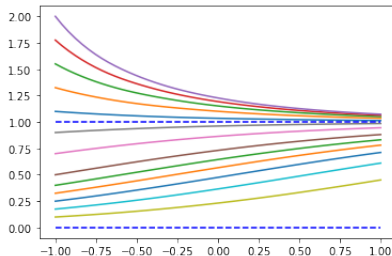


Cálculo II

Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Prof. Reginaldo Demarque



Universidade Federal Fluminense
Instituto de Humanidades e Saúde – RHS
Departamento de Ciências da Natureza – RCN
Campus de Rio das Ostras



- 1 EDO's
- 2 EDO's de 1ª ordem
- 3 EDO's de 2ª ordem lineares
- 4 Vibrações Mecânicas Livres
 - Vibrações Livres
 - Vibrações Livres Amortecidas



Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números. Uma **equação diferencial** é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas desta função.



Exemplo

Primeiros modelos:

- 1 **Crescimento Populacional Malthusiano:** $y' = ky$
- 2 **Crescimento Populacional Logístico:** $y' = ky(M - y)$
- 3 **Queda Livre de Corpos:** $h''(t) = -g$
- 4 **Vibrações Mecânicas:** $my'' + ky = 0$
- 5 **Pêndulo Simples:** $\theta'' + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0.$



Classificação

As equações diferenciais são classificadas quanto ao **tipo**, à **ordem** e à **linearidade**.

- a) Dizemos que uma equação diferencial é **ordinária**, ou simplesmente **EDO**, quando envolver somente funções de uma variável. Caso contrário dizemos que é **parcial**, ou simplesmente (EDP). As duas equações anteriores são EDO's e um exemplo de EDP é a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0.$$

- b) Uma equação diferencial é dita de **n-ésima ordem** quando a maior ordem das derivadas é n .
- c) Uma EDO é dita **linear** quando é da forma

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + \cdots + a_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1(t) \frac{dy}{dt} + a_0(t)y + f(t) = 0.$$

E **não linear** caso contrário.



Definição 1

Uma *solução* de uma EDO de ordem n em um intervalo I é uma função $y(t)$ definida no intervalo I tal que as derivadas até ordem n estão definidas em I e satisfazem a equação neste intervalo.



Exemplo

Considere a equação

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Note que $y_1(t) = e^t$ e $y_2(t) = e^{2t}$ são soluções da equação para todo $t \in \mathbb{R}$.



EDO's de 1ª ordem

Uma EDO de 1ª ordem é uma equação da forma

$$F(t, y, y') = 0.$$

Um problema da forma

$$\begin{cases} F(t, y, y') = 0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

é dito **problema de valor inicial (PVI)**. Uma **solução geral** de uma EDO de 1ª ordem, é uma família de soluções que dependem de uma constante arbitrária, tal que toda solução particular pode ser obtida desta família por uma escolha apropriada da constante.



Modelo Populacional Malthusiano

Este tipo de modelo é razoável para descrever populações que tem **recurso ilimitados para crescimento e ausência de predadores**.

- $y(t)$: número de indivíduos de uma população no instante t .
- $y'(t)$: taxa de crescimento de uma população no instante t .
- Supõe-se que a **taxa de crescimento** de uma população é proporcional à **população presente**

$$y'(t) = ky(t)$$

Supondo que a população no instante $t = 0$ é y_0 , determine a função $y = y(t)$. Em quanto tempo a população dobra de tamanho?





Para Casa 1

- 1 Determine uma solução geral para a equação

$$y'(t) = y(t).$$

- 2 Determine uma solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 2 \end{cases}$$



