UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Semigrupos de Operadores Lineares

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, \quad t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A f(s)} ds$$

Luiz Viana[1]
Reginaldo Demarque[2]

Niterói, 2025

[1]Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.
[2]Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Espaços Normados

Definição 1.1. Uma **norma** é

1.2 Operadores Lineares Ilimitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(A)$ é um subespaço de X, chamado de **domínio** de A. Dizemos que A é **limitado (ou contínuo)** se $D(A) = X$ e se existe $C > 0$ tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \ \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço de Banach dos **operadores lineares limitados** com norma dada por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

por $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$ e $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{R})$. A é dito ser **ilimitado** quando não satisfazer (1.1). Dizemos que A é **densamente definito** se $\overline{D(A)} = X$.

Teorema 1.2 (Banach-Steinhaus)**.** *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $\{T_i\}_{i\in I}$ é uma família (não necessariamente enumerável) em $\mathcal{L}(X,Y)$ pontualmente limitada, então $\{T_i\}_{i\in I}$ é uniformemente limitada, isto é, se*

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\| < \infty, \ \forall x \in X,$$

então

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

1.3 Integrais Vetoriais

Definição 1.3. Sejam X um espaço de Banach e $u : [a,b] \longrightarrow X$ uma aplicação tal que, para cada $\varphi \in X'$, a função real

$$t \in [a,b] \longmapsto \langle \varphi, u(t)\rangle_{X'X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que u **é integrável** se existe um vetor $v \in X$ que satisfaz:

$$\langle \varphi, v\rangle_{X',X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t)\rangle_{X'X}\, dt, \ \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo, v é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t)\, dt.$$

Proposição 1.4. *Se $u : [a,b] \longrightarrow X$ é contínua, então u é integrável. Além disso,*

1. $\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt$

2. *Se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, então*
$$A\left(\int_a^b u(t)\, dt\right) = \int_a^b A(u(t))\, dt.$$

Demonstração. Veja em [2, Theorem A3.2] □

Proposição 1.5. *Se $u : [a,b] \longrightarrow X$ é contínua, então*

$$\lim_{b\to a^+} \frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\, dt = u(a). \tag{1.2}$$

Demonstração. A função $f : t \in [a,b] \longmapsto \|u(t) - u(a)\| \in \mathbb{R}$ é contínua. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, dt = f(c).$$

Como $a \leq c \leq b$, se $b \to a^+$, então $c \to a^+$. Neste caso,

$$\lim_{b \to a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt = \lim_{b \to a^+} f(c) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{b \to a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\|\, dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{b \to a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t)\, dt - u(a) \right\| &= \lim_{b \to a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) - u(a)\, dt \right\| \\
&\leq \lim_{b \to a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\| \; dt = 0.
\end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.2). $\square$

Capítulo

2

Semigrupos de Classe C^0

2.1 Semigrupos

Definição 2.1. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

1. $S(0) = \mathrm{Id}$;

2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in [0, +\infty)$;

   Dizemos que S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|(S(t) - \mathrm{Id})x\| = 0$, $\forall x \in X$.

   Dizemos que S é **uniformemente contínuo** se

4. $\lim\limits_{t\to 0^+} \|S(t) - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Exemplo 2.2. São exemplos de semigrupos:

1. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Define-se a aplicação exponencial por

$$e^A = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

   Pode-se mostrar que esta série é absolutamente convergente e define $e^A \in \mathcal{L}(X)$, veja [1, Apêndice 2]. Neste caso, $e^{tA} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.

2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então $S(t)f(s) = f(t + s)$ definie um semigrupo de classe C^0.

Proposição 2.3. *Se S é um semigrupo de classe C^0 em X, então existem $\mu \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.2) à família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$, onde X é Banach. Para isso, basta mostrar que esta família é pontualmente limitada.

