



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

# Semigrupos de Operadores Lineares

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

Luiz Viana<sup>1</sup>

Reginaldo Demarque<sup>2</sup>

Niterói, 2024

[Compilado 13 de dezembro de 2024, 10:40]

---

<sup>1</sup>Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.

<sup>2</sup>Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.



# Sumário

---

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	Espaços Normados . . . . .	1
1.2	Operadores Lineares Ilimitados . . . . .	1
1.3	Integrais Vetoriais . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Semigrupos de Operadores Lineares</b>	<b>5</b>
2.1	Semigrupos de Classe $C^0$ . . . . .	5
2.2	Teorema de Hille-Yosida . . . . .	21
<b>A</b>	<b>Apêndice</b>	<b>25</b>
A.1	Resultados Clássicos . . . . .	25
	<b>Bibliografia</b>	<b>27</b>



# Preliminares

## 1.1 Espaços Normados

**Definição 1.1.** Uma **norma** é

## 1.2 Operadores Lineares Ilimitados

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach. Seja  $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$  um operador linear, onde  $D(A)$  é um subespaço de  $X$ , chamado de **domínio** de  $A$ . Dizemos que  $A$  é **limitado (ou contínuo)** se  $D(A) = X$  e se existe  $C > 0$  tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (1.1)$$

Denotaremos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço de Banach dos **operadores lineares limitados** com norma dada por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

por  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$  e  $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ .  $A$  é dito ser **ilimitado** quando não satisfazer (1.1). Dizemos que  $A$  é **densamente definido** se  $\overline{D(A)} = X$ .

**Teorema 1.2** (Banach-Steinhaus). *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço vetorial normado. Se  $\{T_i\}_{i \in I}$  é uma família (não necessariamente enumerável) em  $\mathcal{L}(X, Y)$  pontualmente limitada, então  $\{T_i\}_{i \in I}$  é uniformemente limitada, isto é, se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

### 1.3 Integrais Vetoriais

**Definição 1.3.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $u : [a, b] \longrightarrow X$  uma aplicação tal que, para cada  $\varphi \in X'$ , a função real

$$t \in [a, b] \longmapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que  $u$  é **integrável** se existe um vetor  $v \in X$  que satisfaz:

$$\langle \varphi, v \rangle_{X',X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} dt, \quad \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo,  $v$  é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t) dt.$$

**Proposição 1.4.** Se  $u : [a, b] \longrightarrow X$  é contínua, então  $u$  é integrável. Além disso,

$$1. \left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt$$

2. Se  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , então

$$A \left( \int_a^b u(t) dt \right) = \int_a^b A(u(t)) dt.$$

*Demonstração.* Veja em [2, Theorem A3.2]

□

**Proposição 1.5.** Se  $u : [a, b] \longrightarrow X$  é contínua, então

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt = u(a). \quad (1.2)$$

*Demonstração.* A função  $f : t \in [a, b] \longmapsto \|u(t) - u(a)\| \in \mathbb{R}$  é contínua. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c).$$

Como  $a \leq c \leq b$ , se  $b \rightarrow a^+$ , então  $c \rightarrow a^+$ . Neste caso,

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{b \rightarrow a^+} f(c) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\| dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt - u(a) \right\| &= \lim_{b \rightarrow a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) - u(a) dt \right\| \\ &\leq \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\| dt = 0. \end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.2). □





# Semigrupos de Operadores Lineares

## 2.1 Semigrupos de Classe $C^0$

**Definição 2.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação  $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  é um **semigrupo de operadores limitados em  $X$**  quando:

1.  $S(0) = \text{Id}$ ;
2.  $S(t + s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \in [0, +\infty)$ ;

Dizemos que  $S$  é **de classe  $C^0$  ou fortemente contínuo** se

3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - \text{Id})x\| = 0$ ,  $\forall x \in X$ .

Dizemos que  $S$  é **uniformemente contínuo** se

4.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - \text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ .

**Exemplo 2.2.** São exemplos de semigrupos:

1. Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Define-se a aplicação exponencial por

$$e^A = \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Pode-se mostrar que esta série é absolutamente convergente e define  $e^A \in \mathcal{L}(X)$ , veja [1, Apêndice 2]. Neste caso,  $e^{tA} : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ , quando  $A \in \mathcal{L}(X)$ , é um semigrupo.

2. Seja  $X = C_b(\mathbb{R})$  o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então  $S(t)f(s) = f(t + s)$  define um semigrupo de classe  $C^0$ .

**Proposição 2.3.** *Se  $S$  é um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ , então existem  $\mu \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

*Em particular,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é uma função limitada em todo intervalo  $[0, T]$ .*

*Demonstração.* Vamos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.2) à família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  em  $\mathcal{L}(X)$ , onde  $X$  é Banach. Para isso, basta mostrar que esta família é pontualmente limitada.

De fato,  $S$  é um semigrupo de classe  $C^0$ , então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Com isso, dado  $x \in X$ , para  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 \leq t \leq \delta$ , então

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\| = C_x.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus,  $\{S(t)\}_{0 \leq t \leq \delta}$  é uniformemente limitada, isto é,  $\exists M > 0$  tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0, \delta]. \quad (2.2)$$

Além disso,  $M \geq \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ .

Por outro lado, dado  $t > \delta$ , pelo algoritmo da divisão, existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $r \in [0, \delta)$  tais que  $t = n\delta + r$ . Com isso, do item 2 da definição de Semigrupo e da desigualdade (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(n\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \overbrace{\|S(\delta) \cdots S(\delta)\|}^{n \text{ vezes}} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{n+1}. \end{aligned}$$

Note que, como  $n \leq t/\delta$  e  $M \geq 1$ , temos que  $M^n \leq M^{t/\delta}$ . Da desigualdade anterior,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{t/\delta} = Me^{\frac{t}{\delta} \log(M)} = Me^{\mu t},$$

onde  $\mu = \frac{1}{\delta} \log(M)$ .

Em particular,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em outras palavras,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada em  $[0, T]$ . □

**Corolário 2.4.** *Todo semigrupo de classe  $C^0$  é fortemente contínuo em  $[0, +\infty)$ , i.e., para todo  $x \in X$ ,  $S(\cdot)x \in C^0([0, +\infty); X)$ . Em outras palavras,*

$$t \in [0, +\infty) \mapsto S(t)x \in X \text{ é contínua.}$$

*Demonstração.* Dado  $x \in X$ , devemos mostrar que, para todo  $t \in [0, +\infty)$ ,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Do item (3) da definição de semigrupos, já temos que

$$\|S(h)x - S(0)x\| = \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Isto é,  $S(\cdot)x$  é contínua em  $t = 0$ . Dado  $t \in (0, +\infty)$ , se  $h > 0$ , então

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Se  $h < 0$ , então seja  $k = -h > 0$ . Daí, se  $h \rightarrow 0^+$ , então  $k \rightarrow 0^+$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-k)x - S(t)x\| = \|S(t-k)x - S(t-k+k)x\| \\ &= \|S(t-k)x - S(t-k)S(k)x\| = \|S(t-k)(\text{Id} - S(k))x\| \\ &\leq \|S(t-k)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(k) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(k) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

□

Vamos melhorar a estimativa (2.1) através do seguinte teorema.

**Teorema 2.5.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada  $\omega > \omega_0$ , existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

*Observação 2.6.* Quando  $\omega_0 < 0$ , então para  $\omega = 0$ , temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que  $S$  é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso,  $M = 1$ ,  $S$  é dito **semigrupo das contrações**.

