

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E CONTABILIDADE  
DEPARTAMENTO DE ADMINISTRAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

APREÇAMENTO DE ATIVOS COM ASSIMETRIA E CURTOSE:  
UM TESTE DE COMOMENTOS COM DADOS EM PAINEL

Francisco Henrique Figueiredo de Castro Junior

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Zwicker

SÃO PAULO  
2008

Profª. Dra. Suely Vilela  
Reitora da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Carlos Roberto Azzoni  
Diretor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade

Prof. Dr. Isak Kruglianskas  
Chefe do Departamento de Administração

Prof. Dr. Lindolfo Galvão de Albuquerque  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Administração

**FRANCISCO HENRIQUE FIGUEIREDO DE CASTRO JUNIOR**

**APREÇAMENTO DE ATIVOS COM ASSIMETRIA E CURTOSE:  
UM TESTE DE COMOMENTOS COM DADOS EM PAINEL**

Tese apresentada ao Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Administração.

**Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Zwicker**

**SÃO PAULO  
2008**

Tese defendida e aprovada no Departamento de Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo – Programa de Pós-graduação em Administração, pela seguinte comissão examinadora:

---

Prof. Dr. Ronaldo Zwicker (Presidente)

---

Prof. Dr. Rubens Famá – FEA/USP

---

Prof. Dr. Luiz Paulo Lopes Fávero – FEA/USP

---

Prof. Dr. Eduardo Kazuo Kayo – CCSA/UPM

---

Prof. Dr. Junio Fuentes – Alianti

---

### **FICHA CATALOGRÁFICA**

Elaborada pela Seção de Processamento Técnico do SBD/FEA/USP

Castro Junior, Francisco Henrique Figueiredo de

Apreçamento de ativos com assimetria e curtose: um teste de comomentos com dados em painel. / Francisco Henrique Figueiredo de Castro Junior – São Paulo, 2008.

164p.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, 2008.

Bibliografia.

1. Administração financeira. 2. Administração de investimentos. 3. Análise de dados longitudinais. I. Universidade de São Paulo. Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. II. Título.

CDD 658.15

À Antonieta Martins da Silva.

---

*in memoriam*



# Agradecimentos

À minha mãe e irmã, por serem parte importante da minha formação humana e por estarem sempre presentes nos momentos mais importantes da minha vida. À minha namorada, pela paciência e compreensão com a minha forma assimétrica de dividir o tempo.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ronaldo Zwicker, por aceitar orientar esta tese e por ser uma pessoa sempre tão disponível e atenciosa.

Aos membros da banca, Prof. Dr. Rubens Famá, Prof. Dr. Luiz Paulo Lopes Fávero, Prof. Dr. Eduardo Kazuo Kayo e Prof. Dr. Junio Fuentes, por aceitarem o convite para participar da avaliação desta tese, e pelas críticas e sugestões oferecidas. Ao Prof. Dr. André Luiz Oda pelas críticas e sugestões apresentadas no exame de qualificação.

Aos meus professores nos cursos de mestrado e doutorado na FEA/USP, em especial aos Professores Doutores Nicolau Reinhard, José Roberto Securato, José de Oliveira Siqueira e Abraham Sin Oih Yu, pela oportunidade de convívio acadêmico e pelos ensinamentos transmitidos.

À Claudia Yoshinaga, pelo enorme auxílio na coleta e organização dos dados utilizados nesta tese e pela leitura de versões preliminares do texto; ao amigo Lucas Ayres pelas discussões metodológicas; e ao amigo Héber Pessoa pela amizade e pelo incentivo. À Luciana Picanço, por também ter feito parte deste processo.

Aos funcionários da Seção de Pós-graduação da FEA/USP, em especial à Valéria Lourenção, à Maria Aparecida de Jesus Sales (Cida) e ao Francisco de Oliveira Costa; aos funcionários das bibliotecas da FEA/USP e do IME/USP, e à Lícia Mutsuko Abe. Nestes anos de FEA/USP, seguramente, recorri diversas vezes a estas pessoas e todas elas sempre foram muito prontas em me ajudar.

Aos administradores de projeto e desenvolvedores da comunidade virtual ABNT $\text{\TeX}$ . O altruísmo destas pessoas tornou a formatação desta tese algo muito mais simples. A todos os membros da lista de discussão  $\text{\TeX}$ -BR, que, de maneira solidária, compartilham seus conhecimentos em  $\text{\LaTeX}$ .

A todos aqueles que dirigiram a mim a mais difícil pergunta feita a um doutorando: “Como está a tese?” Estas pessoas foram também importantes para que eu pudesse me dedicar em dar a elas uma resposta resoluta.





Something is elegant if it is spare,  
memorable and pleasingly  
symmetrical.

---

Prof. Donald Knuth



# Resumo

Ao longo dos anos, desde a concepção do *CAPM*, o modelo vem passando por um rigoroso escrutínio por parte da comunidade científica e dos agentes de mercado interessados na sua utilização prática. Evidências tanto a favor quanto contra a sua adequação foram surgindo. Várias foram as causas levantadas para o fraco desempenho do *CAPM*: omissão de variáveis no modelo, variação no tempo da medida de risco ( $\beta$ ) ou, ainda, a ausência de outros momentos tais como assimetria e curtose. Esta pesquisa teve como objetivo a investigação empírica da relação entre momentos sistêmicos (covariância, coassimetria e cocurtose) e a taxa de retorno de ativos financeiros negociados no mercado brasileiro. Foi utilizada uma amostra de 179 empresas brasileiras regularmente negociadas na Bovespa entre os anos de 2003 e 2007. Para o teste do modelo de apreçamento, foi utilizado um procedimento em duas etapas. Na primeira, os comomentos de cada ativo foram estimados usando-se dados longitudinais de taxas de retorno. Os coeficientes estimados foram, então, utilizados em uma segunda etapa, na qual uma regressão com dados em painel buscou determinar a relação entre o prêmio pelo risco dos ativos e os comomentos estimados na primeira etapa. Foram estimados modelos com dados agrupados, efeitos aleatórios e efeitos fixos. A determinação do modelo mais adequado foi feita por meio de testes de especificação. Os dados mostraram evidências de que a distribuição de probabilidade das taxas de retorno da maioria das empresas não segue uma distribuição normal, e que tanto a covariância como a cocurtose são fatores de risco relevantes em modelos de apreçamento, mesmo controlados por fatores como: tamanho, alavancagem, liquidez, relação entre preço de mercado e preço contábil e relação entre valor de mercado e valor contábil.



