



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

# Semigrupos de Operadores Lineares

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

Luiz Viana<sup>1</sup>

Reginaldo Demarque<sup>2</sup>

Niterói, 2025

---

<sup>1</sup>Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.

<sup>2</sup>Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.



# Sumário

---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Preliminares</b>                          | <b>5</b>  |
| 1.1      | Espaços Normados . . . . .                   | 5         |
| 1.2      | Operadores Lineares Ilimitados . . . . .     | 5         |
| 1.3      | Integrais Vetoriais . . . . .                | 6         |
| <b>2</b> | <b>Semigrupos de Classe <math>C^0</math></b> | <b>9</b>  |
| 2.1      | Semigrupos . . . . .                         | 9         |
|          | <b>Bibliografia</b>                          | <b>21</b> |



# Preliminares

## 1.1 Espaços Normados

**Definição 1.1.** Uma **norma** é

## 1.2 Operadores Lineares Ilimitados

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach. Seja  $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$  um operador linear, onde  $D(A)$  é um subespaço de  $X$ , chamado de **domínio** de  $A$ . Dizemos que  $A$  é **limitado (ou contínuo)** se  $D(A) = X$  e se existe  $C > 0$  tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X. \quad (1.1)$$

Denotaremos por  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço de Banach dos **operadores lineares limitados** com norma dada por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

por  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$  e  $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ .  $A$  é dito ser **ilimitado** quando não satisfazer (1.1). Dizemos que  $A$  é **densamente definido** se  $\overline{D(A)} = X$ .

**Teorema 1.2** (Banach-Steinhaus). *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $Y$  um espaço vetorial normado. Se  $\{T_i\}_{i \in I}$  é uma família (não necessariamente enumerável) em  $\mathcal{L}(X, Y)$  pontualmente limitada, então  $\{T_i\}_{i \in I}$  é uniformemente limitada, isto é, se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty, \quad \forall x \in X,$$

então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

### 1.3 Integrais Vetoriais

**Definição 1.3.** Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $u : [a, b] \longrightarrow X$  uma aplicação tal que, para cada  $\varphi \in X'$ , a função real

$$t \in [a, b] \longmapsto \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que  $u$  é **integrável** se existe um vetor  $v \in X$  que satisfaz:

$$\langle \varphi, v \rangle_{X',X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t) \rangle_{X',X} dt, \quad \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo,  $v$  é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t) dt.$$

**Proposição 1.4.** Se  $u : [a, b] \longrightarrow X$  é contínua, então  $u$  é integrável. Além disso,

$$1. \left\| \int_a^b u(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\| dt$$

2. Se  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ , então

$$A \left( \int_a^b u(t) dt \right) = \int_a^b A(u(t)) dt.$$

*Demonstração.* Veja em [2, Theorem A3.2] □

**Proposição 1.5.** Se  $u : [a, b] \longrightarrow X$  é contínua, então

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt = u(a). \quad (1.2)$$

*Demonstração.* A função  $f : t \in [a, b] \longmapsto \|u(t) - u(a)\| \in \mathbb{R}$  é contínua. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe  $c \in [a, b]$  tal que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c).$$

Como  $a \leq c \leq b$ , se  $b \rightarrow a^+$ , então  $c \rightarrow a^+$ . Neste caso,

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = \lim_{b \rightarrow a^+} f(c) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\| dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) dt - u(a) \right\| &= \lim_{b \rightarrow a^+} \left\| \frac{1}{b-a} \int_a^b u(t) - u(a) dt \right\| \\ &\leq \lim_{b \rightarrow a^+} \frac{1}{b-a} \int_a^b \|u(t) - u(a)\| dt = 0. \end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.2).

□





# Semigrupos de Classe $C^0$

## 2.1 Semigrupos

**Definição 2.1.** Seja  $X$  um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação  $S : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$  é um **semigrupo de operadores limitados em  $X$**  quando:

1.  $S(0) = \text{Id}$ ;
2.  $S(t + s) = S(t)S(s)$ ,  $\forall t, s \in [0, +\infty)$ ;

Dizemos que  $S$  é **de classe  $C^0$  ou fortemente contínuo** se

3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - \text{Id})x\| = 0$ ,  $\forall x \in X$ .

Dizemos que  $S$  é **uniformemente contínuo** se

4.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - \text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$ .

**Exemplo 2.2.** São exemplos de semigrupos:

1. Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Define-se a aplicação exponencial por

$$e^A = \text{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Pode-se mostrar que esta série é absolutamente convergente e define  $e^A \in \mathcal{L}(X)$ , veja [1, Apêndice 2]. Neste caso,  $e^{tA} : [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ , quando  $A \in \mathcal{L}(X)$ , é um semigrupo.