Campos de Direções

Campos de Direções são ferramentas validas no estudo de soluções de equações diferenciais da forma

$$y'(t) = f(t, y),$$

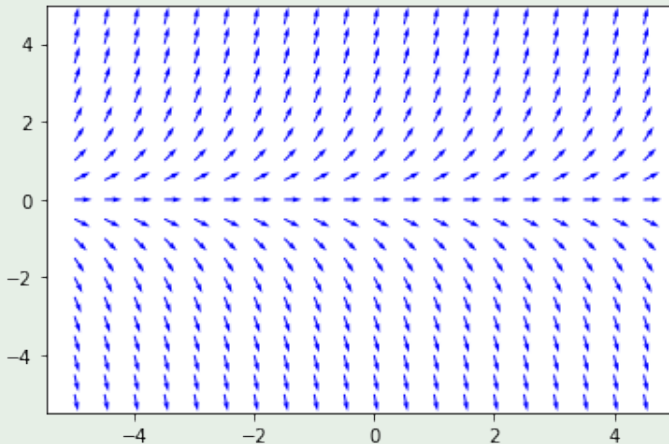
onde f é uma função dada chamada de **função taxa de variação**. Ele é construído desenhando-se em cada ponto de uma malha retangular um segmento de reta cujo coeficiente angular é valor de f naquele ponto.





Exemplo

Campo de direções de $y' = y$



Equações Separáveis

As EDO's de 1ª ordem **separáveis** são equações da forma

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Integrando esta equação em relação a x temos que

$$\int g(y)y' dx = \int f(x) dx + C.$$

Fazendo a substituição $u = y(x)$, $du = y'(x)dx$ temos que

$$\int g(u) du = \int f(x) dx + C.$$

Assim, se G é uma primitiva de g temos que

$$G(y(x)) = \int f(x) dx + C$$



Crescimento Populacional Logístico

Vimos que um modelo simples de crescimento populacional é aquele em que se supõe que a taxa de crescimento de uma população $\frac{dy}{dt}$ é proporcional à população presente $y(t)$ naquele instante. O **crescimento logístico**, leva em conta que a população tem um valor máximo sustentável M . Quando a população se aproxima da capacidade máxima, os recursos tornam-se menos abundantes e a taxa de crescimento começa a diminuir. Uma relação simples que exhibe esse comportamento é quando

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y)$$





Exemplo

Considere o problema de crescimento logístico:

$$\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = y_0, y_0 \geq 0. \end{cases}$$

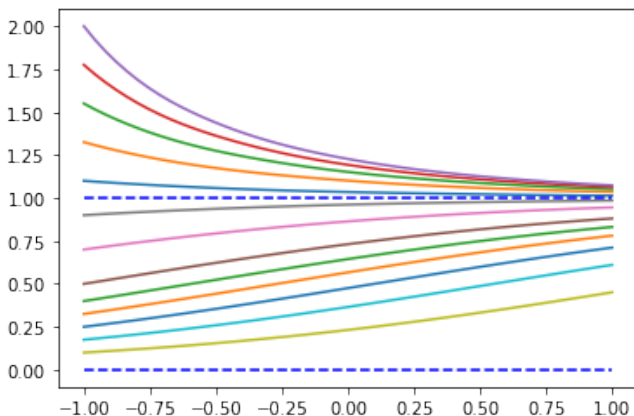
Mostre que a solução geral é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$



Solução geral

$$y(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$$



Família de Soluções para diversos valores de C .



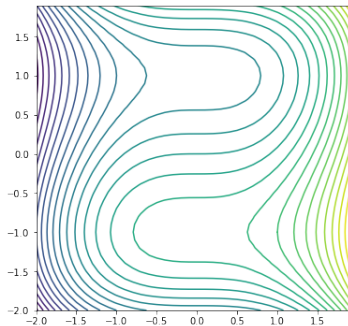


Exemplo

$$y' = \frac{x^2}{1 - y^2}$$

Solução geral

$$y^3 + x^3 - 3y = C$$



Família de Soluções para diversos valores de C .



EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

Técnica do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por **fator integrante** função $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t).$$

EDO's Lineares de 1ª ordem

As EDO's lineares de 1ª ordem são equações que podem ser escritas da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t).$$

Técnica do Fator Integrante

Multiplicamos a equação por **fator integrante** função $\mu(t)$

$$\mu(t)y'(t) + \underbrace{\mu(t)p(t)}_{\mu'(t)}y = \mu(t)q(t).$$

$$\Rightarrow (\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$$

Que pode ser resolvida por integração direta. O **fator integrante** $\mu(t)$ pode ser obtido por

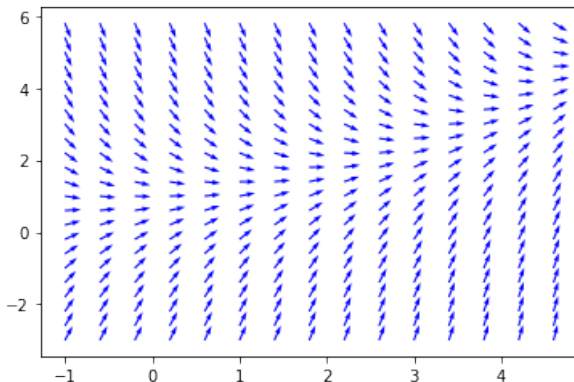
$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Exemplo

Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(0, 1)$.