# Abstract

*Since the development of the CAPM, the model has been tested with a rigorous scrutiny by academic community and market practitioners who are interested in its practical utilization. Evidence for and against the adequacy of the model has arisen. Various reasons for the failure of the CAPM were raised: omission of variables, time-varying risk factors ( $\beta$ ), or the absence of other moments like skewness and kurtosis. This research aimed at empirical investigation of the relationship between systematic moments (covariance, coskewness and cokurtosis) and the rate of return of financial assets traded in the Brazilian market. The sample consisted of 179 stocks regularly traded at Bovespa from 2003 to 2007. The test of the pricing model was run in a two-pass procedure. In the first pass, the comoments for every stock were estimated using a longitudinal series of rates of returns. The estimated coefficients were then used in the second pass, in a panel data regression that intended to establish a relationship between the risk premium and the comoments estimated in the first pass. Panel data models with pooled data, random effects and fixed effects were estimated. The adequacy of each model was tested by specification procedures. Data showed evidence that the rates of return were not normally distributed, and that covariance and cokurtosis were significant risk factors in pricing models, even after controlling for factors like: size, leverage, liquidity, price-earning ratio and market-to-book ratio.*



# Sumário

<b>Lista de Acrônimos</b>	<b>5</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>7</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>13</b>
<b>1 Introdução e Formulação do Problema de Pesquisa</b>	<b>15</b>
1.1 Introdução . . . . .	15
1.2 Formulação da Situação Problema . . . . .	21
1.3 Objetivos . . . . .	22
1.4 Justificativa . . . . .	23
1.5 Delimitação . . . . .	24
1.6 Hipóteses de Pesquisa . . . . .	25
1.7 Contribuições da Pesquisa . . . . .	27
1.8 Descrição dos Capítulos . . . . .	27
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>29</b>
2.1 Teoria da Utilidade . . . . .	29
2.1.1 Introdução . . . . .	29
2.1.2 Representação das Preferências . . . . .	31
2.1.3 Representação da Utilidade . . . . .	31
2.1.4 Axiomas da Teoria da Utilidade . . . . .	33
2.1.5 Evidências de Violação do Axioma da Substitutibilidade . . . . .	34
2.2 Incerteza e Risco . . . . .	36
2.3 Aversão ao Risco . . . . .	37
2.3.1 Medida de Aversão ao Risco . . . . .	37
2.3.2 Coeficiente de Aversão ao Risco: Absoluto e Relativo . . . . .	41

2.3.2.1	Coeficiente Absoluto de Aversão ao Risco . . . . .	41
2.3.2.2	Coeficiente Relativo de Aversão ao Risco . . . . .	42
2.3.3	Função de Utilidade . . . . .	43
2.3.3.1	Função de Utilidade Logarítmica Positiva . . . . .	47
2.3.3.2	Função de Utilidade Exponencial Negativa . . . . .	48
2.3.3.3	Função de Utilidade Raiz Quadrada . . . . .	48
2.3.3.4	Função de Utilidade Exponencial Positiva . . . . .	49
2.3.3.5	Função de Utilidade Logarítmica Negativa . . . . .	50
2.3.3.6	Resumo das Funções de Utilidade . . . . .	50
2.4	Matemática da Teoria de Carteiras . . . . .	54
2.4.1	Fronteira Eficiente . . . . .	58
2.4.1.1	Carteiras Zero-beta . . . . .	58
2.4.1.2	Relação entre a Taxa de Retorno Esperada de Qualquer Carteira com Carteiras da Fronteira . . . . .	59
2.4.2	Combinação de Ativos com Risco na Presença de Ativo sem Risco .	60
2.5	Modelos de Apreçamento . . . . .	63
2.5.1	Modelo com 2 Momentos . . . . .	63
2.5.2	Modelo com 3 Momentos . . . . .	65
2.5.3	Modelo com 4 Momentos . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Metodologia da Pesquisa Empírica</b>	<b>73</b>
3.1	Modelos Empíricos de Apreçamento de Ativos Baseados em Momentos . .	74
3.2	Periodicidade das Observações . . . . .	76
3.3	Momentos Variando no Tempo . . . . .	78
3.4	População, Amostra e Dados Coletados . . . . .	78
3.5	Definição Operacional das Variáveis . . . . .	80
3.5.1	Prêmio pelo Risco das Ações . . . . .	80
3.5.2	Tamanho da Empresa . . . . .	81
3.5.3	Valor de Mercado sobre Valor Contábil das Ações . . . . .	82
3.5.4	Índice Preço/Lucro . . . . .	82
3.5.5	Liquidez . . . . .	82
3.5.6	Alavancagem . . . . .	83
3.5.7	Setor de Atividade . . . . .	83
3.5.8	<i>Dummies</i> de Ano . . . . .	83
3.6	Modelo Empírico de Análise dos Dados . . . . .	84



3.6.1	Modelos de Fatores . . . . .	84
3.6.1.1	Modelo de Mercado Quadrático . . . . .	85
3.6.1.2	Modelo de Mercado Cúbico . . . . .	86
3.6.2	Dados em Painel . . . . .	86
3.6.3	Heterogeneidade Não-observada . . . . .	87
3.6.4	Métodos de Estimação . . . . .	89
3.6.4.1	Modelo de Dados Agrupados . . . . .	89
3.6.4.2	Modelo de Efeitos Aleatórios . . . . .	90
3.6.4.3	Modelo de Efeitos Fixos . . . . .	91
3.6.5	Alternativas Robustas de Análise . . . . .	93
3.6.6	Limitações do Modelo Empírico . . . . .	93
3.6.6.1	Associação <i>versus</i> Causalidade . . . . .	93
3.6.6.2	Amostragem . . . . .	94
3.6.6.3	Definição Operacional das Variáveis . . . . .	94
3.6.6.4	Modelo Especificado . . . . .	94
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>97</b>
4.1	Estatísticas Descritivas . . . . .	97
4.2	Modelo de Apreçamento de Ativos . . . . .	101
4.2.1	Modelo de Dados Agrupados . . . . .	103
4.2.2	Modelo de Dados em Painel . . . . .	107
4.2.2.1	Ibovespa como <i>Proxy</i> para Carteira de Mercado . . . . .	109
4.2.2.2	IBrX como <i>Proxy</i> para Carteira de Mercado . . . . .	116
4.3	Síntese dos Principais Resultados . . . . .	119
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>123</b>
	<b>Referências</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Amostra do Estudo</b>	<b>139</b>
<b>B</b>	<b>Resumo das Variáveis</b>	<b>153</b>
<b>C</b>	<b>Resultados das Estimações</b>	<b>155</b>



# Lista de Acrônimos

<b>AR(1)</b>	Modelo autoregressivo de ordem 1
<b>AT</b>	Ativo total da empresa
<b>BE/ME</b>	Book-to-market equity
<b>Bovespa</b>	Bolsa de Valores do Estado de São Paulo
<b>CAPM</b>	Capital Asset Pricing Model
<b>CDI</b>	Certificado de Depósito Interfinanceiro
<b>CRRA</b>	Constant Relative Risk Aversion
<b>DB</b>	Dívida bruta da empresa
<b>DBVM</b>	Índice dívida bruta sobre valor de mercado da empresa
<b>ET</b>	Exigível total da empresa
<b>ETVM</b>	Índice exigível total sobre valor de mercado da empresa
<b>GMM</b>	Generalized Method of Moments
<b>HARA</b>	Hyperbolic Absolute Risk Aversion
<b>HCCME</b>	Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator
<b>Ibovespa</b>	Índice da Bolsa de Valores de São Paulo
<b>IBrX</b>	Índice Brasil
<b>ILIQ</b>	Índice de liquidez da empresa
<b>IPL</b>	Índice preço/lucro da empresa
<b>LRT</b>	Linear Risk Tolerance
<b>MMG</b>	Método dos Momentos Generalizado
<b>MQO</b>	Mínimos Quadrados Ordinário
<b>NYSE</b>	New York Stock Exchange
<b>NYT</b>	The New York Times
<b>OLS</b>	Ordinary Least Squares

