UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA DA UFF

Semigrupos de Operadores Lineares.

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, \quad t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds$$

Luiz Viana[1]
Reginaldo Demarque[2]

Niterói, 2025
[Compilado 18 de novembro de 2025, 09:52]

[1]Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.
[2]Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.

Sumário

Capítulo

1

Noções Básicas sobre Espaços Normados

1.1 Espaços Normados

No decorrer do presente capítulo, denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

norma **Definição 1.1.** Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

(a) $\|x\| \geq 0$;

(b) Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \|\cdot\|)$ é dito um **espaço normado** .

Observação 1.2. Em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, valem:

(a) $\|0\| = 0$;

(b) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

ex21 **Exemplo 1.3.** Dado um número inteiro positivo n, não é difícil verificar que

$$\|\cdot\|_0 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

$$\|\cdot\|_1 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \in \mathbb{R}$$

e

$$\|\cdot\|_2 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j| \in \mathbb{R}$$

são normas em $\mathbb{K}^n$.

Definição 1.4. Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **função limitada em $\mathbb{K}$** (ou simplismente limitada) quando quando existir uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$.

imitadas **Exemplo 1.5.** Seja A um conjunto não vazio. Denotemos por $\mathcal{B}(A)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Dados $f, g \in \mathcal{B}(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definamos

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para cada $x \in A$.

Com as operações operações de adição e multiplicação por escalar, pontualmente dadas acima, $\mathcal{B}(A)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Além disso, não é difícil constatar que

$$f \in \mathcal{B}(A) \longmapsto \|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{B}(A)$. Observemos ainda que a convergência de sequências em $\mathcal{B}(A)$ é exatamente a noção de convergência uniforme.

Definição 1.6. Com as notações do Exemplo 1.5,

$$\ell_\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N}),$$

que é o espaço normado de todas as sequências limitadas cujos termos pertencem a $\mathbb{K}$.

Definição 1.7. Sejam X e Y dois espaços normados.

(a) Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=a}^{\infty}$ em X converge para $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - a\|_X < \varepsilon.$$

(b) Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \;\; e \;\; \|x - a\|_X < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

definições de convergência e continuidade ex23 **Exemplo 1.8.** Sendo X um espaço normado, denotemos por $\mathcal{C}_b(X)$ o subconjunto de $\mathcal{B}(X)$ formado por todas as funções contínuas e limitadas de X em $\mathbb{K}$. Não é difícil constatar que $\mathcal{C}_b(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{B}(X)$.

O próximo resultado traz importantes caracterizações das aplicações lineares contínuas.

ntinuous **Proposição 1.9.** *Sejam X e Y dois espaços normados, e consideremos uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é uniformemente contínua;

(b) T é contínua;

(c) T é contínua em $0 \in X$;

(d) Existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Demonstração. É claro que $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$. Para vermos que $(c) \Longrightarrow (d)$, , tomemos $\varepsilon = 1$. Como T é contínua em $0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y = \|T(x) - T(0)\|_Y < \varepsilon = 1,$$

sempre que $x \in X$ e $\|x\|_X = \|x - 0\|_X < \delta$. Assim, para todo $w \in X \setminus \{0\}$, temos

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{w}{\|w\|_X}\right)\right)\right\|_Y < 1.$$

Logo,

$$\|T(w)\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|w\|_X \text{ para todo } w \in X,$$

inclusive se $w = 0$.

Agora, para vermos que $(d) \Longrightarrow (a)$, basta observarmos que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$$

para quaisquer $x, y \in X$. Ou seja: T é uma aplicação lipschitziana e, portanto, uniformentente contínua. $\square$

Definição 1.10. Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares e contínuas de X em Y, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

(a) Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, X)$;

(b) Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X', que é conhecido como **o dual topológico** de X;

(c) O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotador por X^*, que é conhecido como **o dual algébrico** de X.

Observação 1.11. Seja X um espaço normado. É sempre verdade que $X' \subset X^*$. Além disso, quando X tem dimensão infinita, sempre temos $X' \neq X^*$ (veja a Proposição A.16).

Observação 1.12. Sejam X e Y dois espaços normados. Não é difícil constatar que:

(a) Se X tem dimensão finita, então toda aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua;

(b) Se X tem dimensão infinita, sempre existe uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ que não é contínua (veja a Observação A.17).

bounded **Definição 1.13.** Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita **limitada** se

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \tag{1.1}$$ ltdo

Observação 1.14. Sejam X e Y dois espaços normados. Em virtude da Proposição 1.9, uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, é limitada.

Exemplo 1.15. Sejam X e Y dois espaços normados. Vejamos que

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \longmapsto \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$. De fato, as condições (a), (b) e (c) da Definição 1.1 são claras. Além disso, se $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos

$$\|(T + S)(x)\|_Y = \|T(x) + S(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq (\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)})\|x\|_X$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|T + S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(T + S)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Assim, temos realmente uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definição 1.16. Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita um **isomorfismo topológico** se for um homeomorfismo.

Definição 1.17. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X. Dizemos que tais normas são **equivalentes** se a aplicação identidade

$$I_X : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

for um isomorfismo topológico.

Corolário 1.18. *Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;

(b) Existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.9. □

1.2 Espaços de Banach

Definição 1.19. Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X é dita ser uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n > n_0 \Longrightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Dizemos que X é um **espaço de Banach** se ele for completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy for convergente.

subespao *Observação* 1.20. Se X é um espaço de Banach, então cada subespaço fechado M de X é também um espaço de Banach, com a norma induzida pela norma de X.

Exemplo 1.21. Dado um inteiro positivo n, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_0$ do Exemplo 1.3. Na verdade, como as normas $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são duas a duas equivalentes, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_j)$ é um espaço de Banach para todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Exemplo 1.22. Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, não é difícil constatar que $\mathcal{B}(A)$, introduzido no Exemplo 1.5, é um espaço de Banach. Em particular, ℓ_∞ é um espaço de Banach.

opbanach *Observação* 1.23. Aqui enfatizamos algumas observações importantes sobre espaços de Banach:

(a) Sendo X e Y dois espaços normados, para que $\mathcal{L}(X, Y)$ seja um espaço de Banach, é necessário e suficiente que Y seja completo.

(b) Para que um espaço normado X seja completo, é necessário e suficiente que toda série absolutamente convergente em X seja convergente.

VIRAR UMA DEFINIÇÃO

Definição 1.24. Sejam X e Y serão dois espaços de Banach, e $A : D(A) \longrightarrow Y$ um operador linear, não necessariamentre limitado (veja a Definição 1.13), onde $D(A)$ é um subespaço vetorial de X. Dizemos que A está **desamente definido** se $\overline{D(A)} = X$.

1.3 A exponencial de um operador

Iniciamos esta seção relembrando que a função logaritmo natural é a bijeção contínua (com inversa contínua), definida por

$$\log : x \in (0, +\infty) \longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \in \mathbb{R}.$$

A inversa de $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, e usualmente escrevemos

$$e^x := \exp(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Cabe recordar que:

- $e^0 = 1$;
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para uma construção detalhada e propriedades dessas funções, veja [1, Cap. 6]

De tais propriedades, dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos constatar que a única função $x : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ solucionando o **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = ax, \ t \in [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.

baby *Observação* 1.25. Denotando $x = x(t)$ por $S(t)x_0$, fazemos as seguintes considerações:

(a) Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t) : x_0 \in \mathbb{R} \longmapsto S(t)x_0 \in \mathbb{R}$$

é uma função linear. Realmente, dados $x_0, y_0, c \in \mathbb{R}$, consideremos $x(\cdot) = S(\cdot)x_0$ e $y(\cdot) = S(\cdot)y_0$, que são as soluções de

$$\begin{cases} x' = ax, \quad em\ [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} y' = ay, \quad em\ [0, +\infty); \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

respectivamente. Nesse caso,

$$z(\cdot) := cx(\cdot) + y(\cdot) = cS(\cdot)x_0 + S(\cdot)y_0$$

soluciona

$$\begin{cases} z' = az, \quad em\ [0, +\infty); \\ z(0) = cx_0 + y_0, \end{cases}$$

que possui uma única solução. Em outras palavras, $z(\cdot) = S(\cdot)(cx_0 + y_0)$, isto é, fixado $t \in [0, +\infty)$,

$$S(t)(cx_0 + y_0) = cS(t)x_0 + S(t)y_0.$$

(b) $S(0)x_0 = x(0) = x_0$, para cada x_0 fixado em $\mathbb{R}$, ou seja, $S(0)$ é exatamente a função identidade $I : x \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{R}$;

