UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA DA UFF

Semigrupos de Operadores Lineares

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, \quad t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds$$

Luiz Viana[1]
Reginaldo Demarque[2]

Niterói, 2024
[Compilado 5 de janeiro de 2025, 23:02]

[1]Departamento de Análise, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ.
[2]Departamento de Ciências da Natureza, Universidade Federal Fluminense, Rio das Ostras, RJ.

Sumário

1 Noções Básicas sobre Espaços de Banach **1**

1.1 Espaços Normados 1

1.2 Espaços de Banach 8

1.3 Espaços normados de dimensão finita 9

1.4 Operadores Lineares Ilimitados 9

1.5 Integrais Vetoriais 10

2 Semigrupos de Operadores Lineares **13**

2.1 Semigrupos de Classe C^0 13

2.2 Teorema de Hille-Yosida 28

A Apêndice **39**

A.1 Resultados Clássicos 39

A.2 Resultados sobre Integração que todos devem saber 39

Bibliografia **41**

Capítulo 1

Noções Básicas sobre Espaços de Banach

1.1 Espaços Normados

No decorrer do presente capítulo, denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos. Além disso, quando (M, d) for um espaço métrico, cada bola aberta, cada bola fechada e cada esfera em M serão denotadas por

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) < r\},$$

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) \leq r\}$$

e

$$B(a; r) = \{y \in M; d(y, a) = r\},$$

respectivamente, onde $a \in M$ e $r > 0$.

norma **Definição 1.1.** Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma aplicação

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

(a) $\|x\| \geq 0$;

(b) Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;

(c) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \| \cdot \|)$ é dito um **espaço normado** .

Observação 1.2. Em um espaço normado $(X, \|\cdot\|)$, valem:

(a) $\|0\| = 0$;

(b) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in X$.

ex21 **Exemplo 1.3.** Dado um número inteiro positivo n, não é difícil verificar que

$$\|\cdot\|_0 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} \in \mathbb{R},$$

$$\|\cdot\|_1 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \in \mathbb{R}$$

e

$$\|\cdot\|_2 : (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \sum_{j=1}^{n} |x_j| \in \mathbb{R}$$

são normas em $\mathbb{K}^n$.

imitadas **Exemplo 1.4.** Seja A um conjunto não vazio. Denotemos por $\mathcal{B}(A)$ o conjunto de todas as funções limitadas $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$. Dados $f, g \in \mathcal{B}(A)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, definamos

- $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$;
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para cada $x \in A$.

Com as operações operações de adição e multiplicação por escalar, pontualmente dadas acima, $\mathcal{B}(A)$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Além disso, não é difícil constatar que

$$f \in \mathcal{B}(A) \longmapsto \|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{B}(A)$. Observemos ainda que a convergência de sequências em $\mathcal{B}(A)$ é exatamente a noção de convergência uniforme.

Definição 1.5. Com as notações do Exemplo 1.4,

$$\ell_\infty := \mathcal{B}(\mathbb{N}),$$

que é o espaço normado de todas as sequências limitadas cujos termos pertencem a $\mathbb{K}$.

lp **Exemplo 1.6.** Seja $p \in [1, +\infty)$ e definamos

$$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty}; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty \right\}$$

Mostraremos que as operações

$$\Big((x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}\Big) \in \ell_p \times \ell_p \longmapsto (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

e

$$\Big(\lambda, (x_n)_{n=1}^{\infty}\Big) \in \mathbb{K} \times \ell_p \longmapsto (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$$

estão bem definidas e que a aplicação

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \longmapsto \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} \in \mathbb{R}.$$

Tais objetivos serão alcançados no Corolário 1.10.

dhsomas **Proposição 1.7** (Desigualdade de Hölder para somas)**.** *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ tais que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Em virtude do Teorema do Valor Médio, não é difícil constatar que, para quaisquer $a, b \in [0, +\infty)$ e $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$a^{\alpha} b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha) b. \tag{1.1}$$ TVM

Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p > 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n} |y_j|^p > 0,$$

consideremos

$$a_m = \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p} \text{ e } b_m = \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^p},$$

para cada $m \in \{1, \cdots, n\}$. Logo, tomando $\alpha = \frac{1}{p}$ e aplicando (1.1), temos

$$a_m^{\alpha} b_m^{1-\alpha} \leq \alpha a_m + (1-\alpha) b_m,$$

isto é,

$$\frac{|x_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}} \cdot \frac{|y_m|}{\left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_m|^p}{\sum_{j=1}^n |x_j|^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_m|^q}{\sum_{j=1}^n |y_j|^p}, \tag{1.2}$$

`ineq`

para cada $m \in \{1, \cdots, n\}$. Somando membro a membro as n relações descritas em (1.2), fica demonstrada a desigualdade de Hölder do enunciado. □

Corolário 1.8 (Desigualdade de Hölder para séries)**.** *Sejam $p, q \in (1, +\infty)$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ e $(y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q$, então $(x_n y_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1$ e vale*

$$\sum_{n=1}^\infty |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^\infty |y_n|^q\right)^{1/q}.$$

Demonstração. Segue imediatamente da Proposição 1.7. □

Proposição 1.9 (Desigualdade de Minkowski para somas)**.** *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ e $(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}.$$

Demonstração. Como claramente podemos supor que

$$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p > 0,$$

a Proposição 1.7 nos dá

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p &= \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j + y_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \\
&\quad + \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/q} \left[\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}\right],
\end{aligned} \tag{1.3}$$

`ineqm`

onde $q = \frac{p}{p-1}$. Multiplicando os membros de (1.3) por $\left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \right)^{-1/q}$, fica demonstrada a desigualdade de Minkowski do enunciado. $\square$

dms **Corolário 1.10** (Desigualdade de Minkowski para séries). *Seja $p \in (1, +\infty)$. Se $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, então $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e vale*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{1/p}.$$

Em outras palavras, $x + y \in \ell_p$, ou seja, a adição em ℓ_p apresentada no Exemplo 1.6 encontra-se bem definida e, além disso, vale a desigualdade triangular

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Assim, sendo imediata a boa definição da multiplicação por escalar em ℓ_p, também declarada no Exemplo 1.6, resulta que $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ é um espaço vetorial normado.

ex23 **Exemplo 1.11.** Sendo M um espaço métrico, denotemos por $\mathcal{C}_b(M)$ o subconjunto de $\mathcal{B}(M)$ formado por todas as funções contínuas e limitadas de M em $\mathbb{K}$. Não é difícil constatar que $\mathcal{C}_b(M)$ é um subespaço vetorial fechado de $\mathcal{B}(M)$.

ex24 **Exemplo 1.12.** Denotemos por

- $\mathbf{c}$ o conjunto de todas as sequências convergentes em $\mathbb{K}$;
- $\mathbf{c}_0$ o conjunto de todas as sequências convergentes em $\mathbb{K}$ convergindo para zero;
- $\mathbf{c}_{00}$ o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{K}$ com a seguinte propriedade: existe um inteiro positivo n_0 tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$.

Claramente,

$$\mathbf{c}_{00} \subset \mathbf{c}_0 \subset \mathbf{c} \subset \ell_\infty.$$

Além disso, não é difícil constatar que $\mathbf{c}$ é um subespaço vetorial fechado de ℓ_∞.

O próximo resultado traz importantes caracterizações das aplicações lineares contínuas.

ntinuous **Proposição 1.13.** *Sejam X e Y dois espaços normados, e consideremos uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é uniformemente contínua;

(b) T é contínua;

(c) *T é contínua em $0 \in X$;*

(d) *Existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo $x \in X$.*

Demonstração. É claro que $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$. Para vermos que $(c) \Longrightarrow (d)$, , tomemos $\varepsilon > 0$. Como T é contínua em $0 \in X$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y = \|T(x) - T(0)\|_Y < \varepsilon = 1,$$

sempre que $x \in X$ e $\|x\|_X = \|x - 0\|_X < \delta$. Assim, para todo $w \in X \setminus \{0\}$, temos

$$\left\| T\left(\frac{\delta}{2}\left(\frac{w}{\|w\|_X}\right)\right)\right\|_Y < 1.$$

Logo,

$$\|T(w)\|_Y \leq \frac{2}{\delta}\|w\|_X \text{ para todo } w \in X,$$

inclusive se $w = 0$.