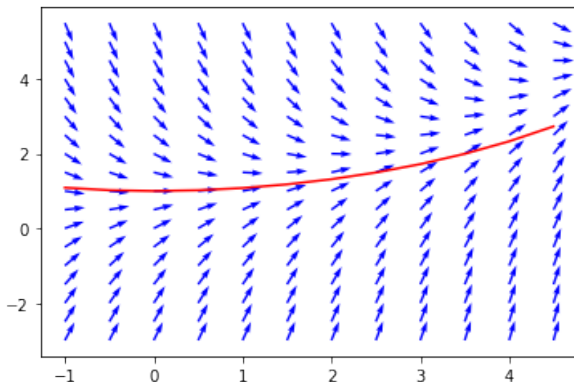


Exemplo

Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}.$$

Encontre a solução particular que passa pelo ponto $(0, 1)$.



Queda Livre com Resistência do ar

Sejam um corpo de massa m que está caindo e que sofre uma **força de resistência do ar que é proporcional à velocidade do corpo**. Adotando-se o referencial positivo para baixo, a velocidade satisfaz a equação:

$$mv' + kv = mg$$



Exemplo

Um pára-quedista com o seu pára-quedas pesam 70 quilogramas e salta de uma altura de 1400 metros. O pára-quedas abre automaticamente após 5 segundos de queda. Sabe-se que a velocidade limite é de 5 m/s . Determine a velocidade que o pára-quedista atinge no momento que o pára-quedas abre. Quanto tempo demora para a velocidade chegar a $5,1 \text{ m/s}$. Como varia a altura em função do tempo?





Para Casa 2

- 1 Determine a solução geral da EDO: $y' - 2y = 4 - t$
- 2 Resolva o PVI

$$\begin{cases} ty' + 2y = 4t^2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

- 3 Determine uma fórmula geral para as soluções da EDO:
 $y' + ay = g(t)$, onde a é uma constante.



Equações Exatas

Uma EDO de 1ª ordem

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0,$$

é dita **equação diferencial exata** quando existe uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \text{ e } \frac{\partial \psi}{\partial y} = N.$$

Neste caso, podemos reescrever a EDO da forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Supondo que y é uma função de x , pela regra da cadeia para várias variáveis, temos que

$$\frac{d}{dx}(\psi(x, y(x))) = 0,$$

Logo a solução geral da EDO é dada implicitamente por

$$\psi(x, y(x)) = C$$





Exemplo

Resolva a EDO: $2x + y^2 + 2xyy' = 0$.

Teorema 2

Suponha que M , N , $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas num retângulo $[a, b] \times [c, d]$, então a EDO

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$





Exemplo

Verifique se as EDOs são exatas, em caso afirmativo, determine a solução

① $(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0$

② $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$



Fator Integrante: EDO exata

No caso em que a EDO não é exata, podemos tentar torná-la exata através de um fator integrante. Seja

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{com } M_y \neq N_x.$$

Pode-se obter um fator integrante μ que torna a EDO exata, da seguinte forma:

① $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$ então $\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$.

② $Q(y) = \frac{N_x - M_y}{M}$ então $\mu(y) = e^{\int Q(y) dy}$.



Exemplo

Determine o fator integrante que torne a seguinte EDO exata.

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$



Para Casa 3

Encontre a solução geral das EDO's:

① $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

② $\frac{2y(1+x^2)}{1+2x^2}y' - \frac{2xy^2}{(1+2x^2)^2} = 1$



Existência e Unicidade de Soluções

Ao se trabalhar com equações diferenciais duas perguntas são naturais:
Um problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sempre tem solução? Se sim essa solução é única?