De fato, S é um semigrupo de classe C^0, então

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \ \forall x \in X.$$

Com isso, dado $x \in X$, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq t \leq \delta$, então

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\| = C_x.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, $\{S(t)\}_{0\leq t\leq\delta}$ é uniformemente limitada, isto é, $\exists\, M > 0$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \text{ para todo } t \in [0, \delta]. \tag{2.2}$$

Além disso, $M \geq \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\operatorname{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.

Por outro lado, dado $t > \delta$, pelo algorítimo da divisão, existem $n \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, \delta)$ tais que $t = n\delta + r$. Com isso, do item 2 da definição de Semigrupo e da desigualdade (2.2), temos que

$$\begin{aligned}\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(n\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\overbrace{S(\delta)\cdots S(\delta)}^{n \text{ vezes}} S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|S(\delta)\|^n_{\mathcal{L}(X)} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{n+1}.\end{aligned}$$

Note que, como $n \leq t/\delta$ e $M \geq 1$, temos que $M^n \leq M^{t/\delta}$. Da desigualdade anterior,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{t/\delta} = Me^{\frac{t}{\delta}\log(M)} = Me^{\mu t},$$

onde $\mu = \frac{1}{\delta}\log(M)$.

Em particular,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \forall t \in [0, T].$$

Em outras palavras, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em $[0, T]$. $\square$

Corolário 2.4. *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0,+\infty)$, i.e., para todo $x \in X$, $S(\cdot)x \in C^0([0,+\infty);X)$. Em outras palavras,*

$$t \in [0,+\infty) \longmapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$

Demonstração. Dado $x \in X$, devemos mostrar que, para todo $t \in [0,+\infty)$,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0.$$

Do item (3) da definição de semigrupos, já temos que

$$\|S(h)x - S(0)x\| = \|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0.$$

Isto é, $S(\cdot)x$ é contínua em $t = 0$. Dado $t \in (0,+\infty)$, se $h > 0$, então

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)(S(h) - \mathrm{Id})x\| \\
&\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \\
&\leq Me^{\mu t}\|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0^+.
\end{aligned}$$

Se $h < 0$, então seja $k = -h > 0$. Daí, se $h \to 0^+$, então $k \to 0^+$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-k)x - S(t)x\| = \|S(t-k)x - S(t-k+k)x\| \\
&= \|S(t-k)x - S(t-k)S(k)x\| = \|S(t-k)(\mathrm{Id} - S(k)x\| \\
&\leq \|S(t-k)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(S(k) - \mathrm{Id})x\| \\
&\leq Me^{\mu t}\|(S(k) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } k \to 0^+.
\end{aligned}$$

□

Vamos melhorar a estimativa (2.1) através do seguinte teorema.

Teorema 2.5. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. Então,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$

Observação 2.6. Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso, $M = 1$, S é dito **semigrupo das contrações**.

Lema 2.7. *Seja $p : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva, isto é, $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quanto $t \to +\infty$ e*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [1, Lema 1.2.5]

Prova do Teorema 2.5. Primeiramente, vejamos que $p(t) = \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)$ é subaditiva. De fato, como $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos que

$$\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \, \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função log é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t+s) = \log\left(\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) &= \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) + \log\left(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que p é limitada superimente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja (a, b) um intervalo limitado em $[0, +\infty)$. Em particular, $(a, b) \subset [0, b]$. Portanto, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\mu b}, \, \forall t \in (a, b).$$

Isto é, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como log é crescente, temos que p também o é. Logo, do Lema 2.7, temos que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} =: \omega_0.$$

Se $\omega > \omega_0$, tome $\varepsilon = \omega - \omega_0$, pela definição de limite, existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t},\ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t_0} =: M_0,\ \forall t \in [0, t_0].$$

E como $S(0) = \mathrm{Id}$, então $M_0 \geq 1$.

1º caso: $\omega \geq 0$.

Vimos que

$$\begin{cases} \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega,\ \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0)+t\omega} \leq M_0 e^{t\omega},\ \forall t \in [0, +\infty).$$

2º caso: $\omega < 0$.

