Geometria Analítica e Álgebra Linear
GAAL

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}.$$

Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN

29 de julho de 2024

Sumário

Sumário

O conjunto $\mathbb{R}^2$

Denotamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y) tais x y são números reais. O número x chama-se primeira coordenada ou abcissa e o número y chama-se segunda coordenada ou ordenada.

Podemos representar geometricamente os elementos de $\mathbb{R}^2$ usando um sistema de coordenadas cartesianas, que consiste em um plano com um par de eixos perpendiculares OX e OY e que tem a mesma origem.

Exemplo

Em um plano, fixado um sistema de coordenadas cartesianas, represente:

1. Os pontos $P = (1, 0)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (-3, -2)$.
2. Os conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = y\}$.

Um espaço vetorial real V é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações:

- A adição, que a cada par de vetores $\vec{u}$,$\vec{v} \in V$ faz corresponder um novo vetor $\vec{u} + \vec{v}$, chamado vetor soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
- A multiplicação por escalar, que a cada número $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $\vec{v} \in V$ faz corresponder um vetor $\alpha\vec{v}$, chamado produto de α por $\vec{v}$.

Além disso, essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, as seguintes condições:

Espaços Vetoriais Reais

1. $\vec{u} + \vec{v} \in V$. (fechamento em relação à adição)
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (comutatividade)
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (associatividade)
4. Existe um vetor $\vec{0} \in V$, chamado vetor nulo, tal que
$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \text{ para todo } \vec{u} \in V.$$
5. Para cada $\vec{v} \in V$, existe um vetor $\vec{-v} \in E$, chamado inverso aditivo, ou simétrico de $\vec{v}$, tal que
$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}.$$
6. $\alpha\vec{v} \in V$. (fechamento em relação à multiplicação por escalar)
7. $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$ e $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{v}$. (distributividade)
8. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

O Espaço Vetorial $\mathbb{R}^2$

O conjunto $\mathbb{R}^2$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

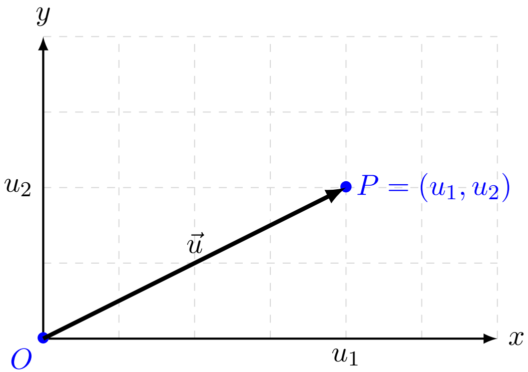
$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2)$.

Representação Geométrica

Representamos um vetor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$ usando um segmento orientado com ponto inicial na origem do sistema de coordenadas e extremidade no ponto $P = (u_1, u_2)$.



Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$.

O comprimento de vetor $\vec{u}$, também chamado de norma, é dado por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

Exemplo

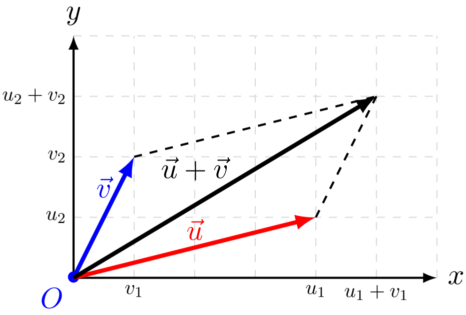
Represente no plano o vetor $\vec{u} = (1, 1)$ e calcule seu comprimento.

Representação Geométrica da Soma

Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

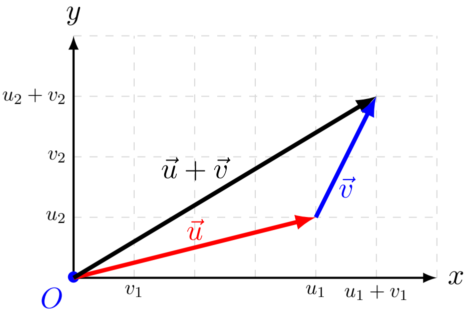
é obtido pela chamada lei do paralelogramo.



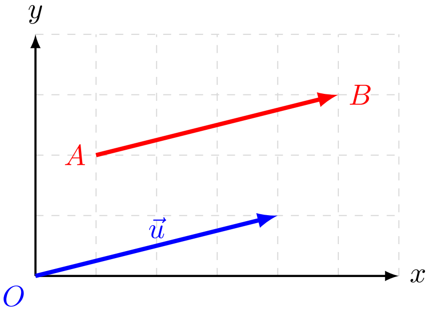
Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ o vetor soma

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

é obtido pela chamada lei do paralelogramo.



Dizemos que um segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$ também representa um vetor $\vec{u}$ quando os dois têm mesmo comprimento, direção e sentido. Neste caso, escrevemos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.



Se $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

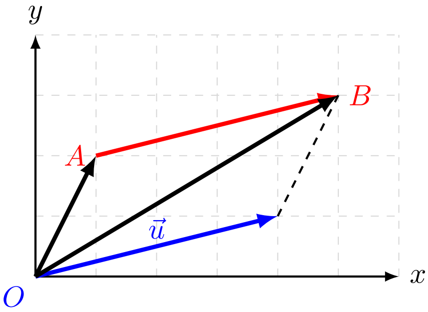
De uma forma geral temos que

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Exemplo

Dados $A = (1,1)$, $B = (2,2)$, $C = (-1,0)$ e $D = (0,1)$. Mostre que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ e calcule sua norma.

Basta usar a lei do paralelogramo.



Se $\vec{u} = (x, y)$, então

$$\overrightarrow{OA} + \vec{u} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow (a_1 + x, a_2 + y) = (b_1, b_2),$$

donde

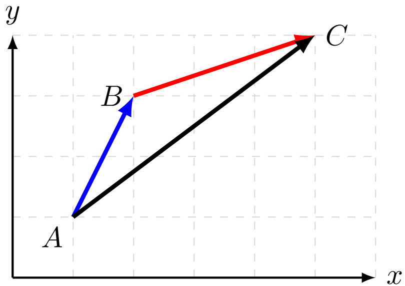
$$\begin{cases} x = b_1 - a_1 \\ y = b_2 - a_2. \end{cases}$$

Em resumo, dados $A = (a_1, a_2)$ e $B = (b_1, b_2)$, escrevemos

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2).$$

Além disso, se tomarmos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, podemos escrever a soma da seguinte forma:

$$\color{blue}{\overrightarrow{AB}} + \color{red}{\overrightarrow{BC}} = \overrightarrow{AC}.$$



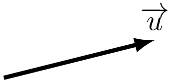
Para Casa 1

Localize os pontos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 0)$, $C = (4, 1)$, $D = (2, -3)$ e $E = (3, -2)$ no plano cartesiano. Determine as coordenadas dos vetores abaixo e esboce um de seus representantes.

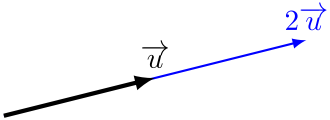
1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$
2. $\vec{v} = 2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$

Representação Geométrica do Produto por Escalar

Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.