Exemplo

O problema

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem infinitas soluções! Para todo $c \geq 0$ são soluções do PVI

$$y(t) = \begin{cases} (t - c)^2, & t \geq c \\ 0, & t < c. \end{cases}$$

Teorema de Existência e Unicidade de Soluções para Equações Lineares

Teorema 3

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + p(t)y = q(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são *contínuas* em um intervalo I contendo t_0 , então o PVI tem uma *única solução* em I .





Exemplo

Considere o PVI:

$$\begin{cases} t^3 \frac{d}{dt} y(t) + 4t^2 y(t) = e^{-t}, \\ y(-1) = 0. \end{cases}$$

- 1 Determine o maior intervalo onde a solução do PVI existe.
- 2 Encontre a solução do PVI.



Teorema de Existência e Unicidade de Soluções Geral

Teorema 4

Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(t, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são *contínuas* em um retângulo

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; a < t < b, c < y < d\}$$

contendo (t_0, y_0) , então o PVI *tem uma única solução* em um intervalo contendo t_0 .





Exemplo

- ① A única solução do problema

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

é $y = \frac{1}{t+1}$ definida no intervalo $(-\infty, -1)$. Note que não existe uma solução definida em toda a reta!

- ② O problema

$$\begin{cases} y' = \text{sen}(ty) + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

tem solução?



Uma breve introdução aos números complexos¹

O conjunto dos **números complexos**, denotado por \mathbb{C} , são formados pelos elementos da forma

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \text{com } i^2 = -1,$$

onde estão definidas as operações de adição e multiplicação:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$



Exemplo

Calcule $(-1 + 3i)(2 - 5i)$

¹Veja o apêndice do livro James Stewart, Cálculo Volume 1.



O **módulo** de z é definido por

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

O **Complexo Conjugado** de $z = a + bi$ é

$$\bar{z} = a - bi.$$

Propriedades

- 1 $z\bar{z} = |z|^2$.
- 2 $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ e $\overline{z^n} = \bar{z}^n$
- 3 Se z é raiz de um polinômio, então \bar{z} também o é.





Exemplo

- 1 Expresse o número $\frac{-1+3i}{2+5i}$ na forma $a + bi$.
- 2 Encontre as raízes da equação $x^2 + x + 1$

Teorema 5 (Teorema Fundamental da Álgebra)

Toda equação polinômial

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_k \in \mathbb{R}$ e $n \geq 1$, tem exatamente n soluções no conjunto dos números complexos.



Forma Polar

Qualquer número complexo z pode ser escrito na **forma polar**

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)),$$

onde $r = |z|$ e $\tan(\theta) = b/a$. O ângulo θ é chamado **argumento** de z .



Exemplo

Escreva $z = 1 + i$ e $w = i$ na forma polar.



Propriedades

Sejam $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$. Então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)),$$

Fórmula de De Moivre

Se $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, então

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$





Exemplo

- 1 Ache o produto dos números $z = 1 + i$ e $w = \sqrt{3} - i$ na forma polar.
- 2 Ache $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.
- 3 O que significa geometricamente multiplicar um número complexo z por i ?
- 4 Calcule $\sqrt[3]{1}$ em \mathbb{C} , isto é, os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que $z^3 = 1$.



EDO's de 2ª ordem lineares

As EDO's de 2ª ordem linear são equações que podem ser escritas na forma

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t).$$

Uma EDO de 2ª ordem linear é dita homogênea se ela pode ser escrita como

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (1)$$



Exemplo

- 1 EDO Linear de 2ª ordem não-homogênea: $y'' + 4y = e^t \sin t$
- 2 EDO Linear de 2ª ordem homogênea: $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$
- 3 EDO não-Linear de 2ª ordem: $yy'' + y' = 0$



Teorema 6 (Teorema de Existência e Unicidade das Soluções)

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t) \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se $p(t)$, $q(t)$ e $f(t)$ são funções contínuas em um intervalo I contendo t_0 , então o PVI tem *uma única solução definida neste intervalo*.