Neste caso, se $t > t_0$, como $-t_0\omega \geq 0$ e $\log(M_0) \geq 0$, então

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega,\ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq t_0$, então $t\omega - t_0\omega \geq 0$, daí,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) < \log(M_0) \underbrace{- t_0\omega + t\omega}_{\geq 0},\ \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega,\ \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0\omega}}_{M} e^{t\omega} = Me^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

Definição 2.8. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},\ x \in D(A)$$

Dado S um semigrupo de classe C^0 em X, vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h},\ \forall x \in X.$$

Proposição 2.9. *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração. Exercício. □

Observação 2.10. De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, quando um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de algum semigrupo? O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

Teorema 2.11. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.4}$$

Demonstração.

Afirmação 1: Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Dado $x \in D(A)$, seja $y = S(t)x$. Primeiramente, vamos mostrar que $\lim_{h \to 0^+} A_h y = S(t)Ax$. Para isso, note que

$$A_h y = \frac{S(h)y - y}{h} = \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h}$$

$$= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t)\frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_h x.$$

Como $x \in D(A)$, temos que $\lim\limits_{h\to 0} A_h x = Ax$. Além disso, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)$ é contínua. Portanto,

$$\lim_{h\to 0^+} A_h y = \lim_{h\to 0^+} S(t)A_h x = S(t)\left(\lim_{h\to 0^+} A_h x\right) = S(t)Ax.$$

Neste caso, provamos que $S(t)x = y \in D(A)$ e que $Ay = S(t)Ax$, ou seja, $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Afirmação 2: $\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax,\ \forall x \in D(A)$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h\to 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d}{dt}^+ S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \tag{2.5}$$

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d}{dt}^- S(t)x = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{S(\overbrace{t+\delta}^{>0})x - S(t)x}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo $\delta = -h$, temos que $0 < h < t$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}^- S(t)x &= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} S(t-h)\left(\frac{x - S(h)x}{-h}\right) = \lim_{h\to 0^+} S(t-h)A_h x \\ &= \lim_{h\to 0^+} \Big(S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax\Big). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Do Corolário (2.4), temos que $f(h) = S(t-h)Ax$ é contínua em $[0, t)$, portanto

$$\lim_{h\to 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h\to 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \tag{2.7}$$

Por outro lado, do Teorema 2.5, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t},\ \forall h \in [0, t),$$

donde,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \|S(t-h)(A_hx - Ax)\| &\leq \lim_{h\to 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|A_hx - Ax\| \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} Me^{\omega t}\|A_hx - Ax\| = 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Com isso, (2.6), (2.7) e (2.8) implicam que

$$\frac{d}{dt}^{-} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \ \forall x \in D(A). \tag{2.9}$$

Portanto, de (2.5) e (2.9), temos que

$$\frac{d}{dt}S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \ \forall x \in D(A).$$

□

Proposição 2.12. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x : (a,b) \to D(A) \subset X$ é uma curva diferenciável tal que $x' \in D(A)$, então a curva $y(s) = S(s)x(s)$ também é diferenciável e*

$$y'(s) = S(s)x'(s) + S(s)Ax(s), \ \forall s \in (a,b) \tag{2.10}$$

Demonstração. Primeiramente, vamos calcular a derivada de y pela direita.

$$\begin{aligned}
y'_+(s) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(s+h)-y(s)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s)x(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s) + S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s)}{h} + \frac{S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h)-x(s)}{h} + S(s)\frac{S(h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h)-x(s)}{h} + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - S(s+h)x'(s) + S(s+h)x'(s) \right) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s) \right) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&\overset{(*)}{=} S(s)x'(s) + S(s)Ax(s).
\end{aligned}$$

$(*)$ Vamos provar a seguir a convergência de cada um dos limites.

