



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA DA UFF

Semigrupos de Operadores Lineares

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

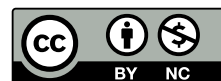
Luiz Viana¹
Reginaldo Demarque²

Niterói, 2024

[Compilado 2 de janeiro de 2025, 18:30]

¹Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.

²Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.



Sumário

1	Noções Básicas sobre Espaços de Banach	1
1.1	Espaços Normados	1
1.2	Espaços de Banach	8
1.3	Espaços normados de dimensão finita	9
1.4	Operadores Lineares Ilimitados	9
1.5	Integrais Vetoriais	10
2	Semigrupos de Operadores Lineares	13
2.1	Semigrupos de Classe C^0	13
2.2	Teorema de Hille-Yosida	28
A	Apêndice	33
A.1	Resultados Clássicos	33
	Bibliografia	35

Noções Básicas sobre Espaços de Banach

1.1 Espaços Normados

No decorrer do presente capítulo, denotaremos por \mathbb{K} o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Além disso, quando (M, d) for um espaço métrico, cada bola aberta, cada bola fechada e cada esfera em M serão denotadas por

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) < r\},$$

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) \leq r\}$$

e

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) = r\},$$

respectivamente, onde $a \in M$ e $r > 0$.

Definição 1.1. Seja X um \mathbb{K} -espaço vetorial. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

- (a) $\|x\| \geq 0$;
- (b) Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;
- (c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \|\cdot\|)$ é dito um **espaço normado**.

Observação 1.2. Em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, valem:

- (a) $\|0\| = 0$;
- (b) $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

Exemplo 1.3. Dado um número inteiro positivo n , não é difícil verificar que

$$\|\cdot\|_0 : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

$$\|\cdot\|_1 : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \in \mathbb{R}$$

e

$$\|\cdot\|_2 : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto \sum_{j=1}^n |x_j| \in \mathbb{R}$$

são normas em \mathbb{K}^n .

Exemplo 1.4. Seja A um conjunto não vazio. Denotemos por $\mathcal{B}(A)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : A \rightarrow \mathbb{K}$. Dados $f, g \in \mathcal{B}(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definamos

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para cada $x \in A$.

Com as operações de adição e multiplicação por escalar, pontualmente dadas acima, $\mathcal{B}(A)$ é um \mathbb{K} -espaço vetorial. Além disso, não é difícil constatar que

$$f \in \mathcal{B}(A) \mapsto \|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{B}(A)$. Observemos ainda que a convergência de seqüências em $\mathcal{B}(A)$ é exatamente a noção de convergência uniforme.

Definição 1.5. Com as notações do Exemplo 1.4,

$$\ell_\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N}),$$

que é o espaço normado de todas as seqüências limitadas cujos termos pertencem a \mathbb{K} .

Exemplo 1.6. Seja $p \in [1, +\infty)$ e definamos

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty; \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Mostraremos que as operações

$$\left((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \right) \in \ell_p \times \ell_p \longmapsto (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

e

$$\left(\lambda, (x_n)_{n=1}^{\infty} \right) \in \mathbb{K} \times \ell_p \longmapsto (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

estão bem definidas e que a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \longmapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \in \mathbb{R}.$$

Tais objetivos serão alcançados no Corolário 1.10.

Proposição 1.7 (Desigualdade de Hölder para somas). *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então

$$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q \right)^{1/q}.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema do Valor Médio, não é difícil constatar que, para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b. \quad (1.1)$$

Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^n |x_j|^p > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^n |y_j|^p > 0,$$

consideremos

$$a_m = \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} \text{ e } b_m = \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q},$$

para cada $m \in \{1, \dots, n\}$. Logo, tomando $\alpha = \frac{1}{p}$ e aplicando (1.1), temos

$$a_m^\alpha b_m^{1-\alpha} \leq \alpha a_m + (1 - \alpha)b_m,$$

isto é,

$$\frac{|x_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|y_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^q}, \quad (1.2)$$

para cada $m \in \{1, \dots, n\}$. Somando membro a membro as n relações descritas em (1.2), fica demonstrada a desigualdade de Hölder do enunciado. \square

Corolário 1.8 (Desigualdade de Hölder para séries). *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q$, então $(x_n y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ e vale*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q \right)^{1/q}.$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 1.7. \square

Proposição 1.9 (Desigualdade de Minkowski para somas). *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p}.$$

Demonstração. Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p > 0,$$

a Proposição 1.7 nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j + y_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \right)^{1/q} \left[\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p \right)^{1/p} \right], \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Multiplicando os membros de (1.3) por $\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{-1/q}$, fica demonstrada a desigualdade de Minkowski do enunciado. \square

Corolário 1.10 (Desigualdade de Minkowski para séries). *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e $y = (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q$, então $(x_n + y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e vale*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p\right)^{1/p}.$$

Em outras palavras, $x + y \in \ell_p$, ou seja, a adição em ℓ_p apresentada no Exemplo 1.6 encontra-se bem definida e, além disso, vale a desigualdade triangular

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Assim, sendo imediata a boa definição da multiplicação por escalar em ℓ_p , também declarada no Exemplo 1.6, resulta que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

Exemplo 1.11. Sendo M um espaço métrico, denotemos por $\mathcal{C}_b(M)$ o subconjunto de $\mathcal{B}(M)$ formado por todas as funções contínuas e limitadas de M em \mathbb{K} . Não é difícil constatar que $\mathcal{C}_b(M)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{B}(M)$.