Exemplo

Encontre o maior intervalo no qual a solução do PVI certamente existe.

$$\begin{cases} (t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0 \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 1. \end{cases}$$



EDOs Lineares Homogêneas

Princípio da Superposição de Soluções

Para **EDO's lineares homogêneas**, se $y_1(t)$ e $y_2(t)$ são soluções da equação definidas em um mesmo intervalo, então

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

também o é, para quaisquer constantes c_1 e c_2 .



Exemplo

Mostre que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^3$ são soluções da EDO mas não são soluções do PVI.

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$



Para Casa 4

Mostre que:

- ① As funções $y_1 = \cos x$ e $y_2 = \sin x$ são soluções da EDO

$$y'' + y = 0$$

- ② As funções $y_1 = 1 + \cos x$ e $y_2 = 1 + \sin x$ são soluções da EDO

$$y'' + y = 1,$$

mas $y_1 + y_2$ não é.

- ③ As funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = 1$ são soluções da EDO

$$y''y - xy' = 0,$$

mas $y_1 + y_2$ não é.



No último exemplo vimos que $y_1(x) = x$ e $y_2(x) = x^3$, $\forall x \in (0, +\infty)$ são soluções da EDO $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$ mas não do PVI

$$\begin{cases} x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0 \\ y(1) = 2, y'(1) = 1. \end{cases}$$

Será possível determinar uma solução do PVI a partir dessas duas? E uma solução geral da EDO?



Wronskiano

Considere o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Se $p(t)$ e $q(t)$ são contínuas, então o procedimento do exemplo anterior pode ser aplicado. Dados y_1 e y_2 duas da EDO, então o PVI terá solução desde que

$$W[y_1, y_2](t_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix}.$$

$W[y_1, y_2](t_0)$ é chamado de Wronskiano.



Teorema 7

Se y_1 e y_2 são soluções da EDO

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

e se existe t_0 tais que $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, então a família de funções

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

incluem todas as soluções da EDO, chamada *solução geral* da EDO. Neste caso, y_1 e y_2 são ditas *soluções fundamentais*.



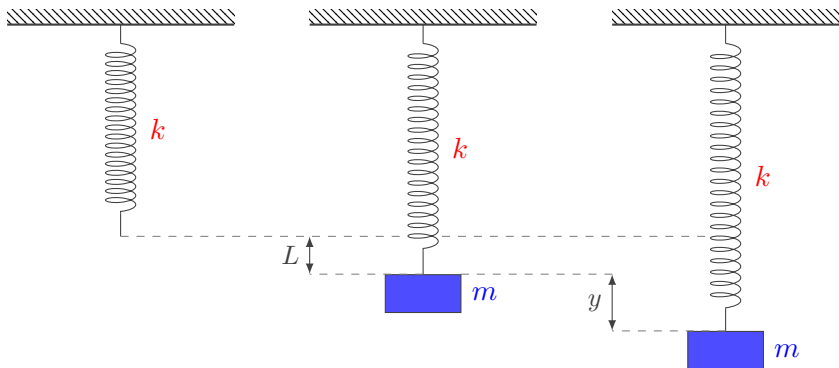
Exemplo

Mostre que $y_1 = t^{1/2}$ e $y_2 = t^{-1}$ são soluções fundamentais da EDO

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0$$

e determine a solução geral.

Vibrações Mecânicas Amortecidas



Considere um sistema de massa-mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola, com constante elástica k , que está presa ao teto. Se levarmos em conta um amortecimento viscoso proporcional à velocidade do corpo, então o sistema satisfaz a EDO

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde $\gamma > 0$ é a constante de amortecimento.



Equações homogêneas com coeficientes constantes

Uma EDO linear de 2ª ordem, homogênea, com coeficientes constantes é uma equação da forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (2)$$

Para resolver uma equação do tipo (2) vamos nos inspirar no caso de 1ª ordem. Uma EDO linear homogênea de 1ª com coeficientes constantes é da forma

$$ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

Sabemos que as soluções para esta equação são $y(t) = ce^{-bt/a}$. Neste caso é natural supor que uma solução da EDO (2) seja da forma $y(t) = e^{\lambda t}$ para alguma constante λ . Daí, substituindo em (2) temos que

$$a\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + ce^{\lambda t} = 0 \Leftrightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

A última equação é dita **equação característica**.