2. Seja  $X = C_b(\mathbb{R})$  o espaço das funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então  $S(t)f(s) = f(t + s)$  define um semigrupo de classe  $C^0$ .

**Proposição 2.3.** *Se  $S$  é um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ , então existem  $\mu \geq 0$  e  $M \geq 1$  tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.1)$$

*Em particular,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é uma função limitada em todo intervalo  $[0, T]$ .*

*Demonstração.* Vamos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.2) à família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  em  $\mathcal{L}(X)$ , onde  $X$  é Banach. Para isso, basta mostrar que esta família é pontualmente limitada.

De fato,  $S$  é um semigrupo de classe  $C^0$ , então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

Com isso, dado  $x \in X$ , para  $\varepsilon = 1$ , existe  $\delta > 0$  tal que, se  $0 \leq t \leq \delta$ , então

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\| = C_x.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus,  $\{S(t)\}_{0 \leq t \leq \delta}$  é uniformemente limitada, isto é,  $\exists M > 0$  tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0, \delta]. \quad (2.2)$$

Além disso,  $M \geq \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$ .

Por outro lado, dado  $t > \delta$ , pelo algoritmo da divisão, existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $r \in [0, \delta)$  tais que  $t = n\delta + r$ . Com isso, do item 2 da definição de Semigrupo e da desigualdade (2.2), temos que

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(n\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \overbrace{\|S(\delta) \cdots S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}}^{n \text{ vezes}} \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)}^n \|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{n+1}. \end{aligned}$$

Note que, como  $n \leq t/\delta$  e  $M \geq 1$ , temos que  $M^n \leq M^{t/\delta}$ . Da desigualdade anterior,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{t/\delta} = Me^{\frac{t}{\delta} \log(M)} = Me^{\mu t},$$

onde  $\mu = \frac{1}{\delta} \log(M)$ .

Em particular,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Em outras palavras,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada em  $[0, T]$ . □

**Corolário 2.4.** *Todo semigrupo de classe  $C^0$  é fortemente contínuo em  $[0, +\infty)$ , i.e., para todo  $x \in X$ ,  $S(\cdot)x \in C^0([0, +\infty); X)$ . Em outras palavras,*

$$t \in [0, +\infty) \mapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$

*Demonstração.* Dado  $x \in X$ , devemos mostrar que, para todo  $t \in [0, +\infty)$ ,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Do item (3) da definição de semigrupos, já temos que

$$\|S(h)x - S(0)x\| = \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0.$$

Isto é,  $S(\cdot)x$  é contínua em  $t = 0$ . Dado  $t \in (0, +\infty)$ , se  $h > 0$ , então

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(h) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(h) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Se  $h < 0$ , então seja  $k = -h > 0$ . Daí, se  $h \rightarrow 0^+$ , então  $k \rightarrow 0^+$ . Com isso,

$$\begin{aligned} \|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-k)x - S(t)x\| = \|S(t-k)x - S(t-k+k)x\| \\ &= \|S(t-k)x - S(t-k)S(k)x\| = \|S(t-k)(\text{Id} - S(k))x\| \\ &\leq \|S(t-k)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(k) - \text{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(k) - \text{Id})x\| \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

□

Vamos melhorar a estimativa (2.1) através do seguinte teorema.

**Teorema 2.5.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ . Então,*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada  $\omega > \omega_0$ , existe  $M \geq 1$  tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

*Observação 2.6.* Quando  $\omega_0 < 0$ , então para  $\omega = 0$ , temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que  $S$  é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso,  $M = 1$ ,  $S$  é dito **semigrupo das contrações**.

**Lema 2.7.** *Seja  $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função subaditiva, isto é,  $p(t+s) \leq p(t) + p(s)$ . Se  $p$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então  $p(t)/t$  tem um limite quando  $t \rightarrow +\infty$  e*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

*Prova:* Ver [1, Lema 1.2.5]

*Prova do Teorema 2.5.* Primeiramente, vejamos que  $p(t) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})$  é subaditiva. De fato, como  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , temos que

$$\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \quad \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função  $\log$  é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t+s) &= \log(\|S(t+s)\|_{\mathcal{L}(X)}) = \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) + \log(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que  $p$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja  $(a, b)$  um intervalo limitado em  $[0, +\infty)$ . Em particular,  $(a, b) \subset [0, b]$ . Portanto, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu b}, \quad \forall t \in (a, b).$$

Isto é,  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$  é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como  $\log$  é crescente, temos que  $p$  também o é. Logo, do Lema 2.7, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0.$$

Se  $\omega > \omega_0$ , tome  $\varepsilon = \omega - \omega_0$ , pela definição de limite, existe  $t_0 > 0$  tal que se  $t > t_0$ , então

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\mu t_0} =: M_0, \forall t \in [0, t_0].$$

E como  $S(0) = \text{Id}$ , então  $M_0 \geq 1$ .