**Lema 2.7.** *Seja  $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função subaditiva, isto é,  $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$ . Se  $p$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então  $p(t)/t$  tem um limite quando  $t \rightarrow +\infty$  e*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

*Prova:* Ver [1, Lema 1.2.5]

*Prova do Teorema 2.5.* Primeiramente, vejamos que  $p(t) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})$  é subaditiva. De fato, como  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , temos que

$$\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função  $\log$  é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t+s) &= \log(\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)}) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) + \log(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que  $p$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja  $(a, b)$  um intervalo limitado em  $[0, +\infty)$ . Em particular,  $(a, b) \subset [0, b]$ . Portanto, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu b}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Isto é,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como  $\log$  é crescente, temos que  $p$  também o é. Logo, do Lema 2.7, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0.$$

Se  $\omega > \omega_0$ , tome  $\varepsilon = \omega - \omega_0$ , pela definição de limite, existe  $t_0 > 0$  tal que se  $t > t_0$ , então

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\mu t_0} =: M_0, \forall t \in [0, t_0].$$

E como  $S(0) = I$ , então  $M_0 \geq 1$ .

**1º caso:**  $\omega \geq 0$ .

Vimos que

$$\begin{cases} \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega, \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0) + t\omega} \leq M_0 e^{t\omega}, \forall t \in [0, +\infty).$$

**2º caso:**  $\omega < 0$ .

Neste caso, se  $t > t_0$ , como  $-t_0\omega \geq 0$  e  $\log(M_0) \geq 0$ , então

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se  $t \leq t_0$ , então  $t\omega - t_0\omega \geq 0$ , daí,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) < \log(M_0) \underbrace{-t_0\omega + t\omega}_{\geq 0}, \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega, \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0 \omega}}_M e^{t\omega} = M e^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

**Definição 2.8.** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ . O **gerador infinitesimal** de  $S$  é o operador  $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, x \in D(A)$$

Dado  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ , vamos designar por  $A_h$  o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \forall x \in X.$$

**Proposição 2.9.**  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$  e  $A$  é um operador linear.

*Demonstração.* Exercício. □

*Observação 2.10.* De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, **quando um operador  $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  é o gerador infinitesimal de algum semigrupo?** O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

**Teorema 2.11.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Dado  $x \in D(A)$ , então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (2.4)$$

*Demonstração.*

**Afirmação 1:** Se  $x \in D(A)$ , então  $S(t)x \in D(A)$  e  $A(S(t)x) = S(t)Ax$ .

Dado  $x \in D(A)$ , seja  $y = S(t)x$ . Primeiramente, vamos mostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h y = S(t)Ax$ . Para isso, note que

$$A_h y = \frac{S(h)y - y}{h} = \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}$$

$$= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t) \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_hx.$$

Como  $x \in D(A)$ , temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} A_hx = Ax$ . Além disso,  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , então  $S(t)$  é contínua. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_hy = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t)A_hx = S(t) \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} A_hx \right) = S(t)Ax.$$

Neste caso, provamos que  $S(t)x = y \in D(A)$  e que  $Ay = S(t)Ax$ , ou seja,  $A(S(t)x) = S(t)Ax$ .

**Afirmção 2:**  $\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax, \forall x \in D(A)$ .

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \quad (2.5)$$

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{S(t+\delta)x - S(t)x}^{>0}}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo  $\delta = -h$ , temos que  $0 < h < t$  e

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dt} S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \left( \frac{x - S(h)x}{-h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h)A_hx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(t-h)(A_hx - Ax) + S(t-h)Ax \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Do Corolário (2.4), temos que  $f(h) = S(t-h)Ax$  é contínua em  $[0, t)$ , portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \quad (2.7)$$

Por outro lado, do Teorema 2.5, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall h \in [0, t),$$

donde,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)(A_h x - Ax)\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_h x - Ax\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega t} \|A_h x - Ax\| = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Com isso, (2.6), (2.7) e (2.8) implicam que

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A). \quad (2.9)$$

Portanto, de (2.5) e (2.9), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A).$$