Exemplo

Determinar a solução geral da EDO: $y'' + y' - 2y = 0$.

Se λ_1 e λ_2 são raízes distintas da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, t \in \mathbb{R}.$$





Exemplo

Determinar a solução geral da EDO: $y'' + 4y' + 4y = 0$

Se α é a única raiz da equação característica, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}, t \in \mathbb{R}.$$



Vamos estudar inicialmente o caso

$$y'' + \beta^2 y = 0,$$

cujas soluções fundamentais são $y_1 = e^{i\beta t}$ e $y_2 = e^{-i\beta t}$. Mas como podemos escrevê-las na forma padrão $a + bi$?

Primeiramente, note que $u_1(t) = \cos(\beta t)$ e $u_2(t) = \sin(\beta t)$ também são soluções fundamentais da EDO. Portanto,

$$y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t).$$



A exponencial complexa

Até agora temos que

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{i\beta t} \\ y_1(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t). \end{cases}$$

Como $y_1(0) = 1$ e $y_1'(0) = i\beta$, daí, temos que $c_1 = 1$ e $c_2 = i$. Logo,

$$e^{i\beta t} = \cos(\beta t) + i \sin(\beta t).$$

Em particular, para $t = 1$, temos que

$$e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin(\beta).$$



Curiosamente, quando $\beta = \pi$, obtemos a mais bela de todas as equações da matemática:

Equação de Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

De forma geral, obtemos:

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha} (\cos \beta + i \sin \beta),$$

conhecida como fórmula de Euler.





Exemplo

Determine a solução geral da EDO : $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Se $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, então a solução geral da EDO é:

$$y(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$



Vimos que o modelo para um sistema massa-mola preso no teto em um meio viscoso é:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0,$$

onde m é a massa, $k > 0$ é a constante elástica e $\gamma > 0$ é a constante de amortecimento.



Vibrações livres não-amortecidas

Quando $\gamma = 0$, o sistema não tem amortecimento e podemos reescrever a equação:

$$y'' + \omega_0^2 y = 0,$$

onde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Com isso a solução geral é:

$$y = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

A solução pode ser reescrita como:

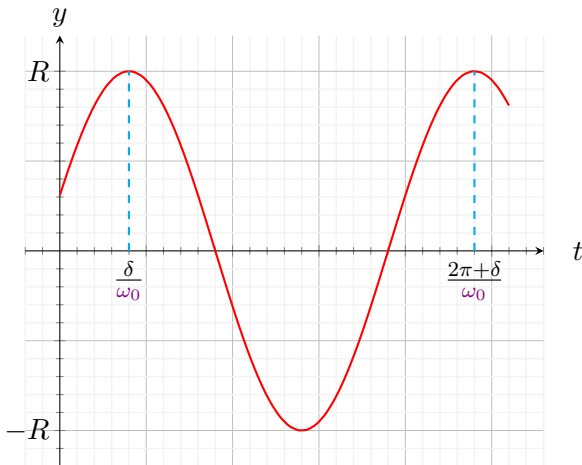
$$y = R \cos(\omega_0 t - \delta),$$

onde $A = R \cos \delta$, $B = R \sin \delta$. O **período** do movimento é $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, a **frequência** é $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$, a **amplitude** é R e o parâmetro adimensional δ é chamado de **fase**.

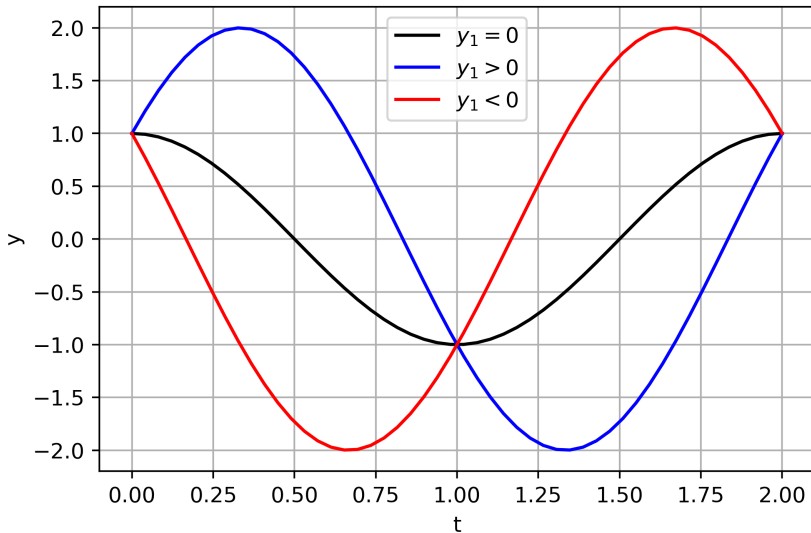


O movimento descrito é chamado **movimento harmônico**.