**1º caso:**  $\omega \geq 0$ .

Vimos que

$$\begin{cases} \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega, \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0) + t\omega} \leq M_0 e^{t\omega}, \forall t \in [0, +\infty).$$

**2º caso:**  $\omega < 0$ .

Neste caso, se  $t > t_0$ , como  $-t_0\omega \geq 0$  e  $\log(M_0) \geq 0$ , então

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega, \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se  $t \leq t_0$ , então  $t\omega - t_0\omega \geq 0$ , daí,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) < \log(M_0) \underbrace{-t_0\omega + t\omega}_{\geq 0}, \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega, \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0 \omega}}_M e^{t\omega} = M e^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

**Definição 2.8.** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ . O **gerador infinitesimal** de  $S$  é o operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, x \in D(A)$$

Dado  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$ , vamos designar por  $A_h$  o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \forall x \in X.$$

**Proposição 2.9.**  $D(A)$  é um subespaço vetorial de  $X$  e  $A$  é um operador linear.

*Demonstração.* Exercício. □

*Observação 2.10.* De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, **quando um operador  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  é o gerador infinitesimal de algum semigrupo?** O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

**Teorema 2.11.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Dado  $x \in D(A)$ , então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

*Demonstração.*

**Afirmação 1:** Se  $x \in D(A)$ , então  $S(t)x \in D(A)$  e  $A(S(t)x) = S(t)Ax$ .

Dado  $x \in D(A)$ , seja  $y = S(t)x$ . Primeiramente, vamos mostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h y = S(t)Ax$ . Para isso, note que

$$\begin{aligned} A_h y &= \frac{S(h)y - y}{h} = \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t) \frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_h x. \end{aligned}$$

Como  $x \in D(A)$ , temos que  $\lim_{h \rightarrow 0} A_h x = Ax$ . Além disso,  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , então  $S(t)$  é contínua. Portanto,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h y = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t) A_h x = S(t) \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x \right) = S(t) Ax.$$

Neste caso, provamos que  $S(t)x = y \in D(A)$  e que  $Ay = S(t)Ax$ , ou seja,  $A(S(t)x) = S(t)Ax$ .

**Afirmção 2:**  $\frac{d}{dt} S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax$ ,  $\forall x \in D(A)$ .

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt} S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \quad (2.4)$$

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{S(t+\delta)x}^{>0} - S(t)x}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo  $\delta = -h$ , temos que  $0 < h < t$  e

$$\begin{aligned} \frac{d^-}{dt} S(t)x &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) \left( \frac{x - S(h)x}{-h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h) A_h x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Do Corolário (2.4), temos que  $f(h) = S(t-h)Ax$  é contínua em  $[0, t]$ , portanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \quad (2.6)$$

Por outro lado, do Teorema 2.5, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega(t-h)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall h \in [0, t],$$

donde,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)(A_h x - Ax)\| &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_h x - Ax\| \\ &\leq \lim_{h \rightarrow 0^+} M e^{\omega t} \|A_h x - Ax\| = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Com isso, (2.5), (2.6) e (2.7) implicam que

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A). \quad (2.8)$$

Portanto, de (2.4) e (2.8), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \quad \forall x \in D(A).$$

□

### Exemplo 2.12. Existência e Unicidade de um PVI

Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $x_0 \in D(A)$ , então  $x(t) = S(t)x_0$  define uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

De fato, do Teorema 2.11, como  $x_0 \in D(A)$ , temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \quad \forall t \in [0, +\infty).$$

E também a condição inicial

$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.11 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Para provar a unicidade, seja  $v = v(t)$  uma outra solução para o mesmo PVI. Defina, para cada  $t \geq 0$ ,  $w(s) = S(t-s)v(s)$ ,  $s \in (-\infty, t)$ . Então,

$$w'(s) = \frac{d}{ds} S(t-s)v(s) = -S(t-s)Av(s) + S(t-s)v'(s) = -S(t-s)v'(s) + S(t-s)v'(s) = 0.$$



Com isso,  $w$  é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

Se  $x_0 \notin D(A)$  em  $X$ , então  $x(t) = S(t)x_0$  **não é diferenciável**. Neste caso, dizemos que  $x = x(t)$  é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.4, temos que  $x \in C^0([0, +\infty); X)$ .