Agora, para vermos que $(d) \Longrightarrow (a)$, basta observarmos que

$$\|T(x) - T(y)\|_Y = \|T(x - y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X$$

para quaisquer $x, y \in X$. Ou seja: T é uma aplicação lipschitziana e, portanto, uniformentente contínua. □

Definição 1.14. Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as transformações lineares de X em Y, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

(a) Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, X)$;

(b) Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X', que é conhecido como **o dual topológico** de X;

(c) O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotador por X^*, que é conhecido como **o dual algébrico** de X.

Observação 1.15. Seja X um espaço normado. É sempre verdade que $X' \subset X^*$. Além disso, quando X tem dimensão infinita, sempre temos $X' \neq X^*$. De fato, em virtude do Lema de Zorn, sabemos que X possui uma base (de Hamel)

$$\mathcal{B} = \{x_i; i \in I\},$$

onde I é um conjunto infinito. Podemos supor que $\|x_i\|_X = 1$ para todo $i \in I$. Agora, seja

$$J = \{i_1, i_2, \cdots, i_k, \cdots\}$$

um subconjunto infinito e enumerável de I. Logo, existe um único funcional linear $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

- $\varphi(x_{i_k}) = k$ para cada $k \in \mathbb{N}$;
- $\varphi(x_i) = 0$ se $i \in I \setminus J$.

Um vez que

$$\mathbb{N} \subset \left\{ \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|_X} ; x \in X \setminus \{0\} \right\},$$

não existe $C > 0$ de modo que valha $|\varphi(x)| \leq \|x\|_X$ para todo $x \in X$. Pela Proposição 1.13, φ não é contínua, isto é, $\varphi \in X^* \setminus X'$.

Observação 1.16. Sejam X e Y dois espaços normados. Não é difícil constatar que:

(a) Se X tem dimensão finita, então toda aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua;

(b) Se X tem dimensão infinita, sempre existe uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ que não é contínua.

Definição 1.17. Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita **limitada** se

$$\sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \tag{1.4}$$

ltdo

Observação 1.18. Sejam X e Y dois espaços normados. Em virtude da Proposição 1.13, uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, é limitada.

Exemplo 1.19. Sejam X e Y dois espaços normados. Vejamos que

$$T \in \mathcal{L}(X, Y) \longmapsto \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X, Y)$. De fato, as condições (a), (b) e (c) da Definição 1.1 são claras. Além disso, se $T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$, temos

$$\|(T + S)(x)\|_Y = \|T(x) + S(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq (\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)})\|x\|_X$$

para todo $x \in E$, ou seja,

$$\|T+S\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|(T+S)(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Assim, temos realmente uma norma em $\mathcal{L}(X,Y)$.

Definição 1.20. Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita um **isomorfismo topológico** se for um homeomorfismo.

Definição 1.21. Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X. Dizemos que tais normas são **equivalentes** se a aplicação identidade

$$I_X : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

for um isomorfismo topológico.

Corolário 1.22. *Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um mesmo espaço vetorial X. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes;

(b) Existem constantes $A > 0$ e $B > 0$ tais que

$$A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \|x\|_2$$

para todo $x \in X$.

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 1.13. □

1.2 Espaços de Banach

Definição 1.23. Seja X um espaço normado. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dita ser uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Dizemos que X é um **espaço de Banach** se ele for completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy for convergente.

subespao *Observação* 1.24. Se X é um espaço métrico, então cada subespaço fechado M de X é também um espaço de Banach, com a norma induzida pela norma de X.

Exemplo 1.25. Dado um inteiro positivo n, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_0$ do Exemplo 1.3. Na verdade, como as normas $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são duas a duas equivalentes, $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_j)$ é um espaço de Banach para todo $j \in \{1,2,3\}$.

Exemplo 1.26. Dado um conjunto $A \neq \emptyset$, não é difícil constatar que $\mathcal{B}(A)$, introduzido no Exemplo 1.4, é um espaço de Banach. Em particular, ℓ_∞ é um espaço de Banach.

Exemplo 1.27. Para cada espaço métrico M, $\mathcal{C}_b(M)$, apresentado no 1.11 é um espaço de Banach, uma vez que é um subespaço fechado de $\mathcal{B}(M)$ (veja a Observação 1.24).

Exemplo 1.28. O subespaço vetorial $\mathbf{c}$ de ℓ_∞, mencionado no Exemplo 1.12, é um espaço de Banach, em virtude da Proposição 1.13 e da Observação 1.24.

Exemplo 1.29. O subespaço de $\mathbf{c}_{00}$ de ℓ_∞, mencionado no Exemplo 1.12, NÃO é um espaço de Banach. De fato, para cada inteiro $n \geq 1$, consideremos

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \cdots\right) \in \mathbf{c}_{00}.$$

É fácil ver que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência em $\mathbf{c}_{00}$ que converge a

$$x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right) \in \ell_\infty \setminus \mathbf{c}_{00}.$$

Isto significa que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbf{c}_{00}$ que NÃO CONVERGE em $\mathbf{c}_{00}$.

Observação 1.30. Aqui enfatizamos algumas observações importantes sobre espaços de Banach:

(a) Sendo X e Y dois espaços normados, para que $\mathcal{L}(X,Y)$ seja um espaço de Banach, é necessário e suficiente que Y seja completo.

(b) Para cada $p \in [1, \infty)$, ℓ_p é um espaço de Banach.

(c) Para que um espaço normado X seja completo, é necessário e suficiente que toda série absolutamente convergente em X seja convergente.

1.3 Espaços normados de dimensão finita

1.4 Operadores Lineares Ilimitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(A)$ é um subespaço de X, chamado de **domínio** de A. A é dito ser **ilimitado** quando não satisfazer (1.4). Dizemos que A é **densamente definito** se $\overline{D(A)} = X$.

th-BS **Teorema 1.31** (Banach-Steinhaus). *Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Se $\{T_i\}_{i\in I}$ é uma família (não necessariamente enumerável) em $\mathcal{L}(X,Y)$ pontualmente limitada, então $\{T_i\}_{i\in I}$ é uniformemente limitada, isto é, se*

$$\sup_{i\in I}\|T_i x\| < \infty, \ \forall x \in X,$$

então

$$\sup_{i\in I}\|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

1.5 Integrais Vetoriais

Definição 1.32. Sejam X um espaço de Banach e $u : [a,b] \longrightarrow X$ uma aplicação tal que, para cada $\varphi \in X'$, a função real

$$t \in [a,b] \longmapsto \langle \varphi, u(t)\rangle_{X'X} \in \mathbb{R},$$

seja integrável. Dizemos que **u é integrável** se existe um vetor $v \in X$ que satisfaz:

$$\langle \varphi, v\rangle_{X',X} = \int_a^b \langle \varphi, u(t)\rangle_{X'X}\,dt, \ \forall \varphi \in X'.$$

Em caso afirmativo, v é único e escrevemos

$$v = \int_a^b u(t)\,dt.$$

KthA3.2 **Proposição 1.33.** *Se $u : [a,b] \longrightarrow X$ é contínua, então u é integrável. Além disso,*

1. $\left\|\int_a^b u(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\,dt$
2. *Se $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, então*
$$A\left(\int_a^b u(t)\,dt\right) = \int_a^b A(u(t))\,dt.$$

Demonstração. Veja em [2, Theorem A3.2] □

Prop.VM **Proposição 1.34.** *Se $u : [a,a+h] \longrightarrow X$ é contínua, então*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t)\,dt = u(a). \tag{1.5}$$ ineq.VM

Demonstração. A função $f : t \in [a,a+h] \longmapsto \|u(t)-u(a)\| \in \mathbb{R}$ é contínua. Pelo Teorema do

Valor Médio para integrais, existe $\xi_h \in [a, a+h]$ tal que

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = f(\xi_h).$$

Como $a \leq \xi_h \leq a+h$, se $h \to 0^+$, então $\xi_h \to a^+$. Neste caso,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)\,dt = \lim_{h\to 0^+} f(\xi_h) = f(a).$$

Isto é,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\|\,dt = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t)\,dt - u(a) \right\| &= \lim_{h\to 0^+} \left\| \frac{1}{h}\int_a^{a+h} u(t) - u(a)\,dt \right\| \\ &\leq \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_a^{a+h} \|u(t) - u(a)\|\;dt = 0.\end{aligned}$$

O que é equivalente à identidade (1.5). $\square$

Capítulo

2

Semigrupos de Operadores Lineares

2.1 Semigrupos de Classe C^0

emigrupo **Definição 2.1.** Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

1. $S(0) = \mathrm{Id}$;

2. $S(t + s) = S(t)S(s)$, $\forall t, s \in [0, +\infty)$;

   Dizemos que S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - \mathrm{Id})x\| = 0$, $\forall x \in X$.

