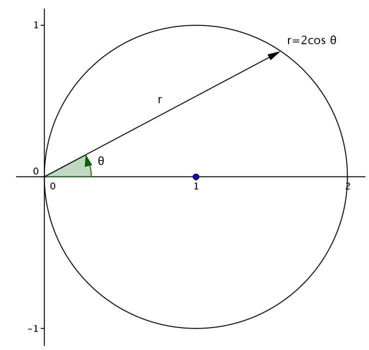
Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

**Gabarito da 1ª Prova – Cálculo IV – 05/05 – 11:00 - 13:00**

**Questão 1 (3,3 pontos):**

**Solução:** Vamos usar coordenadas polares. Sabemos que $D$ é a região interior ao círculo $(x-1)^2+y^2=1$ representado na figura ao lado. Começemos encontrando a representação da curva $(x-1)^2+y^2=1$ em coordenadas polares:




$$\begin{aligned}(x-1)^2+y^2=1 &\Rightarrow x^2-2x+1+y^2=1\\ &\Rightarrow x^2-2x+y^2=0\\ &\Rightarrow r^2-2r\cos\theta=0\\ &\Rightarrow r^2=2r\cos\theta\\ &\Rightarrow r=2\cos\theta\end{aligned}$$

Com isso, podemos descrever a região de integração em coordenadas polares da seguinte forma:

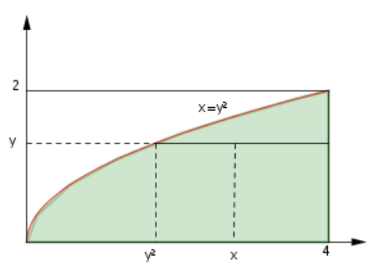
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$$

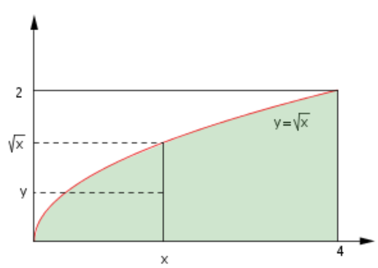
Assim, usando o Teorema de Mudança de Variáveis, temos

$$\iint_D x^2 y\, dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta} 2r^3\cos\theta\,\mathtt{sen}\,\theta\, dr d\theta = 0$$

**Questão 2 (3,3 pontos):**

**Solução:** Usando as técnicas usuais de integração não é possível calcular esta integral. Assim, vamos usar o Teorema de Fubini para inverter a ordem de integração.




A integral dada corresponde à integral dupla $\iint_D \sqrt{x}\,\mathtt{sen}\, x dA$, onde $D$ é a região colorida na primeira das figuras ao lado. Podemos ver que os limites de integração decompõe essa região em segmentos horizontais descrevendo $D$ da seguinte forma $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\leq y\leq 2, y^2\leq x\leq 4\}$. Preenchendo essa mesma região por segmentos verticais, como na segunda figura, podemos descrever $D$ como $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq\sqrt{x}\}$. Portanto, pelo Teorema de Fubini,

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\,\mathtt{sen}\, x dx dy = \iint_D \sqrt{x}\,\mathtt{sen}\, x dA = \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{x}\,\mathtt{sen}\, x dy dx = \mathtt{sen}\, 4 - 4\cos 4.$$

**Questão 3 (3,4 pontos):**

**Solução:** Os limites de integração nos dão que

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

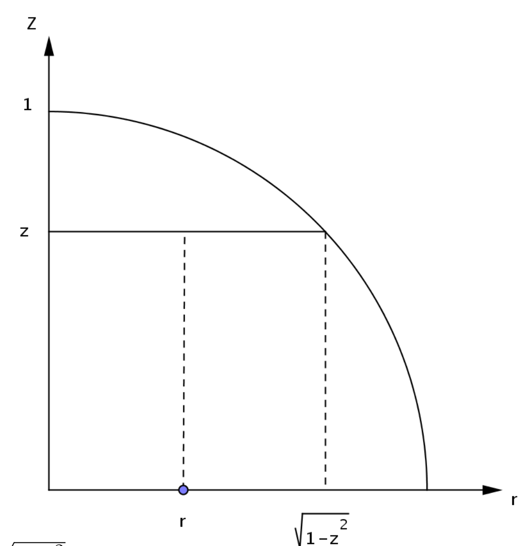
Podemos ver que a região de integração é o interior da porção da esfera de centro 0 e raio 1 no primeiro octante. Com isso, sabemos que em coordenadas esféricas temos a seguinte descrição

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Portanto, em coordenadas esféricas temos que

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \,\texttt{sen}\, \varphi d\theta d\varphi d\rho.$$

Passemos às coordenadas cilíndricas agora. Podemos pensar no primeiro octante da esfera como a rotação em torno do eixo $OZ$ do primeiro quadrante do círculo. Com isso, já temos que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Na figura ao lado vemos a relação existente entre $z$ e $r$, note que se fizermos $0 \leq z \leq 1$ e $0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2}$ preenchemos todo o círculo com segmentos de reta horizontais. Assim a região de integração em coordenadas cilíndricas pode ser escrita como




$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq r \leq \sqrt{1-z^2} \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{r^2+z^2}\,r dr dz d\theta.$$

Note que poderíamos descrever esta região da seguinte forma

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2} \end{cases}$$

Porém, devido à expressão do integrando em coordenadas cilíndricas, só é possível obter a integal com as técnicas usuais integrando em relação a $r$ primeiro.