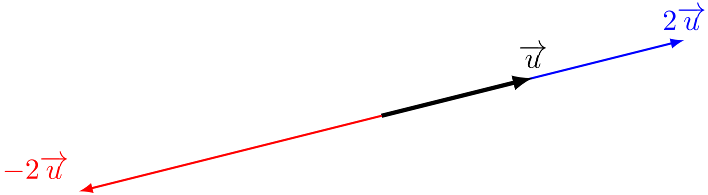


Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.

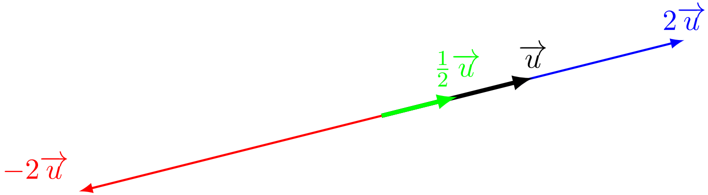


Representação Geométrica do Produto por Escalar

Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



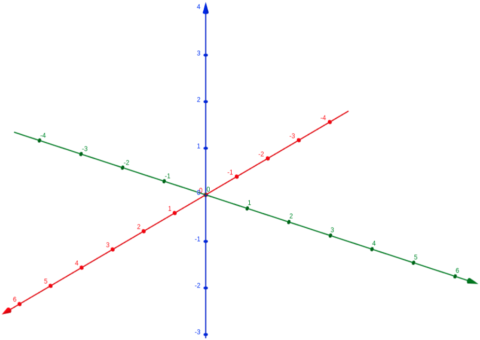
Geometricamente, a multiplicação escalar estica, contrai ou troca de sentido um vetor.



O conjunto $\mathbb{R}^3$

Denotamos por $\mathbb{R}^3$ o conjunto formado pelas triplas ordenadas (x, y, z) tais x, y e z são números reais.

Podemos representar geometricamente os elementos de $\mathbb{R}^3$ usando um sistema de coordenadas cartesianas, que consiste na escolha de três eixos com a mesma origem, OX, OY e OZ, mutuamente perpendiculares e que a orientação positiva é escolhida de acordo com a regra da mão direita.



Exemplo

1. Determine os pontos $(1, 3, 1)$ e $(3, -2, 2)$ no sistema cartesiano.
2. Esboce o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $z = 3$.

O conjunto $\mathbb{R}^3$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, -v_3)$.

Se $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3).$$

Do mesmo modo,

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Exemplo

Dados $A = (0, 3, 1)$, $B = (2, 3 - 1)$ e $C = (0, 1, 0)$ determine $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

De modo geral, denotamos por $\mathbb{R}^n$ o conjunto formado pelas n-uplas ordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tais $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço vetorial quando o munimos com as seguintes operações: Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$

$$\alpha\vec{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2, \ldots, \alpha v_n).$$

Neste caso, o vetor nulo é $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ e o simétrico de $\vec{v}$ é $-\vec{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$.

Se $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ então

$$\overrightarrow{AB} = \vec{u} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \ldots, b_n - a_n).$$

De forma análoga, também definimos a norma (ou comprimento) de um vetor do $\mathbb{R}^n$ por

Se $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ então

$$\vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Um vetor unitário é um vetor que tem norma 1. Dado qualquer vetor não nulo $\vec{v}$, sempre podemos obter um vetor unitário $\vec{u}$ com mesmo sentido de $\vec{v}$, basta fazer

$$\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}.$$

Esse processo é chamada de normalização de $\vec{v}$. Alguns textos usam a notação $\hat{v}$ e o chamam de versor.

Exemplo

Normalize o vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$.

Para Casa 2

Normalize os vetores $\vec{u} = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0)$ e $\vec{v} = (4, -\sqrt{2}, 0, -5)$.

Um nutricionista forneceu uma tabela que especifica a quantidade mínima de cada tipo de vitamina que deve ser ingerida diariamente.

Tipo de vitamina	A	B	C	E
Quantidade mínima (mg)	3	1.1	60	11

Ele também forneceu uma tabela com a quantidade (em mg) de vitaminas em cada 100 gramas de 4 tipos de alimentos diferentes,

	Alimento			
Vitamina	1	2	3	4
A	0.140	0.580	0.150	0
B	0.08	0	1.30	0.08
C	0	0	26	38
E	1.60	0	6.90	0.2

Cada alimento é uma variável, ou seja,

x_i representa a quantidade (em "pacotes" de 100g) do alimento i que deve ser consumido diariamente, com $i = 1, \ldots, 4$.

Com isso, se quisermos saber qual a quantidade de cada alimentos devemos consumir, para se ter a quantidade mínima de cada vitamina, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} 0.14x_1 + 0.58x_2 + 0.15x_3 = 3, \\ 0.08x_1 + 1.3x_3 + 0.08x_4 = 1.1, \\ 26x_3 + 38x_4 = 60, \\ 1.6x_1 + 6.9x_3 + 0.2x_4 = 11, \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.60 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 0.150 \\ 1.30 \\ 26 \\ 6.90 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix} x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Aprenderemos mais à frente que este sistema tem a seguinte solução

$$x_1 \approx 4.63,\ x_2 \approx 3.93,\ x_3 \approx 0.484 \ \text{ e } \ x_4 \approx 1.25.$$

Isto é, para se ingerir a quantidade mínima de cada tipo de vitamina devemos consumir:

463.0 gramas do alimento 1
393.0 gramas do alimento 2
48.4 gramas do alimento 3
125.0 gramas do alimento 4

Combinação Linear

Definição 1

Um vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear de vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tais que

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\vec{v}_k.$$

No exemplo anterior, escrevemos o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.1 \\ 60 \\ 11 \end{bmatrix}$ como combinação linear dos vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.58 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 1.3 \\ 26 \\ 6.9 \end{bmatrix}, \ \text{e } \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.08 \\ 38 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Sumário

Uma matriz A, de tamanho $m \times n$, é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas, e será representada como:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dizemos que a_{ij} é o elemento ou a entrada de posição i, j da matriz A. Denotamos por $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ cujos elementos são números reais.

Quando $m = n$, dizemos que A é uma matriz quadrada de ordem n. Neste caso, os elementos da $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ formam diagornal principal de A.

Exemplo

São exemplos de matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Soma de Matrizes

A soma de duas matrizes de mesmo tamanho $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$ $C = A + B$, obtida somando-se os elementos correspondentes de A e B, ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A soma das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

é a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ por um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ é definida como sendo a matriz $m \times n$, $B = \alpha A$, obtida multiplicando-se cada elemento da matriz A pelo escalar α, isto é,

$$b_{ij} = \alpha a_{ij},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A multiplicação da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ pelo escalar $\alpha = -3$ é a matriz

$$B = -3A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & -9 \\ -15 & 12 \end{bmatrix}.$$

Com a soma e a multiplicação por escalar, o conjunto das matrizes $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ forma um espaço vetorial!

Em particular, o conjunto das matrizes linha ou das matrizes coluna formam o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

De agora em diante, não usaremos mais a notação $\vec{v}$ para representar um vetor. Escreveremos simplesmente v e no contexto ficará claro que se trata de um vetor de $\mathbb{R}^n$.

Produto de Matrizes

Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$, definimos o produto de A por B como sendo a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$, definida por

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então,

$$AB = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz A, de ordem $m \times n$, pode ser interpretada como uma transformação que leva vetores de $\mathbb{R}^n$ em vetores $\mathbb{R}^m$.