□

**Proposição 2.12.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $x : (a, b) \rightarrow D(A) \subset X$  é uma curva diferenciável tal que  $x' \in D(A)$ , então a curva  $y(s) = S(s)x(s)$  também é diferenciável e*

$$y'(s) = S(s)x'(s) + S(s)Ax(s), \quad \forall s \in (a, b) \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos calcular a derivada de  $y$  pela direita.

$$\begin{aligned} y'_+(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(s+h) - y(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s) + S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s)}{h} + \frac{S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s+h) \frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s) \frac{S(h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s+h) \frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s+h) \left( \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - S(s+h)x'(s) + S(s+h)x'(s) \right) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s+h) \left( \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} S(s)x'(s) + S(s)Ax(s). \end{aligned}$$



(\*) Vamos provar a seguir a convergência de cada um dos limites.

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| S(s+h) \left( \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right) \right\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega(s+h)} \underbrace{\left\| \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right\|}_{\rightarrow 0} = 0$$

Como  $S(\cdot)x$  é contínua, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(s+h)x'(s) = S(s)x'(s).$$

Da continuidade de  $S(s)$  e do fato que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = Ax$ , para todo  $x \in D(A)$ , temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(s)A_h(x(s)) = S(s)Ax(s).$$

Agora vamos provar a derivada pela esquerda.

$$y'_-(s) = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{y(s+\delta) - y(s)}{\delta}, \text{ para } -s < \delta < 0.$$

Analogamente, fazendo  $h = -\delta > 0$ , temos

$$\begin{aligned} y'_-(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(s-h) - y(s)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h) - S(s)x(s)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h) - S(s-h)x(s) + S(s-h)x(s) - S(s)x(s)}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s-h) \frac{x(s-h) - x(s)}{-h} + \frac{S(s-h)x(s) - S(s)x(s)}{-h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s-h) \frac{x(s-h) - x(s)}{-h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{S(s-h) - S(s)}{-h} x(s) \right) \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \left( S(s+\delta) \frac{x(s+\delta) - x(s)}{\delta} \right) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(s-h) \frac{I - S(h)}{-h} x(s) \right) \end{aligned}$$

(Como antes, vamos calcular os limites usando a limitação de  $S$  e a continuidade de  $S(\cdot)x$ )

$$\begin{aligned} &= \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \left( \underbrace{S(s+\delta)}_{\text{limitado}} \underbrace{\left( \frac{x(s+\delta) - x(s)}{\delta} - x'(s) \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{S(s+\delta)x'(s)}_{S(\cdot)x \text{ é contínua}} \right) + \\ &\quad \lim_{h \rightarrow 0^+} (S(s-h)A_h(x(s))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S(s)x'(s) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \underbrace{S(s-h)}_{\text{limitado}} \left( \underbrace{A_h(x(s) - Ax(s))}_{\rightarrow 0} \right) + \underbrace{S(s-h)Ax(s)}_{S(\cdot)x \text{ contínua}} \right) \\
&= S(s)x'(s) + S(s)Ax(s)
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.13** (Existência e Unicidade do PVI). *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $x_0 \in D(A)$ , então  $x(t) = S(t)x_0$  define uma única solução do PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

*Demonstração.* De fato, do Teorema 2.11, como  $x_0 \in D(A)$ , temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

E também a condição inicial

$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.11 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Resta provar a unicidade. Para isso, seja  $v = v(t)$  uma outra solução para o mesmo PVI. Defina, para cada  $t \geq 0$ ,  $w(s) = S(t-s)v(s)$ ,  $s \in [0, t]$ .