<b>PL</b>	Patrimônio líquido da empresa
<b>QUF</b>	Função de Utilidade Quadrática
<b>RL</b>	Receita líquida da empresa
<b>VC</b>	Valor contábil das ações da empresa
<b>VM</b>	Valor de mercado das ações da empresa
<b>VMVC</b>	Índice valor de mercado sobre valor contábil das ações da empresa

# Lista de Símbolos

$A \subseteq X$	O conjunto $A$ é sub-conjunto ou igual a $X$
$\alpha$	Intercepto da equação do CAPM, conhecido também como Alfa de Jensen
$\arg \max_{\{a\}} [\cdot]$	Argumento $a$ que maximiza uma função
$\arg \min_{\{a\}} [\cdot]$	Argumento $a$ que minimiza uma função
$a_i[\cdot]$	Coefficiente absoluto de aversão ao $i$ -ésimo momento
$\beta_i$	Variância sistêmica entre a taxa de retorno do ativo $i$ e a carteira de mercado
$\mathbb{C}[\cdot; \cdot]$	Operador matemático da covariância entre duas entidades
$\Delta$	Vetor de cocurtoses entre as taxas de retorno dos ativos e a taxa de retorno da carteira de mercado
$\frac{d^n}{dW^n} u(\cdot)$	$n$ -ésima derivada da função utilidade em relação à riqueza
$\frac{d}{dW} u(\cdot)$	Primeira derivada da função utilidade em relação à riqueza
$\delta_i$	Curtose sistêmica entre a taxa de retorno de um ativo $i$ e a carteira de mercado
$\mathbb{E}[\cdot]$	Operador matemático da esperança de uma entidade
$\eta_i$	Heterogeneidade não-observada
$\Gamma$	Vetor de coassimetrias entre as taxas de retorno dos ativos e a taxa de retorno da carteira de mercado
$\gamma_i$	Assimetria sistêmica entre a taxa de retorno de um ativo $i$ e a carteira de mercado
$\iota$	Vetor de 1's
$\ln AT_{i,t}$	Logaritmo natural do ativo total da empresa $i$ na data $t$

$\ln RL_{i,t}$	Logaritmo natural da receita líquida da empresa $i$ na data $t$
$\ln VM_{i,t}$	Logaritmo natural do valor de mercado da empresa $i$ na data $t$
$\mathbf{M}^{-1}$	Matriz inversa de $\mathbf{M}$
$\boldsymbol{\mu}$	Vetor das taxas de retorno esperadas dos ativos
$\max\{k,l\}$	Máximo entre $k$ e $l$
$\Omega_{i,t}$	Conjunto de variáveis de controle da empresa $i$ no ano $t$
$P_{f,t}$	Preço do ativo livre de risco na data $t$
$P_{i,t}$	Preço do ativo $i$ na data $t$
$\Psi_{i,t}$	Conjunto de regressores da empresa $i$ no ano $t$
$\mathbb{P}$	Espaço de probabilidades $\mathbb{P}$
$R_i$	Retorno do ativo $i$
$R_m$	Retorno da carteira de mercado
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$r_f$	Retorno do ativo livre de risco
$r_i[\cdot]$	Coefficiente relativo de aversão ao $i$ -ésimo momento
$\Theta_{i,t}$	Conjunto de comomentos da empresa $i$ no ano $t$
$\mathbf{T}$	Símbolo de transposição de um vetor ou matriz
$u(\cdot)$	Função utilidade
$\mathbf{V}$	Matriz de covariâncias das taxas de retorno
$\mathbb{V}[\cdot]$	Operador matemático da variância de uma entidade
$W$	Nível de riqueza
$W_0$	Nível de riqueza inicial
$\mathbf{w}$	Vetor de pesos dos ativos que compõem uma carteira
$x \not\succ y$	O mesmo que dizer que $x$ não é preferível a $y$
$x \sim y$	O mesmo que dizer que $x$ é indiferente a $y$
$x \succ y$	O mesmo que dizer que $x$ é estritamente preferível a $y$
$x \succcurlyeq y$	O mesmo que dizer que $x$ é preferível a $y$

# Lista de Tabelas

2.1	Paradoxo de Allais. . . . .	35
2.2	Comportamento do decisor de acordo com a primeira derivada do coeficiente absoluto de aversão ao risco em relação à riqueza. . . . .	42
2.3	Comportamento do decisor de acordo com a primeira derivada do coeficiente relativo de aversão ao risco em relação à riqueza. . . . .	43
2.4	Casos particulares das funções de utilidade HARA . . . . .	47
2.5	Funções de utilidade para cada tipo de coeficiente de aversão ao risco . . .	53
4.1	Estatísticas descritivas das carteiras de mercado . . . . .	97
4.2	Assimetria e Curtose da ArcelorMittal Inox Brasil . . . . .	99
4.3	Assimetria e Curtose da AES Elpa . . . . .	99
4.4	Teste de normalidade de Doornik e Hansen (1994) para <i>proxies</i> da carteira de mercado . . . . .	99
4.5	Teste de normalidade de D’Agostino, Belanger e D’Agostino Jr. (1990) para <i>proxies</i> da carteira de mercado . . . . .	100
4.6	Estatísticas descritivas das variáveis de controle . . . . .	100
4.7	Estatísticas descritivas dos comomentos . . . . .	101
4.8	Modelo de apreçamento com dados agrupados (Ibovespa) . . . . .	105
4.9	Modelo de apreçamento com dados agrupados (IBrX) . . . . .	107
4.10	Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos aleatórios (Ibovespa) . . . . .	110
4.11	Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa) . . .	111
4.12	Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): alavancagem medida pelo quociente entre o endividamento total e o valor de mercado das ações . . . . .	112
4.13	Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida . .	113
4.14	Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural do valor de mercado das ações . . . . .	114

4.15	Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural do ativo total e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	115
4.16	Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural do ativo total e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	117
4.17	Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	118
4.18	Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	119
A.1	Empresas que compõem a amostra . . . . .	139
A.2	Painel de dados semanais por empresa e por ano . . . . .	145
A.3	Setores de atividade das empresas da amostra . . . . .	151
B.1	Resumo das definições das variáveis . . . . .	153
C.1	Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados . . . . .	155
C.2	Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados com variáveis “Winsorizadas” (Ibovespa) . . . . .	156
C.3	Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados (IBrX) . . . . .	157
C.4	Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	158
C.5	Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	159
C.6	Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações . . . . .	160
C.7	Síntese das estimações dos modelos com dados agrupados (Ibovespa) . . .	161
C.8	Síntese das estimações dos modelos com dados agrupados (IBrX) . . . . .	162



C.9 Síntese das estimações dos modelos com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa) . . . . .	163
C.10 Síntese das estimações dos modelos com dados em painel com efeitos fixos (IBrX) . . . . .	164



# Lista de Figuras

2.1	Representação de Risco e Incerteza . . . . .	36
2.2	Funções de Utilidade. . . . .	52
2.3	Fronteira das Carteiras de Mínima Variância . . . . .	57
2.4	Fronteira Eficiente . . . . .	58
2.5	Localização da Carteira Zero-beta . . . . .	59
2.6	Carteiras Eficientes na Presença de Ativo sem Risco. . . . .	62
4.1	Histograma das taxas de retorno das <i>proxies</i> para a carteira de mercado . .	98



