.
3. Calcule $u'' = Su'$, $v'' = Sv'$ e $w'' = Sw'$. Esboce o triângulo $A''B''C''$ com vértices dados pelos novos vetores.
4. Calcule $M = SR$. Esboce o triângulo com vértices em Mu, Mv e Mw.

Para Casa 4

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Propriedades das operações com Matrizes

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$ (comutatividade da soma)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da soma)
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associatividade do produto por escalar)
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade do produto por escalar)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade do produto por escalar)
6. $A(BC) = (AB)C$ (associatividade do produto)
7. $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade)

Exemplo

Se A e B são matrizes quadradas, então vale a identidade?

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

Matriz Identidade

A matriz $n \times n$, definida por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada matriz identidade é o **elemento neutro da multiplicação**, isto é,

$$AI_n = I_m A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denotada por A^t, é a matriz obtida a partir de A trocando-se as linhas com as colunas, isto é, $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$.

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Transposta

Sejam A e B matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Para Casa 5

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.
2. Calcule M^3, onde

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operações com matrizes usando o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,-3],[3, 4,0]])
B=sp.Matrix([[-2,1,5],[0,3,-4]])
C=sp.Matrix([[-2,1,0],[0,3,0],[5,-4,0]])
S=A+B
display(S)
P=A*C
display(P)
T=A.T
display(T)
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix},\ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sumário

Definição 2

Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ do $\mathbb{R}^n$, definimos o produto escalar (ou produto interno) entre eles por:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemplo

Calcule $u \cdot v$, em que $u = (1, 2, -3)$ e $v = (-3, 5, 2)$.

Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores u, v e w em $\mathbb{R}^n$ e para qualquer número real λ, valem as propriedades:

1. $u \cdot v = v \cdot u$;
2. $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$;
3. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
4. $u \cdot u = \|u\|^2$.

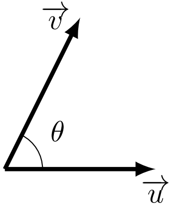
Exemplo

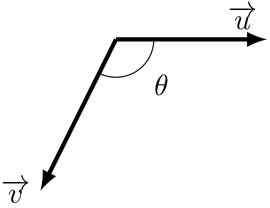
Mostre que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2.$$

Definição 3 (ângulo entre vetores)

Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, definimos o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como sendo o menor ângulo formado por seus respectivos representantes com mesma origem.



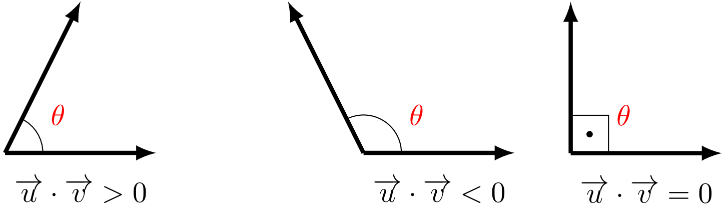


Proposição 4

Dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, então

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre eles.

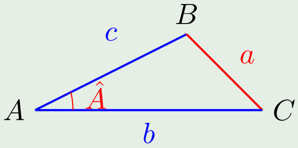


Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b e c, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}),$$

onde $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao lado a.



Exemplo

Determine os ângulo entre os vetores

1. $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$.
2. $\vec{u} = (2, 0, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, -1)$.

Definição 5

Dados vetores u e v em $\mathbb{R}^n$, definimos o ângulo entre u e v como sendo o valor $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz:

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Dizemos que dois vetores são ortogonais quando o ângulo entre eles é de 90°, isto é, quando

$$u \cdot v = 0.$$

Para Casa 6

1. Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.
2. Um retângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$ e $C = (0, 5, -4)$. Determine o ponto D.

Produto escalar usando o sympy

```
import sympy as sp
import mpmath

u=sp.Matrix([1.12,-3.25,2.07,-1.83 ])
v=sp.Matrix([-2.29,1.72,4.33,-1.54])
uv=u.dot(v)
nu=u.norm()
nv=v.norm()
cos=uv/(nu*nv)
theta=sp.acos(cos)
thetag=round(mp.degrees(theta),2)
```

Denotando-se os vetores como matrizes colunas, temos:

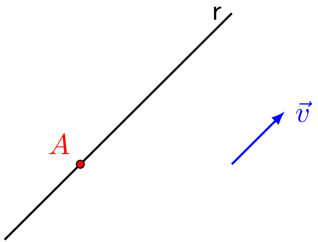
$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1.12 \\ -3.25 \\ 2.07 \\ -1.83 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.29 \\ 1.72 \\ 4.33 \\ -1.54 \end{bmatrix} = 3.6265$$

$$\cos(\theta) \approx 0.151850373283378 \Rightarrow \theta \approx 1.41835623915784 \text{ rad} \approx 81.27^\circ.$$