**Afirmção 1:**  $w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s)$ , para todo  $s \in [0, t]$ .

Com efeito, defina  $z(\tau) = v(t-\tau)$  e  $u(\tau) = w(t-\tau)$ , então

$$u(\tau) = w(t-\tau) = S(t-(t-\tau))v(t-\tau) = S(\tau)v(t-\tau) = S(\tau)z(\tau).$$

Da identidade (2.10) e da regra da cadeia para funções vetoriais,

$$u'(\tau) = S(\tau)z'(\tau) + S(\tau)Az(\tau) = -S(\tau)v'(t-\tau) + S(\tau)Av(t-\tau).$$

Como  $u'(\tau) = -w'(t - \tau)$ , temos que

$$w'(t - \tau) = S(\tau)v'(t - \tau) - S(\tau)Av(t - \tau).$$

Portanto, fazendo  $\tau = t - s$ , temos que

$$\begin{aligned} w'(s) &= w'(t - (t - s)) = S(t - s)v'(t - (t - s)) - S(t - s)Av(t - (t - s)) \\ &= S(t - s)v'(s) - S(t - s)Av(s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Como  $v$  é solução do PVI, então  $v'(s) = Av(s)$ , donde

$$w'(s) = S(t - s)v'(s) - S(t - s)Av(s) = S(t - s)Av(s) - S(t - s)Av(s) = 0.$$

Portanto,  $w$  é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

□

*Observação 2.14.* Se  $x_0 \notin D(A)$  em  $X$ , então  $x(t) = S(t)x_0$  **não é diferenciável**. Neste caso, dizemos que  $x = x(t)$  é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.4, temos que  $x \in C^0([0, +\infty); X)$ .

**Exercício 2.15.** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $x \in D(A)$  mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau \quad (2.11)$$

**Proposição 2.16.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então para todo  $x \in X$ ,*

$$\int_0^t S(s)x ds \in D(A) \quad e \quad A \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

*Demonstração.* Dado  $t \in (0, +\infty)$ , seja

$$v = \int_0^t S(s)x ds.$$

Basta mostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = S(t)x - x$ , pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como  $A_h \in \mathcal{L}(X)$ , da Proposição 1.4, temos que

$$\begin{aligned} A_h v &= A_h \left( \int_0^t S(s)x \, ds \right) = \int_0^t A_h(S(s)x) \, ds \\ &= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h} \, ds = \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x - S(s)x \, ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s)x \, ds \end{aligned}$$

(Mudança de variáveis  $\tau = h + s$  na primeira integral e fazendo  $s = \tau$  na segunda)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)x \, d\tau \\ &= \left( \frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x \, d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau \right) - \left( \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau + \frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x \, d\tau \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau. \end{aligned}$$

Como  $S(\cdot)x$  é contínua (Corolário 2.4), pela identidade (1.2),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau \right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. □

**Proposição 2.17.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então  $A$  é fechado e seu domínio é denso em  $X$ .*

*Demonstração.*

**1.  $D(A)$  é denso em  $X$ .**

Dado  $x \in X$ , basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt \in D(A) \text{ e } v_h \rightarrow x, \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

De fato, que  $v_h \in D(A)$  decorre diretamente da Proposição 2.16. Como  $S(\cdot)x$  é contínua, pela identidade (1.2),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} v_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt = x.$$

**1.  $A$  é fechado.**

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  e  $Ax_n \rightarrow y$  em  $X$ . Devemos mostrar que  $x \in D(A)$  e  $Ax = y$ .

Como  $A_h$  é contínuo, da identidade (2.11), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_h x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} (S(h)x_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t) A x_n dt \quad (2.12)$$

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\|S(t)A x_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A x_n - y\| \leq M e^{\omega t} \|A x_n - y\| \leq M e^{\omega h} \|A x_n - y\|.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_0^h S(t) A x_n - S(t)y dt \right| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t)A x_n - S(t)y\| dt \leq \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{M e^{\omega h} \|A x_n - y\|}_{\text{não depende de } t} dt \\ &\leq M e^{\omega h} \|A x_n - y\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Da da identidade (2.12), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t) A x_n dt = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y dt.$$

Por fim, como  $x \in D(A)$  e  $S(\cdot)y$  é contínua (Corolário 2.4), da identidade (1.2), temos que

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y dt = S(0)y = y.$$

□

*Observação 2.18.* Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador  $A$  seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