# Capítulo 1

## Introdução e Formulação do Problema de Pesquisa

*“Beta as the sole variable  
explaining returns on stocks is  
dead.”*

---

Eugene Fama (NYT, 18/fev/1992)

*“Announcements of the death of  
‘beta’ seem premature.”*

---

Fisher Black (1993)

### 1.1 Introdução

Um importante problema dentro da literatura de finanças é o de, racionalmente, atribuir preços a valores mobiliários. O *CAPM*, *Capital Asset Pricing Model*, desenvolvido independentemente por Sharpe (1964) e Treynor (1961)<sup>1</sup>, e aperfeiçoado por Lintner (1965a, 1965b), Mossin (1966), Fama (1968) e Black (1972), é o modelo mais importante

---

<sup>1</sup>Conforme SHARPE, op. cit., p. 427, apenas após a conclusão de seu artigo original, ele ficou sabendo que Jack Treynor havia desenvolvido um modelo que, em muitos aspectos, era semelhante ao seu. Todavia, o trabalho de Treynor não havia ainda sido publicado, fato que só ocorreu em Korajczyk (1999) e, posteriormente, em French (2002).

para este fim e ainda é amplamente utilizado como modelo teórico tanto na literatura acadêmica como pelos praticantes no mercado.

Os fundamentos do *CAPM* foram construídos sobre os conceitos desenvolvidos por Markowitz (1952, 1959), que desenvolveu um modelo baseado na teoria da utilidade esperada de von Neumann e Morgenstern (1947) para o problema de seleção de carteiras de ativos. Neste modelo, Markowitz propôs que os investidores deveriam utilizar a esperança e a variância das taxas de retorno dos ativos de interesse no processo de alocação de suas riquezas.

Conforme Tobin (1958, p. 85), o trabalho de Markowitz trata do problema geral de encontrar carteiras dominantes sob a ótica da otimização dos parâmetros esperança-variância envolvendo ativos com risco; que o interesse maior de Markowitz era a prescrição de regras de comportamento racional para investidores. Os trabalhos de Sharpe (1964), Lintner (1965a, 1965b) e Mossin (1966) incorporaram um arcabouço teórico microeconômico de forma a analisar o impacto de como o risco e a incerteza agem sobre os preços dos ativos. A proposta era a de criar uma teoria de equilíbrio de mercado para apreçamento de ativos sob condições de risco.

Foram assumidas hipóteses essencialmente em relação ao mercado e aos investidores individuais. Resumidamente, as hipóteses eram que cada investidor individual buscava maximizar sua riqueza terminal, era avesso ao risco, e que selecionavam carteiras unicamente com base em esperança e variância. Poderiam alocar qualquer fração de seu capital em um ativo livre de risco, que remunerava uma taxa conhecida e positiva, e que a porção excedente da riqueza poderia ser investida em uma quantidade finita de ativos com risco, que são negociados em um único mercado, perfeitamente competitivo, livre de custos de transação e impostos. Também é assumido que qualquer investidor pode tomar recursos emprestados a fim de investir em ativos com risco, sendo as compras e vendas destes ativos feitas em períodos discretos de tempo.

Lintner (1965b) apresenta as hipóteses relativas aos investidores assumidas pelo modelo. Uma delas era a de que todos os investidores possuem crenças homogêneas quanto aos parâmetros da distribuição conjunta de probabilidades que incorpora suas melhores estimativas quanto às taxas de retorno esperado e às variâncias de cada ativo individualmente e das covariâncias de cada par de ativos. Afirmava, ainda baseado nos resultados de Tobin (1958), que o investidor deveria preferir, para duas combinações distintas de ativos com mesmo valor esperado da taxa de retorno, aquela que tivesse uma menor variância. Ou, para mesmas variâncias, aquela que tivesse a maior taxa de retorno esperada. Para fazer esta afirmação, Tobin fez uso de uma função de utilidade do tipo quadrática, função esta que hoje em dia é amplamente rejeitada para denotar o comportamento racional do

decisor econômico.

Conforme Gollier (2001, p. 27), esta função de utilidade só tem sido considerada na literatura porque é fácil de ser trabalhada. Contudo, não existe nenhuma razão lógica para um decisor possuir este tipo de representação de utilidade no mundo real. Além disso, os resultados da pesquisa de Brockett e Kahane (1992), que relacionam as preferências por momentos e a teoria da utilidade esperada, destroem o argumento de que a análise de esperança-variância tem alguma validade na ordenação de preferências. Seus resultados, na verdade, se estendem até o terceiro momento, mostrando que nem a inclusão da assimetria consegue caracterizar adequadamente o comportamento do decisor.

A teoria da utilidade esperada fornece suporte racional para as decisões de consumo dos indivíduos, assim como de investimento sob condições de incerteza. O trabalho de von Neumann e Morgenstern (1947) deu a esta teoria um tratamento quantitativo. Eles o fizeram modelando as preferências com o auxílio de probabilidades objetivas quanto às suas ocorrências na natureza. É esperado ainda que os agentes econômicos sejam maximizadores da utilidade esperada. Isto tudo remete a uma necessidade de caracterizar adequadamente o comportamento do decisor racional, ou seja, seu comportamento perante situações de risco e quais funções de utilidade ele pode assumir.

Algumas violações aos axiomas da teoria da utilidade proposta foram verificadas empiricamente. A mais famosa delas foi a violação ao axioma da substitutibilidade encontrada por Allais (1953). Porém, Machina (1982) demonstrou que análises com base na utilidade esperada são robustas a estas violações, e que os principais resultados se mantêm quando se assumem que as preferências são suaves, ou seja, que sua função é diferenciável.

Essas definições são importantes, pois têm ligação direta com algumas das hipóteses assumidas em derivações dos modelos de apreçamento como o *CAPM*. Cochrane (2005, p. 152–161), por exemplo, apresenta quatro diferentes derivações do modelo, algumas delas usando alguns pressupostos dificilmente verificados nos dados empíricos, como funções de utilidade economicamente não-rationais, como a função de utilidade quadrática, e distribuições de probabilidade das taxas de retorno empiricamente não verificadas, como a distribuição normal.

Ao longo dos anos, desde a concepção do *CAPM*, o modelo vem passando por um rigoroso escrutínio por parte da comunidade científica e dos agentes de mercado interessados na sua utilização prática. Debaixo de tanto rigor, evidências tanto a favor quanto contra a sua adequação foram surgindo. Os testes empíricos do *CAPM*, de acordo com Campbell, Lo e MacKinlay (1997, p. 182), são principalmente voltados a verificar se o intercepto da

equação (1.1) é zero:

$$\mathbb{E}[R_i] - r_f = \alpha_i + \beta_i(\mathbb{E}[R_m] - r_f), \quad (1.1)$$

tal que  $\mathbb{E}[R_i]$  é a esperança da taxa de retorno de um ativo  $i$  qualquer,  $\mathbb{E}[R_m]$  é a esperança da taxa de retorno da carteira que representa o mercado,  $r_f$  é a taxa de retorno do ativo livre de risco e  $\beta_i$  é o risco não-diversificável do ativo  $i$ . Em essência, o *CAPM* conduz a dois resultados: (a) o retorno esperado de qualquer ativo é uma função linear positiva de seu risco não-diversificável e (b) o risco sistêmico<sup>2</sup>,  $\beta$ , é suficiente para caracterizar a taxa de retorno esperada do ativo ao qual está associado.