Exercício

1. A matriz $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ rotaciona qualquer vetor do plano $90°$ no sentido anti-horário. Verifique esboçando no plano os vetores $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $u = Rv$.
2. A matriz $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ reflete um vetor em relação à reta $y = x$. Verifique esboçando no plano os vetores u do item anterior e o vetor $w = Su$.

Neste sentido, o produto de matrizes desempenha o papel de composição de funções.

Exercício

Verifique isso calculando a matriz $M = SR$, onde R e S são as matrizes do exercício anterior e esboce os vetores u e Mu.

Para Casa 3

Considere as matrizes $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e os vetores $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

1. Esboce o triângulo ABC que tem como vértices as extremidades dos vetores.
2. Calcule $u' = Ru$, $v' = Rv$ e $w' = Rw$. Esboce o novo triângulo $A'B'C'$ com vértices dados pelos novos vetores.
3. Calcule $u'' = Su'$, $v'' = Sv'$ e $w'' = Sw'$. Esboce o triângulo $A''B''C''$ com vértices dados pelos novos vetores.
4. Calcule $M = SR$. Esboce o triângulo com vértices em Mu, Mv e Mw.

Para Casa 4

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule AB e BA.

Propriedades das operações com Matrizes

Sejam A, B e C matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$ (comutatividade da soma)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade da soma)
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ (associatividade do produto por escalar)
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ (distributividade do produto por escalar)
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ (distributividade do produto por escalar)
6. $A(BC) = (AB)C$ (associatividade do produto)
7. $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$ (distributividade)

Exemplo

Se A e B são matrizes quadradas, então vale a identidade?

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

Matriz Identidade

A matriz $n \times n$, definida por

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

chamada matriz identidade é o **elemento neutro da multiplicação**, isto é,

$$AI_n = I_m A = A,$$

para toda matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

A transposta de uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, denotada por A^t, é a matriz obtida a partir de A trocando-se as linhas com as colunas, isto é, $A^t = (b_{ij})_{n\times m}$, onde

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para cada $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, p$.

Exemplo

A transposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da Transposta

Sejam A e B matrizes com tamanhos apropriados e $\alpha, \in \mathbb{R}$. São válidas as seguintes propriedades:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
4. $(AB)^t = B^t A^t$

Para Casa 5

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} x & 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Encontre o valor de x tal que $AB^t = 0$, onde 0 é a matriz nula, isto é, com todas as entradas sendo zero.
2. Calcule M^3, onde
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operações com matrizes usando o sympy

```python
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,-3],[3, 4,0]])
B=sp.Matrix([[-2,1,5],[0,3,-4]])
C=sp.Matrix([[-2,1,0],[0,3,0],[5,-4,0]])
S=A+B
display(S)
P=A*C
display(P)
T=A.T
display(T)
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & -4 \end{bmatrix},\ AC = \begin{bmatrix} -17 & 19 & 2 \\ -6 & 15 & 4 \end{bmatrix},\ A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sumário

O produto escalar

Definição 2

Dados dois vetores $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ do $\mathbb{R}^n$, definimos o produto escalar (ou produto interno) entre eles por:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemplo

Calcule $u \cdot v$, em que $u = (1, 2, -3)$ e $v = (-3, 5, 2)$.

Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores u, v e w em $\mathbb{R}^n$ e para qualquer número real λ, valem as propriedades:

1. $u \cdot v = v \cdot u$;
2. $\lambda(u \cdot v) = (\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v)$;
3. $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$;
4. $u \cdot u = \|u\|^2$.

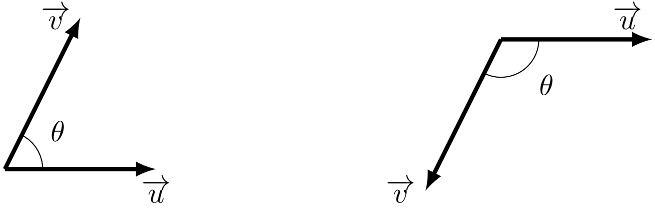
Exemplo

Mostre que

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2.$$

Definição 3 (ângulo entre vetores)

Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, definimos o ângulo entre $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ como sendo o menor ângulo formado por seus respectivos representantes com mesma origem.

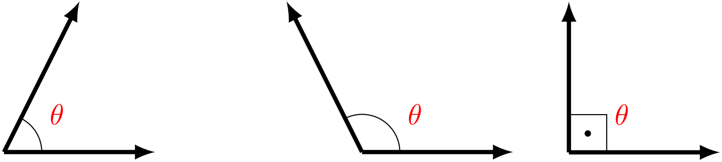


Proposição 4

Dados $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, no $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, então

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \cos(\theta),$$

onde θ é o ângulo entre eles.



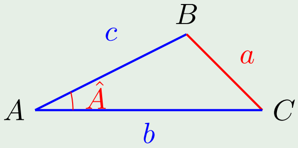
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} > 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} < 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$

Lei dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer com lados a, b e c, então

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}),$$

onde $\hat{A}$ é o ângulo oposto ao lado a.



Exemplo

Determine os ângulo entre os vetores

1. $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$.
2. $\vec{u} = (2, 0, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, -1)$.

Definição 5

Dados vetores u e v em $\mathbb{R}^n$, definimos o ângulo entre u e v como sendo o valor $0 \leq \theta \leq \pi$ que satisfaz:

$$\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Dizemos que dois vetores são ortogonais quando o ângulo entre eles é de 90°, isto é, quando

$$u \cdot v = 0.$$

Para Casa 6

1. Determine o ângulo entre os vetores $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$.
2. Um retângulo tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$ e $C = (0, 5, -4)$. Determine o ponto D.

Produto escalar usando o sympy