   Dizemos que S é **uniformemente contínuo** se

4. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t) - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Exemplo 2.2. São exemplos de semigrupos:

1. Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Define-se a aplicação exponencial por

$$e^A = \mathrm{Id} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

   Pode-se mostrar que esta série é absolutamente convergente e define $e^A \in \mathcal{L}(X)$, veja [1, Apêndice 2]. Além disso,

$$\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{|t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

   Neste caso, $e^{tA} : [0, +\infty) \to \mathcal{L}(X)$, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.

2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então $S(t)f(s) = f(t + s)$ definie um semigrupo de classe C^0.

Proposição 2.3. *Se S é um semigrupo de classe C^0 em X, então existem $\mu \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \ \forall t \geq 0. \tag{2.1}$$ des.wT

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Demonstração. Vamos aplicar o Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.31) à família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ em $\mathcal{L}(X)$, onde X é Banach. Para isso, basta mostrar que esta família é pontualmente limitada.

De fato, S é um semigrupo de classe C^0, então

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \ \forall x \in X.$$

Com isso, dado $x \in X$, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 \leq t \leq \delta$, então

$$\|S(t)x\| \leq \|S(t)x - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\| = C_x.$$

Portanto, pelo Teorema de Banach-Steinhaus, $\{S(t)\}_{0\leq t\leq \delta}$ é uniformemente limitada, isto é, $\exists\, M > 0$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \text{ para todo } t \in [0, \delta]. \tag{2.2}$$ eq1

Além disso, $M \geq \|S(0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\operatorname{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 1$.

Por outro lado, dado $t > \delta$, pelo algorítimo da divisão, existem $n \in \mathbb{N}$ e $r \in [0, \delta)$ tais que $t = n\delta + r$. Com isso, do item 2 da definição de Semigrupo e da desigualdade (2.2), temos que

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \|S(n\delta + r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S(n\delta)S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|\overbrace{S(\delta)\cdots S(\delta)}^{n \text{ vezes}}S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq \|S(\delta)\|^n_{\mathcal{L}(X)}\|S(r)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M^{n+1}.
\end{aligned}$$

Note que, como $n \leq t/\delta$ e $M \geq 1$, temos que $M^n \leq M^{t/\delta}$. Da desigualdade anterior,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^{t/\delta} = Me^{\frac{t}{\delta}\log(M)} = Me^{\mu t},$$

onde $\mu = \frac{1}{\delta}\log(M)$.

Em particular,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t} \leq Me^{\mu T}, \, \forall t \in [0, T].$$

Em outras palavras, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em $[0, T]$. □

continua **Corolário 2.4.** *Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$, $S(\cdot)x \in C^0([0, +\infty); X)$. Em outras palavras,*

$$t \in [0, +\infty) \longmapsto S(t)x \in X \ \text{ é contínua.}$$

Demonstração. Dado $x \in X$, devemos mostrar que, para todo $t \in [0, +\infty)$,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0.$$

Do item (3) da definição de semigrupos, já temos que

$$\|S(h)x - S(0)x\| = \|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0.$$

Isto é, $S(\cdot)x$ é contínua em $t = 0$. Dado $t \in (0, +\infty)$, se $h > 0$, então

$$\begin{aligned}\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t)S(h)x - S(t)x\| = \|S(t)(S(h) - \mathrm{Id})x\| \\ &\leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(h) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } h \to 0^+.\end{aligned}$$

Se $h < 0$, então seja $k = -h > 0$. Daí, se $h \to 0^+$, então $k \to 0^+$. Com isso,

$$\begin{aligned}\|S(t+h)x - S(t)x\| &= \|S(t-k)x - S(t)x\| = \|S(t-k)x - S(t-k+k)x\| \\ &= \|S(t-k)x - S(t-k)S(k)x\| = \|S(t-k)(\mathrm{I} - S(k)x\| \\ &\leq \|S(t-k)\|_{\mathcal{L}(X)} \|(S(k) - \mathrm{Id})x\| \\ &\leq Me^{\mu t} \|(S(k) - \mathrm{Id})x\| \to 0, \text{ quando } k \to 0^+.\end{aligned}$$

□

Vamos melhorar a estimativa (2.1) através do seguinte teorema.

th2.5 **Teorema 2.5.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. Então,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)})}{t} =: \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{2.3}$$ Sbound

Observação 2.6. Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \ \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso, $M = 1$, S é dito **semigrupo das contrações**.

lem2.5 **Lema 2.7.** *Seja $p : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função subaditiva, isto é, $p(t + s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quanto $t \to +\infty$ e*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [1, Lema 1.2.5]

Prova do Teorema 2.5. Primeiramente, vejamos que $p(t) = \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)$ é subaditiva. De fato, como $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, temos que

$$\|S(t + s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)S(s)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}, \ \forall t, s \geq 0.$$

Assim, como a função log é crescente, temos que

$$\begin{aligned} p(t + s) &= \log\left(\|S(t + s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) = \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) + \log\left(\|S(s)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \\ &\leq p(t) + p(s). \end{aligned}$$

A fim de aplicarmos o lema anterior, resta mostrar que p é limitada superimente em todo intervalo limitado. Com efeito, seja (a, b) um intervalo limitado em $[0, +\infty)$. Em particular, $(a, b) \subset [0, b]$. Portanto, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu b}, \ \forall t \in (a, b).$$

Isto é, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada superiormente em todo intervalo limitado. Como log é crescente, temos que p também o é. Logo, do Lema 2.7, temos que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} =: \omega_0.$$

Se $\omega > \omega_0$, tome $\varepsilon = \omega - \omega_0$, pela definição de limite, existe $t_0 > 0$ tal que se $t > t_0$, então

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} - \omega_0 < \varepsilon = \omega - \omega_0.$$

Donde,

$$\frac{\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right)}{t} < \omega \Rightarrow \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\omega t}, \ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, da desigualdade (2.1), temos que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t_0} =: M_0, \ \forall t \in [0, t_0].$$

E como $S(0) = \mathrm{I}$, então $M_0 \geq 1$.

1º caso: $\omega \geq 0$.

Vimos que

$$\begin{cases} \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0), & 0 \leq t \leq t_0, \\ \log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) < t\omega, & t > t_0. \end{cases}$$

Com isso,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \max\{\log(M_0), t\omega\} \leq \log(M_0) + t\omega,\ \forall t \in [0, +\infty).$$

Donde,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{\log(M_0)+t\omega} \leq M_0 e^{t\omega},\ \forall t \in [0, +\infty).$$

2º caso: $\omega < 0$.

Neste caso, se $t > t_0$, como $-t_0\omega \geq 0$ e $\log(M_0) \geq 0$, então

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq t\omega < \underbrace{\log(M_0) - t_0\omega}_{\geq 0} + t\omega,\ \forall t > t_0.$$

Por outro lado, se $t \leq t_0$, então $t\omega - t_0\omega \geq 0$, daí,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) < \log(M_0) \underbrace{-t_0\omega + t\omega}_{\geq 0},\ \forall 0 \leq t \leq t_0.$$

Em resumo,

$$\log\left(\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\right) \leq \log(M_0) - t_0\omega + t\omega,\ \forall t \geq 0.$$

Consequentemente,

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \underbrace{M_0 e^{-t_0\omega}}_{M} e^{t\omega} = M e^{t\omega}, \forall t \geq 0.$$

□

def-ger **Definição 2.8.** Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\},$$

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h},\ x \in D(A)$$

Dado S um semigrupo de classe C^0 em X, vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h},\ \ \forall x \in X.$$

subspace **Proposição 2.9.** *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração. Exercício. □

Observação 2.10. De acordo com a definição acima, todo semigrupo tem um gerador infinitesimal associado. A principal questão é a recíproca, isto é, quando um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de algum semigrupo? O Teorema de Hille-Yosida nos dará as condições para responder a essa pergunta.

th-der **Teorema 2.11.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então*

$$S(t)x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.4}$$ eq-der

Demonstração.