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h}-x'(s)\right)\right\| \le \lim_{h\to 0^+} Me^{\omega(s+h)}\underbrace{\left\|\frac{x(s+h)-x(s)}{h}-x'(s)\right\|}_{\to\ 0} = 0$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s+h)x'(s) = S(s)x'(s).$$

Da continuidade de $S(s)$ e do fato que $\lim_{h\to 0^+} A_h x = Ax$, para todo $x \in D(A)$, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s)A_h(x(s)) = S(s)Ax(s).$$

Agora vamos provar a derivada pela esquerda.

$$y'_-(s) = \lim_{\delta\to 0^-}\frac{y(s+\delta)-y(s)}{\delta},\ \text{para}\ -s<\delta<0.$$

Analogamente, fazendo $h = -\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
y'_-(s) &= \lim_{h\to 0^+}\frac{y(s-h)-y(s)}{-h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{S(s-h)x(s-h)-S(s)x(s)}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\frac{S(s-h)x(s-h)-S(s-h)x(s)+S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h}\\
&= \lim_{h\to 0^+}\left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h}+\frac{S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h}\right)\\
&= \lim_{h\to 0^+}\left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h}\right)+\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(s-h)-S(s)}{-h}x(s)\right)\\
&= \lim_{\delta\to 0^-}\left(S(s+\delta)\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta}\right)+\lim_{h\to 0^+}\left(S(s-h)\frac{\mathrm{Id}-S(h)}{-h}x(s)\right)
\end{aligned}$$

(Como antes, vamos calcular os limites usando a limitação de S e a continuidade de $S(\cdot)x$)

$$= \lim_{\delta\to 0^-}\left(\underbrace{S(s+\delta)}_{\text{limitado}}\underbrace{\left(\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta}-x'(s)\right)}_{\to 0}+\underbrace{S(s+\delta)x'(s)}_{S(\cdot)x\ \text{é contínua}}\right)+$$

$$\lim_{h\to 0^+}\left(S(s-h)A_h(x(s))\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= S(s)x'(s) + \lim_{h\to 0^+}\left(\underbrace{S(s-h)}_{\text{limitado}}\left(\underbrace{A_h(x(s)-Ax(s)}_{\to 0}\right)+\underbrace{S(s-h)Ax(s))}_{S(\cdot)x\text{ contínua}}\right)\\
&= S(s)x'(s) + S(s)Ax(s)
\end{aligned}
$$

□

Teorema 2.13 (Existência e Unicidade do PVI)**.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI*

$$
\begin{cases}
x'(t) = Ax, \ t \in [0, +\infty)\\
x(0) = x_0.
\end{cases}
$$

Além disso,

$$x \in C^0([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X).$$

Demonstração. De fato, do Teorema 2.11, como $x_0 \in D(A)$, temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \ \forall t \in [0,+\infty).$$

E também a condição inicial

$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.11 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X).$$

Resta provar a unicidade. Para isso, seja $v = v(t)$ uma outra solução paro o mesmo PVI. Defina, para cada $t \geq 0$, $w(s) = S(t-s)v(s)$, $s \in [0,t]$.

Afirmação 1: $w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s)$, para todo $s \in [0,t]$.

Com efeito, defina $z(\tau) = v(t-\tau)$ e $u(\tau) = w(t-\tau)$, então

$$u(\tau) = w(t-\tau) = S(t-(t-\tau))v(t-\tau) = S(\tau)v(t-\tau) = S(\tau)z(\tau).$$

Da identidade (2.10) e da regra da cadeia para funções vetoriais,

$$u'(\tau) = S(\tau)z'(\tau) + S(\tau)Az(\tau) = -S(\tau)v'(t-\tau) + S(\tau)Av(t-\tau).$$

Como $u'(\tau) = -w'(t-\tau)$, temos que

$$w'(t-\tau) = S(\tau)v'(t-\tau) - S(\tau)Av(t-\tau).$$

Portanto, fazendo $\tau = t - s$, temos que

$$\begin{aligned} w'(s) = w'(t-(t-s)) &= S(t-s)v'(t-(t-s)) - S(t-s)Av(t-(t-s)) \\ &= S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Como v é solução do PVI, então $v'(s) = Av(s)$, donde

$$w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s) = S(t-s)Av(s) - S(t-s)Av(s) = 0.$$

Portanto, w é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

$\square$

Observação 2.14. Se $x_0 \notin D(A)$ em X, então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.4, temos que $x \in C^0([0, +\infty); X)$.