```
import sympy as sp
import mpmath

u=sp.Matrix([1.12,-3.25,2.07,-1.83 ])
v=sp.Matrix([-2.29,1.72,4.33,-1.54])
uv=u.dot(v)
nu=u.norm()
nv=v.norm()
cos=uv/(nu*nv)
theta=sp.acos(cos)
thetag=round(mp.degrees(theta),2)
```

Denotando-se os vetores como matrizes colunas, temos:

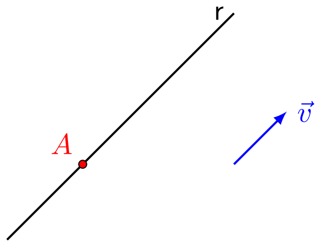
$$u \cdot v = \begin{bmatrix} 1.12 \\ -3.25 \\ 2.07 \\ -1.83 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2.29 \\ 1.72 \\ 4.33 \\ -1.54 \end{bmatrix} = 3.6265$$

$$\cos(\theta) \approx 0.151850373283378 \Rightarrow \theta \approx 1.41835623915784 \text{ rad} \approx 81.27^\circ.$$

Sumário

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}.$$

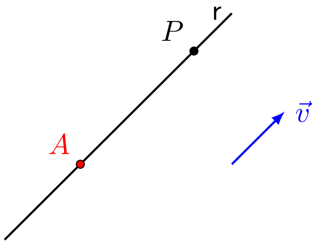


Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Equação Paramétrica de uma Reta

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

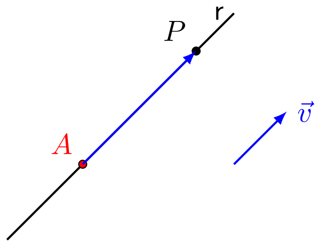
$$P = A + t\vec{v}, \ t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Fixados um ponto A de uma reta r e um vetor $\vec{v}$ paralelo a esta reta, podemos descrever os pontos P dessa reta da seguinte forma:

$$P = A + t\vec{v},\ \ t \in \mathbb{R}.$$



Esta equação é dita equação vetorial paramétrica da reta r, t é dito ser um parâmetro e $\vec{v}$ é chamado de vetor diretor.

Se $P=(x,y)$, $A=(x_0,y_0)$ e $\overrightarrow{v}=(a,b)$ em coordenadas temos que

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Analogamente, se $P=(x,y,z)$, $A=(x_0,y_0,z_0)$ e $\overrightarrow{v}=(a,b,c)$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Estas equações são chamadas simplesmente de equações paramétricas da reta r.

Exemplo

a. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos $A = (-1, 0)$ e $B = (0, 1)$.
b. Determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A = (1, 2, -2)$ e $B = (-1, 4, 2)$.
c. Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice A.

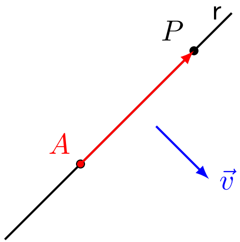
Para Casa 7

1. Considere os pontos $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, 1, -1)$. Determine a reta r que passa por A e B.
2. Sejam $A = (0, 1, 8), B = (-3, 0, 9)$ e $r : X = (1, 2, 0) + t(1, 1, -3)$. Determine o ponto C de r tal que A, B e C sejam vértices de um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice C.

Note que a equação vetorial paramétrica da reta é válida para qualquer dimensão!

Equação Cartesiana da reta em $\mathbb{R}^2$

Fixe um ponto $A = (x_0, y_0)$ de uma reta r e seja $\overrightarrow{v} = (a, b)$ um vetor ortogonal a esta reta.



Dado um ponto qualquer $P = (x, y)$ desta reta r temos que

$$ax + by + c = 0.$$

Esta equação é dita equação cartesiana da reta.

Exemplo

Encontre a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $P = (1, 3)$ e $Q = (5, -9)$.

Equação reduzida da reta

A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação reduzida quando está na seguinte forma:

$$y = mx + n.$$

O coeficiente m é dito coeficiente angular da reta e mede a tangente do ângulo que a reta faz com o eixo OX. E o número n é dito coeficiente linear da reta e representa a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo OY.

Equação segmentária da reta

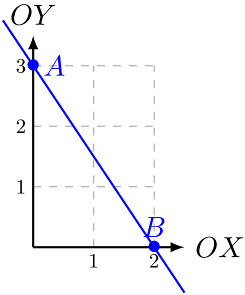
A equação cartesiana de uma reta é chamada de equação segmentária quando está na seguinte forma:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

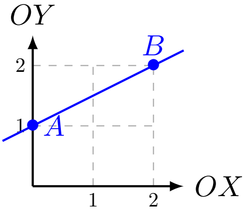
Neste caso, a reta intercepta os eixos OX e OY nas coordenadas p e q respectivamente.

Exemplo

1. Determine a equação cartesiana da reta r que passa pelos pontos $A = (0, 3)$ e $B = (2, 0)$.
2. Determine a equação cartesiana da reta que passa pelos pontos $A = (0, 1)$ e $B = (2, 2)$.



Exemplo 1



Exemplo 2

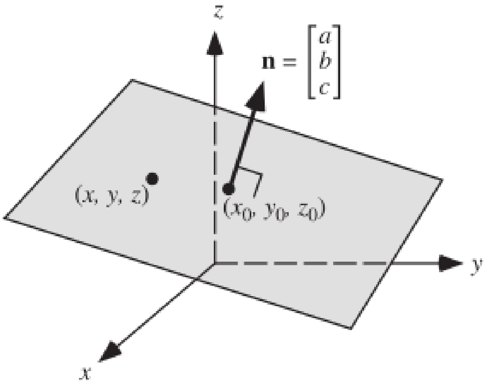
Para Casa 8

1. Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A = (3, -5)$ e tem coeficiente angular igual a 5.
2. Esboce no plano a reta cuja equação é dada por $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$.

Equação Cartesiana do Plano no Espaço

Sejam $A = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de um plano em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{n} = (a, b, c) \perp \pi$, então os pontos e $P = (x, y, z)$do plano devem satisfazer a seguinte equação cartesiana

$$ax + by + cz + d = 0$$



Exemplo

Determine a equação do plano que passa pelo ponto $A = (1, 0, 1)$ e é perpendicular à reta $r : X = (-1, 1, 2) + t(0, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

Qual o conjunto dos pontos do espaço que estão na interseção dos dois planos a seguir?

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Para descobrir isso, vemos multiplicar a 2ª equação por -2 e somar com a primeira.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Note que geometricamente os dois sistemas tratam de interseção de planos diferentes, mas algebricamente os sistemas são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto de pontos (x, y, z) como solução. Entretanto o segundo sistema é mais simples!

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

É fácil ver que este sistema tem soluções da forma:

$$y = -z \text{ e } x = 1 - z.$$

Fazendo $z = t$, vemos que os pontos da interseção são da forma

$$X = (1 - t, -t, t) = (1, 0, 0) + t(-1, -1, 1) \; t \in \mathbb{R},$$

isto é, uma reta em $\mathbb{R}^3$.

Isto nos motiva a estudar os chamados sistemas lineares.

Sumário

Uma equação linear em n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e b são constantes reais.
Um sistema de m equações lineares a n incógnitas é um conjunto de m equações lineares, isto é,

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

em que a_{ij} e b_k são constantes reais, para $i, k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.

Usando o produto matricial, o sistema linear pode ser escrito da seguinte forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}.$$

Solução de um Sistema Linear

Uma solução de um sistema linear a n incógnitas é um vetor $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação matricial $AX = B$ associada ao sistema. O conjunto de todas as soluções do sistema é chamado conjunto solução ou solução geral do sistema.

Exemplo

O seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

tem como solução geral

$$X = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Como resolver Sistemas Lineares?

Uma forma de resolver um sistema linear é substituir o sistema inicial por outro que tenha o mesmo conjunto solução do primeiro, mas que seja mais fácil de resolver. Anteriormente, para resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

Fizemos uma operação elementares que o transformou no sistema mais simples de resolver

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0, \end{cases}$$

cujo conjunto solução é: $X = \{(1-\alpha, -\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}.\}$.
Esse procedimento pode ser generalizado.

Método de Eliminação

O método utilizado acima é conhecido como método de eliminação, pois ao aplicá-lo, estamos "eliminando incógnitas".

Dizemos que dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução. Obtemos sistemas equivalentes ao aplicarmos as chamadas operações elementares.

Operações Elementares

- Trocar a posição de duas equações do sistema;
- Multiplicar uma equação por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma equação outra equação multiplicada por um escalar.

Quando aplicamos operações elementares sobre as equações de um sistema linear, somente os coeficientes do sistema são alterados, assim trabalharemos apenas com a chamada matriz aumentada do sistema, ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

Ilustrando com o exemplo anterior:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{-2\times L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ -7y - 7z = 0 \end{cases}$$

Neste caso, as operações elementares sobre o sistema se traduzem para as seguintes operações elementares sobre matrizes:

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

As três operações elementares sobre as linhas de uma matriz A são:

- Trocar a posição de duas linhas da matriz A;
- Multiplicar uma linha da matriz por um escalar diferente de zero;
- Somar a uma linha da matriz um múltiplo escalar de outra linha.

Definição 6

Uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ é linha-equivalente a uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$, quando B pode ser obtida de A aplicando-se uma sequência de operações elementares sobre suas linhas.

Para Casa 9

Usando a técnica aprendida, resolva o seguinte sistema linear.

$$\begin{cases} -6x - y + z = 0 \\ 3x + y + 5z = 1 \end{cases}$$

Escalonamento

O escalonamento é uma técnica que nos permite resolver sistemas lineares de uma forma geral. Ele consiste em aplicar operações elementares às linhas da matriz aumentada até obtermos uma matriz na forma conhecida como matriz escalonada. A saber, uma matriz está na forma escalonada quando satisfaz:

1. Todas as linhas nulas ocorrem abaixo das linhas não nulas;
2. O pivô (1º elemento não nulo de uma linha) de cada linha ocorre à direita do pivô da linha anterior.

As seguintes matrizes estão na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

Exemplo

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ 2x + y + 4z = 20 \\ 2x + 3y + 5z = 25 \end{cases}$$

Exercício

Resolva o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 8 \\ -x - 2y + 3z = 1 \\ 3x - 7y + 4z = 10 \end{cases}$$

Posto de uma matriz

Definição 7

Definimos o posto de uma matriz A, denotado por $\text{posto}(A)$, como sendo o número de linhas não nulas em sua forma escalonada.

Exemplo

Resolva o sistema e determine o posto da matriz aumentada.

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7 \end{cases}$$

Uma matriz escalonada para o sistema anterior é:

$$A \sim \begin{bmatrix} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

cuja solução geral é:

$$X = \{(-2w - 3y - 5,\ y,\ 3w + 2,\ w)\}$$

A matriz desse sistema possui duas colunas sem pivôs. As variáveis que não estão associadas a pivôs são chamadas de variáveis livres, isto é, podem assumir valores arbitrários. Assim, na solução geral, as variáveis associadas aos pivôs terão seus valores dependentes das variáveis livres.

Sistema impossível

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m\times n}$, não admite solução quando

$$\text{posto}([A|B]) > \text{posto}(A).$$

Neste caso, dizemos que o sistema é impossível.

Nulidade

Por motivos que ficarão claros nas aulas posteriores, ao número de variáveis livres, daremos o nome de nulidade.

Teorema 8 (Teorema do Posto)

Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ a matriz dos coeficiente de um sistema com n variáveis. Se o sistema for possível, então

$$\text{nulidade}(A) + \text{posto}(A) = n.$$

Classificação

Classificação de sistemas lineares

Um sistema linear $AX = B$, onde $A = (a_{ij})_{m \times n}$, admite uma das seguintes alternativas:

Se $\operatorname{posto}([A|B]) > \operatorname{posto}(A)$, então não possui solução, isto é, sistema impossível.

Caso contrário,

- Se $\operatorname{posto}(A) = n$, então possui uma única solução.
- Se $\operatorname{posto}(A) < n$, então possui infinitas soluções.

Para Casa 10

Resolva os sistema: $AX = B$ e $AX = C$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O `sympy` é uma poderosa ferramenta para resolver equações, especialmente as lineares. Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando o `linsolve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sol=sp.linsolve((A,B),x,y,z)
display(sol)
```

