

Gabarito

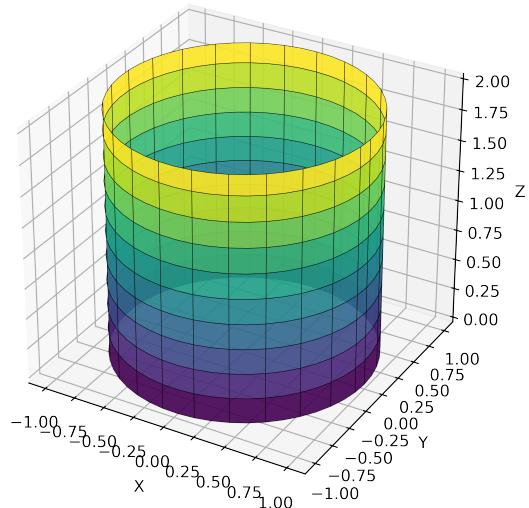
Questão 1. / 3 pts

Considere as superfícies $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $S_2 : z = 4x^2 + y^2$.

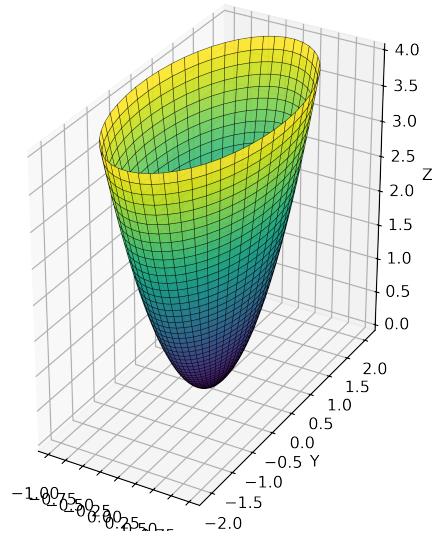
- [1 pt] Reconheça e faça um esboço da superfície S_1 .
- [1 pt] Reconheça e faça um esboço da superfície S_2 .
- [1 pt] Dê uma parametrização para a curva de interseção de S_1 e S_2 .

Solução:

- (a) Essa superfície é um cilindro.



- (b) Essa superfície é um paraboloide elíptico.





- (c) Tomando como a base da curva o círculo do cilindro, fazemos $x(t) = \cos(t)$, $y(t) = \sin(t)$.
E a “altura” z da curva dada pelo paraboloide, temos:

$$z(t) = 4 \cos^2(t) + \sin^2(t) = 3 \cos^2(t) + 1.$$

Com isso, uma parametrização é:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 3 \cos^2(t) + 1), \quad t \in (0, 2\pi).$$

Questão 2. / 7 pts

Considere as curvas

$$\vec{r}_1(t) = \left(\sin(\pi t), \cos(\pi t), \frac{2\pi t^{\frac{3}{2}}}{3} \right), \quad 0 \leq t \leq 2$$

e

$$\vec{r}_2(t) = \left(2t, t, \frac{e^{2t}}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) [1 pt] Determine os pontos inicial e final de \vec{r}_1 .
(b) [1 pt] Determine os pontos que a curva \vec{r}_1 intercepta o plano yz .
(c) [1 pt] Determine os vetores tangente de \vec{r}_1 e de \vec{r}_2 .
(d) [2 pts] Calcule o comprimento de arco de \vec{r}_1 .
(e) [2 pts] Calcule a curvatura da curva de \vec{r}_2 .

Solução:

- (a) Ponto inicial: $\vec{r}_1(0) = (0, 1, 0)$, Ponto final: $\vec{r}_1(2) = \left(0, 1, \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} \right)$.

- (b) Isso ocorre quando

$$\cos(\pi t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{3}{2}.$$

Portanto, \vec{r}_1 intercepta o plano yz nos pontos

$$\vec{r}_1(1/2) = \left(1, 0, \frac{\sqrt{2}\pi}{6} \right) \text{ e } \vec{r}_1(3/2) = \left(-1, 0, \frac{\sqrt{6}\pi}{2} \right).$$

(c)

$$\vec{r}'_1(t) = \left(\pi \cos(\pi t), -\pi \sin(\pi t), \pi\sqrt{t} \right)$$

e

$$\vec{r}'_2(t) = (2, 1, e^{2t})$$

- (d) Do item (c)

$$\|\vec{r}'_1(t)\| = \pi\sqrt{t+1}$$

Com isso,

$$L = \int_0^2 \pi\sqrt{t+1} dt = \frac{2\pi(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_{t=0}^{t=2} = -\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}\pi$$



(e) Do item (c)

$$\vec{r}_2'' = (0, 0, 2e^{2t}) \quad \text{e} \quad \|\vec{r}_2''\| = \sqrt{e^{4t} + 5}.$$

Daí,

$$\vec{r}_2' \times \vec{r}_2''' = (2e^{2t}, -4e^{2t}, 0) \Rightarrow \|\vec{r}_2' \times \vec{r}_2'''\| = 2\sqrt{5}e^{2t}.$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}_2' \times \vec{r}_2'''\|}{\|\vec{r}_2'\|^3} = \frac{2\sqrt{5}e^{2t}}{(e^{4t} + 5)^{\frac{3}{2}}}.$$

Questão 3 (bonus). / 1 bonus

Mesmo a terra sendo redonda, quando olhamos para o horizonte vemos uma linha reta. Sabendo que a terra é aproximadamente uma esfera, com raio de 6 371 quilômetros, use o que você aprendeu sobre curvas para explicar esse fenômeno.



Solução: A superfície da terra é aproximadamente uma esfera. Quando olhamos para o horizonte, o que vemos é um pedaço bem pequeno de uma curva circular. Sabemos que a curvatura de um círculo de raio r é $k = \frac{1}{r}$.

Sabemos que retas têm curvatura zero. No caso da terra, a curvatura de um círculo máximo é $k = \frac{1}{6371} \approx 0.000157$. Ou seja, muito próximo de zero, o que dá a ilusão de ser uma reta.