Afirmação 1: Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Dado $x \in D(A)$, seja $y = S(t)x$. Primeiramente, vamos mostrar que $\lim\limits_{h \to 0^+} A_h y = S(t)Ax$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} A_h y = \frac{S(h)y - y}{h} &= \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} = \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} \\ &= \frac{S(t)S(h)x - S(t)x}{h} = S(t)\frac{S(h)x - x}{h} = S(t)A_h x. \end{aligned}$$

Como $x \in D(A)$, temos que $\lim\limits_{h \to 0} A_h x = Ax$. Além disso, $S(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)$ é contínua. Portanto,

$$\lim_{h \to 0^+} A_h y = \lim_{h \to 0^+} S(t)A_h x = S(t)\left(\lim_{h \to 0^+} A_h x\right) = S(t)Ax.$$

Neste caso, provamos que $S(t)x = y \in D(A)$ e que $Ay = S(t)Ax$, ou seja, $A(S(t)x) = S(t)Ax$.

Afirmação 2: $\frac{d}{dt}S(t)x = A(S(t)x) = S(t)Ax, \ \forall x \in D(A)$.

Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} A(S(t)x) &= \lim_{h \to 0^+} A_h(S(t)x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)S(t)x - S(t)x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t+h)x - S(t)x}{h} = \frac{d^+}{dt}S(t)x, \quad \forall x \in D(A). \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$\frac{d}{dt}^+ S(t)x = A(S(t)x) = S(t)(Ax). \tag{2.5}$$ d+

Agora, vamos calcular a derivada pela esquerda.

$$\frac{d}{dt}^{-} S(t)x = \lim_{\delta \to 0^-} \frac{S(\overbrace{t+\delta}^{>0})x - S(t)x}{\delta}, \quad \text{para } -t < \delta < 0.$$

Fazendo $\delta = -h$, temos que $0 < h < t$ e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}^{-} S(t)x &= \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t)x}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{S(t-h)x - S(t-h)S(h)x}{-h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} S(t-h)\left(\frac{x - S(h)x}{-h}\right) = \lim_{h \to 0^+} S(t-h)A_h x \\ &= \lim_{h \to 0^+} \Big(S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$ eq2.3

Do Corolário (2.4), temos que $f(h) = S(t-h)Ax$ é contínua em $[0, t)$, portanto

$$\lim_{h \to 0^+} S(t-h)Ax = \lim_{h \to 0^+} f(h) = f(0) = S(t)Ax. \tag{2.7}$$ eq2.4

Por outro lado, do Teorema 2.5, temos que

$$\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega(t-h)} \leq Me^{\omega t}, \; \forall h \in [0, t),$$

donde,

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0^+} \|S(t-h)(A_h x - Ax)\| &\leq \lim_{h \to 0^+} \|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} \|A_h x - Ax\| \\ &\leq \lim_{h \to 0^+} Me^{\omega t}\|A_h x - Ax\| = 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$ eq2.5

Com isso, (2.6), (2.7) e (2.8) implicam que

$$\frac{d}{dt}^{-} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \; \forall x \in D(A). \tag{2.9}$$ d-

Portanto, de (2.5) e (2.9), temos que

$$\frac{d}{dt} S(t)x = S(t)Ax = A(S(t)x), \; \forall x \in D(A).$$

□

Proposição 2.12. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x : (a, b) \to D(A) \subset X$ é uma curva diferenciável tal que $x' \in D(A)$, então a curva $y(s) = S(s)x(s)$*

também é diferenciável e

$$y'(s) = S(s)x'(s) + S(s)Ax(s), \ \forall s \in (a,b) \tag{2.10}$$ reg.cad

Demonstração. Primeiramente, vamos calcular a derivada de y pela direita.

$$\begin{aligned}
y'_{+}(s) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(s+h)-y(s)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h)-S(s)x(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s) + S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{S(s+h)x(s+h) - S(s+h)x(s)}{h} + \frac{S(s+h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h)-x(s)}{h} + S(s)\frac{S(h)x(s) - S(s)x(s)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\frac{x(s+h)-x(s)}{h} + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - S(s+h)x'(s) + S(s+h)x'(s) \right) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s) \right) + S(s+h)x'(s) + S(s)A_h(x(s)) \right) \\
&\overset{(*)}{=} S(s)x'(s) + S(s)Ax(s).
\end{aligned}$$

$(*)$ Vamos provar a seguir a convergência de cada um dos limites.

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\lim_{h\to 0^+} \left\| S(s+h)\left(\frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s) \right) \right\| \leq \lim_{h\to 0^+} Me^{\omega(s+h)} \underbrace{\left\| \frac{x(s+h)-x(s)}{h} - x'(s) \right\|}_{\to\, 0} = 0$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s+h)x'(s) = S(s)x'(s).$$

Da continuidade de $S(s)$ e do fato que $\lim_{h\to 0^+} A_h x = Ax$, para todo $x \in D(A)$, temos que

$$\lim_{h\to 0^+} S(s)A_h(x(s)) = S(s)Ax(s).$$

Agora vamos provar a derivada pela esquerda.

$$y'_{-}(s) = \lim_{\delta\to 0^-} \frac{y(s+\delta)-y(s)}{\delta}, \text{ para } -s < \delta < 0.$$

Analogamente, fazendo $h = -\delta > 0$, temos

$$\begin{aligned}
y'_-(s) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{y(s-h)-y(s)}{-h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h)-S(s)x(s)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{S(s-h)x(s-h)-S(s-h)x(s)+S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h} + \frac{S(s-h)x(s)-S(s)x(s)}{-h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)\frac{x(s-h)-x(s)}{-h} \right) + \lim_{h\to 0^+} \left(\frac{S(s-h)-S(s)}{-h} x(s) \right) \\
&= \lim_{\delta\to 0^-} \left(S(s+\delta)\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta} \right) + \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)\frac{\mathrm{I}-S(h)}{-h} x(s) \right)
\end{aligned}$$

(Como antes, vamos calcular os limites usando a limitação de S e a continuidade de $S(\cdot)x$)

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\delta\to 0^-} \left(\underbrace{S(s+\delta)}_{\text{limitado}} \underbrace{\left(\frac{x(s+\delta)-x(s)}{\delta} - x'(s) \right)}_{\to 0} + \underbrace{S(s+\delta)x'(s)}_{S(\cdot)x \text{ é contínua}} \right) + \\
&\qquad\qquad\qquad \lim_{h\to 0^+} \left(S(s-h)A_h(x(s)) \right) \\
&= S(s)x'(s) + \lim_{h\to 0^+} \left(\underbrace{S(s-h)}_{\text{limitado}} \left(\underbrace{A_h(x(s) - Ax(s)}_{\to 0} \right) + \underbrace{S(s-h)Ax(s))}_{S(\cdot)x \text{ contínua}} \right) \\
&= S(s)x'(s) + S(s)Ax(s)
\end{aligned}$$

□

PVI **Teorema 2.13** (Existência e Unicidade do PVI)**.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI*

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, \ \ t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X).$$

Demonstração. De fato, do Teorema 2.11, como $x_0 \in D(A)$, temos que

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(S(t)x_0) = A(S(t))x_0 = Ax(t), \ \ \forall t \in [0, +\infty).$$

E também a condição inicial

$$x(0) = S(0)x_0 = x_0.$$

Além disso, o Teorema 2.11 garante a seguinte regularidade:

$$x \in C^0([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X).$$

Resta provar a unicidade. Para isso, seja $v = v(t)$ uma outra solução paro o mesmo PVI. Defina, para cada $t \geq 0$, $w(s) = S(t-s)v(s)$, $s \in [0,t]$.

Afirmação 1: $w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s)$, para todo $s \in [0,t]$.

