

Minicurso EDOs em Espaços de Banach

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}f(s)ds$$

Prof. Luiz Viana e Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

12 à 21 de fevereiro de 2025



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Introdução
- 5 Semigrupos de Classe C^0



- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Introdução
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Apresentação do Minicurso

- **Ementa:** Definição de Espaços de Banach. Exponencial de Operadores Lineares Limitados. Semigrupos de classe C^0 . Gerador Infinitesimal. Existência e Unicidade para o PVI. Resolvente de um operador. Semigrupos das Contrações. O Teorema de Hille-Yosida. Aplicações e perspectivas de pesquisa.
- **Material:** reginaldodr.github.io/academic/semigrupos/minicurso-2025-verao



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia**
- 3 Espaços de Banach
- 4 Introdução
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Bibliografia



Alvécio Moreira Gomes

Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução

Editora UFRJ, 2ª ed., Rio de Janeiro, 2005.

[Edição digital disponibilizada aqui](#)



Amnon Pazy

Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.

Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.



S. Kesavan

Topics in Functional Analysis and Applications

New Age International Ltd, 2ª ed., New Delhi, 2015.





Lawrence C. Evans

Partial differential equations

volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach**
- 4 Introdução
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Definição 1

Seja X um \mathbb{K} -espaço vetorial. Uma aplicação

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma **norma** se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

- a $\|x\| \geq 0$;
- b Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;
- c $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- d $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \| \cdot \|)$ é dito um **espaço normado**.



Definição 2

Seja X um espaço normado, e considere uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X , isto é, $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ é uma função que associa cada $n \in \mathbb{N}$ a um único $x_n \in X$. Dizemos que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

a converge para $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0 \implies \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

b é uma sequência de Cauchy se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n > n_1 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$





Exercício

- a Em um espaço normado X , mostre que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy;
- b Exiba um espaço normado Y no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge em Y .



Definição 3

Um espaço normado X é dito um **espaço de Banach** se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X .



Exemplos:

- a Para cada inteiro $n \geq 1$, \mathbb{K}^n é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Na verdade, \mathbb{K}^n é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (**Exercício!**).



- b) Dados dois inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, o espaço das matrizes $m \times n$, denotado por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|A\| = \left(\sum_{j,k=1}^n |a_{jk}|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $A = [a_{jk}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Na verdade, $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (**Exercício!**).



- Dados dois inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, o espaço das **transformações lineares** de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^n , denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|},$$

definida para cada $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Na verdade, $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (**Exercício!**).



- d) Dados dois espaços normados X e Y , o espaço das **transformações lineares e contínuas** de X em Y , denotado por $\mathcal{L}(X; Y)$, possui a seguinte propriedade:

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty, \text{ para todo } T \in \mathcal{L}(X; Y)$$

Além disso, a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(X; Y) \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X; Y)$. É conhecido que

$\mathcal{L}(X; Y)$ é um espaço de Banach $\iff Y$ é um espaço de Banach.



- e Denotemos por \mathbf{c}_{00} o \mathbb{K} -espaço vetorial de todas as sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em \mathbb{K} que possuem a seguinte propriedade: existe um inteiro positivo n_0 tal que $x_n = 0$ para todo $n \geq n_0$. Considerando a norma

$$\|x\| = \max_{j \in \mathbb{N}} |x_j|,$$

definida para cada $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbf{c}_{00}$, temos um exemplo de um **espaço normado que não é um espaço de Banach** (Veja o Exemplo A.14 das Notas do Minicurso).



Operadores Lineares ilimitados

Sejam X e Y dois espaços de Banach. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$ um operador linear, onde $D(A)$ é um subespaço de X , chamado de **domínio** de A . Dizemos que A é **limitado** (ou **contínuo**) se $D(A) = X$ e se existe $C > 0$ tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in D(A). \quad (1)$$

Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço de Banach dos **operadores lineares limitados** com norma dada por

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X},$$

por $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ e $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. A é dito ser **ilimitado** quando não satisfaz (1). Dizemos que A é **densamente definido** se $\overline{D(A)} = X$.