Sumário

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

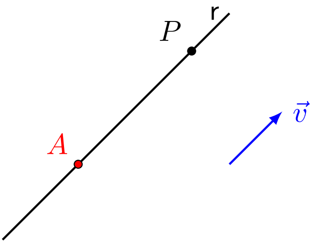
$$P = A + t\vec{v}, \ t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

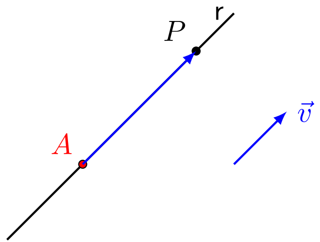
$$P = A + t\vec{v}, \ t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v}, \ \ t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Se $P=(x,y)$, $A=(x_0,y_0)$ e $\overrightarrow{v}=(a,b)$ em coordenadas temos que

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \;\; t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente, se $P=(x,y,z)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$ e $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \;\; t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de equações paramétricas da reta r.

Exemplo

(a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$.

(b) Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.

(c) Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.

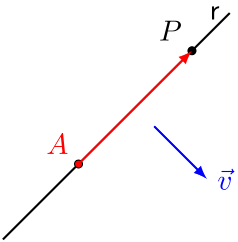
Para Casa 7

1. Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B.
2. Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C.

Note que a equação vetorial paramétrica da reta é válida para qualquer dimensão!

Equação Cartesiana da reta em $\mathbb{R}^2$

Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.



Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ desta reta r temos que

$$ax + by + c = 0.$$

Esta equação é dita equação cartesiana da reta.

Exemplo

Encontre a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (5, -9)$.

Equação reduzida da reta

A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação reduzida quando está na seguinte forma:

$$y = mx + n.$$

O coeficiente m é dito coeficiente angular da reta e mede a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo OX. E o número n é dito coeficiente linear da reta e representa a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo OY.

Equação segmentária da reta

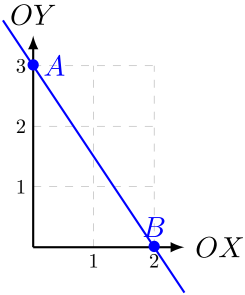
A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação segmentária quando está na seguinte forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

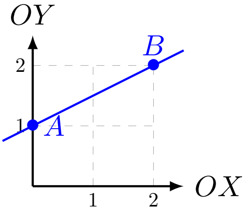
Neste caso, a reta intercepta os eixos OX e OY nas coordenadas p e q respectivamente.

Exemplo

1. Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos $A = (0, 3)$ e $B = (2, 0)$.
2. Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (2, 2)$.



Exemplo 1



Exemplo 2

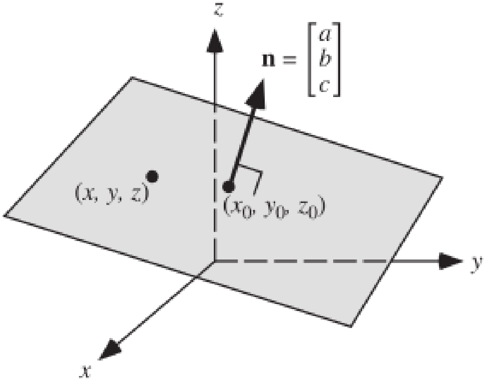
Para Casa 8

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.
2. Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

Equação Cartesiana do Plano no Espaço

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c) \perp \pi$, então os pontos e $P = (x, y, z)$do plano devem satisfazer a seguinte equação cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$



Exemplo

Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (-1, 1, 2) + t(0, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Interseção de Planos

Qual o conjunto dos pontos do espaço que estão na interseção dos dois planos a seguir?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Para descobrir isso, vemos multiplicar a 2ª equação por -2 e somar com a primeira.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Note que geometricamente os dois sistemas tratam de interseção de planos diferentes, mas algebricamente os sistemas são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto de pontos (x, y, z) como solução. Entretanto o segundo sistema é mais simples!

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem soluções da forma:

$$y = -z \text{ e } x = 1 - z.$$

Fazendo $z = t$, vemos que os pontos da interseção são da forma

$$X = (1 - t, -t, t) = (1, 0, 0) + t(-1, -1, 1) \; t \in \mathbb{R},$$

isto é, uma reta em $\mathbb{R}^3$.