(c) Fixados $t, s \in [0, +\infty)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$S(t + s)x_0 = x(t + s) = x_0 e^{a(t+s)} = [x_0 e^{as}]e^{at} = x(s)e^{at} = S(t)x(s) = S(t)S(s)x_0.$$

Daí, $S(t + s)$ e $S(t)S(s)$ são funções lineares idênticas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Observemos também que $y = y(\cdot) = S(\cdot)x(s)$ é a única solução de

$$\begin{cases} y' = ay, \quad \text{em } [0, +\infty); \\ y(0) = x(s). \end{cases}$$

À luz da Observação 1.25, é comum que nas disciplinas voltadas para o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias sejam abordados (quantitativa e/ou qualitativamente) os problemas de valor inicial da forma

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

onde A é uma matriz fixa em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, e a solução procurada é um caminho

$$X : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Em analogia ao caso unidimensional, é conhecido que as soluções do contexto matricial são unicamente dadas por

$$X(t) = e^{tA}X_0 \text{ para todo } t \in [0, +\infty).$$

Dito isso, relembramos abaixo o conceito de **exponencial de uma matriz**. Para tanto, podemos considerar

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

para cada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$, que é uma norma em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

xpmatrix **Definição 1.26.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A exponencial da A é dada por

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}. \tag{1.2}$$ exp

A seguir, enfatizamos alguns fatos cruciais:

property *Observação* 1.27. (a) A Definição 1.26 está bem posta, pois a série de matrizes, dada em (2.4), é absolutamente convergente para qualquer $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A^j\|}{j!}$$

é sempre uma série de números reais convergente.

(b) Fixados $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, temos

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}X_0) = Ae^{tA}X_0.$$

É sabido que $S(t)X_0 := e^{tA}X_0$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

(c) A aplicação $S : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}))$ possui propriedades análogas àquelas apresentadas na Observação 1.25, dedicada ao caso unidimensional. Mais precisamente,

- Para cada $t \in [0,+\infty)$, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}))$;
- $S(0) : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é o operador identidade;
- Para quaisquer $t, s \in [0,+\infty)$, vale $S(t+s) = S(t)S(s)$ (composição de funções). Esta propriedade não é imediata (veja [5] para maiores detalhes).

(d) Do ponto de vista quantitativo, a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares (caso matricial supracitado) passa por identificar a matriz na forma canônica de Jordan que esteja na mesma classe de semelhança de A. Também para um tratamento qualitativo, a análise espectral de A é uma estratégia eficaz no que diz respeito ao comportamento das soluções do sistema (veja [5]).

(e) Todas as considerações feitas sobre a exponencial de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ podem ser feitas para a exponencial de um operador linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, o que permite resolver, de forma análoga, um sistema da forma

$$\begin{cases} x'(t) = T(x), \; t \in [0,+\infty); \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

para o qual a solução

$$x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

é um caminho em $\mathbb{R}^n$ dado por $e^{tT}x_0$ para todo $t \in [0,+\infty)$.

Tendo em vista a Observação 1.27(e), parece natural pensar sobre a resolução e a análise do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \; t \in [0,+\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$.

operator **Definição 1.28.** Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. A exponencial da T é dada por

$$e^T := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!}, \tag{1.3}$$ expt

onde $T^0 := I$ e $T^{n+1} := T \circ T^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

Observação 1.29. Considerando as notações da Definição 1.28, não é difícil constatar que a série que define e^T converge absolutamente. Como X é um espaço de Banach, $\mathcal{L}(X)$ também o é (relembre a Observação 1.23(a)). Assim, pela Observação 1.23(b), $e^T \in \mathcal{L}(X)$ encontra-se bem definida. Esta observação será retomada no próximo capítulo (veja o Exemplo 2.2), já explorando a noção de semigrupo uniformemente contínuo. Um pouco mais adiante, nos Teoremas 2.12 e 2.14, concluiremos que $\mathbf{x}(t) = e^{tT}\mathbf{x_0}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X. \end{cases}$$

No presente texto introdutório, o principal objetivo é obter uma condição necessária e suficiente para que o problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

possua solução, onde X é um espaço de Banach e $A : D(A) \longrightarrow X$ é uma aplicação linear definida em um subespaço vetorial $D(A)$ de X. Mais precisamente, isto consistirá em demonstrar o importante Teorema 2.24 de Hille-Yosida, que representa um marco muito importante da teoria geral dos semigrupos.

1.4 Integrais Vetoriais

Definição 1.30. Sejam X um espaço de Banach e $u : [a, b] \longrightarrow X$ uma aplicação tal que, para cada $\varphi \in X'$, a função real

$$t \in [a, b] \longmapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_{X'X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que **u é integrável** se existe um vetor $v \in X$ que satisfaz:

$$\langle \varphi, v \rangle_{X',X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t) \rangle_{X'X} \, dt, \ \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo, v é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t) \, dt.$$

KthA3.2 **Proposição 1.31.** *Se $u : [a, b] \longrightarrow X$ é contínua, então u é integrável. Além disso,*

1. $\left\| \int_a^b u(t) \, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| \, dt$

2. Se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, então

$$A\left(\int_a^b u(t)\,dt\right) = \int_a^b A(u(t))\,dt \in Y.$$

Demonstração. Veja em [3, Theorem A3.2] $\square$

Prop.VM **Proposição 1.32.** *Se $u : [a, a+h] \longrightarrow X$ é contínua, então*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t)\,dt = u(a). \tag{1.4}$$ ineq.VM

Demonstração. A função $f : t \in [a, a+h] \longmapsto \|u(t) - u(a)\| \in \mathbb{R}$ é contínua. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe $\xi_h \in [a, a+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = f(\xi_h).$$

Como $a \le \xi_h \le a+h$, se $h \to 0^+$, então $\xi_h \to a^+$. Neste caso,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+} f(\xi_h) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\|\,dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t)\,dt - u(a) \right\| &= \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t) - u(a)\,dt \right\| \\ &\le \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\|\ dt = 0. \end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.4). $\square$

Capítulo 2

Semigrupos de Operadores Lineares

2.1 Semigrupos de Classe C^0

emigrupo **Definição 2.1.** Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

$$S(0) = \mathrm{I} \quad \text{e} \quad S(t+s) = S(t)S(s), \ \forall\, t, s \in [0, +\infty) \tag{2.1}$$

Dizemos que um semigrupo S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

$$\lim_{t \to 0^+} \|(S(t) - \mathrm{I})x\|_X = 0, \ \forall x \in X. \tag{2.2}$$

Dizemos que um semigrupo S é **uniformemente contínuo** se

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0. \tag{2.3}$$

ex **Exemplo 2.2.** São exemplos de semigrupos:

1. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Pela Definição 1.28,

$$e^A = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

com tal série convergindo absolutamente convergente e $e^A \in \mathcal{L}(X)$. Além disso,

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq |t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)} e^{|t|\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso, $e^{tA} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo uniformemente contínuo.

2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então $(S(t)f)(s) = f(t+s)$ define um semigrupo de classe C^0.

Proposição 2.3. *Se S é um semigrupo uniformemente contínuo em X, então $S(t) = e^{tA}$, onde $A \in \mathcal{L}(X)$ é dado por*

$$A := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h) - \mathrm{I}}{h}.$$

Demonstração. Veja [2] Teorema 1.1.1. □

exp **Proposição 2.4.** *Se S é um semigrupo de classe C^0 em X, então existem $\mu \geq 0$ e $M > 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\mu t}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.4}$$ des.wT

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Demonstração. **Afirmação 1:** Existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \text{ para todo } t \in [0, \delta].$$

De fato, se a Afirmação 1 não se verificasse, para cada inteiro $n \geq 1$, existiria $t_n \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ tal que

$$\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} > n.$$

Nesse caso,

$$\{\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)}; n \geq 1\}$$

seria um conjunto ilimitado. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema A.2), existiria $x_0 \in X$ com

$$\{\|S(t_n)x_0\|_X; n \geq 1\}$$

também sendo um conjunto ilimitado. Entretanto, como $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de classe C^0, temos

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t)x - x\|_X = 0.$$

Em particular, como $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ é um sequência em $[0, +\infty)$ convergindo para zero, temos

$$\lim_{n \to +\infty} \|S(t_n)x - x\|_X = 0,$$

ou seja, $(S(t_n)x)_{n=1}^{\infty}$ converge a x em X. Observemos que isto contradiz o fato de o conjunto $\{\|S(t_n)x_0\|_X; n \geq 1\}$ ser ilimitado.