$$X = \left\{\left(-\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ \frac{1}{7} - \frac{4z}{7},\ z\right)\right\}$$

Usando o `solve` obtemos a solução geral do sistema:

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
sistema=sp.Eq(A*X,B)
sol=sp.solve(sistema,(x,y,z))
display(sol)
```

$$X = \left\{x : -\frac{3z}{7} - \frac{1}{7},\ y : \frac{1}{7} - \frac{4z}{7}\right\}$$

Podemos também obter a matriz escalonada da seguinte forma

```
import sympy as sp

x,y,z=sp.symbols('x y z',real=True)
A=sp.Matrix([[2,2,2],[-2,5,2],[8,1,4]])
B=sp.Matrix([0,1,-1])
Ma=sp.Matrix.hstack(A,B)
Me=Ma.echelon_form()
display(Me)
```

$$A \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O método usado para resolver os sistemas anteriores, isto é, transformar a matriz aumentada em uma escalonada é conhecido como Método de Gauss.

Uma variação deste método, conhecido como Método de Gauss-Jordan, consiste em transformar a matriz aumentada na chamada matriz escalonada reduzida. A saber, uma matriz esta na forma escalonada reduzida quando além de escalonada ela satisfaz:

a. O pivô de cada linha é 1;
b. Se uma coluna contém um pivô, então todos os outros elementos são iguais a zero.

A seguinte matriz está na forma escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vimos anteriormente que o sistema

$$\begin{cases} -9w + 3z = 6 \\ 40w + 5x + 15y - 10z = -45 \\ 5w + x + 3y - z = -7, \end{cases}$$

tem matrizes aumentada e escalonada respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 15 & -10 & 40 & -45 \\ 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se continuarmos o processo de escalonamento chegaremos à matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \\ -8x + 3y - 3z = -2, \end{cases}$$

Exemplo

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + z\left(a^2 - 14\right) = a + 2, \end{cases}$$

Para Casa 11

Resolva o sistema pelo método de Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9, \end{cases}$$

Para Casa 12

Determine os valores de a para os quais o sistema não tem solução, tem única solução e tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \\ 2x + 3y + z\left(a^2 - 1\right) = a + 1, \end{cases}$$

Sistemas Lineares Homogêneos

Um sistema linear da forma $AX = 0$ é dito homogêneo, isto é, um sistema da forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{array}\right.$$

Propriedades

- Todo sistema homogêneo tem pelo menos uma solução, a chamada solução trivial, isto é, $X = 0$.
- Todo sistema homogêneo com menos equações que incógnitas $(m < n)$ tem infintas soluções.
- Se X e Y são soluções de um sistema homogêneo, então $X + Y$ também o é.
- Se X é solução de um sistema homogêneo, etnão αX também o é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sumário

Matriz Inversa

Definição 9

Dizemos que uma matriz quadrada A, de ordem n, é invertível ou não singular, se existe uma matriz B, também de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n,$$

em que I_n é a matriz identidade. A matriz B é chamada inversa de A e é denotada por A^{-1}. Se A não tem inversa, dizemos que A não é invertível ou é singular.

Exemplo

A inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Proposição 10

Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:

$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$

Teorema 11

Uma matriz é invertível se, e somente se, é linha-equivalente à matriz identidade.

Exemplo

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício

Verifique se a seguinte matriz é invertível

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para Casa 13

Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis e em caso positivo, calcule a inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedades

1. A inversa, quando existe, é única.
2. Se A é invertível, então sua inversa também o é e vale $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. Se A e B são invertíveis, então AB é invertível e
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$
4. Se A é invertível, então A^t também o é e vale
$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$
5. Para saber se A é invertível, basta verificar uma das identidades:
$$AB = I_n \text{ ou } BA = I_n.$$
6. Um sistema $AX = B$ tem solução única se, e somente se, A é invertível. Neste caso, a solução é $X = A^{-1}B$.

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1, 2,3],[1,1,3],[0,1,2]])
B=sp.Matrix([[1,1,1,1],[1,2,-1,2],[1,-1,2,1],[1,3,3,2]])
invA=A.inv()
invB=B.inv()
```

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&1&3\\0&1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&2\\1&-1&2&1\\1&3&3&2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\1&-1&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{7}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}&-\frac{4}{9}&\frac{1}{9}\\-\frac{1}{9}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\-\frac{5}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Sumário

Determinantes

O determinante é uma função que a cada matriz quadrada A associa um número real, denotado por $\det(A)$. Vamos definir o determinante de forma induzida.