$$y = R \cos(\omega_0 t - \delta)$$



Movimento Harmônico com $y_0 = 1$ e $\omega_0 = \pi$.



Vibrações Livres Amortecidas

Quando o sistema é amortecido temos a equação:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0.$$

Donde temos a equação característica:

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0,$$

cujas raízes são:

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2m} \pm \frac{\sqrt{\gamma^2 - 4mk}}{2m},$$

o que nos fornece 3 casos:

- ① **Superamortecimento:** $\gamma^2 > 4mk$
- ② **Subamortecimento:** $\gamma^2 < 4mk$
- ③ **Amortecimento Crítico:** $\gamma^2 = 4mk$

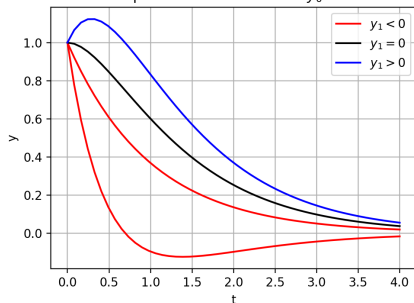


Superamortecimento

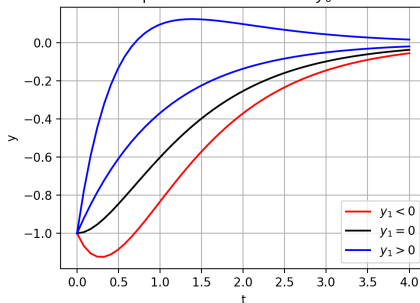
$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

onde $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Superamortecimento com $y_0 > 0$.



Superamortecimento com $y_0 < 0$.



Subamortecimento

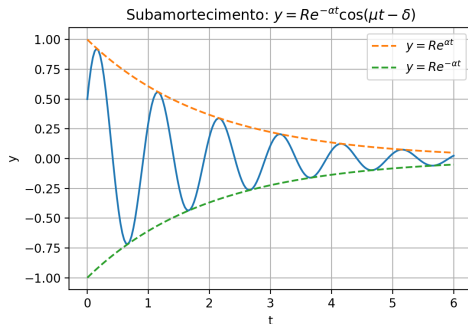
A solução é da forma

$$y(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2m}} (A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)),$$

onde $\mu = \frac{\sqrt{4mk - \gamma^2}}{2m}$. Que pode ser reescrita como

$$y(t) = R e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos(\mu t - \delta),$$

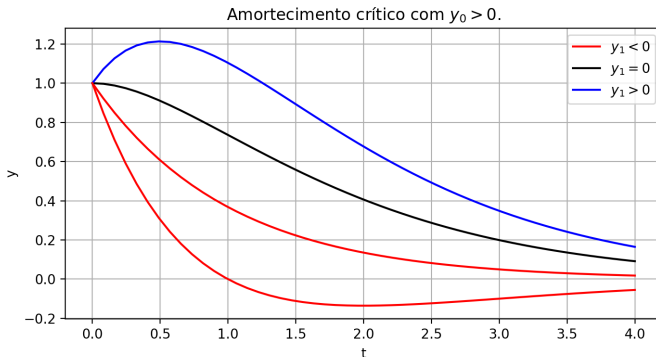
onde $A = R \cos \delta$ e $B = R \sin \delta$.



Amortecimento crítico

A solução é da forma

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\gamma t}{2m}}.$$





Para Casa 5

Esboce os gráficos das soluções dos problemas abaixo.