Afirmação 2: $M \geq 1$.

Como caso particular da Afirmação 1, temos

$$1 = \|I\|_{\mathcal{L}(x)} = \|S(0)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq M.$$

Afirmação 3: Existe $\mu \geq 0$ (dependendo das constantes $M \geq 1$ e $\delta > 0$ na Afirmação 1), tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)} \leq Me^{\mu t} \text{ para todo } t \in [0, \infty).$$

Em particular, ficado $T > 0$, o conjunto não vazio

$$\{\|S(t)\|_{\mathcal{L}(x)}; t \in [0, T]\}$$

é limitado.

Realmente, considerando as constantes $M \geq 1$ e $\delta > 0$ na Afirmação 1, e fixando $t \in [0, +\infty)$, sabemos que o conjunto

$$B := \left\{ n \in \mathbb{N}; n > \frac{t}{\delta} \right\}.$$

Pelo Princípio da Boa Ordenação, existe $n_0 = \min B$, ou seja

$$n_0 - 1 \leq \frac{t}{\delta} < n_0.$$

Pondo $m = n_0 - 1$ e definindo $r := t - m\delta$, claramente chegamos a

$$t = m\delta + r, \text{ com } r \in [0, \delta).$$

Uma vez que $m \geq 1$, tomando $\mu = \frac{\log M}{\delta} \geq 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(m\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(m\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \| \overbrace{S(\delta) \cdots S(\delta)}^{m \text{ vezes}} S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
\leq \|S(\delta)\|^m_{\mathcal{L}(X)} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{m+1} \\
\leq MM^{t/\delta} \leq Me^{\frac{t}{\delta}\log(M)} = Me^{\mu t}.
\end{aligned}$$

Em particular, para cada $T > 0$ fixado, vale

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \forall t \in [0, T],$$

o que completa a demonstração. □

continua **Corolário 2.5.** *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo*

$x \in X$, $S(\cdot)x \in C^0([0,+\infty);X)$. *Em outras palavras,*

$$t \in [0,+\infty) \longmapsto S(t)x \in X \text{ é contínua.}$$

Demonstração. Dado $x \in X$, ponhamos $g(t) = S(t)x \in X$ para cada $t \in [0,+\infty)$.

Afirmação 1: $g : [0,+\infty) \longrightarrow X$ é contínua em $t_0 = 0$.

De fato, como $S : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de classe C^0, temos

$$\|g(t) - g(0)\|_X = \|S(h)x - S(0)x\|_X = \|(S(h) - \mathrm{I})x\|_X \to 0, \text{ quando } h \to 0,$$

ou seja, $\lim\limits_{t\to 0^+} g(t) = g(0)$ em X, seguindo a Afirmação 1.

Afirmação 2: $g : [0,+\infty) \longrightarrow X$ é contínua em cada $t_0 \in (0,+\infty)$.

Realmente, para cada $h > 0$, utilizamos a Proposição 2.4 para obter

$$\begin{aligned}\|g(t_0+h) - g(t_0)\|_X = \|S(t_0+h)x - S(t)x\|_X = \|S(t_0)S(h)x - S(t)x\|_X &= \|S(t_0)(S(h)-\mathrm{I})x\| \\ &\leq \|S(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(S(h)-\mathrm{I})x\|_X \\ &\leq Me^{\mu t_0}\|(S(h)-\mathrm{I})x\|_X,\end{aligned}$$

ou seja, lembrando que $S : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de classe C^0, resulta que

$$\lim_{h\to 0^+} g(t_0+h) = g(t_0) \text{ em } X. \qquad (2.5) \quad \boxed{\texttt{direita}}$$

Por outro lado, se $-t_0 < -h < 0$, temos

$$\begin{aligned}\|g(t_0-h) - g(t_0)\|_X = \|S(t_0-h)x - S(t_0)x\|_X &= \|S(t_0-h)x - S(t_0-h)S(h)x\|_X \\ &= \|S(t_0-h)(\mathrm{I} - s(h))x\| \\ &\leq \|S(t_0-h)\|_{\mathcal{L}(X)}\|(S(h)-\mathrm{I})x\|_X \\ &\leq Me^{\mu(t_0-h)}\|(S(h)-\mathrm{I})x\|_X.\end{aligned}$$

Novamente, sendo $S : [0,+\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de classe C^0, concluímos que

$$\lim_{h\to 0^+} g(t_0-h) = g(t_0) \text{ em } X. \qquad (2.6) \quad \boxed{\texttt{esquerda}}$$

Por (2.5) e (2.6),

$$\lim_{t\to t_0} g(t) = g(t_0) \text{ em } X,$$

o que significa que g é uma função contínua em t_0. Isto completa a demonstração.

□

Vamos melhorar a estimativa (2.4) através do seguinte teorema.

th2.5 **Teorema 2.6.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. Então,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \; \forall t \geq 0. \tag{2.7}$$ Sbound

Observação 2.7. Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \; \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso, $M = 1$, S é dito um **semigrupo de contrações**.

lem2.5 **Lema 2.8.** *Seja $p : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva, isto é, $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quanto $t \to +\infty$ e*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [2, Lema 1.2.5]

Prova do Teorema 2.6. Primeiramente, vejamos que $p(t) = \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)$ é subaditiva. De fato, como $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos que

$$\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \; \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função log é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t+s) = \log\left(\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) &= \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) + \log\left(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que p é limitada superimente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja (a,b) um intervalo limitado em $[0,+\infty)$. Em particular,

$(a, b) \subset [0, b]$. Portanto, da desigualdade (2.4), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu b},\ \forall t \in (a, b).$$

Isto é, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como log é crescente, temos que p também o é. Logo, do Lema 2.8, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} =: \omega_0.$$

Se $\omega > \omega_0$, tome $\varepsilon = \omega - \omega_0$, pela definição de limite, existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t},\ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.4), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t_0} =: M_0,\ \forall t \in [0, t_0].$$

E como $S(0) = \mathrm{I}$, então $M_0 \geq 1$.

1º caso: $\omega \geq 0$.
Vimos que

$$\begin{cases} \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega,\ \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0)+t\omega} \leq M_0 e^{t\omega},\ \forall t \in [0, +\infty).$$

2º caso: $\omega < 0$.
Neste caso, se $t > t_0$, como $-t_0\omega \geq 0$ e $\log(M_0) \geq 0$, então

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega,\ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq t_0$, então $t\omega - t_0\omega \geq 0$, daí,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) < \log(M_0)\underbrace{-t_0\omega + t\omega}_{\geq 0},\ \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega,\ \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0\omega}}_{M} e^{t\omega} = Me^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

def-ger **Definição 2.9.** Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{x \in X;\ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\right\},$$

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},\ x \in D(A)$$

Dado S um semigrupo de classe C^0 em X, vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x := \frac{S(h)x - x}{h},\ \ \forall x \in X.$$

subspace **Proposição 2.10.** *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração. Exercício. □

Observação 2.11. De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, quando um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de algum semigrupo? O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

th-der **Teorema 2.12.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.8}$$ eq-der

Demonstração.

