Gabarito

Questão 1. .... ______/ 7 pts

Calcule as integrais:

(a) [1 pt] $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\,dx$

(b) [2 pts] $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)+1}\,dx$

(c) [2 pts] $\displaystyle\int x\sec^2(x)\,dx$

(d) [2 pts] $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx.$

Solução:

(a)

$$\int_1^4 \sqrt{x} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \log(x) - \frac{2}{x}\Big|_{x=1}^{x=4} = \log(4) + \frac{37}{6}.$$

(b) Fazendo a substituição $u = \sin(2x)+1$, $du = 2\cos(2x)\,dx$ temos

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\log|u| + C = \frac{\log(\sin(2x)+1)}{2} + C$$

(c) Vamos usar a integração por partes.

$$\begin{cases} u = x & du = 1\,dx \\ dv = \sec^2(x)\,dx & v = \tan(x) \end{cases}$$

$$\int x\sec^2(x)\,dx = x\tan(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = x\tan(x) + \log(\cos(x)) + C$$

(d) Vamos usar a substituição trigonométrica $x = 2\sin(\theta)$, $dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$, com $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2(\theta)}\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\,d\theta \\
&= \int \frac{2\cos(\theta)|\cos(\theta)|}{\sin(\theta)}\,d\theta = 2\int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin(\theta)}\,d\theta \\
&= 2\int \frac{1}{\sin(\theta)} - \sin(\theta)\,d\theta \\
&= 2\log|\csc(\theta) - \cot(\theta)| + 2\cos(\theta) + C \\
&= 2\log\left|\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + 2\sqrt{4-x^2} + C
\end{aligned}$$

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Considere as funções $f(x) = x^3 - 4x$ e $g(x) = 5x$.

(a) [1 pt] Esboce a região limitada pelo gráfico dessas funções.

(b) [2 pts] Determine a área dessa região.

Solução:

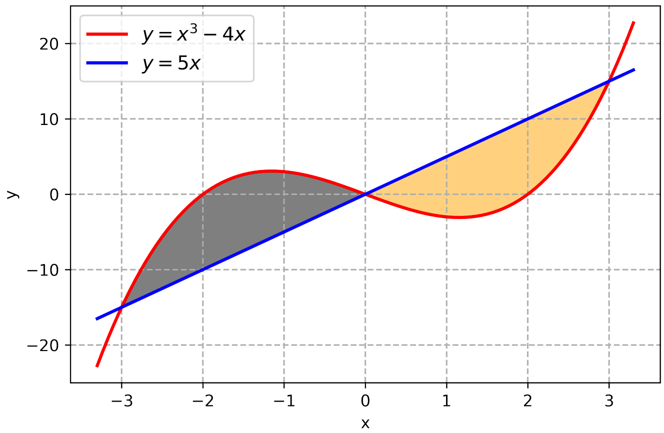
(a) Vamos esboçar os dois gráficos juntos e a região entre eles. Como ambos são polinômios, vamos primeiro determinar suas raízes.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm 2.$$

Vamos determinar os pontos de interseção:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 4x = 5x \Rightarrow x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm 3.$$

Portanto, podemos facilmente esboçar os gráficos e a região de interseção.



(b) Vamos calcular a integral indefinida de $f(x) - g(x)$.

$$\int x^3 - 9x\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + C.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{0} f(x) - g(x)\,dx + \int_{0}^{3} g(x) - f(x)\,dx \\ &= \int_{-3}^{0} x^3 - 9x\,dx + \int_{0}^{3} -x^3 + 9x\,dx = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2} \end{aligned}$$