Exercício 2.15. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x\, d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax\, d\tau \tag{2.11}$$

Proposição 2.16. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então para todo $x \in X$,*

$$\int_0^t S(s)x\, ds \in D(A) \quad e \quad A\left(\int_0^t S(s)x\, ds\right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Dado $t \in (0, +\infty)$, seja

$$v = \int_0^t S(s)x\, ds.$$

Basta mostar que $\lim\limits_{h\to 0^+} A_h v = S(t)x - x$, pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como $A_h \in \mathcal{L}(X)$, da Proposição 1.4, temos que

$$\begin{aligned}
A_h v &= A_h \left(\int_0^t S(s)x\,ds \right) = \int_0^t A_h(S(s)x)\,ds \\
&= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h}\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x - S(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)x\,ds
\end{aligned}$$

(Mudandaça de variáveis $\tau = h + s$ na primeira integral e fazendo $s = \tau$ na segunda)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau \\
&= \left(\frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau \right) - \left(\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau \right) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau.
\end{aligned}$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua (Corolário 2.4), pela identidade (1.2),

$$\lim_{h\to 0^+} A_h v = \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau \right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. □

Proposição 2.17. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então A é fechado e seu domínio é denso em X.*

Demonstração.

1. $D(A)$ é denso em X.

Dado $x \in X$, basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt \in D(A) \text{ e } v_h \to x, \text{ quando } h \to 0^+.$$

De fato, que $v_h \in D(A)$ decorre diretamente da Proposição 2.16. Como $S(\cdot)x$ é contínua, pela identidade (1.2),

$$\lim_{h\to 0^+} v_h = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt = x.$$

1. A é fechado.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ em X. Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Como A_h é contínuo, da identidade (2.11), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty} A_h x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h}\left(S(h)x_n - x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt \tag{2.12}$$

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t}\|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|.$$

Donde,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n - S(t)y\,dt\right| &\leq \frac{1}{h}\int_0^h \|S(t)Ax_n - S(t)y\|\,dt \leq \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|}_{\text{não depende de } t}\,dt \\ &\leq Me^{\omega h}\|Ax_n - y\| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.\end{aligned}$$

Da da identidade (2.12), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt.$$

Por fim, como $x \in D(A)$ e $S(\cdot)y$ é contínua (Corolário 2.4), da identidade (1.2), temos que

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} A_h x = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt = S(0)y = y.$$

□

Observação 2.18. Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 2.19 (Unicidade)**.** *Sejam S_1, S_2 dois semigrupos de classe C^0 em X com o mesmo gerador infinitesimal A. Então $S_1 = S_2$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $S_1(t)x = S_2(t)x$, para todo $x \in D(A)$. De fato, dado $x \in D(A)$, como S_1 e S_2 tem o mesmo gerador infinitesimal, pelo Teorema 2.13, temos que $x_1(t) = S_1(t)x$ e $x_2(t) = S_2(t)x$ são duas soluções do mesmo PVI. Da unicidade de soluções, temos que $S_1(t)x = S_2(t)x$.