Um dos efeitos encontrados mais relatados na literatura é o efeito tamanho. Este efeito foi primeiramente descrito por Banz (1981). Em sua pesquisa, o autor examinou a relação empírica entre a taxa de retorno e o valor de mercado total de ações ordinárias negociadas na bolsa de valores de Nova Iorque (NYSE – *New York Stock Exchange*). Foi verificado que empresas com menor valor de mercado tiveram retornos ajustados ao risco maiores que empresas com maior valor de mercado.

Esta evidência levantou a possibilidade de o *CAPM* ser um modelo mal-especificado. Na verdade, não era possível dizer que o tamanho, medido pelo valor de mercado da companhia, seria um fator importante, mas ausente no modelo, ou se ele era apenas uma variável capturando o efeito de alguma outra, ainda desconhecida, mas correlacionada a esta.

Este efeito, quando verificado, é freqüentemente tratado como uma anomalia. Isto porque, conforme Berk (1995), os economistas ainda não foram bem-sucedidos em explicar teoricamente este efeito. Schwert (1983) afirma que, quando uma anomalia é encontrada em um teste empírico, assume-se que a variável causadora do efeito anômalo é entendida como uma *proxy* de medida de risco. Black (1993) rebate esta afirmação, dizendo que não há razões teóricas suficientes que dêem suporte a esta conjectura.

Outra anomalia encontrada em testes do modelo *CAPM* é o efeito alavancagem, encontrado por Bhandari (1988). Conforme Fama e French (1992), é plausível que a alavancagem esteja associada ao risco e ao retorno esperado dos ativos, mas o *CAPM* deveria capturar com o  $\beta$  este tipo de risco. Bhandari (1988) verificou que o retorno esperado das ações é positivamente relacionado à alavancagem de mercado, mantendo como controle tanto o  $\beta$  da empresa como seu tamanho conforme sugerido por Banz (1981).

---

<sup>2</sup>Na literatura brasileira, é comum também o uso da expressão *risco sistemático* para se referir ao  $\beta$ . Exemplo disso é o livro-texto Ross, Westerfield e Jaffe (2002) com tradução do Prof. Dr. Antonio Zoratto Sanvicente e o livro-texto de Assaf Neto (2007).



Algumas outras anomalias foram verificadas, como a reportada por Basu (1977), referente ao índice preço/lucro. Esta anomalia seria explicada por expectativas exageradas por parte dos investidores, e os resultados mostraram que empresas com baixo índice preço/lucro apresentaram retornos superiores, mesmo quando controladas pelo risco medido com o  $\beta$  do *CAPM*. Stoll e Whaley (1983), seguindo a linha do estudo de Banz (1981), encontram também que o preço por ação é outro fator que ajuda a explicar o retorno das ações. Em sua pesquisa, empresas com baixo preço por ação exibiram retornos superiores ao esperado, mesmo controlando pelo  $\beta$  e pelo tamanho.

Outro fator comum na literatura é o valor contábil das ações ordinárias dividido pelo seu valor de mercado<sup>3</sup>. Stattman (1980), Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) e Fama e French (1992) encontram evidências de que empresas com maior *BE/ME* apresentam retornos superiores, mesmo controlando pelo  $\beta$ . Fama e French (1992) estudam o efeito conjunto do  $\beta$ , do tamanho, do índice preço/lucro, da alavancagem e do índice *BE/ME*. Como resultado, encontram que em conjunto com outros fatores ou separado, o  $\beta$  tem pouco poder de explicar os retornos esperados dos ativos. Todavia, os demais fatores, em conjunto, têm poder explicativo sobre os retornos. Por fim, reportam como grande resultado que o tamanho e o índice *BE/ME* contêm grande parte da informação contida nos índices de alavancagem e preço/lucro. Estes resultados deram origem ao modelo de três fatores de Fama e French (1993), que inclui também o  $\beta$  dos ativos.

Várias foram as causas levantadas para o fraco desempenho do *CAPM*. Além do problema de omissão de variáveis do modelo, outro fator relatado na literatura diz respeito à variação no tempo da medida de risco, o  $\beta$ . Segundo Blume (1971, p. 6), nenhuma variável econômica, inclusive o coeficiente  $\beta$ , é constante ao longo do tempo. Conforme o mesmo autor, por algum motivo, indivíduos podem agir como se os valores de  $\beta$  fossem constantes ou estacionários, mas que na verdade não o são. Resultado semelhante é reportado por Jacob (1971), que afirma que o retorno médio obtido ao investir em uma carteira não dependerá unicamente do  $\beta$  do ativo, mas que dependerá também, dentre outros fatores, do horizonte de tempo utilizado para gerar as distribuições das taxas de retorno.

Apesar da ampla aceitação inicial do modelo de mercado, um pré-requisito essencial para usar o  $\beta$  como previsor do retorno de uma carteira é, segundo Klemkosky e Martin (1975), que ele possua adequada capacidade de previsão em períodos de tempo futuros. Caso não seja possível realizar previsões de valores futuros do coeficiente  $\beta$ , a aplicabilidade do *CAPM* ficará comprometida. Fabozzi e Francis (1978) sugerem que a medida de risco sistêmico pode ser um coeficiente aleatório, ou seja, que o valor verdadeiro do coeficiente  $\beta$  está se movendo aleatoriamente enquanto que as técnicas de estimação empregadas eram

---

<sup>3</sup>Comumente também reportado na literatura como *book-to-market equity* (*BE/ME*).

sempre pontuais para um intervalo de tempo amostral. Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988), Harvey (1989) e Ferson e Harvey (1991, 1993, 1999) estimam o *CAPM* levando em consideração que as covariâncias entre os pares de ativos e os betas variam ao longo do tempo.

Uma outra abordagem de investigação do *CAPM* foi conduzida na tentativa de descobrir se momentos de ordem superior à variância eram fatores de risco relevantes. Markowitz (1959, cap. 9) sugere a semivariância<sup>4,5</sup> como uma medida alternativa de risco. Segundo ele, quando todas as distribuições forem simétricas, ou tiverem o mesmo grau de assimetria, a carteira eficiente encontrada usando-se o conceito da semivariância será a mesma daquela encontrada quando a medida de risco for a variância. Do contrário, entre carteiras com mesmo retorno e mesma variância, o investidor deveria escolher a de maior assimetria à direita (ou aquela com menor assimetria à esquerda).

A partir desta intuição proposta por Markowitz (1959) de que a assimetria seria um momento relevante para a decisão de investimento, outras pesquisas passaram a incorporar este momento como um fator de risco importante, mas omitido no *CAPM*. A primeira pesquisa nessa linha, considerando assimetria da taxa de retorno como uma medida de risco e sua relação com a taxa de retorno esperada de um ativo, foi realizada por Arditti (1967). A teoria apresentada por Arditti (1967) foi aperfeiçoada em Levy (1969)<sup>6</sup>. Jean (1971) busca estender a análise de carteiras para três ou mais momentos. Seus resultados são posteriormente contestados e corrigidos por Ingersoll Jr. (1975), e Rubinstein (1973) analisa as preferências do investidor com relação ao terceiro momento.