- **Matrizes** 1×1:

$$\det(A) = \det([a_{11}]) = a_{11}.$$

- **Matrizes** 2×2:

$$det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 20 \end{bmatrix} = 40 - (-2) = 42$$

Se A for uma matriz quadrada de ordem n, denotaremos por A_{ij} a submatriz de A, de ordem $n-1$, obtida mediante a omissão da i-ésima linha e da j-ésima coluna de A.

Definição 12

Dada uma matriz quadrada A. Definimos o menor do elemento a_{ij} como $\det(A_{ij})$. E o cofator do elemento a_{ij} como

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Então $A_{12} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. E o cofator do elemento a_{12} é $c_{12} = -\det(A_{12}) = -(-2-(-2)) = 0$.

Definição 13

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n > 2$. Definimos o determinante de A indutivamente por:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j}\det(A_{1j}).$$

Essa soma é chamada de expansão em cofatores do determinante de A.

Exemplo

Calcule o determinate da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 14

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. O determinante de A pode ser calculado fazendo-se o desenvolvimento em cofatores segundo qualquer linha ou qualquer coluna.

Exemplo

Calcule novamente o determinante da matriz Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

segundo outra linha ou coluna.

Determinantes com o sympy

```python
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[1,0,3,1],[-1,3,2,5],[0,0,2,3],[2,1,-2,0]])
A.det()
```

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = 63$$

Um restaurante no fim do universo

Para se calcular o determinante de uma matriz $n \times n$ pela expansão em cofatores, precisamos fazer n produtos e calcular n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$, que por sua vez vai precisar calcular $n-1$ produtos e assim por diante. Portanto, ao todo são necessários da ordem de $n!$ produtos.

Mesmo um supercomputador não pode calcular determinantes de matrizes moderadamente grandes usando cofatores!

Para se calcular o determinante de uma matriz 50×50, é necessário se realizar $50! \approx 3 \times 10^{64}$ produtos. Um supercomputador pode realizar da ordem de 10^{17} (100 quadrilhões) operações por segundo. Portanto, precisaria de 3×10^{47} segundos para calcular esse determinante, isto é, aproximadamente 10^{39} anos!. A estimativa da idade do universo é de 10 bilhões de anos, isto é 10^{10}.

Propriedades dos determinantes

O determinante é um função n-linear das linhas ou das colunas. Vamos precisar o que isto quer dizer.

Podemos representar uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ em termos de suas linhas, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

em que A_i é a i-ésima linha, ou seja, $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$.
Suponha que uma linha A_k é decomposta como uma combinação linear de dois vetores linhas, isto é, $A_k = \alpha X + \beta Y$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}$.

Então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \alpha X + \beta Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ X \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ Y \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Esta propriedade também vale para as colunas.

Exemplo

Calcule o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ 2\cos(t) - 3\,\mathrm{sen}(t) & 2\sin(t) + 3\cos(t) \end{bmatrix}$$

- Se uma matriz A possui duas linhas ou duas colunas iguais, então

$$\det(A) = 0.$$

- Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então

$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

- O determinante é uma função alternada, isto é, Se B resulta de A pela troca da posição de duas linhas ou colunas, então

$$\det(B) = -\det(A).$$

- Se B é obtida de A substituindo-se uma linha pela soma dela com um múltiplo escalar de outra linha, então

$$\det(B) = \det(A).$$

- O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é o produto dos elementos da diagonal principal, isto é,

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Exemplo

Calcule o determinante da seguinte matriz transformando-a em uma matriz triangular superior:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -3 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resposta: $\det(A) = 585.$

Propriedades dos Determinantes

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- $\det(A^t) = \det(A)$.
- A é invertível se, e somente se $\det(A) \neq 0$. Neste caso,

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- O sistema homogêneo $AX = 0$ tem solução não trivial se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Exemplo

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema $TX = \lambda X$ tem solução não trivial.

Fórmula da Inversa para matrizes 2×2

Um matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, $\det(A) = ad - bc \neq 0$ e neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Sumário

Definição 15

Sejam u e v vetores no espaço. O produto vetorial de u por v, designado por $u \times v$, é o único vetor do espaço que satisfaz as seguinte condições:

1. O comprimento é $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\| \sin(\theta)$, onde θ é o ângulo entre u e v;
2. A direção é ortogonal a u e v simultaneamente;
3. O sentido dado pela regra da mão direita.

Geometricamente, $\|u \times v\|$ representa a área do paralelogramo formado pelos representantes dos vetores u e v com mesma origem.

Proposição 16

Em um sistema de coordenadas, se $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, então

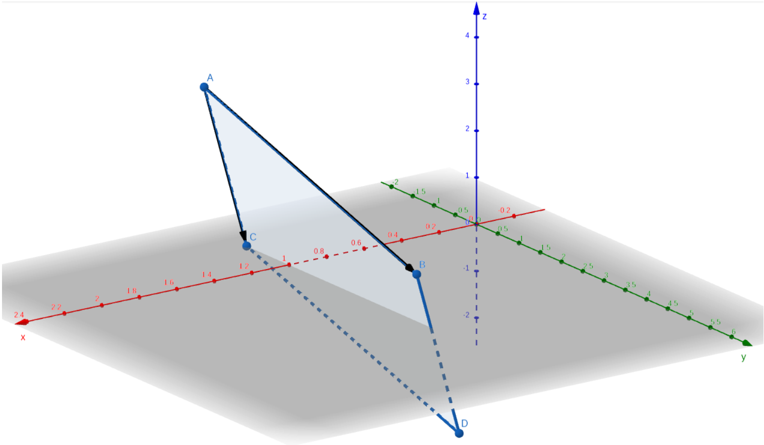
$$u \times v = \left(\det \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \right)$$

Exemplo

Sejam $u = (1, 2, 3)$ e $v = (2, -1, 1)$. Encontre $u \times v$.

Exemplo

Sejam $A = (1, -2, 3)$, $B = (1, 3, 1)$ e $C = (1, -1, 0)$. Calcule a área do paralelogramo que tem os segmentos AB e AC como arestas adjacente.



Para Casa 14

Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (3, 2, 0)$, $B = (1, 0, 2)$ e $C = (0, 4, 3)$.

Propriedades do Produto Vetorial

1. $\|u \times v\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ ou $v = 0$ ou u, v são múltiplos.
2. $u \times v = -v \times u$ (anticomutatividade).
3. $(\lambda u) \times v = u \times (\lambda v) = \lambda(u \times v)$.
4. $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$.

Exemplo

Mostre que se $u + v + w = 0$, então $u \times v = v \times w$.

Dados um ponto A e uma reta ℓ no espaço. Então, a distância entre A e ℓ é dada por

$$d(A, \ell) = \frac{\|AP \times v\|}{\|v\|},$$

onde P é um ponto e v um vetor diretor de ℓ.