Isto nos motiva a estudar os chamados sistemas lineares.

Sumário

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.
Um sistema de m equações lineares a n incógnitas é um conjunto de m equações lineares, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando o produto matricial, o sistema linear pode ser escrito da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}.$$

Solução de um Sistema Linear

Uma solução de um sistema linear a n incógnitas é um vetor $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação matricial $AX = B$ associada ao sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema.

Exemplo

O seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

tem como solução geral

$$X = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. Anteriormente, para resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fizemos uma operação elementares que o transformou no sistema mais simples de resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0, \end{cases}$$

cujo conjunto solução é: $X = \{(1-\alpha, -\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}.\}$.
Esse procedimento pode ser generalizado.

Método de Eliminação

O método utilizado acima é conhecido como método de eliminação, pois ao aplicá-lo, estamos “eliminando incógnitas”.

Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Obtemos sistemas equivalentes ao aplicarmos as chamadas operações elementares.

Operações Elementares

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Matriz Aumentada

Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear, somente os coeficientes do sistema são alterados, assim trabalharemos apenas com a chamada matriz aumentada do sistema, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

Ilustrando com o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{-2\times L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Neste caso, as operações elementares sobre o sistema se traduzem para as seguintes operações elementares sobre matrizes:

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

As três operações elementares sobre as linhas de uma matriz A são:

- Trocar a posição de duas linhas da matriz A;
- Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Definição 6

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, quando B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre suas linhas.

Para Casa 9

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

O escalonamento é uma técnica que nos permite resolver sistemas lineares de uma forma geral. Ele consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até obtermos uma matriz na forma conhecida como matriz escalonada. A saber, uma matriz está na forma escalonada quando satisfaz:

a. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
b. O pivô (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha ocorre à direita do pivô da linha anterior.

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases}$$

Exercício

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

Posto de uma matriz

Definição 7

Definimos o posto de uma matriz A, denotado por $\text{posto}(A)$, como sendo o número de linhas não nulas em sua forma escalonada.

Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, admite uma das seguintes alternativas:

a. Não possui solução, quando o $\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A)$.
b. Possui uma única solução quando $\text{posto}([A|B]) = n$.
c. Possui infinitas soluções quando $\text{posto}([A|B]) < n$.

Exemplo

Resolva o sistema e determine o posto da matriz aumentada.

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7 \end{cases}$$

Uma matriz escalonada para o sistema anterior é:

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução geral é:

$$X = \{(-2w - 3y - 5,\ y,\ 3w + 2,\ w)\}$$

A matriz desse sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs são chamadas de variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. Assim, na solução geral, as variáveis associadas aos pivôs terão seus valores dependentes das variáveis livres.

Para Casa 10

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O `sympy` é uma poderosa ferramenta para resolver equações, especialmente as lineares. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando o `linsolve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sol=sp.linsolve((A,B),x,y,z)
display(sol)
```

$$X = \left\{\left(-\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ \frac{1}{7} - \frac{4z}{7},\ z\right)\right\}$$

Usando o `solve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sistema=sp.Eq(A*X,B)
sol=sp.solve(sistema,(x,y,z))
display(sol)
```

$$X = \left\{x : -\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ y : \frac{1}{7} - \frac{4z}{7}\right\}$$