No contexto do apreçamento de ativos, o primeiro estudo a fazer a extensão do *CAPM* incorporando o efeito da assimetria foi o conduzido por Kraus e Litzenberger (1976). Sua pesquisa evidenciou que a assimetria sistêmica, que posteriormente passou a ser chamada de coassimetria<sup>7</sup>, é relevante como um fator de risco e deveria ser incluída no modelo.

---

<sup>4</sup>A semivariância é a variância das observações cujas taxas de retorno são inferiores à taxa de retorno média. Seu objetivo é focar a atenção no risco do lado esquerdo da distribuição de probabilidades das taxas. Quando seu valor é maior que o da variância das mesmas observações, a distribuição é assimétrica à esquerda. Caso contrário, a distribuição é assimétrica à direita.

<sup>5</sup>Uma distribuição que apresenta uma quantidade maior de valores extremos à direita da média do que à sua esquerda é dita “assimétrica à direita”.

<sup>6</sup>Arditti (1967) afirma que momentos de quarta ordem em diante adicionam pouca ou nenhuma informação. Levy (1969) prova que isto só é verdade se for assumido que a função de utilidade do investidor for do tipo cúbica.

<sup>7</sup>A literatura estrangeira sobre este assunto costuma utilizar os termos *co-skewness* e *coskewness* indistintamente para se referir à assimetria sistêmica. Após uma pesquisa em sítios de busca acadêmica, feita em 25 de março de 2008, foram encontradas 383 entradas para o termo *co-skewness* e 302 entradas para o termo *coskewness*. Em sítios de busca geral, foram encontradas 1870 entradas para o termo *co-skewness* e 2550 entradas para o termo *coskewness*. Em português, não foram encontradas entradas para o termo coassimetria. Foram encontradas 5 entradas para o termo co-assimetria em sítios de busca acadêmica e 6 em sítios de busca geral. Todavia, esta tese adotará o termo “coassimetria”, sem o hífen,

Seus resultados indicaram que os investidores têm aversão por variância e predileção por assimetria positiva.

Posteriormente ao trabalho de Kraus e Litzenberger (1976), vieram outras pesquisas como as de Friend e Westerfield (1980), Sears e Wei (1985, 1988), Singleton e Wingender (1986), Lim (1989) e Harvey e Siddique (2000a, 2000b), sempre tentando verificar a validade da proposição de um modelo de apreçamento com momentos até a terceira ordem.

Os resultados obtidos nestas pesquisas criaram espaço para a verificação da possibilidade de incorporação de mais momentos. Homaifar e Graddy (1988) foram os primeiros a investigar a possibilidade de a curtose sistêmica (ou cocurtose) ser, também, um fator de risco importante em modelos de apreçamento. O resultado de sua pesquisa indicou que investidores são compensados com uma taxa de retorno esperada mais alta ao investir em ativos com variância sistêmica e curtose sistêmica mais altas, *ceteris paribus*. Com relação à assimetria sistêmica, investidores abrem mão de retorno esperado para ter o benefício de investir em ativos com coassimetria positiva, *ceteris paribus*. Outras pesquisas que verificam a importância do quarto momento em modelos de apreçamento são as de Fang e Lai (1997), Jondeau e Rockinger (2002, 2004), Galagedera, Henry e Silvapulle (2003) e Harvey et al. (2004).

## 1.2 Formulação da Situação Problema

Desde os trabalhos seminais de Markowitz (1952, 1959), momentos são associados a medidas de risco em finanças. A variância da taxa de retorno é amplamente associada ao seu risco por ser uma medida de sua variabilidade. A assimetria passou a ser uma outra medida de risco, estando associada à vulnerabilidade do investidor em obter retorno extremos do lado negativo. O termo cunhado para este risco é *downside risk*. Já a curtose possui significado um pouco mais complexo, estando associada às caudas e ao pico da distribuição. As caudas pesadas significam a existência de observações extremas mais freqüentes que o esperado.

A intuição para se incluir momentos como assimetria e curtose a fim de testar modelos de apreçamento, vem do fato de que distribuições positivamente assimétricas oferecem probabilidade, mesmo que muito pequena, de ganhos extraordinários ao mesmo tempo em que limitam a possibilidade de perdas muito grandes. Sendo assim, é esperado que

---

para se referir à assimetria sistêmica sob a justificativa de que um termo semelhante, a covariância, é amplamente utilizada sem este sinal diacrítico.

o investidor racional tenha preferência por distribuições positivamente assimétricas em detrimento das negativamente assimétricas, dado o potencial desta última em apresentar perdas muito severas. Esta preferência seria refletida no modelo de apreçamento por meio de um prêmio menor a ser demandado pelo investidor no caso de carteiras positivamente assimétricas.

A curtose, segundo Fang e Lai (1997), refere-se à tendência da distribuição das taxas de retorno em apresentar uma frequência alta de observações em torno da média ou nas caudas. Conforme Scott e Horvath (1980), investidores possuem preferências por momentos ímpares como esperança e assimetria e são avessos a momentos pares, como a variância e a curtose.

A proposta da tese é, portanto, a de usar um modelo de apreçamento inspirado no *CAPM*, estendido até o quarto momento, e testar a plausibilidade, no mercado brasileiro, de que momentos de ordem superior à variância possam explicar melhor as taxas de retorno de ativos. Assim, buscar-se-á resposta para o seguinte problema de pesquisa: os comomentos até quarta ordem, ou seja, a covariância, coassimetria e cocurtose são fatores de risco que exercem alguma influência sobre a taxa de retorno esperada de ativos financeiros negociados na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo, a Bovespa? E, se exercem, de que maneira essa influência é verificada?

## 1.3 Objetivos

O objetivo geral da tese é o de investigar, empiricamente, a possível relação entre momentos sistêmicos (covariância, coassimetria e cocurtose) e a taxa de retorno esperada de ativos financeiros negociados no mercado brasileiro.

Além do objetivo geral, o desenvolvimento da tese permitirá alcançar alguns objetivos específicos, tais como:

- (a) apresentar as razões para se usar comomentos variando no tempo em modelos de apreçamento;
- (b) fornecer uma metodologia para o cálculo e teste da significância dos comomentos;
- (c) examinar os sentidos das relações existentes entre as taxas de retorno dos ativos e os parâmetros de risco baseados em comomentos.

## 1.4 Justificativa

Modelos de apreçamento de ativos têm sido um tema sob constante investigação em finanças. Desde Sharpe (1964), esses modelos relacionam, geralmente de maneira linear, a taxa de retorno esperada de um ativo ou carteira de ativos com fatores de risco sistêmico. Dentre variados modelos propostos na literatura, encontram-se os sugeridos por Black (1972), Merton (1973), Kraus e Litzenberger (1976), Ross (1976), Homaifar e Graddy (1988), Jagannathan e Wang (1996), Fang e Lai (1997) e Harvey e Siddique (2000a, 2000b).