Afirmação 1: Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Dado $x \in D(A)$, seja $y = S(t)x$. Primeiramente, vamos mostrar que $\lim\limits_{h \to 0^+} A_h y = S(t)Ax$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} A_h y &= \frac{S(h)y - y}{h} = \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t)\frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_h x. \end{aligned}$$

Como $x \in D(A)$, temos que $\lim\limits_{h \to 0} A_h x = Ax$. Além disso, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)$ é contínua. Portanto,

$$\lim_{h \to 0^+} A_h y = \lim_{h \to 0^+} S(t)A_h x = S(t)\left(\lim_{h \to 0^+} A_h x\right) = S(t)Ax.$$

Neste caso, provamos que $S(t)x = y \in D(A)$ e que $Ay = S(t)Ax$, ou seja, $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Afirmação 2: $\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax, \ \forall x \in D(A)$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h \to 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d}{dt}^{+} S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \tag{2.9}$$ $\boxed{\texttt{d+}}$

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d}{dt}^{-} S(t)x = \lim_{\delta \to 0^-} \frac{S(\overbrace{t+\delta}^{>0})x - S(t)x}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo $\delta = -h$, temos que $0 < h < t$ e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}^{-} S(t)x &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} S(t-h)\left(\frac{x - S(h)x}{-h}\right) = \lim_{h \to 0^+} S(t-h)A_h x \\ &= \lim_{h \to 0^+} \Big(S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax\Big). \end{aligned} \tag{2.10}$$ $\boxed{\texttt{eq2.3}}$

Do Corolário (2.5), temos que $f(h) = S(t-h)Ax$ é contínua em $[0, t)$, portanto

$$\lim_{h \to 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h \to 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \tag{2.11}$$ $\boxed{\texttt{eq2.4}}$

Por outro lado, do Teorema 2.6, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t}, \ \forall h \in [0,t),$$

donde,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \|S(t-h)(A_h x - Ax)\| &\leq \lim_{h\to 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_h x - Ax\| \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} Me^{\omega t}\|A_h x - Ax\| = 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

eq2.5

Com isso, (2.10), (2.11) e (2.12) implicam que

$$\frac{d}{dt}^{-} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \ \forall x \in D(A). \tag{2.13}$$

d-

Portanto, de (2.9) e (2.13), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \ \forall x \in D(A).$$

$\square$

Proposição 2.13. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x : (a,b) \to D(A) \subset X$ é uma curva diferenciável tal que $x' \in D(A)$, então a curva $y(s) = S(s)x(s)$ também é diferenciável e*

$$y'(s) = S(s)x'(s) + S(s)Ax(s), \ \forall s \in (a,b) \tag{2.14}$$

reg.cad

Demonstração. Primeiramente, vamos calcular a derivada de y pela direita.

$$\begin{aligned} y'_+(s) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(s+h) - y(s)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s) + S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s)}{h} + \frac{S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s)\frac{S(h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h) - x(s)}{h}\right) - S(s+h)x'(s) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s)\right) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \end{aligned}$$

$$\overset{(*)}{=} S(s)x'(s) + S(s)Ax(s).$$

$(*)$ Vamos provar a seguir a convergência de cada um dos limites.

Da desigualdade (2.7), temos que

$$\lim_{h\to 0^+}\left\|S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s)\right)\right\| \leq \lim_{h\to 0^+} Me^{\omega(s+h)} \underbrace{\left\|\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s)\right\|}_{\to\ 0} = 0$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua (Corolário 2.5), temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s+h)x'(s) = S(s)x'(s).$$

Da continuidade de $S(s)$ e do fato que $\lim_{h\to 0^+} A_h x = Ax$, para todo $x \in D(A)$, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s)A_h(x(s)) = S(s)Ax(s).$$

Agora vamos provar a derivada pela esquerda.

$$y'_-(s) = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{y(s+\delta)-y(s)}{\delta}, \text{ para } -s<\delta<0.$$

Analogamente, fazendo $h = -\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
y'_-(s) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(s-h)-y(s)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h)-S(s)x(s)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h)-S(s-h)x(s)+S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h} + \frac{S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h}\right) + \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{S(s-h)-S(s)}{-h}x(s)\right) \\
&= \lim_{\delta\to 0^-} \left(S(s+\delta)\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta}\right) + \lim_{h\to 0^+}\left(S(s-h)\frac{\mathrm{I}-S(h)}{-h}x(s)\right)
\end{aligned}$$

(Como antes, vamos calcular os limites usando a limitação de S e a continuidade de $S(\cdot)x$)

$$= \lim_{\delta\to 0^-}\left(\underbrace{S(s+\delta)}_{\text{limitado}}\underbrace{\left(\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta} - x'(s)\right)}_{\to 0} + \underbrace{S(s+\delta)x'(s)}_{S(\cdot)x \text{ é contínua}}\right) +$$

$$\lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)A_h(x(s))\right)$$

$$= S(s)x'(s) + \lim_{h\to 0^+}\left(\underbrace{S(s-h)}_{\text{limitado}}\left(\underbrace{A_h(x(s) - Ax(s)}_{\to 0}\right) + \underbrace{S(s-h)Ax(s))}_{S(\cdot)x \text{ contínua}}\right)$$
$$= S(s)x'(s) + S(s)Ax(s).$$

□

PVI **Teorema 2.14** (Existência e Unicidade do PVI)**.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, \ t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,
$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Demonstração. De fato, do Teorema 2.12, como $x_0 \in D(A)$, temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \ \forall t \in [0, +\infty).$$

E também a condição inicial
$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.12 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Resta provar a unicidade. Para isso, seja $v = v(t)$ uma outra solução paro o mesmo PVI. Defina, para cada $t \geq 0$, $w(s) = S(t-s)v(s)$, $s \in [0, t]$.
Afirmação 1: $w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s)$, para todo $s \in [0, t]$.

Com efeito, defina $z(\tau) = v(t-\tau)$ e $u(\tau) = w(t-\tau)$, então

$$u(\tau) = w(t-\tau) = S(t-(t-\tau))v(t-\tau) = S(\tau)v(t-\tau) = S(\tau)z(\tau).$$

Da identidade (2.14) e da regra da cadeia para funções vetoriais,

$$u'(\tau) = S(\tau)z'(\tau) + S(\tau)Az(\tau) = -S(\tau)v'(t-\tau) + S(\tau)Av(t-\tau).$$

Como $u'(\tau) = -w'(t-\tau)$, temos que

$$w'(t-\tau) = S(\tau)v'(t-\tau) - S(\tau)Av(t-\tau).$$

Portanto, fazendo $\tau = t - s$, temos que

$$\begin{aligned} w'(s) &= w'(t-(t-s)) = S(t-s)v'(t-(t-s)) - S(t-s)Av(t-(t-s)) \\ &= S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Como v é solução do PVI, então $v'(s) = Av(s)$, donde

$$w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s) = S(t-s)Av(s) - S(t-s)Av(s) = 0.$$

Portanto, w é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

$\square$

Observação 2.15. Se $x_0 \notin D(A)$ em X, então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.5, temos que $x \in C^0([0,+\infty); X)$.

Exercício 2.16. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x\, d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax\, d\tau \tag{2.15}$$ TFC1

prop2.11 **Proposição 2.17.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então para todo $x \in X$,*

$$\int_0^t S(s)x\, ds \in D(A) \quad e \quad A\left(\int_0^t S(s)x\, ds\right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Dado $t \in (0,+\infty)$, seja

$$v = \int_0^t S(s)x\, ds.$$

Basta mostar que $\lim_{h\to 0^+} A_h v = S(t)x - x$, pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como $A_h \in \mathcal{L}(X)$, da Proposição 1.31, temos que

$$\begin{aligned}
A_h v &= A_h\left(\int_0^t S(s)x\,ds\right) = \int_0^t A_h(S(s)x)\,ds \\
&= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h}\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x - S(s)x\,ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)x\,ds
\end{aligned}$$

(Mudandaça de variáveis $\tau = h+s$ na primeira integral e fazendo $s=\tau$ na segunda)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau \\
&= \left(\frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau\right) - \left(\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau.
\end{aligned}$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua (Corolário 2.5), pela identidade (1.4),

$$\lim_{h\to 0^+} A_h v = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau\right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. □

Afd **Proposição 2.18.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então A é fechado e seu domínio é denso em X.*

Demonstração.

1. $D(A)$ é denso em X.

Dado $x \in X$, basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt \in D(A) \text{ e } v_h \to x, \text{ quando } h \to 0^+.$$

De fato, que $v_h \in D(A)$ decorre diretamente da Proposição 2.17. Como $S(\cdot)x$ é contínua, pela identidade (1.4),

$$\lim_{h\to 0^+} v_h = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt = x.$$

2. A tem gráfico fechado[1]

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ em X. Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

[1] O gráfico G_A de A é um subespaço fechado de $X \times X$.