**Exercício 2.13.** Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Se  $x \in D(A)$  mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau \quad (2.9)$$

**Proposição 2.14.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então para todo  $x \in X$ ,*

$$\int_0^t S(s)x ds \in D(A) \quad e \quad A \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = S(t)x - x.$$

*Demonstração.* Dado  $t \in (0, +\infty)$ , seja

$$v = \int_0^t S(s)x ds.$$

Basta mostrar que  $\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = S(t)x - x$ , pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como  $A_h \in \mathcal{L}(X)$ , da Proposição 1.4, temos que

$$\begin{aligned} A_h v &= A_h \left( \int_0^t S(s)x ds \right) = \int_0^t A_h(S(s)x) ds \\ &= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h} ds = \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x - S(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h+s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(s)x ds \end{aligned}$$

(Mudança de variáveis  $\tau = h + s$  na primeira integral e fazendo  $s = \tau$  na segunda)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)x \, d\tau \\ &= \left( \frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x \, d\tau + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau \right) - \left( \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau + \frac{1}{h} \int_h^t S(\tau)x \, d\tau \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau. \end{aligned}$$

Como  $S(\cdot)x$  é contínua (Corolário 2.4), pela identidade (1.2),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau \right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. □

**Proposição 2.15.** *Seja  $S$  um semigrupo de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A$  seu gerador infinitesimal. Então  $A$  é fechado e seu domínio é denso em  $X$ .*

*Demonstração.*

**1.  $D(A)$  é denso em  $X$ .**

Dado  $x \in X$ , basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt \in D(A) \text{ e } v_h \rightarrow x, \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

De fato, que  $v_h \in D(A)$  decorre diretamente da Proposição 2.14. Como  $S(\cdot)x$  é contínua, pela identidade (1.2),

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} v_h = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt = x.$$

**1.  $A$  é fechado.**

Seja  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A)$  tal que  $x_n \rightarrow x$  e  $Ax_n \rightarrow y$  em  $X$ . Devemos mostrar que  $x \in D(A)$  e  $Ax = y$ .

Como  $A_h$  é contínuo, da identidade (2.9), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_h x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} (S(h)x_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n \, dt \quad (2.10)$$

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|Ax_n - y\| \leq M e^{\omega t} \|Ax_n - y\| \leq M e^{\omega h} \|Ax_n - y\|.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n - S(t)y \, dt \right| &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \|S(t)Ax_n - S(t)y\| \, dt \leq \frac{1}{h} \int_0^h \underbrace{Me^{\omega h} \|Ax_n - y\|}_{\text{não depende de } t} \, dt \\ &\leq Me^{\omega h} \|Ax_n - y\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Da da identidade (2.10), temos que

$$A_h x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax_n \, dt = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y \, dt.$$

Por fim, como  $x \in D(A)$  e  $S(\cdot)y$  é contínua (Corolário 2.4), da identidade (1.2), temos que

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h x = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y \, dt = S(0)y = y.$$

□

*Observação 2.16.* Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador  $A$  seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

**Proposição 2.17** (Unicidade). *Sejam  $S_1, S_2$  dois semigrupos de classe  $C^0$  em  $X$  e  $A_1, A_2$  os respectivos geradores infinitesimais. Então  $S_1 = S_2$ .*

*Demonstração.* **ESCREVER**

□

**Definição 2.18.** Seja  $S(t) = e^{tA}$  em  $X$ . Defina  $A^0 = \text{Id}$ ,  $A^1 = A$  e, supondo que  $A^{n-1}$  esteja definido, vamos definir  $A^n$  pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}); A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$

**Proposição 2.19.** *Seja  $S(t) = e^{tA}$  em  $X$ . Temos:*

(i)  $\mathcal{D}(A^n)$  é um subespaço de  $X$  e  $A^n$  é um operador linear de  $X$ ;

(ii) Se  $x \in \mathcal{D}(A^n)$ , então  $S(t)x \in \mathcal{D}(A^n), \forall t \geq 0$

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(iii) É válida a fórmula de Taylor: se  $x \in \mathcal{D}(A^n)$ , então

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau$$

(iv)  $(S(t) - I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x d\tau_1 \cdots d\tau_n, \forall x \in \mathcal{D}(A^n);$

(v)  $\bigcap_n \mathcal{D}(A^n)$  é denso em  $X$ .

Demonstração. **ESCREVER**

□

# *Referências Bibliográficas*

---

- [1] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [2] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

# *Índice Remissivo*

---

Gerador Infinitesimal, 14

Norma, 5

Operador Linear

    desamente definido, 5

    domínio, 5

    ilimitado, 5

    limitado, 5

semigrupo das contrações, 12

Solução

    branda, 17

    fraca, 17