Exemplo 1.12. Denotemos por

- \mathbf{c} o conjunto de todas as sequências convergentes em \mathbb{K} ;
- \mathbf{c}_0 o conjunto de todas as sequências convergentes em \mathbb{K} convergindo para zero;
- \mathbf{c}_{00} o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ em \mathbb{K} com a seguinte propriedade: existe um inteiro positivo n_0 tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Claramente,

$$\mathbf{c}_{00} \subset \mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset \ell_\infty.$$

Além disso, não é difícil constatar que \mathbf{c} é um subespaço vetorial fechado de ℓ_∞ .

O próximo resultado traz importantes caracterizações das aplicações lineares contínuas.

Proposição 1.13. *Sejam X e Y dois espaços normados, e consideremos uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) T é uniformemente contínua;
- (b) T é contínua;

(c) T é contínua em $0 \in X$;

(d) Existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Demonstração. É claro que $(a) \implies (b) \implies (c)$. Para vermos que $(c) \implies (d)$, tomemos $\varepsilon > 0$. Como T é contínua em $0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y = \|T(x) - T(0)\|_Y < \varepsilon = 1,$$

sempre que $x \in X$ e $\|x\|_X = \|x - 0\|_X < \delta$. Assim, para todo $w \in X \setminus \{0\}$, temos

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2} \left(\frac{w}{\|w\|_X}\right)\right) \right\|_Y < 1.$$

Logo,

$$\|T(w)\|_Y \leq \frac{2}{\delta} \|w\|_X \text{ para todo } w \in X,$$

inclusive se $w = 0$.

Agora, para vermos que $(d) \implies (a)$, basta observarmos que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$$

para quaisquer $x, y \in X$. Ou seja: T é uma aplicação lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua. \square

Definição 1.14. Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares de X em Y , com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

- (a) Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, X)$;
- (b) Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X' , que é conhecido como **o dual topológico** de X ;
- (c) O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotado por X^* , que é conhecido como **o dual algébrico** de X .

Observação 1.15. Seja X um espaço normado. É sempre verdade que $X' \subset X^*$. Além disso, quando X tem dimensão infinita, sempre temos $X' \neq X^*$. De fato, em virtude do Lema de Zorn, sabemos que X possui uma base (de Hamel)

$$\mathcal{B} = \{x_i; i \in I\},$$

onde I é um conjunto infinito. Podemos supor que $\|x_i\|_X = 1$ para todo $i \in I$. Agora, seja

$$J = \{i_1, i_2, \dots, i_k, \dots\}$$

um subconjunto infinito e enumerável de I . Logo, existe um único funcional linear $\varphi : X \rightarrow \mathbb{K}$ tal que

- $\varphi(x_{i_k}) = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$;
- $\varphi(x_i) = 0$ se $i \in I \setminus J$.

Um vez que

$$\mathbb{N} \subset \left\{ \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X}; x \in X \setminus \{0\} \right\},$$

não existe $C > 0$ de modo que valha $|\varphi(x)| \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Pela Proposição 1.13, φ não é contínua, isto é, $\varphi \in X^* \setminus X'$.

Observação 1.16. Sejam X e Y dois espaços normados. Não é difícil constatar que:

- (a) Se X tem dimensão finita, então toda aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua;
- (b) Se X tem dimensão infinita, sempre existe uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ que não é contínua.

Definição 1.17. Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é dita **limitada** se

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \quad (1.4)$$

Observação 1.18. Sejam X e Y dois espaços normados. Em virtude da Proposição 1.13, uma aplicação linear $T : X \rightarrow Y$ é contínua se, e somente se, é limitada.

Exemplo 1.19. Sejam X e Y dois espaços normados. Vejamos que

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \mapsto \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$. De fato, as condições (a), (b) e (c) da Definição 1.1 são claras. Além disso, se $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos

$$\|(T + S)(x)\|_Y = \|T(x) + S(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq (\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X, Y)})\|x\|_X$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|T + S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(T + S)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Assim, temos realmente uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$.

Definição 1.20. Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita um **isomorfismo topológico** se for um homeomorfismo.

Definição 1.21. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X . Dizemos que tais normas são **equivalentes** se a aplicação identidade

$$I_X : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

for um isomorfismo topológico.

Corolário 1.22. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X . As seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;
- (b) Existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.13. □

1.2 Espaços de Banach

Definição 1.23. Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dita ser uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Dizemos que X é um **espaço de Banach** se ele for completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy for convergente.

Observação 1.24. Se X é um espaço métrico, então cada subespaço fechado M de X é também um espaço de Banach, com a norma induzida pela norma de X .

Exemplo 1.25. Dado um inteiro positivo n , \mathbb{K}^n é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_0$ do Exemplo 1.3. Na verdade, como as normas $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são duas a duas equivalentes, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_j)$ é um espaço de Banach para todo $j \in \{1, 2, 3\}$.