Agora vamos usar a densidade de $D(A)$ em X para concluir a demonstração. Com efeito, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X quando $n \to +\infty$. Como $x_n \in D(A)$, temos que $S_1(t)x_n = S_2(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E como $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$, então

$$S_1(t)x = \lim_{n\to+\infty} S_1(t)x_n = \lim_{n\to+\infty} S_2(t)x_n = S_2x.$$

□

Definição 2.20. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Defina $A^0 = \mathrm{Id}$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1});\ A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x),\ \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 2.21. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal.. Temos:*

(i) $D(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X;

(ii) Se $x \in D(A^n)$, então $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ e

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$

(iii) É válida a fórmula de Taylor: se $x \in D(A^n)$, então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau$$

(iv) $(S(t)-I)^n x = \displaystyle\int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x \, d\tau_1 \cdots d\tau_n, \forall x \in D(A^n)$;

(v) $\displaystyle\bigcap_n D(A^n)$ *é denso em X.*

Demonstração.

(i) Sabemos que $D(A)$ é um subespaço de X. Suponha que $D(A^{n-1})$ seja subspaço. Dados $x, y \in D(A^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como $x, y \in D(A^{n-1})$, então $x + \lambda y \in D(A^{n-1})$ e, como A^{n-1} é linear,

$$A^{n-1}(x + \lambda y) = \underbrace{A^{n-1}x}_{\in D(A)} + \lambda \underbrace{A^{n-1}y}_{\in D(A)} \in D(A).$$

Portanto, $D(A^n)$ também é subespaço. Logo, por indução, segue o resultado. A^n é linear pois é a composição de operadores lineares.

(ii) Teorema 2.11 garante a validade para $n = 1$.

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $k > 1$,

Se $x \in D\left(A^k\right)$, então $S(t)x \in D\left(A^k\right), \forall t \geq 0$ e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x$$

Vamos mostrar que é válido para $n = k+1$. De fato, se $\underline{x \in D(A^{k+1})}$, por definição, $x \in D(A^k)$ e $y = A^k x \in D(A)$. Aplicando-se o Teorema 2.11 a y, temos que $S(t)A^k x = S(t)y \in D(A)$. Da Hipótese de Indução, temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$, portanto $\underline{S(t)x \in D(A^{k+1})}$. Além disso, da identidade (2.4), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)y = AS(t)y = S(t)Ay.$$

Donde,

$$\frac{d}{dt} S(t)A^k x = AS(t)A^k = S(t)A^{k+1}x.$$

Da Hipótese de Indução, já temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e, da identidade anterior, que $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$, portanto $S(t)x \in D(A^{k+1})$. temos que $S(t)A^k = \frac{d^k}{dt^k} S(t)x$ e $S(t)A^k x = A^k S(t)x$. Substituindo-se na identidade anterior, Obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k}{dt^k} S(t)x\right) = AA^k S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

Portanto,

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} S(t)x = A^{k+1}S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

O que prova a identidade (2.13) para $n = k+1$. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita.

(iii) Este resultado também segue por indução. Para $n = 1$ é simplesmente a identidade (2.11). Para $n = 2$, vamos aplicar a integração por partes.

$$\int_a^t (t-\tau)A^2 S(t)x \, d\tau \overset{(ii)}{=} \int_a^t (t-\tau)\frac{d^2}{d\tau^2} S(t)x \, d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= (t-\tau)\frac{d}{dt}S(t)x\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \int_a^t -\frac{d}{d\tau}S(t)x\,d\tau \\
&\overset{(ii)}{=} (t-\tau)AS(t)x\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \int_a^t -AS(t)x \\
&= -(t-\tau)AS(a)x + \int_a^t AS(t)x\,d\tau \\
&\overset{n=1}{=} -(t-\tau)AS(a)x + S(t)x - S(t)a,
\end{aligned}
$$

donde obtemos o caso $n = 2$,

$$S(t)x = S(t)a + (t-\tau)AS(a)x + \int_a^t (t-\tau)A^2S(t)x\,d\tau.$$

Para obter o caso $n = 3$, basta integrar novamente por partes a integral

$$\int_a^t (t-\tau)^2A^3S(t)x\,d\tau.$$

E assim, por diante o resultado segue por indução.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Gomes, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

[2] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and Applications.* New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

Índice Remissivo