Com efeito, defina $z(\tau) = v(t-\tau)$ e $u(\tau) = w(t-\tau)$, então

$$u(\tau) = w(t-\tau) = S(t-(t-\tau))v(t-\tau) = S(\tau)v(t-\tau) = S(\tau)z(\tau).$$

Da identidade (2.10) e da regra da cadeia para funções vetoriais,

$$u'(\tau) = S(\tau)z'(\tau) + S(\tau)Az(\tau) = -S(\tau)v'(t-\tau) + S(\tau)Av(t-\tau).$$

Como $u'(\tau) = -w'(t-\tau)$, temos que

$$w'(t-\tau) = S(\tau)v'(t-\tau) - S(\tau)Av(t-\tau).$$

Portanto, fazendo $\tau = t-s$, temos que

$$\begin{aligned} w'(s) = w'(t-(t-s)) &= S(t-s)v'(t-(t-s)) - S(t-s)Av(t-(t-s)) \\ &= S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s), \end{aligned}$$

como queríamos.

Como v é solução do PVI, então $v'(s) = Av(s)$, donde

$$w'(s) = S(t-s)v'(s) - S(t-s)Av(s) = S(t-s)Av(s) - S(t-s)Av(s) = 0.$$

Portanto, w é constante. Então

$$w(t) = w(0) \Rightarrow S(0)v(t) = S(t)v(0) \Rightarrow v(t) = S(t)u_0 = u(t).$$

□

Observação 2.14. Se $x_0 \notin D(A)$ em X, então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma **solução branda** (**mild solution**, em inglês.) do PVI. Além disso, do Corolário 2.4, temos que $x \in C^0([0,+\infty); X)$.

Exercício 2.15. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Se

$x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x\,d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax\,d\tau \tag{2.11}$$ TFC1

prop2.11 **Proposição 2.16.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então para todo $x \in X$,*

$$\int_0^t S(s)x\,ds \in D(A) \quad e \quad A\left(\int_0^t S(s)x\,ds\right) = S(t)x - x.$$

Demonstração. Dado $t \in (0, +\infty)$, seja

$$v = \int_0^t S(s)x\,ds.$$

Basta mostar que $\lim_{h \to 0^+} A_h v = S(t)x - x$, pois da definição de gerador infinitesimal, teremos que

$$v \in D(A) \text{ e } Av = S(t)x - x.$$

Note que, como $A_h \in \mathcal{L}(X)$, da Proposição 1.33, temos que

$$\begin{aligned}
A_h v &= A_h\left(\int_0^t S(s)x\,ds\right) = \int_0^t A_h(S(s)x)\,ds\\
&= \int_0^t \frac{S(h)S(s)x - S(s)x}{h}\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x - S(s)x\,ds\\
&= \frac{1}{h}\int_0^t S(h+s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)x\,ds
\end{aligned}$$

(Mudandaça de variáveis $\tau = h + s$ na primeira integral e fazendo $s = \tau$ na segunda)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x\,d\tau\\
&= \left(\frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau\right) - \left(\frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau + \frac{1}{h}\int_h^t S(\tau)x\,d\tau\right)\\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau.
\end{aligned}$$

Como $S(\cdot)x$ é contínua (Corolário 2.4), pela identidade (1.5),

$$\lim_{h \to 0^+} A_h v = \lim_{h \to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x\,d\tau\right) S(t)x - S(0)x = S(t)x - x.$$

Como queríamos. $\square$

Afd **Proposição 2.17.** *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Então A é fechado e seu domínio é denso em X.*

Demonstração.

1. $D(A)$ é denso em X.

Dado $x \in X$, basta mostrar que

$$v_h = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt \in D(A) \text{ e } v_h \to x, \text{ quando } h \to 0^+.$$

De fato, que $v_h \in D(A)$ decorre diretamente da Proposição 2.16. Como $S(\cdot)x$ é contínua, pela identidade (1.5),

$$\lim_{h\to 0^+} v_h = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)x\,dt = x.$$

1. A é fechado.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ e $Ax_n \to y$ em X. Devemos mostrar que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Como A_h é contínuo, da identidade (2.11), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty} A_h x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h}\left(S(h)x_n - x_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt \tag{2.12}$$ aux.inq1

Da desigualdade (2.3), temos que

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \le \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\|Ax_n - y\| \le Me^{\omega t}\|Ax_n - y\| \le Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|.$$

Donde,

$$\left|\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n - S(t)y\,dt\right| \le \frac{1}{h}\int_0^h \|S(t)Ax_n - S(t)y\|\,dt \le \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{Me^{\omega h}\|Ax_n - y\|}_{\text{não depende de } t}\,dt$$
$$\le Me^{\omega h}\|Ax_n - y\| \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Da da identidade (2.12), temos que

$$A_h x = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)Ax_n\,dt = \frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt.$$

Por fim, como $x \in D(A)$ e $S(\cdot)y$ é contínua (Corolário 2.4), da identidade (1.5), temos que

$$Ax = \lim_{h\to 0^+} A_h x = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h S(t)y\,dt = S(0)y = y.$$

□

Observação 2.18. Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 2.19 (Unicidade)**.** *Sejam S_1, S_2 dois semigrupos de classe C^0 em X com o mesmo gerador infinitesimal A. Então $S_1 = S_2$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $S_1(t)x = S_2(t)x$, para todo $x \in D(A)$. De fato, dado $x \in D(A)$, como S_1 e S_2 tem o mesmo gerador infinitesimal, pelo Teorema 2.13, temos que $x_1(t) = S_1(t)x$ e $x_2(t) = S_2(t)x$ são duas soluções do mesmo PVI. Da unicidade de soluções, temos que $S_1(t)x = S_2(t)x$.

Agora vamos usar a densidade de $D(A)$ em X para concluir a demonstração. Com efeito, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X quando $n \to +\infty$. Como $x_n \in D(A)$, temos que $S_1(t)x_n = S_2(t)x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E como $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$, então

$$S_1(t)x = \lim_{n\to+\infty} S_1(t)x_n = \lim_{n\to+\infty} S_2(t)x_n = S_2x.$$

□

Definição 2.20. Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Defina $A^0 = \mathrm{Id}$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1});\ A^{n-1}x \in D(A)\},$$

$$A^n x = A(A^{n-1}x),\ \forall x \in D(A^n).$$

Proposição 2.21. *Seja S um semigrupo de classe C^0 em X e A seu gerador infinitesimal. Temos:*

(i) $D(A^n)$ *é um subespaço de X e A^n é um operador linear de X;*

(ii) *Se $x \in D(A^n)$, então $S(t)x \in D(A^n), \forall t \geq 0$ e*

$$\frac{d^n}{dt^n} S(t)x = A^n S(t)x = S(t)A^n x, \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.13}$$ id-dern

(iii) *É válida a fórmula de Taylor: se $x \in D(A^n)$, então*

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} A^n S(\tau)x d\tau$$

(iv) $(S(t) - I)^n x = \int_0^t \cdots \int_0^t S(\tau_1 + \cdots + \tau_n) A^n x \, d\tau_1 \cdots d\tau_n, \forall x \in D(A^n);$

(*v*) $\bigcap_n D(A^n)$ *é denso em* X.

Demonstração.

(*i*) Sabemos que $D(A)$ é um subespaço de X. Suponha que $D(A^{n-1})$ seja subspaço. Dados $x, y \in D(A^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como $x, y \in D(A^{n-1})$, então $x + \lambda y \in D(A^{n-1})$ e, como A^{n-1} é linear,

$$A^{n-1}(x + \lambda y) = \underbrace{A^{n-1}x}_{\in D(A)} + \lambda \underbrace{A^{n-1}y}_{\in D(A)} \in D(A).$$

Portanto, $D(A^n)$ também é subespaço. Logo, por indução, segue o resultado. A^n é linear pois é a composição de operadores lineares.

(*ii*) Teorema 2.11 garante a validade para $n = 1$.