Exemplo 1.26. Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, não é difícil constatar que $\mathcal{B}(A)$, introduzido no Exemplo 1.4, é um espaço de Banach. Em particular, ℓ_∞ é um espaço de Banach.

Exemplo 1.27. Para cada espaço métrico M , $\mathcal{C}_b(M)$, apresentado no 1.11 é um espaço de Banach, uma vez que é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(M)$ (veja a Observação 1.24).

Exemplo 1.28. O subespaço vetorial \mathbf{c} de ℓ_∞ , mencionado no Exemplo 1.12, é um espaço de Banach, em virtude da Proposição 1.13 e da Observação 1.24.

Exemplo 1.29. O subespaço de \mathbf{c}_{00} de ℓ_∞ , mencionado no Exemplo 1.12, NÃO é um espaço de Banach. De fato, para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \dots\right) \in \mathbf{c}_{00}.$$

É fácil ver que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em \mathbf{c}_{00} que converge a

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right) \in \ell_\infty \setminus \mathbf{c}_{00}.$$

Isto significa que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em \mathbf{c}_{00} que NÃO CONVERGE em \mathbf{c}_{00} .

Observação 1.30. Aqui enfatizamos algumas observações importantes sobre espaços de Banach:

- (a) Sendo X e Y dois espaços normados, para que $\mathcal{L}(X, Y)$ seja um espaço de Banach, é necessário e suficiente que Y seja completo.
- (b) Para cada $p \in [1, \infty)$, ℓ_p é um espaço de Banach.
- (c) Para que um espaço normado X seja completo, é necessário e suficiente que toda série absolutamente convergente em X seja convergente.

1.3 Espaços normados de dimensão finita

1.4 Operadores Lineares Ilimitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(A)$ é um subespaço de X , chamado de **domínio** de A . A é dito ser **ilimitado** quando não satisfazer (1.4). Dizemos que A é **densamente definido** se $\overline{D(A)} = X$.

Teorema 1.31 (Banach-Steinhaus). *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $\{T_i\}_{i \in I}$ é uma família (não necessariamente enumerável) em $\mathcal{L}(X, Y)$ pontualmente limitada, então $\{T_i\}_{i \in I}$ é uniformemente limitada, isto é, se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \infty.$$

1.5 Integrais Vetoriais

Definição 1.32. Sejam X um espaço de Banach e $u : [a, b] \rightarrow X$ uma aplicação tal que, para cada $\varphi \in X'$, a função real

$$t \in [a, b] \mapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_{X', X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que u é **integrável** se existe um vetor $v \in X$ que satisfaz:

$$\langle \varphi, v \rangle_{X', X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t) \rangle_{X', X} dt, \quad \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo, v é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t) dt.$$

Proposição 1.33. *Se $u : [a, b] \rightarrow X$ é contínua, então u é integrável. Além disso,*

$$1. \quad \left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt$$

2. Se $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, então

$$A \left(\int_a^b u(t) dt \right) = \int_a^b A(u(t)) dt.$$

Demonstração. Veja em [2, Theorem A3.2] □

Proposição 1.34. *Se $u : [a, a + h] \rightarrow X$ é contínua, então*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(t) dt = u(a). \quad (1.5)$$

Demonstração. A função $f : t \in [a, a + h] \mapsto \|u(t) - u(a)\| \in \mathbb{R}$ é contínua. Pelo Teorema do

Valor Médio para integrais, existe $\xi_h \in [a, a + h]$ tal que

$$\frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt = f(\xi_h).$$

Como $a \leq \xi_h \leq a + h$, se $h \rightarrow 0^+$, então $\xi_h \rightarrow a^+$. Neste caso,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} f(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\xi_h) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\| dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(t) dt - u(a) \right\| &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(t) - u(a) dt \right\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\| dt = 0. \end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.5).

□

Semigrupos de Operadores Lineares

2.1 Semigrupos de Classe C^0

Definição 2.1. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

1. $S(0) = \text{Id}$;
2. $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in [0, +\infty)$;

Dizemos que S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - \text{Id})x\| = 0$, $\forall x \in X$.

Dizemos que S é **uniformemente contínuo** se

4. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - \text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Exemplo 2.2. São exemplos de semigrupos:

1. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Define-se a aplicação exponencial por

$$e^A = \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Pode-se mostrar que esta série é absolutamente convergente e define $e^A \in \mathcal{L}(X)$, veja [1, Apêndice 2]. Além disso,

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, $e^{tA} : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.

2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então $S(t)f(s) = f(t+s)$ define um semigrupo de classe C^0 .

Proposição 2.3. *Se S é um semigrupo de classe C^0 em X , então existem $\mu \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.31) à família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$, onde X é Banach. Para isso, basta mostrar que esta família é pontualmente limitada.

De fato, S é um semigrupo de classe C^0 , então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Com isso, dado $x \in X$, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq t \leq \delta$, então

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\| = C_x.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, $\{S(t)\}_{0 \leq t \leq \delta}$ é uniformemente limitada, isto é, $\exists M > 0$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0, \delta]. \quad (2.2)$$

Além disso, $M \geq \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.

