



## Gabarito

Questão 1. .... / 4 pts

Calcule as integrais

(a) [1 pt]  $\int_1^2 x^4 + x^3 dx$

(c) [1 pt]  $\int x^4 \log(x) dx$

(b) [1 pt]  $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}} dx$

(d) [1 pt]  $\int_0^\infty \frac{e^x}{e^x+3} dx$

**Solução:**

(a)

$$\int_1^2 x^4 + x^3 dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{199}{20}.$$

(b) Vamos usar a substituição trigonométrica. Primeiramente, note que

$$\sqrt{x^2+2} = \sqrt{2 \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

Com isso, vamos usar a seguinte substituição trigonométrica

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \tan(\theta), & -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \\ dx = \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta. \end{cases}$$

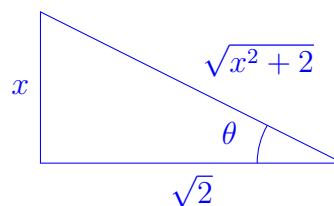
Daí,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+2}} dx &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{x\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2} \tan(\theta) \sqrt{1 + \tan^2(\theta)}} \sqrt{2} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\tan(\theta) |\sec(\theta)|} \sec^2(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sec(\theta)}{\tan(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sin(\theta)} d\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \operatorname{cosec}(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \log |\operatorname{cosec}(\theta) - \cotg(\theta)| + C \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{x} \right| + C \end{aligned}$$



(\*) Vamos voltar para a variável anterior. Usando-se as relações trigonométricas do triângulo retângulo ao lado vemos que

$$\cotg(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{x} \text{ e } \operatorname{cosec}(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}$$



(c) Vamos resolver esta integral por partes. Fazendo

$$u = \log(x) \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^4 dx \quad v = \frac{x^5}{5},$$

temos

$$\int x^4 \log(x) dx = \frac{x^5}{5} \log(x) - \int \frac{x^4}{5} dx = \frac{x^5 \log(x)}{5} - \frac{x^5}{25} + C.$$

(d) Primeiramente vamos resolver a integral indefinida. Fazendo a substituição  $u = e^x + 3$ ,  $du = e^x dx$  temos que

$$\int \frac{e^x}{e^x + 3} dx = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log(e^x + 3) + c$$

Agora, vamos resolver a integral imprópria:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^x}{e^x + 3} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{e^x}{e^x + 3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \log(e^x + 3) \Big|_{x=0}^{x=b} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\log(e^b + 3) - \log(4)) = \infty. \end{aligned}$$



Questão 2. .... / 2 pts

Determine o comprimento de arco do gráfico da função  $y = \log(\cos(x))$  entre os pontos  $x = 0$  e  $x = \pi/3$ .

**Solução:** Note que

$$y' = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Com isso, o comprimento de arco é dado por:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \sqrt{1 + \tan^2(x)} \, dx &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2(x)} \, dx \\ &= \int_0^{\pi/3} \sec(x) \, dx = \log |\sec(x) + \tan(x)| \Big|_{x=0}^{x=\pi/3} = \log(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$



**Questão 3.** ...../ 2 pts

Considere o sólido obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , da região limitada pelos gráficos das funções  $y = 6 - x^2$  e  $y = 2$ .

- (a) Faça um esboço da região e do sólido.
- (b) Calcule o volume do sólido.

**Solução:** Determinando os pontos de interseção

$$6 - x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Pelo gráfico podemos ver que o sólido é simétrico em relação ao eixo  $y$ . Usando o método dos discos, temos que o volume é dado por

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^2 (6 - x^2)^2 - 4 \, dx = 2\pi \int_0^2 x^4 - 12x^2 + 32 \, dx \\ &= 2\pi \left( \frac{x^5}{5} - 4x^3 + 32x \right) \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{384\pi}{5}. \end{aligned}$$