**Proposição 2.19** (Unicidade). *Sejam  $S_1, S_2$  dois semigrupos de classe  $C^0$  em  $X$  com o mesmo gerador infinitesimal  $A$ . Então  $S_1 = S_2$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que  $S_1(t)x = S_2(t)x$ , para todo  $x \in D(A)$ . De fato, dado  $x \in D(A)$ , como  $S_1$  e  $S_2$  tem o mesmo gerador infinitesimal, pelo Teorema 2.13, temos que  $x_1(t) = S_1(t)x$  e  $x_2(t) = S_2(t)x$  são duas soluções do mesmo PVI. Da unicidade de soluções, temos que  $S_1(t)x = S_2(t)x$ .

Agora vamos usar a densidade de  $D(A)$  em  $X$  para concluir a demonstração. Com efeito, dado  $x \in X$ , seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  em  $X$  quando  $n \rightarrow +\infty$ . Como  $x_n \in D(A)$ , temos que  $S_1(t)x_n = S_2(t)x_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . E como  $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$ , então

$$S_1(t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_1(t)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_2(t)x_n = S_2x.$$

□

**Definição 2.20.** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Defina  $A^0 = \text{Id}$ ,  $A^1 = A$  e, supondo que  $A^{n-1}$  esteja definido, vamos definir  $A^n$  pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}); A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

**Proposição 2.21.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Temos:*

(i)  $D(A^n)$  é um subespaço de  $X$  e  $A^n$  é um operador linear de  $X$ ;

(ii) Se  $x \in D(A^n)$ , então  $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$  e

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

(iii) É válida a fórmula de Taylor: se  $x \in D(A^n)$ , então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau$$

(iv)  $(S(t) - I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x d\tau_1 \cdots d\tau_n, \forall x \in D(A^n);$

(v)  $\bigcap_n D(A^n)$  é denso em  $X$ .

*Demonstração.*

(i) Sabemos que  $D(A)$  é um subespaço de  $X$ . Suponha que  $D(A^{n-1})$  seja subespaço. Dados  $x, y \in D(A^n)$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , como  $x, y \in D(A^{n-1})$ , então  $x + \lambda y \in D(A^{n-1})$  e, como  $A^{n-1}$  é linear,

$$A^{n-1}(x + \lambda y) = \underbrace{A^{n-1}x}_{\in D(A)} + \lambda \underbrace{A^{n-1}y}_{\in D(A)} \in D(A).$$

Portanto,  $D(A^n)$  também é subespaço. Logo, por indução, segue o resultado.  $A^n$  é linear pois é a composição de operadores lineares.

(ii) Teorema 2.11 garante a validade para  $n = 1$ .

**Hipótese de Indução:** Suponha que, para algum  $k > 1$ ,  
Se  $x \in D(A^k)$ , então  $S(t)x \in D(A^k)$ ,  $\forall t \geq 0$  e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x$$

Vamos mostrar que é válido para  $n = k + 1$ . De fato, se  $x \in D(A^{k+1})$ , por definição,  $x \in D(A^k)$  e  $y = A^k x \in D(A)$ . Aplicando-se o Teorema 2.11 a  $y$ , temos que  $S(t)A^k x = S(t)y \in D(A)$ . Da Hipótese de Indução, temos que  $S(t)x \in D(A^k)$  e  $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$ , portanto  $S(t)x \in D(A^{k+1})$ . Além disso, da identidade (2.4), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)y = AS(t)y = S(t)Ay.$$

Donde,

$$\frac{d}{dt} S(t)A^k x = AS(t)A^k x = S(t)A^{k+1}x.$$

Da Hipótese de Indução, já temos que  $S(t)x \in D(A^k)$  e, da identidade anterior, que  $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$ , portanto  $S(t)x \in D(A^{k+1})$ . temos que  $S(t)A^k = \frac{d^k}{dt^k} S(t)x$  e  $S(t)A^k x = A^k S(t)x$ . Substituindo-se na identidade anterior, Obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d^k}{dt^k} S(t)x \right) = AA^k S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

Portanto,

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} S(t)x = A^{k+1} S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

O que prova a identidade (2.13) para  $n = k + 1$ . Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita.