Por outro lado, dado $t > \delta$, pelo algoritmo da divisão, existem $n \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, \delta]$ tais que $t = n\delta + r$. Com isso, do item 2 da definição de Semigrupo e da desigualdade (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(n\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \overbrace{\|S(\delta) \cdots S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}}^{n \text{ vezes}} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{n+1}. \end{aligned}$$

Note que, como $n \leq t/\delta$ e $M \geq 1$, temos que $M^n \leq M^{t/\delta}$. Da desigualdade anterior,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{t/\delta} = Me^{\frac{t}{\delta} \log(M)} = Me^{\mu t},$$

onde $\mu = \frac{1}{\delta} \log(M)$.

Em particular,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em outras palavras, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em $[0, T]$. □

Corolário 2.4. *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$, $S(\cdot)x \in C^0([0, +\infty); X)$. Em outras palavras,*

$$t \in [0, +\infty) \mapsto S(t)x \in X \text{ é contínua.}$$

Demonstração. Dado $x \in X$, devemos mostrar que, para todo $t \in [0, +\infty)$,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Do item (3) da definição de semigrupos, já temos que

$$\|S(h)x - S(0)x\| = \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Isto é, $S(\cdot)x$ é contínua em $t = 0$. Dado $t \in (0, +\infty)$, se $h > 0$, então

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Se $h < 0$, então seja $k = -h > 0$. Daí, se $h \rightarrow 0^+$, então $k \rightarrow 0^+$. Com isso,

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-k)x - S(t)x\| = \|S(t-k)x - S(t-k+k)x\| \\ &= \|S(t-k)x - S(t-k)S(k)x\| = \|S(t-k)(\text{Id} - S(k))x\| \\ &\leq \|S(t-k)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(k) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(k) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

□

Vamos melhorar a estimativa (2.1) através do seguinte teorema.

Teorema 2.5. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Observação 2.6. Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso, $M = 1$, S é dito **semigrupo das contrações**.

Lema 2.7. *Seja $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva, isto é, $p(t + s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quando $t \rightarrow +\infty$ e*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [1, Lema 1.2.5]

Prova do Teorema 2.5. Primeiramente, vejamos que $p(t) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})$ é subaditiva. De fato, como $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos que

$$\|S(t + s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função \log é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t + s) &= \log(\|S(t + s)\|_{\mathcal{L}(X)}) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) + \log(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que p é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja (a, b) um intervalo limitado em $[0, +\infty)$. Em particular, $(a, b) \subset [0, b]$. Portanto, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu b}, \forall t \in (a, b).$$

Isto é, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como \log é crescente, temos que p também o é. Logo, do Lema 2.7, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0.$$

Se $\omega > \omega_0$, tome $\varepsilon = \omega - \omega_0$, pela definição de limite, existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t_0} =: M_0, \forall t \in [0, t_0].$$

E como $S(0) = I$, então $M_0 \geq 1$.

1º caso: $\omega \geq 0$.

Vimos que

$$\begin{cases} \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega, \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0) + t\omega} \leq M_0 e^{t\omega}, \forall t \in [0, +\infty).$$

2º caso: $\omega < 0$.

Neste caso, se $t > t_0$, como $-t_0\omega \geq 0$ e $\log(M_0) \geq 0$, então

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq t_0$, então $t\omega - t_0\omega \geq 0$, daí,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) < \log(M_0) - \underbrace{t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega, \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega, \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0\omega}}_M e^{t\omega} = M e^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

Definição 2.8. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X . O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, x \in D(A)$$

Dado S um semigrupo de classe C^0 em X , vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \forall x \in X.$$

Proposição 2.9. $D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Demonstração. Exercício. □

Observação 2.10. De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, **quando um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de algum semigrupo?** O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

Teorema 2.11. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (2.4)$$

Demonstração.

Afirmção 1: Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Dado $x \in D(A)$, seja $y = S(t)x$. Primeiramente, vamos mostrar que $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h y = S(t)Ax$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} A_h y &= \frac{S(h)y - y}{h} = \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t) \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_h x. \end{aligned}$$

Como $x \in D(A)$, temos que $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = Ax$. Além disso, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)$ é contínua. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h y = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t)A_h x = S(t) \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x \right) = S(t)Ax.$$

Neste caso, provamos que $S(t)x = y \in D(A)$ e que $Ay = S(t)Ax$, ou seja, $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Afirmção 2: $\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax, \forall x \in D(A)$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \quad (2.5)$$

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{S(t+\delta)x}^{>0} - S(t)x}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo $\delta = -h$, temos que $0 < h < t$ e

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dt} S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \left(\frac{x - S(h)x}{-h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h)A_hx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(t-h)(A_hx - Ax) + S(t-h)Ax \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Do Corolário (2.4), temos que $f(h) = S(t-h)Ax$ é contínua em $[0, t)$, portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \quad (2.7)$$

Por outro lado, do Teorema 2.5, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t}, \quad \forall h \in [0, t),$$

donde,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)(A_hx - Ax)\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_hx - Ax\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} Me^{\omega t} \|A_hx - Ax\| = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Com isso, (2.6), (2.7) e (2.8) implicam que

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A). \quad (2.9)$$

Portanto, de (2.5) e (2.9), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A).$$