Exemplo

Achar a distância entre $A = (3, 0, -2)$ e $\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, \ \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Para Casa 15

1. Obtenha a reta r dada pela inteseção dos planos $\pi_1 : x + y + z = 2$ e $\pi_2 : x - y - z = 0$.
2. Determine os pontos da reta r que estão à distância $\sqrt{6}$ da reta

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t, \; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Produto Misto

Definição 17

O produto misto entre os vetores u, v e w em $\mathbb{R}^3$ é o número real

$$[u, v, w] := (u \times v) \cdot w.$$

Geometricamente $|[u, v, w]|$ representa o volume do paralelepípedo cujas arestas são representantes dos vetores u, v e w com mesma origem.

Proposição 18

Se $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$, então

$$[u, v, w] = \det \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

Exemplo

Determinar o volume do paralelepípedo que tem por arestas adjacentes os segmentos AB, AC e AD, onde $A = (1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 1)$, $C = (1, 1, 1)$ e $D = (1, -1, -1)$.

Para Casa 16

Determinar x para que o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, x, 1)$ seja igual a 15.

Distância entre retas

Sumário

Definição 19

Dizemos que um conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de vetores do $\mathbb{R}^n$ é linearmente independente (LI) se a equação vetorial

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

só possui a solução trivial. Em outras palavras, a única forma de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ é aquela em que todos os escalares são iguais a zero. Caso contrário, dizemos que o conjunto S é linearmente dependente (LD).

Exemplo

Decida se os seguintes conjuntos de vetores são LI ou LD:

1. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$.
2. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 3, 5)$, $\vec{v}_3 = (-1, 2, -3, -4)$.

Mostrar que um conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de vetores do $\mathbb{R}^n$ é LI é equivalente a mostrar que o sistema $AX = 0$ tem solução única, onde A é a matriz cujas colunas são dadas pelos vetores de S.

Exercício

Decida se são LI ou LD os seguintes vetores:

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -1, -2), \vec{v}_2 = (0, 1, 2, 5), \vec{v}_3 = (1, 0, -4, -1), \vec{v}_4 = (1, -1, 2, 7).$$

Para Casa 17

Para cada caso, diga se o conjunto de vetores é LI ou LD.

1. $\{(1,\ 1,\ 2), (1,\ 0,\ 1), (4,\ 6,\ 12)\}$
2. $\{(0,\ 3,\ 1), (6,\ 0,\ 5), (4,\ -7,\ 1)\}$

Propriedades

1. Um conjunto formado por um único vetor não nulo é LI.
2. Um conjunto com 2 vetores não nulos é LD se, e somente se, são múltiplos.
3. Um conjunto finito de vetores de $\mathbb{R}^n$ que contém o vetor nulo é LD.
4. Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ é LD, qualquer conjunto que o contenha também é LD.
5. As colunas de uma matriz A de ordem n são LI se, e somente se, $\det(A) \neq 0$.
6. Em $\mathbb{R}^n$, um conjunto com mais de n vetores é LD.
7. Um conjunto de vetores é LD se, e somente se, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Subespaço Vetorial

Definição 20

Um subconjunto não-vazio $V \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de subespaço de $\mathbb{R}^n$ quando satisfaz:

1. Se $\vec{u}, \vec{v} \in V$, então $\vec{u} + \vec{v} \in V$,
2. Se $\vec{v} \in V$, então $\alpha\vec{v} \in V$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemplo

Mostre que o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo

1. Os subespaços vetoriais triviais de $\mathbb{R}^n$ são $V = \{\vec{0}\}$ e o próprio $V = \mathbb{R}^n$.
2. Se A é uma matriz $m \times n$, então o conjunto solução do sistema homogêneo $AX = \vec{0}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, chamado de espaço solução ou espaço nulo ou núcleo de A e será denotado por $\ker(A)$.
3. Retas e planos em $\mathbb{R}^3$, passando pela origem, são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
4. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^5$ que é solução do sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & -x_5 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & & = 0 \end{array}\right.$$

Definição 21

Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, petencentes a V, **geram** V, se qualquer vetor de V pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$. Neste caso, também dizemos que V é o **subespaço gerado por** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ e o denotaremos por $\operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$.

Exemplo

1. Determine um conjunto de geradores do núcleo da matriz A do exemplo anterior.
2. Mostre que $\vec{w} = (4, -1, 8)$ não está em $\operatorname{span}\{(1, 2, -1), (6, 4, 2)\}$.

Base

Definição 22

Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que um subconjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ de V é uma base de V, se

1. $\mathcal{B}$ é um conjuntos de geradores de V.
2. $\mathcal{B}$ é LI.

Exemplo

1. O conjunto $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ é uma base do $\mathbb{R}^n$, chamada de base canônica.
2. Determine uma base para o plano $x + 2y - z = 0$.

Dimensão

Teorema 23

Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ é uma base de $V \subset \mathbb{R}^n$, então qualquer outra base tem k elementos.

Definição 24

A dimensão de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^n$ é definido como o número de elementos de uma base de V.

Exemplo

Determine uma base e a dimensão do subespaço
$V = \{(a + c, b + c, a + b + 2c);\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Núcleo de uma matriz

Definimos anteriormente que o núcleo de uma matriz A é o espaço solução do sistema $AX = \vec{0}$, denotado por $\ker(A)$. As operações elementares com linhas não alteram o núcleo de uma matriz. Pode-se mostrar que

$$\dim(\ker(A)) = \text{nulidade}(A)$$

isto é, o número de variáveis livres do sistema. Vejamos, através do próximo exemplo, um procedimento para obter-se uma base para o núcleo de uma matriz.

Exemplo

Determine uma base para o núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix}$$

Espaço linha e Espaço coluna

Dada uma matriz A $m \times n$, além do núcleo de A, ainda existem mais dois subespaços associados à ela.

1. O espaço linha de A: subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pela linhas de A.
2. O espaço coluna de A: subespaço de $\mathbb{R}^m$ gerados pelas colunas de A.

Teorema 25

Se uma matriz R está em forma escalonada por linhas, então os vetores linha não nulos formam uma base do espaço linha de R, e os vetores coluna que contém os pivôs formam uma base do espaço coluna.

Em particular, os espaços linha e coluna de R têm a mesma dimensão, apesar de não serem subespaços de espaços vetoriais diferentes!

Note que a matriz a seguinte matriz está na forma escalonada

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então,

- Uma base para o espaço linha de R são os vetores: $\vec{r}_1 = (1, -2, 5, 0, 3), \vec{r}_2 = (0, 1, 3, 0, 0), \vec{r}_3 = (0, 0, 0, 2, 0)$
- Uma base para o espaço coluna de R são os vetores:

$$\vec{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

As operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz, pois as novas linhas são combinações lineares das anteriores e as operações são reversíveis. Portanto, para obter uma base do espaço linha, basta escalonar a matriz.

Exemplo

Determine uma base para o espaço linha da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Obtendo base para os espaço coluna

Diferentemente do espaço linha, as operações elementares com linhas podem alterar o espaço coluna.