Como A_h é contínuo, da identidade (2.15), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty} A_h x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h}\left(S(h)x_n - x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt \tag{2.16}$$

aux.inq1

Da desigualdade (2.7), temos que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \le \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax_n - y\| \le Me^{\omega t}\|Ax_n - y\| \le Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|.$$

Donde,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n - S(t)y\,dt\right| &\le \frac{1}{h}\int_0^h \|S(t)Ax_n - S(t)y\|\,dt \le \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|}_{\text{não depende de } t}\,dt\\ &\le Me^{\omega h}\|Ax_n - y\| \to 0, \text{ quando } n\to+\infty.\end{aligned}$$

Da da identidade (2.16), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt.$$

Por fim, como $x \in D(A)$ e $S(\cdot)y$ é contínua (Corolário 2.5), da identidade (1.4), temos que

$$Ax = \lim_{h\to0^+} A_h x = \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt = S(0)y = y.$$

□

Observação 2.19. A Proposição 2.18 nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 em X.

Proposição 2.20 (Unicidade)**.** *Sejam S_1, S_2 dois semigrupos de classe C^0 em X, com o mesmo gerador infinitesimal A. Então $S_1 = S_2$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $S_1(t)x = S_2(t)x$, para todo $x \in D(A)$. De fato, dado $x \in D(A)$, como S_1 e S_2 tem o mesmo gerador infinitesimal, pelo Teorema 2.14, temos que $x_1(t) = S_1(t)x$ e $x_2(t) = S_2(t)x$ são duas soluções do mesmo PVI. Da unicidade de soluções, temos que $S_1(t)x = S_2(t)x$.

Agora vamos usar a densidade de $D(A)$ em X para concluir a demonstração. Com efeito, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X quando $n \to +\infty$. Como $x_n \in D(A)$, temos que $S_1(t)x_n = S_2(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E como $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$, então

$$S_1(t)x = \lim_{n\to+\infty} S_1(t)x_n = \lim_{n\to+\infty} S_2(t)x_n = S_2(t)x.$$

$\square$

2.2 Teorema de Hille-Yosida

res **Definição 2.21.** Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. O conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda\,\mathrm{I} - A \text{ é bijetor }\}$$

e chamado de **resolvente de A**, enquanto $\sigma(A) = \mathbb{K} \setminus \rho(A)$ é dito o **espectro** de A. Além disso, para cada $\lambda \in \rho(A)$, definimos o **operador resolvente** por

$$R(\lambda, A) := (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A),$$

o qual pertence a $\mathcal{L}(X)$ em virtude do Teorema do Gráfico fechado (veja o Teorema A.4 e a Observação A.6).

rl *Observação* 2.22. Consideremos as notações da Definição 2.21. Nesse caso, se $\lambda \in \rho(A)$, então os operadores A e $R(\lambda, A)$ comutam em $D(A)$. Mais precisamente,

(a) $AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x$ para todo $x \in X$;

(b) $R(\lambda, A)Ax = \lambda R(\lambda, A)x - x$ para todo $x \in D(A)$;

(c) $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$ para todo $x \in D(A)$.

Com efeito, se $x_0 \in X$, temos

$$(\lambda\,\mathrm{I} - A)R(\lambda, A)x_0 = x_0 \Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x_0 - x_0 = AR(\lambda, A)x_0,$$

provando o item (a). Analogamente, se $x_1 \in D(A)$, então

$$R(\lambda, A)(\lambda\,\mathrm{I} - A)x_1 = x_1 \Longrightarrow \lambda R(\lambda, A)x_1 - x_1 = R(\lambda, A)Ax_1,$$

seguindo o item (b). O item (c) é uma consequência imediata dos itens (a) e (b).

comutam **Exercício 2.23.** Dados dois operadores lineares invertíveis $U, V : D(A) \subset X \longrightarrow X$, prove que $U^{-1} - V^{-1} = U^{-1}(V - U)V^{-1}$. Conclua que, se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então $R(\lambda, A)$ e $R(\mu, A)$ comutam.

HY-contr **Teorema 2.24** (Hille-Yosida). *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um* ***semigrupos de contrações*** *se, e somente se, são válidas as seguintes afirmações:*

(*i*) *A é fechado e densamente definido, i.e., $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) $(0,+\infty) \subset \rho(A)$ *e, para todo* $\lambda > 0$*, temos*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A demonstração do Teorema 2.24 será organizada em alguns lemas.

Lema 2.25 (Condição Necessária)**.** *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Então A é fechado e densamente definido. Além disso,* $(0,+\infty) \subset \rho(A)$*,*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi} S(\xi)x\, d\xi,$$

e $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Demonstração. Da Proposição 2.18, já vimos que A é fechado e densamente definido.

Fixemos $\lambda > 0$ e, para cada $x \in X$, definamos

$$L_\lambda x := \int_0^{\infty} e^{-\lambda\xi} S(\xi)x\, d\xi.$$

Primeiramente, vejamos que $L_\lambda x$ está bem definida. Para isso, do Corolário 2.5, temos que a função

$$t \in [0,+\infty) \longmapsto \|e^{-\lambda t} S(t)x\| \in \mathbb{R},$$

é contínua. Como S é um semigrupo de contrações, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \|e^{-\lambda t} S(t)x\|\, dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|S(t)x\|\, dt \leq \|x\| \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, dt = \|x\| \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \|x\| \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\bigg|_{t=0}^{t=b} = \frac{\|x\|}{\lambda} \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = \frac{\|x\|}{\lambda} < +\infty.\end{aligned}$$

ou seja, a integral imprópria utilizada para definir pontualmente L_λ é absolutamente convergente. Consequentemente L_λ está bem definida. Claramente, L_λ é linear e além disso, procedendo como fizemos acima,

$$\begin{aligned}\|L_\lambda x\| &\leq \int_0^{\infty} \|e^{-\lambda t} S(t)x\|\, dt \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\|x\|\, dt \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} \lim_{b\to+\infty} -e^{-\lambda t}\bigg|_{t=0}^{t=b} = \frac{\|x\|}{\lambda},\end{aligned}$$

isto é, $L_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ e $\|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.
<u>**Afirmação:**</u> $L_\lambda = R(\lambda, A)$.

Provaremos que

1. $\forall\, x \in X,\ L_\lambda x \in D(A)$ e $(\lambda\,\mathrm{I} - A)L_\lambda x = x$, i.e., $A\,(L_\lambda x) = \lambda L_\lambda x - x$.

2. $\forall\, x \in D(A)$, $L_\lambda(\lambda\,\mathrm{I} - A)x = x$, i.e., $L_\lambda(Ax) = \lambda L_\lambda x - x$.

De fato, dado $x \in X$, seja $h > 0$, como $A_h \in \mathcal{L}$, temos que

$$\begin{aligned} A_h(L_\lambda x) &= A_h\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x\,d\xi\right) = \frac{1}{h}\int_0^\infty (S(h) - \mathrm{I})e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\,d\xi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi+h)x\,d\xi - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\,d\xi \end{aligned}$$

(Fazendo a mudança $s = \xi + h$ na primeira integral e trocando ξ por s na segunda)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}S(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}L_\lambda x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \end{aligned}$$

Aplicando-se o limite quando $h \to 0^+$, obtemos

$$\begin{aligned} A\,(L_\lambda x) &= \lim_{h\to 0^+} A_h(L_\lambda x) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}L_\lambda x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds\right) \\ &= \frac{d}{dh}e^{\lambda h}\Big|_{h=0} L_\lambda x - \lim_{h\to 0^+}\left(e^{\lambda h}\,\underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h \overbrace{e^{-\lambda s}S(s)x}^{\text{contínua}}\,ds}_{\downarrow \atop x}\right) \\ &= \lambda L_\lambda x - x, \end{aligned}$$

o que prova o o item 1. Agora vamos provar o item 2. Dado $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} L_\lambda(Ax) &= \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi)Ax\,d\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\frac{d}{d\xi}S(\xi)x\,d\xi \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\right) + \lambda e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\right]d\xi \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\Big|_{\xi=0}^{\xi=b}\right) + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\,d\xi \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda b}S(b)x\right) - x + \lambda L_\lambda x \end{aligned}$$

(como S é uma contração, $\|e^{-\lambda b}S(b)x\| \leq e^{-\lambda b}\|x\| \to 0$, quando $b \to +\infty$)

$$= -x + \lambda L_\lambda x,$$

como queríamos. $\square$

ap **Lema 2.26.** *Suponhamos que A satisfaça as condições (i) e (ii) do enunciado do Teorema 2.24. Então*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \ \forall\, x \in X.$$

Demonstração. **<u>Caso 1</u>:** $x_0 \in D(A)$.