> **Hipótese de Indução:** Suponha que, para algum $k > 1$,
> Se $x \in D\left(A^k\right)$, então $S(t)x \in D\left(A^k\right), \forall t \geq 0$ e
>
> $$\frac{d^k}{dt^k}S(t)x = A^kS(t)x = S(t)A^kx$$

Vamos mostrar que é válido para $n = k + 1$. De fato, se $\underline{x \in D(A^{k+1})}$, por definição, $x \in D(A^k)$ e $y = A^kx \in D(A)$. Aplicando-se o Teorema 2.11 a y, temos que $S(t)A^kx = S(t)y \in D(A)$. Da Hipótese de Indução, temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e $A^kS(t)x = S(t)A^kx \in D(A)$, portanto $\underline{S(t)x \in D(A^{k+1})}$. Além disso, da identidade (2.4), temos que

$$\frac{d}{dt}S(t)y = AS(t)y = S(t)Ay.$$

Donde,

$$\frac{d}{dt}S(t)A^kx = AS(t)A^k = S(t)A^{k+1}x.$$

Da Hipótese de Indução, já temos que $S(t)x \in D(A^k)$ e, da identidade anterior, que $A^kS(t)x = S(t)A^kx \in D(A)$, portanto $S(t)x \in D(A^{k+1})$. temos que $S(t)A^k = \frac{d^k}{dt^k}S(t)x$ e $S(t)A^kx = A^kS(t)x$. Substituindo-se na identidade anterior, Obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k}{dt^k}S(t)x\right) = AA^kS(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

Portanto,

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}S(t)x = A^{k+1}S(t)x = S(t)A^{k+1}x.$$

O que prova a identidade (2.13) para $n = k + 1$. Logo, o resultado segue pelo princípio da indução finita.

(iii) Este resultado também segue por indução. Para $n = 1$ é simplesmente a identidade (2.11).

> **Hipótese de Indução:** Suponha que, para algum $m > 1$, se $x \in D(A^m)$, então vale a fórmula de Taylor:
>
> $$S(t)x = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{(m-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(\tau)x d\tau$$

Vamos mostrar que também vale para $n = m + 1$. Par isso, vamos fazer uma integação por partes e usar a fórmula do item (ii).

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m!}\int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x\, d\tau \\
&\overset{(ii)}{=} \frac{1}{m!}\int_a^t (t-\tau)^m \frac{d^{m+1}}{d\tau^{m+1}} S(t)x\, d\tau \\
&= \frac{1}{m!}(t-\tau)^m \frac{d^m}{dt^m} S(t)x\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} - \frac{1}{m!}\int_a^t -m(t-\tau)^{m-1}\frac{d^m}{dt^m} S(t)x\, d\tau \\
&\overset{(ii)}{=} \frac{1}{m!}(t-\tau)^m A^m S(t)x\Big|_{\tau=a}^{\tau=t} + \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x \\
&= -\frac{1}{m!}(t-a)^m A^m S(a)x + \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{m-1} A^m S(t)x
\end{aligned}$$

(Hipótese de Indução)

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{m!}(t-a)^m A^m S(a)x + S(t)x - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x \\
&= S(t)x - \sum_{k=0}^{m}\frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x.
\end{aligned}$$

Logo,

$$S(t)x = \sum_{k=0}^{m}\frac{(t-a)^k}{k!} A^k S(a)x + \frac{1}{m!}\int_a^t (t-\tau)^m A^{m+1} S(t)x\, d\tau,$$

como queríamos.

(iv) COMPLETAR A PROVA

□

2.2 Teorema de Hille-Yosida

Definição 2.22. Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado. Chamamos de **resolvente de A**, o seguinte conjunto

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda \mathrm{I} - A \text{ é bijetor } \}$$

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é dito **espectro** de A. Para cada $\lambda \in \rho(A)$, definimos o **operador resolvente** por

$$R(\lambda, A) := (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A).$$

O qual, pelo Teorema do Gráfico fechado, é um operador linear limitado.

Note que, se $\lambda \in \rho(A)$, então para todo $x \in X$

$$(\lambda \mathrm{I} - A)R(\lambda, A)x = x \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = AR(\lambda, A)x.$$

Analogamente, se $x \in D(A)$, então

$$R(\lambda, A)(\lambda \mathrm{I} - A)x = x \Rightarrow \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax.$$

Destas duas equações, podemos concluir que

$$AR(\lambda, A)x = \lambda R(\lambda, A)x - x = R(\lambda, A)Ax,\ \forall\, x \in D(A). \tag{2.14}$$ RAAR

Exercício 2.23. Prove que se $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então $R(\lambda, A)$ e $R(\mu, A)$ comutam.

HY-contr **Teorema 2.24** (Hille-Yosida)**.** *Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um **semigrupos de contrações** se, e somente se,*

(i) A é fechado e densamente definido, i.e., $\overline{D(A)} = X$.

(ii) $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A prova deste teorema será divida em lemas.

Lema 2.25 (Condição Necessária)**.** *Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações. Então A é fechado e densamente definido. Além disso, $(0, +\infty) \subset \rho(A)$,*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} S(\xi)x\, d\xi,$$

e $\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

Demonstração. Da Proposição 2.17, temos que A é fechado e densamente definido.

Dados $x \in X$ e $\lambda > 0$ defina
$$L_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi) x \, d\xi.$$
Primeiramente, vejamos que $L_\lambda x$ está bem definida. Para isso, vamos usar o Teste de Weierstrass (Proposição A.1). Do Corolário 2.4, temos que a função

$$(t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty) \longmapsto e^{-\lambda t} S(t) x \in X,$$

é contínua em t para cada $\lambda \in (0, +\infty)$.

Como S é um semigrupo de contrações, temos que

$$\|e^{-\lambda t} S(t) x\| = e^{-\lambda t} \|S(t)x\| \leq e^{-\lambda t}\|x\| \leq e^{-t}\|x\| =: M(t), \; \forall \; (t, \lambda) \in [0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty M(t)\, dt &= \int_0^\infty e^{-t}\|x\|\, dt = \|x\| \int_0^\infty e^{-t}\, dt = \|x\| \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-t}\, dt \\ &= \|x\| \lim_{b\to+\infty} -e^{-t}\Big|_{t=0}^{t=b} = \|x\| \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = \|x\| < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teste de Weierstrass, L_λ está bem definida. Claro que L_λ é linear e além disso, procedendo como acima,

$$\begin{aligned} \|L_\lambda x\| &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda t} S(t) x\|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}\|x\|\, dt \\ &= \frac{\|x\|}{\lambda} \lim_{b\to+\infty} -e^{-\lambda t}\Big|_{t=0}^{t=b} = \frac{\|x\|}{\lambda}, \end{aligned}$$

isto é, L_λ define um operador linear limitado em X e $\|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Resta mostrar que $L_\lambda = R(\lambda, A)$, isto é, devemos mostrar que

1. $\forall\, x \in X,\; L_\lambda x \in D(A)$ e $(\lambda\,\mathrm{I} - A) L_\lambda x = x$, i.e., $A\,(L_\lambda x) = L_\lambda x - x$.

2. $\forall\, x \in D(A)$, $L_\lambda(\lambda\,\mathrm{I} - A)x = x$, i.e., $L_\lambda(Ax) = \lambda L_\lambda x - x$.