□

Proposição 2.12. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x : (a, b) \rightarrow D(A) \subset X$ é uma curva diferenciável tal que $x' \in D(A)$, então a curva $y(s) = S(s)x(s)$*

também é diferenciável e

$$y'(s) = S(s)x'(s) + S(s)Ax(s), \quad \forall s \in (a, b) \quad (2.10)$$

Demonstração. Primeiramente, vamos calcular a derivada de y pela direita.

$$\begin{aligned} y'_+(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(s+h) - y(s)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s) + S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s)}{h} + \frac{S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s+h) \frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s) \frac{S(h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s+h) \frac{x(s+h) - x(s)}{h} + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s+h) \left(\frac{x(s+h) - x(s)}{h} - S(s+h)x'(s) + S(s+h)x'(s) \right) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s+h) \left(\frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\ &\stackrel{(*)}{=} S(s)x'(s) + S(s)Ax(s). \end{aligned}$$

(*) Vamos provar a seguir a convergência de cada um dos limites.

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \left\| S(s+h) \left(\frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right) \right\| \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega(s+h)} \underbrace{\left\| \frac{x(s+h) - x(s)}{h} - x'(s) \right\|}_{\rightarrow 0} = 0$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(s+h)x'(s) = S(s)x'(s).$$

Da continuidade de $S(s)$ e do fato que $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = Ax$, para todo $x \in D(A)$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(s)A_h(x(s)) = S(s)Ax(s).$$

Agora vamos provar a derivada pela esquerda.

$$y'_-(s) = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{y(s+\delta) - y(s)}{\delta}, \quad \text{para } -s < \delta < 0.$$

Analogamente, fazendo $h = -\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
 y'_-(s) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(s-h) - y(s)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h) - S(s)x(s)}{-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h) - S(s-h)x(s) + S(s-h)x(s) - S(s)x(s)}{-h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s-h) \frac{x(s-h) - x(s)}{-h} + \frac{S(s-h)x(s) - S(s)x(s)}{-h} \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s-h) \frac{x(s-h) - x(s)}{-h} \right) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{S(s-h) - S(s)}{-h} x(s) \right) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \left(S(s+\delta) \frac{x(s+\delta) - x(s)}{\delta} \right) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(S(s-h) \frac{I - S(h)}{-h} x(s) \right)
 \end{aligned}$$

(Como antes, vamos calcular os limites usando a limitação de S e a continuidade de $S(\cdot)x$)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \left(\underbrace{S(s+\delta)}_{\text{limitado}} \underbrace{\left(\frac{x(s+\delta) - x(s)}{\delta} - x'(s) \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{S(s+\delta)x'(s)}_{S(\cdot)x \text{ é contínua}} \right) + \\
 &\quad \lim_{h \rightarrow 0^+} (S(s-h)A_h(x(s))) \\
 &= S(s)x'(s) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\underbrace{S(s-h)}_{\text{limitado}} \underbrace{\left(A_h(x(s)) - Ax(s) \right)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{S(s-h)Ax(s)}_{S(\cdot)x \text{ contínua}} \right) \\
 &= S(s)x'(s) + S(s)Ax(s)
 \end{aligned}$$

□

Teorema 2.13 (Existência e Unicidade do PVI). *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Demonstração. De fato, do Teorema 2.11, como $x_0 \in D(A)$, temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

E também a condição inicial

$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.11 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Resta provar a unicidade. Para isso, seja $v = v(t)$ uma outra solução para o mesmo PVI. Defina, para cada $t \geq 0$, $w(s) = S(t-s)v(s)$, $s \in [0, t]$.

Afirmção 1: $w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s)$, para todo $s \in [0, t]$.

Com efeito, defina $z(\tau) = v(t-\tau)$ e $u(\tau) = w(t-\tau)$, então

$$u(\tau) = w(t-\tau) = S(t-(t-\tau))v(t-\tau) = S(\tau)v(t-\tau) = S(\tau)z(\tau).$$

Da identidade (2.10) e da regra da cadeia para funções vetoriais,

$$u'(\tau) = S(\tau)z'(\tau) + S(\tau)Az(\tau) = -S(\tau)v'(t-\tau) + S(\tau)Av(t-\tau).$$

Como $u'(\tau) = -w'(t-\tau)$, temos que

$$w'(t-\tau) = S(\tau)v'(t-\tau) - S(\tau)Av(t-\tau).$$

Portanto, fazendo $\tau = t-s$, temos que

$$\begin{aligned} w'(s) &= w'(t-(t-s)) = S(t-s)v'(t-(t-s)) - S(t-s)Av(t-(t-s)) \\ &= S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Como v é solução do PVI, então $v'(s) = Av(s)$, donde

$$w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s) = S(t-s)Av(s) - S(t-s)Av(s) = 0.$$

Portanto, w é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

□

Observação 2.14. Se $x_0 \notin D(A)$ em X , então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.4, temos que $x \in C^0([0, +\infty); X)$.