Nessa situção, a Observação 2.22 nos dá

$$\|\lambda R(\lambda, A)x_0 - x_0\|_X = \|R(\lambda, A)Ax_0\|_X \leq \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax_0\|_X \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax_0\|_X \to 0 \ \text{ quando } \lambda \to +\infty.$$

<u>Caso 2</u>: $x_1 \in X$.

Tomemos $\varepsilon > 0$. Como $D(A)$ é denso em X, seja $y \in D(A)$ tal que

$$\|y - x_1\|_X < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Pela convergência obtida no Caso 1, existe $\lambda_0 > 0$ tal que, se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|\lambda R(\lambda, A)y - y\|_X < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\underline{\|\lambda R(\lambda, A)x_1 - x_1\|} &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x_1 - \lambda R(\lambda, A)y\| + \|\lambda R(\lambda, A)y - y\| + \|y - x_1\| \\
&\leq \lambda \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}\|x_1 - y\|_X + \|\lambda R(\lambda, A)y - y\| + \|y - x_1\| \\
&\leq 2\|x_1 - y\|_X + \|\lambda R(\lambda, A)y - y\|_X \\
&< 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

sempre que $\lambda > \lambda_0$. Isto significa que $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)x_1 = x_1$, o que completa a demonstração. $\square$

Definição 2.27. Seja $\lambda \in (0, +\infty) \cap \rho(A)$. O operador linear limitado $A_\lambda : X \longrightarrow X$, definido por

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda\, \mathrm{I}$$

é dito uma **aproximação de Yosida** de A

Plem3.3 **Lema 2.28.** *Suponhamos que A satisfaça as condições (i) e (ii) do enunciado do Teorema 2.24. Se $\{A_\lambda; \lambda > 0\}$ é a família de aproximações de Yosida do operador A, então*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall\, x \in D(A).$$

Demonstração. Seja $x \in D(A)$. Utilizando a Observação 2.22 (c)0 e o Lema 2.26, é imediato que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A) A x = Ax.$$

$\square$

Plem3.4 **Lema 2.29.** *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do enunciado do Teorema 2.24. Se $\{A_\lambda; \lambda > 0\}$ é a família de aproximações de Yosida do operador A, então:*

(a) Para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ};

(b) Dados $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\left\| e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x \right\|_X \leq t \| A_\lambda x - A_\mu x \|_X.$$

para todo $t \in [0, +\infty)$.

Demonstração. (a) Fixemos $\lambda > 0$. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} (veja o Exemplo 2.2 (a)). Além disso, para cada $t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\lambda} \right\| = \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A) - t\lambda \mathrm{I}} \right\| \leq \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \right\| \left\| e^{-t\lambda \mathrm{I}} \right\| = e^{-t\lambda} \left\| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \right\| \\ \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \| R(\lambda, A) \|} \leq 1, \end{aligned}$$

pois

$$t\lambda^2 \| R(\lambda, A) \| \leq t\lambda^2 \cdot \frac{1}{\lambda} = t\lambda.$$

Portanto, $\{e^{tA_\lambda}; t \in [0, +\infty)\}$ é um semigrupo de contrações.

(b) Fixemos $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ e $t \geq 0$. Como $A_\lambda, A_\mu \in \mathcal{L}(X)$, definamos $f : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ pondo

$$f(s) := e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x = e^{tA_\mu} e^{st(A_\lambda - A_\mu)} x,$$

para cada $s \in [0, 1]$, onde a segunda igualdade segue do fato de os operadores A_λ e A_μ comutarem (veja o Exercício 2.23). Cabe observar que

1. $f(0) = e^{tA_\mu}x$ e $f(1) = e^{tA_\lambda}x$;
2. $f'(s) = t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x$.

Consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \|f(1) - f(0)\| = \left\|\int_0^1 f'(s)\,ds\right\| \\ &= \left\|\int_0^1 t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\,ds\right\| \\ &\leq t\,\underbrace{\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right\|}_{\leq 1}\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|\end{aligned}$$

□

Demonstração do Teorema 2.24 (Condição Suficiente) .
Passo 1: Existe $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$, $\forall x \in D(A)$.

Dado $x \in D(A)$, seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, +\infty)$ tal que $\lambda_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$. Pelos Lemas 2.29 e 2.28 , temos que

$$\left\|e^{tA_{\lambda_n}}x - e^{tA_{\lambda_m}}x\right\| \leq t\|A_{\lambda_n}x - A_{\lambda_m}x\| \leq t\|A_{\lambda_n}x - Ax\| + t\|Ax - A_{\lambda_m}x\| \to 0, \quad \text{quando } m, n \to +\infty.$$

Neste caso, a sequência $(e^{tA_{\lambda_n}}x)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, portanto convergente. Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tomada arbitrária, temos que o limite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe. Portanto, para cada $t \in [0, +\infty)$, podemos definir $S(t) : D(A) \longrightarrow X$ por:

$$S(t)x := \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{2.17}$$ P3.14

Passo 2: A convergência $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$ é uniforme em intervalos limitados com respeito a t.

De fato, dado $T > 0$, para todo $t \in [0, T]$ e $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, pelo Lema 2.29, temos que

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| + \left\|e^{tA_\mu}x - S(t)x\right\| \\ &\leq T\|A_\lambda x - A_\mu x\| + \|e^{tA_\mu}x - S(t)x\|.\end{aligned}$$

De (2.17) e do Lema 2.28, fazendo $\mu \to +\infty$, obtemos

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| \leq T\|A_\lambda x - Ax\|,$$

o que garante a convergência uniforme. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $A_\lambda x \to Ax$, existe $\lambda_0 > 0$ (independente de t) tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{T}.$$

Consequentemente,

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| \leq T\|A_\lambda x - Ax\| < \varepsilon, \text{ qualquer que seja } t \in [0,T].$$

<u>Passo 3</u>: Vamos estender a $S(t)$ para todo $x \in X$

De fato, já temos a definição para $x \in D(A)$, quando $x \in X \setminus D(A)$, pela densidade, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X. Como e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações, temos que

$$\begin{aligned}\|S(t)x_m - S(t)x_n\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_m - S(t)x_m\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_m - e^{tA_\lambda}x_n\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| \\ &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_m - S(t)x_m\right\| + \|x_m - x_n\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\|\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$, temos

$$\|S(t)x_m - S(t)x_n\| \leq \|x_m - x_n\|,$$

isto é, $(S(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X e portanto convergente. Assim, definimos

$$S(t)x := \lim_{n\to+\infty} S(t)x_n. \tag{2.18}$$ lim2.1

Como a sequência de Cauchy é uniformemente convergente em t, então este limite é uniformemente convergente em t.

<u>Passo 4</u>: Vamos provar que

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x \text{ para todo } x \in X. \tag{2.19}$$ P3.14.2

E que esta convergência é uniforme em intervalos limitados.

Com efeito, se $x \in D(A)$, segue de (2.17). Se $x \in X \setminus D(A)$, pela densidade, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to +\infty$. Como e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações, note que

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\lambda}x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| + \|S(t)x_n - S(t)x\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| + \|S(t)x_n - S(t)x\|.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, de (2.18), existe n_0 suficientemente grande tal que

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \left\|e^{tA_\lambda}x_{n_0} - S(t)x_{n_0}\right\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

De (2.17), temos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\left\|e^{tA_\lambda}x_{n_0} - S(t)x_{n_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde concluímos que

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| < \varepsilon.$$

Como cada convergência é uniformemente em intervalos limitados, temos que (2.19) também o é.