De fato, dado $x \in X$, seja $h > 0$, como $A_h \in \mathcal{L}$, temos que

$$\begin{aligned} A_h(L_\lambda x) &= A_h\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi) x\, d\xi\right) = \frac{1}{h}\int_0^\infty (S(h) - \mathrm{I}) e^{-\lambda\xi} S(\xi) x\, d\xi \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi + h) x\, d\xi - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi) x\, d\xi \end{aligned}$$

(Fazendo a mudança $s = \xi + h$ na primeira integral e trocando ξ por s na segunda)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}S(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}S(s)x\,ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds \\
&= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}L_\lambda x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds
\end{aligned}
$$

Aplicando-se o limite quando $h \to 0^+$, obtemos

$$
\begin{aligned}
A\left(L_\lambda x\right) &= \lim_{h\to 0^+} A_h(L_\lambda x) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}L_\lambda x - e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s}S(s)x\,ds\right) \\
&= \frac{d}{dh}e^{\lambda h}\Big|_{h=0} L_\lambda x - \lim_{h\to 0^+}\left(e^{\lambda h}\underbrace{\frac{1}{h}\int_0^h \overbrace{e^{-\lambda s}S(s)x}^{\text{contínua}}\,ds}_{\downarrow \atop x}\right) \\
&= \lambda L_\lambda x - x,
\end{aligned}
$$

o que prova o o item 1. Agora vamos provar o item 2. Dado $x \in D(A)$,

$$
\begin{aligned}
L_\lambda(A)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi)Ax\,d\xi = \int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\frac{d}{d\xi}S(\xi)x\,d\xi \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{d\xi}\left(e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\right) + \lambda e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\,d\xi \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\Big|_{\xi=0}^{\xi=b}\right) + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}S(\xi)x\,d\xi \\
&= \lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\lambda b}S(b)x\right) - x + \lambda L_\lambda x
\end{aligned}
$$

(como S é uma contração, $\|e^{-\lambda b}S(b)x\| \le e^{-\lambda b}\|x\| \to 0$, quando $b \to +\infty$)

$$
= -x + \lambda L_\lambda x,
$$

como queríamos. ☐

Lema 2.26. *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Então*

$$
\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R(\lambda, A)x = x,\ \forall\, x \in X.
$$

Demonstração. Se $x \in D(A)$, da identidade (2.14), temos que

$$\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| = \|R(\lambda, A)Ax\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \to 0 \text{ quando } \lambda \to +\infty.$$

Agora, dado $x \in X$, para cada $\varepsilon > 0$, como $D(A)$ é denso em X, tome $y \in D(A)$ tal que

$$\|y - x\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

E, da convergência anterior, como $y \in D(A)$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|\lambda R(\lambda, A)y - y\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A)x - x\| &\leq \|\lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)y\| + \|\lambda R(\lambda, A)y - y\| + \|y - x\| \\
&< \lambda\|R(\lambda, A)(x - y)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leq \|x - y\| + \frac{3\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Definição 2.27. Para cada $\lambda \in (0, +\infty) \cap \rho(A)$, definimos o operador $A_\lambda : X \longrightarrow X$, chamado **aproximação de Yosida** de A, por

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda \mathrm{I} \in \mathcal{L}(X).$$

Plem3.3 **Lema 2.28.** *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Se A_λ é a aproximação de Yosida do operador A, então*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall\, x \in D(A).$$

Demonstração. Se $x \in D(A)$, então, de (2.14) e do Lema anterior, temos que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to +\infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax$$

□

Plem3.4 **Lema 2.29.** *Seja A satisfazendo as condições (i) e (ii) do Teorema 2.24. Se A_λ é aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações e^{tA_λ}. Além disso, para cada $x \in X$, $\lambda, \mu > 0$ temos que*

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, então A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo e^{tA_λ}. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}\right\| = \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A) - t\lambda \mathrm{I}}\right\| \leq \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\| \left\|e^{-t\lambda \mathrm{I}}\right\| = e^{-t\lambda}\left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\| \\ \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2\|R(\lambda,A)\|} \leq e^{t\lambda}e^{-t\lambda} = 1\end{aligned}$$

portanto, um semigrupo de contrações.

Das definições de A_λ, A_μ, e^{tA_λ} e e^{tA_μ} comutam. Como $A_\lambda, A_\mu \in \mathcal{L}(X)$, defina

$$f(s) = e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x = e^{tA_\mu}e^{st(A_\lambda - A_\mu)}$$

e note que

1. $f(1) = e^{tA_\lambda}x$, $f(0) = e^{tA_\mu}x$

2. $f'(s) = t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x$

Consequentemente, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| &= \|f(1) - f(0)\| = \left\|\int_0^1 f'(s)\,ds\right\| \\ &= \left\|\int_0^1 t(A_\lambda - A_\mu)e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}x\right\| \\ &\leq t\,\underbrace{\left\|e^{tsA_\lambda}e^{t(1-s)A_\mu}\right\|}_{\leq 1}\|A_\lambda x - A_\mu x\| \\ &\leq t\,\|A_\lambda x - A_\mu x\|\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração do Teorema 2.24 (Condição Suficiente) .

<u>Passo 1</u>: Existe $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda}x$, $\forall x \in D(A)$.

Dado $x \in D(A)$, seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(0, +\infty)$ tal que $\lambda_n \to +\infty$, quando $n \to +\infty$.

Pelos Lemas 2.29 e 2.28 , temos que

$$\left\|e^{tA_{\lambda_n}}x - e^{tA_{\lambda_m}}x\right\| \leq t\|A_{\lambda_n}x - A_{\lambda_m}x\| \leq t\|A_{\lambda_n}x - Ax\| + t\|Ax - A_{\lambda_m}x\| \to 0, \text{ quando } m, n \to +\infty.$$

Neste caso, a sequência $(e^{tA_{\lambda_n}}x)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X, portanto convergente. Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tomada arbitrária, temos que o limite $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe. Portanto, para cada $t \in [0, +\infty)$, podemos definir $S(t) : D(A) \longrightarrow X$ por:

$$S(t)x := \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x. \tag{2.15}$$ P3.14

Passo 2: A convergência $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x$ é uniforme em intervalos limitados com respeito a t.

De fato, dado $T > 0$, para todo $t \in [0, T]$ e $\lambda, \mu \in (0, +\infty)$, pelo Lema 2.29, temos que

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x\right\| + \left\|e^{tA_\mu}x - S(t)x\right\| \\ &\leq T\|A_\lambda x - A_\mu x\| + \|e^{tA_\mu}x - S(t)x\|.\end{aligned}$$

De (2.15) e do Lema 2.28, fazendo $\mu \to +\infty$, obtemos

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| \leq T\|A_\lambda x - Ax\|,$$

o que garante a convergência uniforme. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $A_\lambda x \to Ax$, existe $\lambda_0 > 0$ (independente de t) tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|A_\lambda x - Ax\| < \frac{\varepsilon}{T}.$$

Consequentemente,

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| \leq T\|A_\lambda x - Ax\| < \varepsilon, \text{ qualquer que seja } t \in [0, T].$$

Passo 3: Vamos estender a $S(t)$ para todo $x \in X$

De fato, já temos a definição para $x \in D(A)$, quando $x \in X \setminus D(A)$, pela densidade, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $x_n \to x$ em X. Como e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações, temos que

$$\begin{aligned}\|S(t)x_m - S(t)x_n\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_m - S(t)x_m\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_m - e^{tA_\lambda}x_n\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| \\ &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_m - S(t)x_m\right\| + \|x_m - x_n\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\|\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$, temos

$$\|S(t)x_m - S(t)x_n\| \leq \|x_m - x_n\|,$$

isto é, $(S(t)x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em X e portanto convergente. Assim, definimos

$$S(t)x := \lim_{n\to+\infty} S(t)x_n. \tag{2.16}$$

lim2.1

Como a sequência de Cauchy é uniformemente convergente em t, então este limite é uniformemente convergente em t.

<u>Passo 4</u>: Vamos provar que

$$S(t)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{tA_\lambda}x \text{ para todo } x \in X. \tag{2.17}$$

P3.14.2

E que esta convergência é uniforme em intervalos limitados.

Com efeito, se $x \in D(A)$, segue de (2.15). Se $x \in X \setminus D(A)$, pela densidade, tome $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to +\infty$. Como e^{tA_λ} é um semigrupo de contrações, note que

$$\begin{aligned}\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| &\leq \left\|e^{tA_\lambda}x_n - e^{tA_\lambda}x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| + \|S(t)x_n - S(t)x\| \\ &\leq \|x_n - x\| + \left\|e^{tA_\lambda}x_n - S(t)x_n\right\| + \|S(t)x_n - S(t)x\|.\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, de (2.16), existe n_0 suficientemente grande tal que

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| < \frac{\varepsilon}{3} + \left\|e^{tA_\lambda}x_{n_0} - S(t)x_{n_0}\right\| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

De (2.15), temos que existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\left\|e^{tA_\lambda}x_{n_0} - S(t)x_{n_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

donde concluímos que

$$\left\|e^{tA_\lambda}x - S(t)x\right\| < \varepsilon.$$

Como cada convergência é uniformemente em intervalos limitados, temos que (2.17) também o é.