Exemplo



Exercício

Se $A, B \in \mathcal{L}(X)$ mostre que $A \cdot B \in \mathcal{L}(X)$ e

$$\|A \cdot B\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X)} \|B\|_{\mathcal{L}(X)}$$



Seja



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Introdução**
- 5 Semigrupos de Classe C^0



A função exponencial

A função **logaritmo natural** é a bijeção contínua (com inversa contínua), definida por

$$\log : x \in (0, +\infty) \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt \in \mathbb{R}.$$

A inversa de $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, e usualmente escrevemos

$$e^x := \exp(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Cabe recordar que:

- $e^0 = 1$;
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.



Solução do PVI

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos constatar que a única função $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ solução do **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = ax, & t \in [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.



Propriedades das Soluções

Denotando $x(t) = S(t)x_0$, fazemos as seguintes considerações:

a) Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t) : \underbrace{x_0 \in \mathbb{R}}_{\text{dado inicial}} \longmapsto \underbrace{S(t)x_0}_{\text{Solução do PVI}} \in \mathbb{R}$$

é uma **função linear**.

b) $S(0)x_0 = x(0) = x_0$, para cada x_0 fixado em \mathbb{R} , ou seja, $S(0)$ é exatamente a função identidade $I : x \in \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}$;

c) Fixados $t, s \in [0, +\infty)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$S(t+s)x_0 = S(t)S(s)x_0.$$



Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ considere o sistema de EDOs

$$X'(t) = AX, \quad t \in [0, +\infty),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$



Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ considere o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

A solução procurada é um caminho

$$X : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}).$$

Em analogia ao caso unidimensional

$$X(t) = e^{tA}X_0$$



Exponencial de Matrizes

Recordemos que a norma em $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dada por

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

para cada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Definition 4.1

Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. A exponencial de A é dada por

$$e^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots . \quad (2)$$



- a A série de matrizes, dada em (2), é **absolutamente convergente**, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A^j\|}{j!}$$

é sempre uma série de números reais convergente.

- b $S(t)X_0 := e^{tA}X_0$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX, & t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$



- c A aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}))$ possui propriedades análogas àquelas dedicada ao caso unidimensional. Mais precisamente,
- Para cada $t \in [0, +\infty)$, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}))$;
 - $S(0) : \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ é o operador identidade;
 - Para quaisquer $t, s \in [0, +\infty)$, vale $S(t + s) = S(t)S(s)$.
- d Quantitativamente, resolver sistemas de equações diferenciais lineares requer identificar a matriz na forma canônica de Jordan similar a A . Para uma análise do comportamento das soluções, a abordagem espectral de A é uma estratégia eficaz. (veja [?]).



EDOs para operadores lineares

Parece natural pensar sobre a resolução e a análise do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach e $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(X)$.



Definition 4.2

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. A **exponencial** da T é dada por

$$e^T := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!}, \quad (3)$$

onde $T^0 := I$ e $T^{n+1} := T \circ T^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

- Não é difícil constatar que a série que define e^T **converge absolutamente**.
- Como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach, $e^T \in \mathcal{L}(X)$ encontra-se bem definida.
- Explorando a noção de **semigrupo uniformemente contínuo**. Um pouco mais adiante, concluiremos que $\mathbf{x}(t) = e^{tT} \mathbf{x}_0$ é a única solução de

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X, \end{cases}$$



Neste minicurso, o principal objetivo é obter uma condição necessária e suficiente para que o problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}), & t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in X, \end{cases}$$

possua solução, onde

- X é um espaço de Banach.
- $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \longrightarrow X$ é uma aplicação linear definida em um subespaço vetorial $D(\mathbf{A})$ de X .
- Demonstrar o [Teorema de Hille-Yosida](#), que representa um marco muito importante da teoria geral dos semigrupos.