<u>Passo 5</u>: $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de Classe C^0 de contrações.

Já definimos $S(t) : X \to X$, para todo $t \in [0, +\infty)$. De (2.19), temos que $S(t)$ é linear. Note ainda que

$$\|S(t)x\| \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \|e^{tA_\lambda}x\| \leq \|x\|, \ \forall\, x \in X$$

Portanto $S : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$ e é uma contração. Do Passo 4, temos que

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{0A_\lambda}x = \lim_{\lambda\to+\infty} x = x \Rightarrow S(0) = \mathrm{I}\,.$$

Além disso, escrevendo dado $x \in X$ e escrevendo $y = S(s)x$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\|S(t+s)x - S(t)S(s)x\| \\
&\quad \leq \left\|S(t+s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\right\| + \left\|e^{(t+s)A_\lambda}x - e^{tA_\lambda}S(s)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}S(s)x - S(t)S(s)x\right\| \\
&\quad \leq \left\|S(t+s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\right\| + \underbrace{\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq 1}\left\|e^{sA_\lambda}x - S(s)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - S(t)y\right\|
\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$, temos que

$$\|S(t+s)x - S(t)S(s)x\| = 0, \ \forall\, x \in X.$$

Assim, S satisfaz a propriedade de semigrupo (item 2 da Definição 2.1) e portanto é um semigrupo. Resta mostrar que S é de classe C^0.

De fato, dado $x \in X$, tome algum $T > 0$ (Por exemplo $T = 1$). Como a convergência em (2.19) é uniforme em $[0, T]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ (independente de $t \in [0, T]$), suficientemente grande, tal que

$$\left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Por outro lado, como $e^{tA_{\lambda_0}}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{t\lambda_0} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Daí, existe $0 < \delta < T$ tal que se $t \in (0, \delta)$, então

$$\|e^{t\lambda_0} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - x\| &\le \left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| + \left\|e^{tA_{\lambda_0}}x - x\right\| \\
&\le \left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| + \|e^{tA_{\lambda_0}} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\|x\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Passo 6: A é o gerador infinitesimal de $S(t)$.

Como $S(t)$ é um semigrupo de Classe C^0, seja B seu gerador infinitesimal. Basta mostrar que provar que $A = B$.

Primeiro vamos provar que $D(A) \subset D(B)$ e $Ax = Bx$. Para isso, tome $x \in D(A)$ e, de acordo com a Definição 2.9, devemos mostrar que

1. $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{S(h)x-x}{h}$ existe, portanto $x \in D(B)$;

2. $Bx := \lim\limits_{h\to 0^+} \frac{S(h)x-x}{h} = Ax.$

Para isso, como e^{tA_λ} é um semigrupo de classe C^0, de (2.15),

$$\begin{aligned}
S(h)x - x &= \lim_{\lambda\to+\infty} \left(e^{hA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}A_\lambda x\,dt \\
&= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\,dt + \lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}Ax\,dt \\
&= L_1 + L_2.
\end{aligned}$$

Vamos calcular cada limite separadamente. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^h e^{tA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\,dt\right\| &\le \int_0^h \underbrace{\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\le 1}\|A_\lambda x - Ax\|\,dt \\
&\le h\|A_\lambda x - Ax\| \to 0, \quad \text{quando } \lambda \to +\infty,
\end{aligned}$$

portanto, $L_1 = 0$. Para calcular L_2, relembre que provamos a convergência uniforme (2.19). Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\| < \frac{\varepsilon}{h}, \ \forall\, t \in [0, h].$$

Com isso,

$$\left\| \int_0^h e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\, dt \right\| \leq \int_0^h \|e^{tA_\lambda}Ax - S(t)Ax\|\, dt < \varepsilon.$$

O que significa que $L_2 = \int_0^h S(t)Ax\, dt$. Como consequência,

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)Ax\, dt.$$

Neste caso, como $S(\cdot)Ax$ é contínua (Corolário 1.9), segue da Proposição 1.32 que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax\, dt = Ax.$$

Logo, provamos simultaneamente que $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$.

Por outro lado, se $x \in D(B)$, seja $v = (\mathrm{I} - B)x$. Por hipótese, como $1 \in \rho(A)$, então $\mathrm{I} - A : D(A) \longrightarrow X$ é bijetor. Neste caso, existe $y \in D(A)$ tal que

$$(\mathrm{I} - A)y = (\mathrm{I} - B)x.$$

Já que $y \in D(A) \subset D(B)$, como acabamos de provar $Ay = By$. Daí,

$$(\mathrm{I} - B)y = (\mathrm{I} - B)x \Rightarrow (\mathrm{I} - B)(y - x) = 0.$$

Como B é o gerador infinitesimal de $S(t)$, que é um semigrupo de contrações, então pela condição necessária do Teorema de Hille-Yosida, que já foi provada, temos que $1 \in \rho(B)$, o que implica que $\mathrm{I} - B$ é invertível e portanto

$$(\mathrm{I} - B)(y - x) = 0 \Rightarrow R(1, B)(\mathrm{I} - B)(y - x) = 0 \Rightarrow x = y \in D(A).$$

Já que $x \in D(B)$ foi tomado arbritário, temos que $D(B) \subset D(A)$. Donde, concluímos que $D(A) = D(B)$ e que consequentemente $Bx = Ax$. O que encerra a prova do Teorema de Hille-Yosida para semigrupos de contrações.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 Resultados Clássicos

erstrass **Proposição A.1** (Teste de Weierstrass)**.** *Seja* $f : [a, +\infty) \times \Lambda \longrightarrow X$, Λ $\overbrace{\textit{um subconjunto aberto de } \mathbb{C}}^{\textit{Não seria } \mathbb{R}\,?}$ *contínua em* $t \in [a, +\infty)$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$ *Se existe* $M : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e positiva em* $t \in [a, +\infty)$ *tal que*

(*i*) $\|f(t, \lambda)\| \leq M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [a, +\infty) \times \Lambda,$

(*ii*) $\displaystyle\int_a^\infty M(t)\, dt < +\infty.$

Então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda)\, dt$$

converge absolutamente para cada λ *pertecente ao conjunto* Λ *e a convergência é uniforme nesse conjunto.*

Demonstração. CITAR $\square$

A seguir, enunciamos dois resultados básicos da Análise Funcional que serão utilizados nas exposições deste minicurso. O primeiro deles é o Princípio da Limitação Uniforme (versão do Teorema de Banach-Steinhaus no contexto dos espaços normados) e o outro é o Teorema do Gráfico Fechado, ambos consequências do importante Lema de Baire (veja [4]).

th-BS **Teorema A.2** (Banach-Steinhaus)**.** *Sejam* X *e* Y *dois espaços normado, com* X *completo, e consideremos uma família*

$$\mathcal{F} = \{T_i : X \longrightarrow Y; i \in I\} \subset \mathcal{L}(X, Y),$$

não necessariamente enumerável, com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$, *temos*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < \infty.$$

Então

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Em outras palavras, a limitação pontual da família $\mathcal{F}$ implica a sua limitação uniforme.

Observação A.3. (a) No Teorema A.2, a hipótese de que X seja coompleto não pode ser removida. De fato, definindo

$$\varphi_n : x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00} \longmapsto nx_n \in \mathbb{K},$$

para cada inteiro positivo n, fica estabelecida uma família pontualmente limitada que não é uniformemente limitada (relembre o Exemplo A.15 e consulte [4]).

(b) Ainda com as notações do Teorema de A.2, a limitação uniforme de $\mathcal{F}$, expressa por

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty,$$

é o mesmo que dizer que $\mathcal{F}$ é uma família equicontínua (de fato, basta adaptar a demonstração da Proposição 1.9 para obter este fato).

th-GF **Teorema A.4** (Gráfico Fechado)**.** *Sejam X e Y dois espaços de Banach, e consideremos uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$. Se*

$$G_T = \{(x, y) \in X \times Y; y = Tx\}$$

é um subespaço fechado de $X \times Y$, então T é contínua.

Observação A.5. (a) Dentre as hipóteses do Teorema A.4, a completude de cada um dos dois espaços não pode ser removida (veja [4]).