<u>Passo 5</u>: $(S(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de Classe C^0 de contrações.

Já definimos $S(t) : X \to X$, para todo $t \in [0, +\infty)$. De (2.17), temos que $S(t)$ é linear. Note ainda que

$$\|S(t)x\| \leq \lim_{\lambda\to+\infty} \|e^{tA_\lambda}x\| \leq \|x\|, \ \forall\, x \in X$$

Portanto $S : [0,+\infty) \to \mathcal{L}(X)$ e é uma contração. Do Passo 4, temos que

$$S(0)x = \lim_{\lambda\to+\infty} e^{0A_\lambda}x = \lim_{\lambda\to+\infty} x = x \Rightarrow S(0) = \mathrm{I}\,.$$

Além disso, escrevendo dado $x \in X$ e escrevendo $y = S(s)x$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\|S(t+s)x - S(t)S(s)x\| \\
&\quad\le \left\|S(t+s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\right\| + \left\|e^{(t+s)A_\lambda}x - e^{tA_\lambda}S(s)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}S(s)x - S(t)S(s)x\right\| \\
&\quad\le \left\|S(t+s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\right\| + \underbrace{\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\le 1}\left\|e^{sA_\lambda}x - S(s)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}y - S(t)y\right\|
\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \to +\infty$, temos que

$$\|S(t+s)x - S(t)S(s)x\| = 0,\ \forall\, x \in X.$$

Assim, S satisfaz a propriedade de semigrupo (item 2 da Definição 2.1) e portanto é um semigrupo. Resta mostrar que S é de classe C^0.

De fato, dado $x \in X$, tome algum $T > 0$ (Por exemplo $T = 1$). Como a convergência em (2.17) é uniforme em $[0,T]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ (independente de $t \in [0,T]$), suficientemente grande, tal que

$$\left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, t \in [0,T].$$

Por outro lado, como $e^{tA_{\lambda_0}}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, temos que

$$\lim_{t\to+\infty} \|e^{t\lambda_0} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

Daí, existe $0 < \delta < T$ tal que se $t \in (0,\delta)$, então

$$\|e^{t\lambda_0} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{\varepsilon}{2\|x\|}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|S(t)x - x\| &\le \left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| + \left\|e^{tA_{\lambda_0}}x - x\right\| \\
&\le \left\|S(t)x - e^{tA_{\lambda_0}}x\right\| + \|e^{tA_{\lambda_0}} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)}\|x\| \\
&\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\|x\|}\|x\| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Passo 6: A é o gerador infinitesimal de $S(t)$.

Como $S(t)$ é um semigrupo de Classe C^0, seja B seu gerador infinitesimal. Basta mostrar que provar que $A = B$.

Primeiro vamos provar que $D(A) \subset D(B)$ e $Ax = Bx$. Para isso, tome $x \in D(A)$ e, de acordo com a Definição 2.8, devemos mostrar que

1. $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}$ existe, portanto $x \in D(B)$;
2. $Bx := \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = Ax$.

Para isso, como e^{tA_λ} é um semigrupo de classe C^0, de (2.11),

$$\begin{aligned} S(h)x - x &= \lim_{\lambda \to +\infty} \left(e^{hA_\lambda}x - x\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda} A_\lambda x \, dt \\ &= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda} (A_\lambda x - Ax) \, dt + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda} Ax \, dt \\ &= L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Vamos calcular cada limite separadamente. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^h e^{tA_\lambda} (A_\lambda x - Ax) \, dt \right\| &\leq \int_0^h \underbrace{\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}}_{\leq 1} \|A_\lambda x - Ax\| \, dt \\ &\leq h \|A_\lambda x - Ax\| \to 0, \quad \text{quando } \lambda \to +\infty, \end{aligned}$$

portanto, $L_1 = 0$. Para calcular L_2, relembre que provamos a convergência uniforme (2.17). Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, existe $\lambda_0 > 0$ tal que se $\lambda > \lambda_0$, então

$$\|e^{tA_\lambda} Ax - S(t)Ax\| < \frac{\varepsilon}{h}, \ \forall \, t \in [0, h].$$

Com isso,

$$\left\| \int_0^h e^{tA_\lambda} Ax - S(t)Ax \, dt \right\| \leq \int_0^h \|e^{tA_\lambda} Ax - S(t)Ax\| \, dt < \varepsilon.$$

O que significa que $L_2 = \int_0^h S(t)Ax \, dt$. Como consequência,

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)Ax \, dt.$$

Neste caso, como $S(\cdot)Ax$ é contínua (Corolário 1.13), segue da Proposição 1.34 que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h S(t)Ax \, dt = Ax.$$

Logo, provamos simultaneamente que $x \in D(B)$ e que $Bx = Ax$.

Por outro lado, se $x \in D(B)$, seja $v = (\mathrm{I} - B)x$. Por hipótese, como $1 \in \rho(A)$, então $\mathrm{I} - A : D(A) \longrightarrow X$ é bijetor. Neste caso, existe $y \in D(A)$ tal que

$$(\mathrm{I} - A)y = (\mathrm{I} - B)x.$$

Já que $y \in D(A) \subset D(B)$, como acabamos de provar $Ay = By$. Daí,

$$(\mathrm{I} - B)y = (\mathrm{I} - B)x \Rightarrow (\mathrm{I} - B)(y - x) = 0.$$

Como B é o gerador infinitesimal de $S(t)$, que é um semigrupo de contrações, então pela condição necessária do Teorema de Hille-Yosida, que já foi provada, temos que $1 \in \rho(B)$, o que implica que $\mathrm{I} - B$ é invertível e portanto

$$(\mathrm{I} - B)(y - x) = 0 \Rightarrow R(1, B)(\mathrm{I} - B)(y - x) = 0 \Rightarrow x = y \in D(A).$$

Já que $x \in D(B)$ foi tomado arbritário, temos que $D(B) \subset D(A)$. Donde, concluímos que $D(A) = D(B)$ e que consequentemente $Bx = Ax$. O que encerra a prova do Teorema de Hille-Yosida para semigrupos de contrações.

$\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice

A.1 Resultados Clássicos

erstrass **Proposição A.1** (Teste de Weierstrass). *Seja* $f : [a, +\infty) \times \Lambda \longrightarrow X$, Λ $\overbrace{\textit{um subconjunto aberto de } \mathbb{C}}^{\textit{Não seria } \mathbb{R}?}$ *contínua em* $t \in [a, +\infty)$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$ *Se existe* $M : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua e positiva em* $t \in [a, +\infty)$ *tal que*

(*i*) $\|f(t, \lambda)\| \leq M(t), \quad \forall (t, \lambda) \in [a, +\infty) \times \Lambda$,

(*ii*) $\displaystyle\int_a^\infty M(t)\, dt < +\infty$.

Então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda)\, dt$$

converge absolutamente para cada λ *pertecente ao conjunto* Λ *e a convergência é uniforme nesse conjunto.*

Demonstração. CITAR $\square$

A.2 Resultados sobre Integração que todos devem saber

Teorema A.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue). *Seja* (f_n) *uma sequência de funções em* $L^1(X)$ *que satisfaz:*

a $f_n(x) \to f(x)$ *q.s em* X,

b *Existe* $g \in L^1(X)$ *tal que* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.s. em* X.

Então $f \in L^1(X)$ *e* $\|f_n - f_{L^1(X)}\|_{L^1(X)} \to 0$.

Referências Bibliográficas

migrupos [1] GOMES, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução.* UFRJ/IM, Rio de Janeiro, RJ, 2012.

15topics [2] KESAVAN, S. *Topics in Functional Analysis and Applications.* New Age International Publishers, New Delhi, 2015.

Índice Remissivo

Aproximação de Yosida, 31

dual algébrico, 6
dual topológico, 6

Espaço
    de Banach, 8
    normado, 1
Espectro, 28

Gerador Infinitesimal, 17

isomorfismo topológico, 8

norma, 1
    equivalentes, 8

Operador Linear
    desamente definido, 9
    domínio, 9
    ilimitado, 9
    limtado, 7

Resolvente
    conjunto, 28
    operador, 28

semigrupo das contrações, 15
Sequência de Cauchy, 8
Solução
    branda, 22
    fraca, 22