Sumário

- 1 Apresentação
- 2 Bibliografia
- 3 Espaços de Banach
- 4 Introdução
- 5 Semigrupos de Classe C^0



Definição 4

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um **semigrupo de operadores limitados em X** quando:

① $S(0) = \text{Id};$

② $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in [0, +\infty);$

Dizemos que S é **de classe C^0 ou fortemente contínuo** se

③ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - \text{Id})x\| = 0, \forall x \in X.$

Dizemos que S é **uniformemente contínuo** se

④ $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - \text{Id}\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$





Exemplo

- 1 A exponencial e^{tA} , quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.
- 2 Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do sup. Então $S(t)f(s) = f(t+s)$ define um semigrupo de classe C^0 .



Proposição 5

Se S é um semigrupo de classe C^0 em X , então existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M, \quad \forall t \in [0, T].$$

Corolário 6

Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$,

$$t \in [0, +\infty) \longmapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$



Teorema 7

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X . Então,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(\|S(t)\|)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\log(\|S(t)\|)}{t} = \omega_0$$

e para cada $\omega > \omega_0$, existe $M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, t \geq 0.$$

Quando $\omega_0 < 0$, então para $\omega = 0$, temos que

$$\|S(t)\| \leq M, \forall t \geq 0.$$

Neste caso, dizemos que S é um **semigrupo uniformemente limitado**. Se, além disso, $M = 1$, S é dito **semigrupo das contrações**.



Lema 8

Seja $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **subaditiva**, isto é, $p(t + s) \leq p(t) + p(s)$. Se p é limitada superiormente em todo intervalo limitado, então $p(t)/t$ tem um limite quando $t \rightarrow +\infty$ e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{p(t)}{t}.$$

Prova: Ver [Alvercio, 2011, Lema 1.2.5]



Definição 9

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X . O **gerador infinitesimal** de S é o operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in D(A).$$

Proposição 10

$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.



Notações

- ① Dado S é um semigrupo de classe C^0 em X , vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in X.$$

- ② Escrevemos $S(t) = e^{tA}$ para dizer que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 em X .
- ③ Escrevemos $A \in G(\textcolor{blue}{M}, \textcolor{red}{\omega})$ para exprimir que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 , que satisfaz a condição:

$$\|e^{tA}\| \leq \textcolor{blue}{M}e^{\textcolor{red}{\omega}t}, \quad \forall t \geq 0.$$



Teorema 11

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X . Dado $x \in D(A)$, então

$$e^{(\cdot)A}x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt} (e^{tA}x) = Ae^{tA}x = e^{tA}Ax.$$



Existência e Unicidade de um PVI

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X . Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = e^{tA}x_0$ define uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Se $x_0 \notin D(A)$ em X , então $x(t) = e^{tA}x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma solução generalizada (fraca) do PVI.



Exercício

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X . Se $x \in D(A)$ mostre que

$$e^{tA}x - e^{sA}x = \int_s^t Ae^{\xi A}x d\xi = \int_s^t e^{\xi A}Ax d\xi$$



Proposição 12

Se $S(t) = e^{tA}$ em X , então para todo $x \in X$,

$$\int_0^t e^{sA} x \, ds \in D(A) \text{ e } A \left(\int_0^t e^{sA} x \, ds \right) = e^{tA} x - x.$$

Proposição 13

Se $S(t) = e^{tA}$ em X , então A é fechado e seu domínio é denso em X .

Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 14 (Unicidade)

Se $S_1(t) = e^{tA}$ e $S_2(t) = e^{tA}$ em X , então $S_1 = S_2$.

Definição 15

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X . Defina $A^0 = \text{Id}$, $A^1 = A$ e, supondo que A^{n-1} esteja definido, vamos definir A^n pondo:

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}); A^{n-1}x \in D(A)\},$$
$$A^n x = A(A^{n-1}x), \quad \forall x \in D(A^n).$$



Proposição 16

Seja $S(t) = e^{tA}$ em X .