Podemos também obter a matriz escalonada da seguinte forma

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
Ma=sp.Matrix.hstack(A,B)
Me=Ma.echelon_form()
display(Me)
```

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O método usado para resolver os sistemas anteriores, isto é, transformar a matriz aumentada em uma escalonada é conhecido como Método de Gauss.

Uma variação deste método, conhecido como Método de Gauss-Jordan, consiste em transformar a matriz aumentada na chamada matriz escalonada reduzida. A saber, uma matriz esta na forma escalonada reduzida quando além de escalonada ela satisfaz:

a. O pivô de cada linha é 1;
b. Se uma coluna contém um pivô, então todos os outros elementos são iguais a zero.

Vimos anteriormente que o sistema

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7, \end{cases}$$

tem matrizes aumentada e escalonada respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se continuarmos o processo de escalonamento chegaremos à matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ -8x + 3y - 3z = -2, \end{cases}$$

Exemplo

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + z\left(a^2 - 14\right) = a + 2, \end{cases}$$

Para Casa 11

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$

Para Casa 12

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z\left(a^2 - 1\right) = a + 1, \end{cases}$$

Um sistema linear da forma $AX = 0$ é dito homogêneo, isto é, um sistema da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases}$$

Propriedades

- Todo sistema homogêneo tem pelo menos uma solução, a chamada solução trivial, isto é, $X = 0$.
- Todo sistema homogêneo com menos equações que incógnitas $(m < n)$ tem infintas soluções.
- Se X e Y são soluções de um sistema homogêneo, então $X + Y$ também o é.
- Se X é solução de um sistema homogêneo, etnão αX também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sumário

Matriz Inversa

Definição 8

Dizemos que uma matriz quadrada A, de ordem n, é invertível ou não singular, se existe uma matriz B, também de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada inversa de A e é denotada por A^{-1}. Se A não tem inversa, dizemos que A não é invertível ou é singular.

Exemplo

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Proposição 9

Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

Teorema 10

Uma matriz é invertível se, e somente se, é linha-equivalente à matriz identidade.

Exemplo

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para Casa 13

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis e em caso positivo, calcule a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

1. A inversa, quando existe, é única.
2. Se A é invertível, então sua inversa também o é e vale $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. Se A é invertível, então A^t também o é e vale
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$
5. Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:
$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$
6. Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$.

Invertendo matrizes com o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,3],[1,1,3],[0,1,2]])
B=sp.Matrix([[1,1,1,1],[1,2,-1,2],[1,-1,2,1],[1,3,3,2]])
invA=A.inv()
invB=B.inv()
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sumário

Determinantes

O determinante é uma função que a cada matriz quadrada A associa um número real, denotado por $\det(A)$. Vamos definir o determinante de forma induzida.

- **Matrizes** 1×1:

$$\det(A) = \det([a_{11}]) = a_{11}.$$

- **Matrizes** 2×2:

$$det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 20 \end{bmatrix} = 40 - (-2) = 42$$

Se A for uma matriz quadrada de ordem n, denotaremos por A_{ij} a submatriz de A, de ordem $n-1$, obtida mediante a omissão da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A.

Definição 11

Dada uma matriz quadrada A. Definimos o menor do elemento a_{ij} como $\det(A_{ij})$. E o cofator do elemento a_{ij} como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}).$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. E o cofator do elemento a_{12} é $c_{12} = -3\det(A_{12}) = -3(-2-6) = 24$.

Definição 12

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n > 2$. Definimos o determinante de A indutivamente por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} c_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{1+j} \det(A_{1j}).$$

Essa soma é chamada de expansão em cofatores do determinante de A.

Exemplo

Calcule o determinate da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 13

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo qualquer linha ou qualquer coluna.

Exemplo

Calcule novamente o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

segundo outra linha ou coluna.

Exercício

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

segundo outra linha ou coluna.

Determinantes com o sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[0,0,0,-3],[1,2,3,4],[-1,3,2,5],[2,1,-2,0]])
A.det()
```

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -75$$

Um restaurante no fim do universo

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, que por sua vez vai precisar calcular $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de $n!$ produtos.

Mesmo um supercomputador não pode calcular determinantes de matrizes moderadamente grandes usando cofatores!

Para se calcular o determinante de uma matriz 50×50, é necessário se realizar $50! \approx 3 \times 10^{64}$ produtos. Um supercomputador pode realizar da ordem de 10^{17} (100 quadrilhões) operações por segundo. Portanto, precisaria de 3×10^{47} segundos para calcular esse determinante, isto é, aproximadamente 10^{39} anos!. A estimativa da idade do universo é de 10 bilhões de anos, isto é 10^{10}.

Propriedades dos determinantes

O determinante é um função n-linear das linhas ou das colunas. Vamos precisar o que isto quer dizer.

Podemos representar uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ em termos de suas linhas, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a i-ésima linha, ou seja, $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$.
Suponha que uma linha A_k é decomposta como uma combinação linear de dois vetores linhas, isto é, $A_k = \alpha X + \beta Y$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$.

Então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \alpha X + \beta Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Esta propriedade também vale para as colunas.

Exemplo

Calcule o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t) & 2\sin(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

Cálculo de Determinantes por Redução por linhas

- Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então
$$\det(A) = 0.$$
- Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então
$$\det(B) = \alpha \det(A).$$
- O determinante é uma função alternada, isto é, Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas ou colunas, então
$$\det(B) = -\det(A).$$
- Se B é obtida de A substituindo-se uma linha pela soma dela com um múltiplo escalar de outra linha, então
$$\det(B) = \det(A).$$

- O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Exemplo

Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades dos Determinantes

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- A é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$. Neste caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- O sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema $AX = \lambda X$ tem solução.

Fórmula da Inversa para matrizes 2×2

Um matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ e neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Regra de Cramer