(iii) Este resultado também segue por indução. Para  $n = 1$  é simplesmente a identidade (2.11).

**Hipótese de Indução:** Suponha que, para algum  $m > 1$ , se  $x \in D(A^m)$ , então vale a fórmula de Taylor:

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(\tau)x d\tau$$

Vamos mostrar que também vale para  $n = m + 1$ . Par isso, vamos fazer uma integração por partes e usar a fórmula do item (ii).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x d\tau \\ & \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} S(t)x d\tau \\ & = \frac{1}{m!} (t-\tau)^m \frac{d^m}{d\tau^m} S(t)x \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \frac{1}{m!} \int_a^t -m(t-\tau)^{m-1} \frac{d^m}{d\tau^m} S(t)x d\tau \\ & \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{m!} (t-\tau)^m A^m S(t)x \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x d\tau \\ & = -\frac{1}{m!} (t-a)^m A^m S(a)x + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x d\tau \end{aligned}$$

(Hipótese de Indução)

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{m!} (t-a)^m A^m S(a)x + S(t)x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x \\ & = S(t)x - \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x. \end{aligned}$$

Logo,

$$S(t)x = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x d\tau,$$

como queríamos.

(iv) **COMPLETAR A PROVA**

□



## 2.2 Teorema de Hille-Yosida

**Definição 2.22.** Seja  $X$  um espaço de Banach e  $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  um operador linear fechado. Chamamos de **resolvente de  $A$** , o seguinte conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ é bijetor} \}$$

O conjunto  $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  é dito **espectro** de  $A$ . Para cada  $\lambda \in \rho(A)$ , definimos o **operador resolvente** por

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A).$$

O qual, pelo Teorema do Gráfico fechado, é um operador linear limitado.

**Teorema 2.23** (Hille-Yosida). *Seja  $X$  um espaço de Banach. Um operador linear  $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$  é o gerador infinitesimal de um **semigrupos de contrações** se, e somente se,*

(i)  *$A$  é fechado e densamente definido, i.e.,  $\overline{D(A)} = X$ .*

(ii)  *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$  e para todo  $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A prova deste teorema será dividida em lemas.

**Lema 2.24** (Condição Necessária). *Seja  $A$  o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Então  $A$  é fechado e densamente definido. Além disso,  $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ ,*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi,$$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

*Demonstração.* Da Proposição 2.17, temos que  $A$  é fechado e densamente definido.

Dados  $x \in X$  e  $\lambda > 0$  defina

$$L_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi.$$

Primeiramente, vejamos que  $L_\lambda x$  está bem definida. Para isso, vamos usar o Teste de Weierstrass (Proposição A.1). Do Corolário 2.4, temos que a função

$$(t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty) \longmapsto e^{-\lambda t} S(t)x \in X,$$

é contínua em  $t$  para cada  $\lambda \in (0, +\infty)$ .

Como  $S$  é um semigrupo de contrações, temos que

$$\|e^{-\lambda t} S(t)x\| = e^{-\lambda t} \|S(t)x\| \leq e^{-\lambda t} \|x\| \leq e^{-t} \|x\| =: M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty M(t) dt &= \int_0^\infty e^{-t} \|x\| dt = \|x\| \int_0^\infty e^{-t} dt = \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t} dt \\ &= \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=b} = \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = \|x\| < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste de Weierstrass,  $L_\lambda$  está bem definida. Claro que  $L_\lambda$  é linear e além disso, procedendo como acima,

$$\begin{aligned} \|L_\lambda x\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)x\| dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| dt \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda t} \Big|_{t=0}^{t=b} = \frac{\|x\|}{\lambda}, \end{aligned}$$

isto é,  $L_\lambda$  define um operador linear limitado em  $X$  e  $\|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$ .