Os modelos propostos suscitaram inúmeros outros trabalhos que buscaram testar a validade de suas proposições nos mais distintos mercados ao redor do mundo. Os resultados encontrados, muitas vezes conflitantes ou ambíguos entre si, estimularam pesquisadores a concentrarem sua atenção também nas técnicas estatísticas empregadas nos testes realizados. Black, Jensen e Scholes (1972) e Fama e MacBeth (1973) desenvolveram uma metodologia específica para testar modelos de apreçamento, e deram a ela o nome de metodologia em duas passagens<sup>8</sup>. Nesta metodologia, o coeficiente  $\beta$  de cada ativo é estimado, naquilo que vem a ser a primeira passagem, conforme preconiza o modelo de apreçamento, usando-se dados longitudinais. Os coeficientes estimados são então utilizados, numa segunda passagem, como regressores de uma equação linear que relaciona o prêmio pelo risco dos ativos (variável dependente) aos fatores de risco estimados na primeira passagem (regressores). Shanken (1992) e Kan e Zhang (1999a, 1999b) analisam as metodologias mais comuns utilizadas nos testes dos modelos de apreçamento, buscando destacar principalmente as ambiguidades dos resultados encontrados em trabalhos anteriores.

Além dos aspectos metodológicos envolvidos ao testar um modelo de apreçamento, diversas anomalias são constantemente relatadas na literatura. Tais anomalias incluem principalmente os efeitos tamanho, relatado em Banz (1981), alavancagem, relatado em Bhandari (1988), e a razão entre valor contábil e valor de mercado, relatado em Stattman (1980). Estas e outras anomalias são amplamente discutidas em Fama e French (1992, 1993).

A cada verificação de uma anomalia, a reputação do *CAPM* como um modelo de equilíbrio de preços de mercado era colocada em dúvida. As anomalias davam indícios de que havia variáveis omitidas não-especificadas pelo modelo mas que apresentavam forte relação com as taxas de retorno. Aumentos no  $R^2$  das regressões indicavam que havia melhoria do modelo de apreçamento na presença de novos fatores. Porém, apesar da intuição que tais fatores apresentam, é senso comum, conforme Barone-Adesi, Gagliardini

---

<sup>8</sup>O termo original em inglês é *two-pass methodology*.

e Urga (2004), que apenas a persistência de sinal e magnitude de seus coeficientes ao longo do tempo dará à comunidade científica a segurança de que algum deles é um fator verdadeiramente associado à taxa de retorno dos ativos e percebido como um fator de risco pelos investidores.

Ademais, a não-normalidade da distribuição das taxas de retorno de ativos financeiros é algo também bastante documentado na literatura. Conforme Bekaert et al. (1998), mercados emergentes são especialmente caracterizados por estes problemas de não-normalidade, tornando os modelos baseados no critério esperança-variância inadequados para utilização nestes locais, uma vez que não caracterizam adequadamente as medidas de taxa de retorno.

Mercados emergentes sofrem não apenas com o problema da existência destes outros momentos, mas também com o fato de que eles mudam significativamente de valor ao longo do tempo. Bekaert et al. (1998) estudaram a relação em 19 países emergentes e chegaram à conclusão de que não é adequado tratar esses mercados da mesma maneira que são tratados os mercados desenvolvidos, uma vez que suas taxas de retorno apresentam distribuições com desvios substanciais do padrão da normalidade.

Da forma como foi concebido originalmente por Sharpe (1964), há evidências de que o *CAPM* pode não ser um modelo adequado para o mercado brasileiro. Conforme Silveira e Castro Junior (2006), a taxa de retorno do Ibovespa apresenta problemas de não-normalidade. Assim, considera-se justificado o esforço de estimar uma extensão do *CAPM*, considerando fatores de risco além do  $\beta$  do modelo original, mantendo controladas pelas variáveis que proporcionaram efeitos anômalos em estudos anteriores.

## 1.5 Delimitação

As suposições iniciais do *CAPM* eram de que os investidores deveriam atribuir preços unicamente aos riscos de mercado. Pesquisas empíricas como as apresentadas até aqui, especialmente o trabalho de Fama e French (1992, 1993), apontam evidências de que há outros fatores de risco que não são de mercado mas que se mostram significativos em seus estudos. Outros trabalhos seguem pela linha de incorporar fatores de mercado ligados aos momentos, expandindo o *CAPM* com tais fatores, tais como a coassimetria ou cocurtose. Chung, Johnson e Schill (2006) argumentam que não há razão para parar no quarto momento. Porém, embora tais momentos superiores ao quarto possam eventualmente ser relevantes como fatores de risco que explicam o comportamento da taxa de retorno, eles não serão utilizados nesta tese.

Esta decisão se justifica no fato de que, apesar da evidência apresentada por Chung, Johnson e Schill (2006) de que a significância dos fatores sugeridos por Fama e French (1992, 1993) é reduzida na presença destes comomentos, em seu estudo empírico, Chung, Johnson e Schill (2006) utilizam comomentos “somente” até a décima ordem. Dado que os comomentos são virtualmente infinitos, não há também uma justificativa teórica para truncá-los na décima ordem, ou em qualquer outra. Sendo assim, decidiu-se por usar os fatores de Fama e French (1992, 1993) e dos demais estudos em vez de expandir o modelo com comomentos.

Outra delimitação desta tese está relacionada ao tratamento empírico empregado. Serão estudadas exclusivamente empresas de capital aberto, especialmente aquelas com negociação na Bovespa entre os anos de 2003 e 2007, com dados suficientes para as estimações econométricas necessárias.

## 1.6 Hipóteses de Pesquisa

Investidores, ao formarem carteiras, devem dedicar tempo e atenção ao ato de selecionar ativos. Conforme Markowitz (1959, p. 3), uma boa carteira é mais que uma longa lista de bons ativos. A carteira deve proporcionar ao investidor um conjunto amplo de oportunidades e proteções com relação às contingências.

A natureza incerta das taxas de retorno dos ativos financeiros estimula pesquisas que buscam explicar que fatores observáveis do comportamento dos ativos (ou das empresas que os emitem) atraem ou afastam investidores. As publicações na linha de seleção de ativos para formação de carteiras, especialmente as de Markowitz (1952, 1959), salientaram uma característica importante para toda a teoria de apreçamento de ativos: a de que ativos financeiros são correlacionados com outros ativos, e que o bom entendimento deste atributo é fundamental para o conceito de risco.

Em uma carteira com muitos ativos, se as taxas de retorno destes não fossem correlacionadas entre si, seria possível encontrar uma combinação de ativos capaz de eliminar todo o risco da carteira (LUENBERGER, 1998, p. 151-2). Todavia, a existência de uma correlação diferente de zero, faz com que seja possível eliminar parte do risco, mas não sua totalidade. O *CAPM* relacionou a covariância entre um ativo ou carteira de ativos com uma ampla carteira representando todos os ativos do mercado a uma medida de risco sistêmico, e popularizou o termo  $\beta$  para designar esse risco.