(b) Conforme o enunciado do Teorema do A.4, G_T é um subespaço vetorial de $X \times Y$ (não apenas um subconjunto do mesmo, como ocorre em geral para aplicações entre dois conjuntos dados). Isto é verdadeiro porque $T : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação linear.

(c) É fácil ver que a aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ se exprime como a composição

$$T = \pi_2 \circ (\pi_1|_{G_T})^{-1},$$

onde π_1 e π_2 são as projeções naturais de $X \times Y$ sobre X e Y, respectivamente. A principal dificuldade na obtenção do Teorema A.4 é demonstrar que $(\pi_1|_{G_T})^{-1} : X \longrightarrow G_T$ é uma aplicação contínua (veja [4]).

A seguir, apresentamos uma importante consideração sobre o operador resolvente mencionado na Definição 2.21.

reslim *Observação* A.6. Consideremos as notações da Definição 2.21. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, vejamos que o operador linear $R(\lambda, A) : X \longrightarrow D(A) \subset X$ é limitado. Com efeito, como X é um espaço de Banach, o Teorema do A.4 garante que é suficiente verificarmos que o gráfico G de $R(\lambda, A)$ é um subespaço fechado de $X \times X$. Nesse caso, consideremos uma sequência $(x_n, R(\lambda, A)x_n)_{n=1}^{\infty}$ em G convergindo a $(x, y) \in X \times X$. Isto significa que

$$x_n \to x \text{ e } R(\lambda, A)x_n \to y \text{ em } X. \tag{A.1}$$ conv

Da Observação 2.22 (a), para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$AR(\lambda, A)x_n = \lambda R(\lambda, A)x_n - x_n$$

Das convergências em (A.1), temos

$$\lim_{n\to+\infty} AR(\lambda, A)x_n = \lim_{n\to+\infty} [\lambda R(\lambda, A)x_n - x_n] = \lambda y - x \text{ em } X.$$

Como

$$y_n := R(\lambda, A)x_n \to y \text{ e } Ay_n = AR(\lambda, A)x_n \to \lambda y - x$$

em X, o fato de A ser um operador fechado nos diz que $y \in D(A)$ e que $Ay = \lambda y - x$. Logo,

$$(\lambda\,\mathrm{I} - A)y = x \Longrightarrow R(\lambda, A)x = y \Longrightarrow (x, y) \in G.$$

A.2 Espaços ℓ_p

lp **Exemplo A.7.** Seja $p \in [1, +\infty)$ e definamos

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Mostraremos que as operações

$$\Big((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \Big) \in \ell_p \times \ell_p \longmapsto (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

e

$$\Big(\lambda, (x_n)_{n=1}^{\infty} \Big) \in \mathbb{K} \times \ell_p \longmapsto (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

estão bem definidas e que a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \longmapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R}.$$

Tais objetivos serão alcançados no Corolário A.11.

dhsomas **Proposição A.8** (Desigualdade de Hölder para somas)**.** *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema do Valor Médio, não é difícil constatar que, para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha) b. \tag{A.2}$$ TVM

Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p > 0,$$

consideremos

$$a_m = \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \text{ e } b_m = \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^p},$$

para cada $m \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, tomando $\alpha = \frac{1}{p}$ e aplicando (A.2), temos

$$a_m^\alpha b_m^{1-\alpha} \leq \alpha a_m + (1-\alpha) b_m,$$

isto é,

$$\frac{|x_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|y_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^p}, \tag{A.3}$$

ineq

para cada $m \in \{1, \cdots, n\}$. Somando membro a membro as n relações descritas em (A.3), fica demonstrada a desigualdade de Hölder do enunciado. □

Corolário A.9 (Desigualdade de Hölder para séries)**.** *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q$, então $(x_n y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ e vale*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição A.8. □

Proposição A.10 (Desigualdade de Minkowski para somas)**.** *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

Demonstração. Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p > 0,$$

a Proposição A.8 nos dá

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j + y_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^{p}\right)^{1/q}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p}\right], \qquad \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

ineqm

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Multiplicando os membros de (A.4) por $\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p\right)^{-1/q}$, fica demonstrada a desigualdade de Minkowski do enunciado. □

dms **Corolário A.11** (Desigualdade de Minkowski para séries)**.** *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, então $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e vale*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n+y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Em outras palavras, $x + y \in \ell_p$, ou seja, a adição em ℓ_p apresentada no Exemplo A.7 encontra-se bem definida e, além disso, vale a desigualdade triangular

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Assim, sendo imediata a boa definição da multiplicação por escalar em ℓ_p, também declarada no Exemplo A.7, resulta que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

ex24 **Exemplo A.12.** Denotemos por

- $\mathbf{c}$ o conjunto de todas as sequências convergentes em $\mathbb{K}$;
- $\mathbf{c}_0$ o conjunto de todas as sequências convergentes em $\mathbb{K}$ convergindo para zero;
- $\mathbf{c}_{00}$ o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ com a seguinte propriedade: existe um inteiro positivo n_0 tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Claramente,

$$\mathbf{c}_{00} \subset \mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset \ell_\infty.$$

Além disso, não é difícil constatar que $\mathbf{c}$ é um subespaço vetorial fechado de ℓ_∞.

Exemplo A.13. Para cada espaço métrico M, $\mathcal{C}_b(M)$, apresentado no 1.8 é um espaço de Banach, uma vez que é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(M)$ (veja a Observação 1.20).

Exemplo A.14. O subespaço vetorial $\mathbf{c}$ de ℓ_∞, mencionado no Exemplo A.12, é um espaço de Banach, em virtude da Proposição 1.9 e da Observação 1.20.

completo **Exemplo A.15.** O subespaço de $\mathbf{c}_{00}$ de ℓ_∞, mencionado no Exemplo A.12, NÃO é um espaço de Banach. De fato, para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \cdots\right) \in \mathbf{c}_{00}.$$

É fácil ver que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathbf{c}_{00}$ que converge a

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right) \in \ell_\infty \setminus \mathbf{c}_{00}.$$

Isto significa que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbf{c}_{00}$ que NÃO CONVERGE em $\mathbf{c}_{00}$.

A.3 Funcionais e operadores lineares ilimitados

topVSalg **Proposição A.16.** *Se é X um espaço normado de dimensão infinita, então $X' \neq X^*$.*

Demonstração. De fato, em virtude do Lema de Zorn, sabemos que X possui uma base (de Hamel)

$$\mathcal{B} = \{x_i; i \in I\},$$

onde I é um conjunto infinito. Podemos supor que $\|x_i\|_X = 1$ para todo $i \in I$. Agora, seja

$$J = \{i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots\}$$

um subconjunto infinito e enumerável de I. Logo, existe um único funcional linear $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

- $\varphi(x_{i_k}) = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$;
- $\varphi(x_i) = 0$ se $i \in I \setminus J$.

Um vez que

$$\mathbb{N} \subset \left\{\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X}; x \in X \setminus \{0\}\right\},$$

não existe $C > 0$ de modo que valha $|\varphi(x)| \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Pela Proposição 1.9, φ não é contínua, isto é, $\varphi \in X^* \setminus X'$. $\square$

limitado *Observação* A.17. Dados dois espaços normados X e Y, com X de dimensão infinita, sempre podemos definir uma aplicação linear descontínua $T : X \longrightarrow Y$. Realmente, consideremos $\mathcal{B}$ e I

como na Proposição A.16, e seja $y \in Y$ com $\|y\|_Y = 1$. Nesse caso, basta tomar $T : X \longrightarrow Y$ como sendo a única aplicação linear satisfazendo

- $T(x_{i_k}) = ky$ para cada $k \in \mathbb{N}$;
- $T(x_i) = 0$ se $i \in I \setminus J$.

Referências Bibliográficas

6analise [1] de Figueiredo, D. G. *Análise I, 2^a ediçao.* Editora LTC, Rio de Janeiro, 1996.

migrupos [2] Gomes, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

15topics [3] Kesavan, S. *Topics in Functional Analysis and Applications.* New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

roduccao [4] Pombo Jr, D. P. *Introdução à análise funcional.* EDUFF, 1999.

erential [5] Rirsch, M. W., and Smale, S. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* ACADEMIC PRESS. INC., 1974.

Índice Remissivo