Exemplo

As seguintes matrizes são linha-equivalente, mas têm espaços coluna diferentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dadas duas matrizes A e B linha-equivalentes, sabemos que:

1. Os sistemas $AX = \vec{0}$ e $BX = \vec{0}$ têm exatamente as mesmas soluções!
2. Uma solução $X = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ desses sistemas nos dá uma combinação linear das colunas, isto é, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots B_n$ são as respectivas colunas de A e B, então

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots c_n A_n = \vec{0}$$

$$c_1 B_1 + c_2 B_2 + \cdots c_n B_n = \vec{0}$$

Portanto, as colunas de A são LI se e só se, as colunas de B são LI. Em outras palavras, ao escalonarmos uma matriz, as colunas mudam mas a dependência linear permanece!

Teorema 26

Sejam A e B matrizes linha-equivalentes. Um conjunto qualquer de vetores coluna de A forma uma base do espaço coluna de A se, e só se, o conjunto de vetores correspondentes de B forma uma base do espaço coluna de B.

Exemplo

Determine uma base para o espaço coluna da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Considere o subespaço V de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 0, 3), \vec{v}_2 = (2, -5, -3, -2, 6),$$

$$\vec{v}_3 = (0, 5, 15, 10, 0), \vec{v}_4 = (2, 6, 18, 8, 6).$$

1. Determine uma base qualquer de V.
2. Determine um subconjunto de $G = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ que forma uma base de V.
3. Escreva os vetores de G que não estão na base como combinação linear dos vetores da base.

Para Casa 18

Encontre um subconjunto dos vetores

$$\vec{v}_1 = (1, -2, 0, 3), \vec{v}_2 = (2, -5, -3, 6),$$

$$\vec{v}_3 = (0, 1, 3, 0), \vec{v}_4 = (2, -1, 4, -7), \vec{v}_5 = (5, -8, 1, 2)$$

que forma uma base para o espaço gerado por eles. Escreva aqueles que não estão na base como uma combinação linear da base.

Sumário

Definição 27

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que um vetor não nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor de A se $A\vec{v}$ for um múltiplo escalar de $\vec{v}$, isto é, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

Neste caso, dizemos que λ é um autovalor de A.

Exemplo

O vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Teorema 28

$\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de uma matriz A se, e só se,

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Está equação e dita equação característica de A. E o polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é denominado polinômio característico.

Exemplo

Determine os autovetores e autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Os autovetores associados a um mesmo autovalor λ são os vetores não nulos que satisfazem

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0},$$

isto é, são todos os vetores não nulos pertencentes ao núcleo de $A - \lambda I$, chamado de autoespaço de A associado a λ e denotado por E_λ.

Exemplo

Determine uma base dos autoespaços da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para Casa 19

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determine os autovalores de A.
2. Determine os autoespaços de A.
3. Determine uma base para cada autoespaço e a dimensão.

Definição 29

Dizemos que uma matriz quadrada B é semelhante a um matriz A quando existir alguma matriz invertível P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Neste caso, escrevemos $B \sim A$.

Matrizes semelhantes têm muitas propriedades em comum, por exemplo,

1. Matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.
2. Se A e B são semelhantes, então $B^k = P^{-1}A^kP$.

Exemplo

Defina P como a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ do exemplo anterior e calcule a matriz $D = P^{-1}AP$, semelhante a A.

Teorema 30

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de uma matriz A. Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ são as bases dos autoespaços E_{λ_1} e E_{λ_2}, respectivamente, então $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é LI.

Diagonalização de Matrizes

Definição 31

Dizemos que uma matriz quadrada A é diagonalizável se for semelhante a alguma matriz diagonal, isto é, se existe alguma matriz invertível P tal que $D = P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Neste caso, dizemos que P diagonaliza A.

Teorema 32

Uma matriz A de ordem n é diagonalizável se, e só se, possui n autovetores linearmente independentes. Neste caso, se $D = P^{-1}AP$ a matriz diagonal D é formada pelos autovalores e a matriz P tem as colunas formadas pelos autovetores.

Exemplo

1. Mostre que a seguinte matriz não é diagonalizável

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Calcule A^n onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

3. Mostre que a matriz A é diagonalizável e encontre as matrizes diagonal D e a matriz P que diagonaliza A.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para Casa 20

1. Mostre que

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é diagonalizável e obtenha as matrizes diagonal D e a matriz P que diagonaliza A.

2. Calcule B^{11}, onde

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & -2 \end{bmatrix}$$

Diagonizando com sympy

```
import sympy as sp

A=sp.Matrix([[-1, 2, -2, 10],
[0, -7, 6, -30],
[0, 2, 0, 7],
[0, 2, -2, 9]])
[P,D]=A.diagonalize()
display(P)
display(D)
```

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 10 \\ 0 & -7 & 6 & -30 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sumário

Exercício

Considere os vetores $\vec{v}_1 = (2, 1, -1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 2)$ e $\vec{v}_3 = (2, -5, -1)$.

1. Mostre que os três vetores são ortogonais dois a dois.
2. Use esse fato para mostrar que os vetores são LI, isto é, a equação vetorial
$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \vec{0},$$
só possui a solução trivial $x = y = z = 0$.
3. Escreva $\vec{v} = (3, -1, 1)$ como combinação linear da base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Definição 33

Um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v_k}\} \subset \mathbb{R}^n$ é dito ortogonal se todos os vetores são ortogonais dois a dois, isto é,

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0,\ \forall i, j = 1, 2, \dots k,\ i \neq j.$$

E dizemos que ortonormal se além de ortogonal cada vetor for unitário, isto é,

$$\|\vec{v}_i\| = 1,\ \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Neste caso, escrevemos também

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},\ \forall i, j = 1, 2, \dots, k$$

onde δ_{ij} é o chamado Delta de Kronecker.

Teorema 34

Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ é ortogonal, então esses vetores são LI. Além disso, se

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdot + c_k\vec{v}_k,$$

então

$$c_i = \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^2}$$

Definição 35

Definimos a projeção ortogonal de um $\vec{v}$ sobre um vetor não nulo $\vec{w}$ como sendo o seguinte vetor

$$\operatorname{proj}_{\vec{w}} \vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}\right) \vec{w}.$$

Proposição 36

Seja $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ um conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$\vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{v}_1} \vec{v} - \operatorname{proj}_{\vec{v}_2} \vec{v} - \cdots - \operatorname{proj}_{\vec{v}_k} \vec{v}$$

é ortogonal a cada $\vec{v}_i$, onde $i = 1, 2, \ldots, k$.

Exemplo

Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\vec{v}_1 = (-1, 0, -1, 0, 1),\ \vec{v}_2 = (0, 0, 1, 1, 0),\ \vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 0, 0).$$

Para Casa 21

Determine uma base ortogonal para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por

$$\vec{v}_1 = (1, -1, -1, 1),\ \vec{v}_2 = (2, 1, 0, 1),\ \vec{v}_3 = (2, 2, 1, 2).$$

Coordenadas em relação a uma base

Se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então cada vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de forma única como

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n.$$

Neste caso, dizemos que esta é a expressão de $\vec{v}$ em termos da base $\mathcal{B}$. Os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são chamados de coordenadas de $\vec{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$ e escrevemos

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)_{\mathcal{B}} \text{ ou } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{\mathcal{B}},$$

chamado vetor de coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$.

Exemplo

1. Determine as coordenadas do vetor $\vec{v} = (2, -1, 3)$ em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.
2. Mostre que $\mathcal{B} = \{(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$. Em seguida, encontre o vetor de coordenadas de $\vec{v} = (5, -1, 9)$ em relação a essa base.