Exercício 2.15. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se

$x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau \quad (2.11)$$

Proposição 2.16. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então para todo $x \in X$,*

$$\int_0^t S(s)x ds \in D(A) \quad e \quad A \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Dado $t \in (0, +\infty)$, seja

$$v = \int_0^t S(s)x ds.$$

Basta mostrar que $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = S(t)x - x$, pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como $A_h \in \mathcal{L}(X)$, da Proposição 1.33, temos que

$$\begin{aligned} A_h v &= A_h \left(\int_0^t S(s)x ds \right) = \int_0^t A_h(S(s)x) ds \\ &= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h} ds = \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x - S(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s)x ds \end{aligned}$$

(Mudança de variáveis $\tau = h + s$ na primeira integral e fazendo $s = \tau$ na segunda)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)x d\tau \\ &= \left(\frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau \right) - \left(\frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x d\tau + \frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x d\tau \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x d\tau. \end{aligned}$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua (Corolário 2.4), pela identidade (1.5),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x d\tau \right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. □

Proposição 2.17. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então A é fechado e seu domínio é denso em X .*

Demonstração.

1. $D(A)$ é denso em X .

Dado $x \in X$, basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt \in D(A) \text{ e } v_h \rightarrow x, \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

De fato, que $v_h \in D(A)$ decorre diretamente da Proposição 2.16. Como $S(\cdot)x$ é contínua, pela identidade (1.5),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} v_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt = x.$$

1. A é fechado.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$ em X . Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Como A_h é contínuo, da identidade (2.11), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_h x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} (S(h)x_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n \, dt \quad (2.12)$$

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega h} \|Ax_n - y\|.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n - S(t)y \, dt \right| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t)Ax_n - S(t)y\| \, dt \leq \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{Me^{\omega h} \|Ax_n - y\|}_{\text{não depende de } t} \, dt \\ &\leq Me^{\omega h} \|Ax_n - y\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Da da identidade (2.12), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n \, dt = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y \, dt.$$

Por fim, como $x \in D(A)$ e $S(\cdot)y$ é contínua (Corolário 2.4), da identidade (1.5), temos que

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y \, dt = S(0)y = y.$$

□

Observação 2.18. Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 2.19 (Unicidade). *Sejam S_1, S_2 dois semigrupos de classe C^0 em X com o mesmo gerador infinitesimal A . Então $S_1 = S_2$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $S_1(t)x = S_2(t)x$, para todo $x \in D(A)$. De fato, dado $x \in D(A)$, como S_1 e S_2 tem o mesmo gerador infinitesimal, pelo Teorema 2.13, temos que $x_1(t) = S_1(t)x$ e $x_2(t) = S_2(t)x$ são duas soluções do mesmo PVI. Da unicidade de soluções, temos que $S_1(t)x = S_2(t)x$.

Agora vamos usar a densidade de $D(A)$ em X para concluir a demonstração. Com efeito, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ em X quando $n \rightarrow +\infty$. Como $x_n \in D(A)$, temos que $S_1(t)x_n = S_2(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E como $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$, então

$$S_1(t)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_1(t)x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_2(t)x_n = S_2x.$$

□

Definição 2.20. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Defina $A^0 = \text{Id}$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}); A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 2.21. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Temos:*

(i) $D(A^n)$ é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X ;

(ii) Se $x \in D(A^n)$, então $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ e

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.13)$$

(iii) É válida a fórmula de Taylor: se $x \in D(A^n)$, então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau$$

(iv) $(S(t) - I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x d\tau_1 \cdots d\tau_n, \forall x \in D(A^n);$

(v) $\bigcap_n D(A^n)$ é denso em X .

Demonstração.

(i) Sabemos que $D(A)$ é um subespaço de X . Suponha que $D(A^{n-1})$ seja subespaço. Dados $x, y \in D(A^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como $x, y \in D(A^{n-1})$, então $x + \lambda y \in D(A^{n-1})$ e, como A^{n-1} é linear,

$$A^{n-1}(x + \lambda y) = \underbrace{A^{n-1}x}_{\in D(A)} + \lambda \underbrace{A^{n-1}y}_{\in D(A)} \in D(A).$$

Portanto, $D(A^n)$ também é subespaço. Logo, por indução, segue o resultado. A^n é linear pois é a composição de operadores lineares.

(ii) Teorema 2.11 garante a validade para $n = 1$.

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $k > 1$,
Se $x \in D(A^k)$, então $S(t)x \in D(A^k)$, $\forall t \geq 0$ e

$$\frac{d^k}{dt^k} S(t)x = A^k S(t)x = S(t)A^k x$$

Vamos mostrar que é válido para $n = k + 1$. De fato, se $x \in D(A^{k+1})$, por definição, $x \in D(A^k)$ e $y = A^k x \in D(A)$. Aplicando-se o Teorema 2.11 a y , temos que $S(t)A^k x = S(t)y \in D(A)$. Da Hipótese de Indução, temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$, portanto $S(t)x \in D(A^{k+1})$. Além disso, da identidade (2.4), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)y = AS(t)y = S(t)Ay.$$

Donde,

$$\frac{d}{dt} S(t)A^k x = AS(t)A^k x = S(t)A^{k+1}x.$$

Da Hipótese de Indução, já temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e, da identidade anterior, que $A^k S(t)x = S(t)A^k x \in D(A)$, portanto $S(t)x \in D(A^{k+1})$. temos que $S(t)A^k = \frac{d^k}{dt^k} S(t)x$ e $S(t)A^k x = A^k S(t)x$. Substituindo-se na identidade anterior, Obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d^k}{dt^k} S(t)x \right) = AA^k S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

Portanto,

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} S(t)x = A^{k+1} S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

O que prova a identidade (2.13) para $n = k + 1$. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita.