Resta mostrar que  $L_\lambda = R(\lambda, A)$ , isto é, devemos mostrar que

1.  $\forall x \in X$ ,  $L_\lambda x \in D(A)$  e  $(\lambda I - A)L_\lambda x = x$ , i.e.,  $A(L_\lambda x) = L_\lambda x - x$ .
2.  $\forall x \in D(A)$ ,  $L_\lambda(\lambda I - A)x = x$ , i.e.,  $L_\lambda(Ax) = \lambda L_\lambda x - x$ .

De fato, dado  $x \in X$ , seja  $h > 0$ , como  $A_h \in \mathcal{L}$ , temos que

$$\begin{aligned} A_h(L_\lambda x) &= A_h \left( \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)x d\xi \right) = \frac{1}{h} \int_0^\infty (S(h) - I)e^{-\lambda \xi} S(\xi)x d\xi \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi + h)x d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)x d\xi \end{aligned}$$

(Fazendo a mudança  $s = \xi + h$  na primeira integral e trocando  $\xi$  por  $s$  na segunda)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} S(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left( \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds - \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x ds \right) - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds \\ &= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x ds \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} L_\lambda x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s) x \, ds$$

Aplicando-se o limite quando  $h \rightarrow 0^+$ , obtemos

$$\begin{aligned} A(L_\lambda x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h(L_\lambda x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} L_\lambda x - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s) x \, ds \right) \\ &= \frac{d}{dh} e^{\lambda h} \Big|_{h=0} L_\lambda x - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( e^{\lambda h} \frac{1}{h} \underbrace{\int_0^h e^{-\lambda s} S(s) x \, ds}_{\substack{\text{contínua} \\ \downarrow \\ x}} \right) \\ &= \lambda L_\lambda x - x, \end{aligned}$$

o que prova o item 1. Agora vamos provar o item 2. Dado  $x \in D(A)$ ,

$$\begin{aligned} L_\lambda(A)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi) A x \, d\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} \frac{d}{d\xi} S(\xi) x \, d\xi \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} (e^{-\lambda \xi} S(\xi) x) + \lambda e^{-\lambda \xi} S(\xi) x \, d\xi \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( e^{-\lambda \xi} S(\xi) x \Big|_{\xi=0}^{\xi=b} \right) + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi) x \, d\xi \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda b} S(b) x) - x + \lambda L_\lambda x \\ &= -x + \lambda L_\lambda x, \end{aligned}$$

(como  $S$  é uma contração,  $\|e^{-\lambda b} S(b) x\| \leq e^{-\lambda b} \|x\| \rightarrow 0$ , quando  $b \rightarrow +\infty$ )

como queríamos.  $\square$



# Apêndice

## A.1 Resultados Clássicos

**Proposição A.1** (Teste de Weierstrass). *Seja  $f : [a, +\infty) \times \Lambda \longrightarrow X$ ,  $\Lambda$  Não seria  $\mathbb{R}$ ? um subconjunto aberto de  $\mathbb{C}$  contínua em  $t \in [a, +\infty)$  para cada  $\lambda \in \Lambda$ . Se existe  $M : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$  contínua e positiva em  $t \in [a, +\infty)$  tal que*

$$(i) \quad \|f(t, \lambda)\| \leq M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [a, +\infty) \times \Lambda,$$

$$(ii) \quad \int_a^\infty M(t) dt < +\infty.$$

Então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda) dt$$

converge absolutamente para cada  $\lambda$  pertencente ao conjunto  $\Lambda$  e a convergência é uniforme nesse conjunto.

Demonstração. **CITAR**

□



# Referências Bibliográficas

---

- [1] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [2] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

# *Índice Remissivo*

---

Espectro, 21

Gerador Infinitesimal, 10

Norma, 1

Operador Linear

- desamente definido, 1

- domínio, 1

- ilimitado, 1

- limitado, 1

Resolvente

- conjunto, 21

- operador, 21

semigrupo das contrações, 8

Solução

- branda, 15

- fraca, 15