- 1 Suponha que uma massa de $4,5 \text{ kg}$ estica uma mola 5 cm . A massa é deslocada $2,5 \text{ cm}$ para baixo e depois colocada em movimento com uma velocidade inicial de apontando para cima de 30 cm/s .
- 2 Uma massa de 20 g estica uma mola 5 cm . Suponha que a massa também está presa a um amortecedor viscoso com uma constante de amortecimento de $400 \text{ dinas}\cdot\text{s/cm}$ e que a massa é puxada pra baixo mais 2 cm de depois é solta.



Equações não-homogêneas

É fácil ver que se $y_p(t)$ é uma solução de uma EDO não-homogênea

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

y_1 e y_2 são soluções fundamentais da EDO homogênea correspondente, então a solução geral da equação não-homogênea é

$$y(t) = y_p(t) + c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$





Exemplo

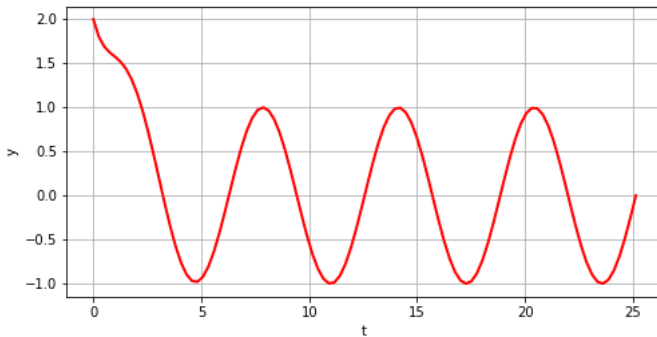
Se no modelo de vibrações mecânicas existir uma força externa $F = F(t)$, então teremos um problema de **oscilação forçada** que é modelado pela seguinte equação não-homogênea:

$$my'' + \gamma y' + ky = F(t).$$

Neste caso, como determinar a solução do seguinte problema cuja força externa é periódica?

$$y'' + 2y' + y = 2 \cos(t).$$





Método dos Coeficientes a Determinar

Este método funciona para qualquer EDO não-homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = F_1(t) + F_2(t) + \cdots + F_k(t),$$

onde

$$F_i(t) = e^{\alpha t}[(a_0 + \dots + a_n t^n) \cos(\beta t) + (b_0 + \dots + b_m t^m) \sin(\beta t)].$$

Neste caso, deve-se procurar, para cada F_i , uma solução particular da forma

$$y_p(t) = t^s e^{\alpha t}[(A_0 + \dots + A_q t^q) \cos(\beta t) + (B_0 + \dots + B_q t^q) \sin(\beta t)],$$

em que $q = \max\{n, m\}$, s é o menor inteiro não-negativo que garante que nenhuma parcela de y_p seja solução da equação homogênea correspondente e $A_0, \dots, A_q, B_0, \dots, B_q$ são coeficientes a serem determinados.





Exemplo

Encontre a solução geral das seguintes equações:

- a $y'' + y' = 2 + t^2.$
- b $y'' - 2y' + y = e^t + t$
- c $y'' + 4y = e^t \cos t$



Vibrações Mecânicas Forçadas

conteúdo...



Método da Variação dos Parâmetros

Este método funciona para qualquer EDO linear de 2ª ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t),$$

para o qual se conheça duas soluções fundamentais da equação homogênea correspondente em um intervalo I onde o wronskiano é não nulo.

Sabemos que a solução geral da equação homogênea correspondente é

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t).$$

O método da variação dos parâmetros consiste em procurar uma solução particular da EDO não homogênea que tenha a forma da solução geral da homogênea, mas substituindo os parâmetros c_1 e c_2 por funções a determinar $u_1(t)$ e $u_2(t)$, respectivamente, ou seja, da forma

$$y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t),$$

com a condição de que

$$u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0$$



Fórmula Geral

Resolvendo-se o sistema anterior, chega-se a:

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt, \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt$$



Exemplo

Encontre a solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + y = \sec t \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -2. \end{cases}$$





Exemplo

- 1 Determine a solução geral das EDO

$$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^3(x)}.$$

- 2 Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções fundamentais da EDO no intervalo $(0, \infty)$

$$t^2 y'' - 2y = 3t^2 - 1$$

e determine a solução geral.