(iii) Este resultado também segue por indução. Para $n = 1$ é simplesmente a identidade (2.11).

Hipótese de Indução: Suponha que, para algum $m > 1$, se $x \in D(A^m)$, então vale a fórmula de Taylor:

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(\tau)x d\tau$$

Vamos mostrar que também vale para $n = m + 1$. Par isso, vamos fazer uma integração por partes e usar a fórmula do item (ii).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x d\tau \\ & \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} S(t)x d\tau \\ & = \frac{1}{m!} (t-\tau)^m \frac{d^m}{dt^m} S(t)x \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \frac{1}{m!} \int_a^t -m(t-\tau)^{m-1} \frac{d^m}{dt^m} S(t)x d\tau \\ & \stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{m!} (t-\tau)^m A^m S(t)x \Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x \\ & = -\frac{1}{m!} (t-a)^m A^m S(a)x + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x \end{aligned}$$

(Hipótese de Indução)

$$\begin{aligned} & = -\frac{1}{m!} (t-a)^m A^m S(a)x + S(t)x - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x \\ & = S(t)x - \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x. \end{aligned}$$

Logo,

$$S(t)x = \sum_{k=0}^m \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{m!} \int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x d\tau,$$

como queríamos.

(iv) **COMPLETAR A PROVA**

□

2.2 Teorema de Hille-Yosida

Definição 2.22. Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. Chamamos de **resolvente de A** , o seguinte conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ é bijetor} \}$$

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é dito **espectro** de A . Para cada $\lambda \in \rho(A)$, definimos o **operador resolvente** por

$$R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A).$$

O qual, pelo Teorema do Gráfico fechado, é um operador linear limitado.

Note que, se $\lambda \in \rho(A)$, então para todo $x \in X$

$$(\lambda I - A)R(\lambda, A)x = x \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = AR(\lambda, A)x.$$

Analogamente, se $x \in D(A)$, então

$$R(\lambda, A)(\lambda I - A)x = x \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax.$$

Destas duas equações, podemos concluir que

$$AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax, \quad \forall x \in D(A). \quad (2.14)$$

Exercício 2.23. Prove que se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então $R(\lambda, A)$ e $R(\mu, A)$ comutam.

Teorema 2.24 (Hille-Yosida). *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um **semigrupos de contrações** se, e somente se,*

(i) *A é fechado e densamente definido, i.e., $\overline{D(A)} = X$.*

(ii) *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A prova deste teorema será dividida em lemas.

Lema 2.25 (Condição Necessária). *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Então A é fechado e densamente definido. Além disso, $(0, +\infty) \subset \rho(A)$,*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi,$$

$$e \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração. Da Proposição 2.17, temos que A é fechado e densamente definido.

Dados $x \in X$ e $\lambda > 0$ defina

$$L_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi.$$

Primeiramente, vejamos que $L_\lambda x$ está bem definida. Para isso, vamos usar o Teste de Weierstrass (Proposição A.1). Do Corolário 2.4, temos que a função

$$(t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty) \mapsto e^{-\lambda t} S(t)x \in X,$$

é contínua em t para cada $\lambda \in (0, +\infty)$.

Como S é um semigrupo de contrações, temos que

$$\|e^{-\lambda t} S(t)x\| = e^{-\lambda t} \|S(t)x\| \leq e^{-\lambda t} \|x\| \leq e^{-t} \|x\| =: M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty M(t) \, dt &= \int_0^\infty e^{-t} \|x\| \, dt = \|x\| \int_0^\infty e^{-t} \, dt = \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-t} \, dt \\ &= \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-t} \Big|_{t=0}^{t=b} = \|x\| \lim_{b \rightarrow +\infty} (1 - e^{-b}) = \|x\| < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste de Weierstrass, L_λ está bem definida. Claro que L_λ é linear e além disso, procedendo como acima,

$$\begin{aligned} \|L_\lambda x\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t)x\| \, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|x\| \, dt \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} \lim_{b \rightarrow +\infty} -e^{-\lambda t} \Big|_{t=0}^{t=b} = \frac{\|x\|}{\lambda}, \end{aligned}$$

isto é, L_λ define um operador linear limitado em X e $\|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Resta mostrar que $L_\lambda = R(\lambda, A)$, isto é, devemos mostrar que

1. $\forall x \in X, L_\lambda x \in D(A)$ e $(\lambda I - A)L_\lambda x = x$, i.e., $A(L_\lambda x) = L_\lambda x - x$.
2. $\forall x \in D(A), L_\lambda(\lambda I - A)x = x$, i.e., $L_\lambda(Ax) = \lambda L_\lambda x - x$.

De fato, dado $x \in X$, seja $h > 0$, como $A_h \in \mathcal{L}$, temos que

$$\begin{aligned} A_h(L_\lambda x) &= A_h \left(\int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi \right) = \frac{1}{h} \int_0^\infty (S(h) - I) e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi + h)x \, d\xi - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi)x \, d\xi \end{aligned}$$

(Fazendo a mudança $s = \xi + h$ na primeira integral e trocando ξ por s na segunda)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} S(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h} \left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds - \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \right) - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda s} S(s)x \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \\
&= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} L_\lambda x - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x \, ds
\end{aligned}$$

Aplicando-se o limite quando $h \rightarrow 0^+$, obtemos

$$\begin{aligned}
A(L_\lambda x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h(L_\lambda x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} L_\lambda x - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x \, ds \right) \\
&= \frac{d}{dh} e^{\lambda h} \Big|_{h=0} L_\lambda x - \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(e^{\lambda h} \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda s} S(s)x \, ds}_{\substack{\text{contínua} \\ \downarrow \\ x}} \right) \\
&= \lambda L_\lambda x - x,
\end{aligned}$$

o que prova o item 1. Agora vamos provar o item 2. Dado $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
L_\lambda(A)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)Ax \, d\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} \frac{d}{d\xi} S(\xi)x \, d\xi \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{d\xi} (e^{-\lambda \xi} S(\xi)x) + \lambda e^{-\lambda \xi} S(\xi)x \, d\xi \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(e^{-\lambda \xi} S(\xi)x \Big|_{\xi=0}^{\xi=b} \right) + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)x \, d\xi \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-\lambda b} S(b)x) - x + \lambda L_\lambda x
\end{aligned}$$

(como S é uma contração, $\|e^{-\lambda b} S(b)x\| \leq e^{-\lambda b} \|x\| \rightarrow 0$, quando $b \rightarrow +\infty$)

$$= -x + \lambda L_\lambda x,$$

como queríamos. □

Lema 2.26. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \quad \forall x \in X.$$

Demonstração. Se $x \in D(A)$, da identidade (2.14), temos que

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \rightarrow 0 \text{ quando } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Agora, dado $x \in X$, para cada $\varepsilon > 0$, como $D(A)$ é denso em X , tome $y \in D(A)$ tal que

$$\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

E, da convergência anterior, como $y \in D(A)$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|\lambda R(\lambda, A)y - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)y\| + \|\lambda R(\lambda, A)y - y\| + \|y - x\| \\ &< \lambda\|R(\lambda, A)(x - y)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \|x - y\| + \frac{3\varepsilon}{4} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Definição 2.27. Para cada $\lambda \in (0, +\infty) \cap \rho(A)$, definimos o operador $A_\lambda : X \rightarrow X$, chamado **aproximação de Yosida** de A , por

$$A_\lambda := \lambda AR(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I \in \mathcal{L}(X).$$

Lema 2.28. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Se A_λ é a aproximação de Yosida do operador A , então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = Ax, \quad \forall x \in D(A).$$

Demonstração. Se $x \in D(A)$, então, de (2.14) e do Lema anterior, temos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$$

□

Lema 2.29. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Se A_λ é aproximação*

de Yosida de A , então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ} . Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ temos que

$$\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ} . Além disso,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\| &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A) - t\lambda I}\| \leq \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \|e^{-t\lambda I}\| = e^{-t\lambda} \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\| \\ &\leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|} \leq e^{t\lambda} e^{-t\lambda} = 1 \end{aligned}$$

portanto, um semigrupo de contrações.

Das definições de A_λ , A_μ , e^{tA_λ} e e^{tA_μ} comutam. Como $A_\lambda, A_\mu \in \mathcal{L}(X)$, defina

$$f(s) = e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x = e^{tA_\mu} e^{st(A_\lambda - A_\mu)}$$

e note que

1. $f(1) = e^{tA_\lambda}x$, $f(0) = e^{tA_\mu}x$
2. $f'(s) = t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x$

Consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\| &= \|f(1) - f(0)\| = \left\| \int_0^1 f'(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x \right\| \\ &\leq t \underbrace{\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\|}_{\leq 1} \|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\| \end{aligned}$$

□

Apêndice

A.1 Resultados Clássicos

Proposição A.1 (Teste de Weierstrass). *Seja $f : [a, +\infty) \times \Lambda \longrightarrow X$, Λ Não seria \mathbb{R} ? um subconjunto aberto de \mathbb{C} contínua em $t \in [a, +\infty)$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Se existe $M : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva em $t \in [a, +\infty)$ tal que*

$$(i) \quad \|f(t, \lambda)\| \leq M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [a, +\infty) \times \Lambda,$$

$$(ii) \quad \int_a^\infty M(t) dt < +\infty.$$

Então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda) dt$$

converge absolutamente para cada λ pertencente ao conjunto Λ e a convergência é uniforme nesse conjunto.

Demonstração. **CITAR**

□

Referências Bibliográficas

- [1] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [2] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

Índice Remissivo

Aproximação de Yosida, 29

dual algébrico, 6

dual topológico, 6

Espaço

de Banach, 8

normado, 1

Espectro, 26

Gerador Infinitesimal, 15

isomorfismo topológico, 8

norma, 1

equivalentes, 8

Operador Linear

desamente definido, 9

domínio, 9

ilimitado, 9

limitado, 7

Resolvente

conjunto, 26

operador, 26

semigrupo das contrações, 13

Sequência de Cauchy, 8

Solução

branda, 20

fraca, 20