O principal resultado do modelo é a relação positiva existente entre o excesso de retorno

de um ativo (ou carteira de ativos) e seu risco sistêmico, ou seja, ativos cujo risco medido pelo  $\beta$  for mais elevado deverão proporcionar, em média, uma taxa de retorno mais elevada. Esta associação positiva é racionalmente intuitiva, e verificada empiricamente nos estudos que originalmente formularam esta hipótese, assim como diversos outros que se seguiram. Adicionalmente, o CAPM será estendido a fim de contemplar mais dois outros comomentos: a coassimetria e a cocurtose. O desenvolvimento teórico desse modelo, a ser apresentado oportunamente, completará o modelo teórico a ser testado empiricamente.

A natureza não-estável das medidas de risco, em especial a do  $\beta$ , tratada em estudos como os de Blume (1971) e Jacob (1971), assim como outros já citados anteriormente, é outro aspecto empírico a ser tratado econometricamente nesta tese. Devido a esta característica, a estimação será feita por meio de uma análise de dados em painel, que considera tanto a natureza transversal como longitudinal dos dados.

Assim, foram formuladas as seguintes hipóteses nulas ( $H_0$ ) contra suas respectivas hipóteses alternativas ( $H_a$ ):

$H_{0,1}$ : líquida dos efeitos da coassimetria e da cocurtose, a covariância entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado não está relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos.

$H_{a,1}$ : líquida dos efeitos da coassimetria e da cocurtose, a covariância entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado está positivamente relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos.

$H_{0,2}$ : líquida dos efeitos da covariância e da cocurtose, a coassimetria entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado não está relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos.

$H_{a,2}$ : líquida dos efeitos da covariância e da cocurtose, a coassimetria entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado está relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos, sendo essa relação de sinal contrário ao sinal da assimetria das taxas de retorno da carteira de mercado.

$H_{0,3}$ : líquida dos efeitos da covariância e da coassimetria, a cocurtose entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado não está relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos.

$H_{a,3}$ : líquida dos efeitos da covariância e da coassimetria, entre as séries de taxas de retorno dos ativos individuais e da carteira de mercado está positivamente relacionada com o prêmio pelo risco dos respectivos ativos.



## 1.7 Contribuições da Pesquisa

Em primeiro lugar, até onde foi possível verificar, esta pesquisa será pioneira ao investigar a contribuição de comomentos para a teoria de apreçamento de valores mobiliários por meio de uma metodologia de dados em painel. Assim, cada empresa terá um comomento calculado para cada ano do período amostral, ao invés de um comomento único dentro de todo o período estudado. Busca-se com isso inovar e oferecer uma contribuição empírica para a teoria de apreçamento em finanças, especialmente para os dados brasileiros.

Pesquisas recentes apontam para a utilização de comomentos como regressores na busca de explicar melhor o prêmio exigido de um ativo. Todavia, os resultados ainda são controversos, porém promissores. Além dos comomentos, serão utilizados também no modelo os principais efeitos, ditos anômalos, reportados na literatura financeira. Essas variáveis servirão como controle, e sua utilização tem por objetivo obter os efeitos líquidos dos comomentos.

Espera-se, portanto, que os resultados empíricos da tese possam reforçar a importância destes novos fatores de risco baseados em comomentos. Espera-se também verificar empiricamente o sentido teórico das relações estatísticas entre cada comomento e o prêmio dos ativos, e, por fim, reforçar a necessidade de utilização da metodologia de dados em painel no teste de tais modelos.

## 1.8 Descrição dos Capítulos

A organização desta tese se dá em cinco capítulos e três apêndices. O primeiro apresenta uma breve introdução ao tema da pesquisa, a formulação da situação problema, que é o de testar a plausibilidade de um modelo de apreçamento de ativos, com dados brasileiros, que faz uso de comomentos como coassimetria e cocurtose, além da covariância. O capítulo apresenta ainda a justificativa e importância do tema pesquisado, assim como as principais hipóteses a serem testadas e as contribuições esperadas.

No capítulo seguinte, é apresentada a fundamentação teórica, destacando-se a gênese dos modelos de apreçamento, começando na teoria da utilidade e nos conceitos de risco e retorno. Em seguida, é abordada, de forma matricial, a teoria de carteiras que é a base para o *CAPM*, modelo do qual deriva o modelo testado por esta tese. O capítulo 3 apresenta o método econométrico utilizado para a especificação e teste do modelo. O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos na pesquisa, e, por fim, o capítulo 5 traz as

principais conclusões do estudo. Dados e tabelas que podem interessar ao leitor, mas que não são essenciais ao texto, encontram-se nos apêndices a esta tese, logo após as referências.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

*“The CAPM is still the preferred model for classroom use in MBA and other managerial finance courses. In a way it reminds us of cartoon characters like Wile E. Coyote who have the ability to come back to original shape after being blown to pieces or hammered out of shape.”*

---

Jagannathan e Wang (1996)

### 2.1 Teoria da Utilidade

#### 2.1.1 Introdução

A hipótese principal da Teoria da Utilidade é a de que agentes tomam suas decisões de investimento objetivando maximizar sua utilidade esperada. Bernoulli (1954) descreve o seguinte exemplo: *De alguma forma, uma pessoa muito pobre obtém um bilhete de loteria que premia, com probabilidades iguais, 20.000 moedas de ouro ou nada.*

A pergunta que pode ser feita imediatamente é se esta pessoa avaliará em 10.000 moedas de ouro suas chances de ganhar esta loteria. Será que ela não a venderia por 9.000 moedas

de ouro? E se fosse feita a uma pessoa rica uma proposta de comprar o bilhete por 9.000 moedas de ouro? Será que ela recusaria? Talvez não. Fica evidente, portanto, que estas duas pessoas usam regras de decisão completamente diferentes, mesmo a loteria pagando a ambos o mesmo valor monetário. Elas decidem não com base no valor, mas na *utilidade* que este valor proporciona. Assim, não resta dúvida de que a utilidade do ganho de 1.000 moedas de ouro é muito maior para o homem pobre que para o homem rico.

As decisões de consumo dos indivíduos, bem como de investimento sob condições de incerteza, sofrem influências de diversos aspectos que devem ser levados em consideração. E a teoria que fornece este suporte é a *Teoria da Utilidade Esperada*. Bernoulli (1954) assim descreve sua regra fundamental:

Se a utilidade de cada esperança de lucro possível for multiplicada pelo número de maneiras pelas quais ela pode ocorrer, e dividirmos a soma destes produtos pelo número total de casos possíveis, uma utilidade média [expectativa moral] será obtida, e o lucro correspondente a esta utilidade igualará o valor do risco em questão.<sup>9</sup>

Esta regra fundamental ficou conhecida como Hipótese ou Princípio de Bernoulli, conforme Borch (1968) e Park e Sharp-Bette (1990, p. 357). De maneira mais formal, as preferências de um agente econômico possuem uma representação da utilidade esperada se existir uma função  $u$  tal que o consumo estocástico  $X$  for preferível ao consumo aleatório  $Y$  se, e somente se,

$$\mathbb{E}[u(X)] > \mathbb{E}[u(Y)], \quad (2.1)$$

tal que  $\mathbb{E}[\cdot]$  é o operador esperança idiossincrático do agente.

O tratamento da utilidade como uma quantidade medida numericamente foi um tema polêmico até von Neumann e Morgenstern (1947) tratarem as preferências com o auxílio de probabilidades objetivas quanto às suas ocorrências na natureza. As relações de preferência, bem como sua representação, serão tratadas a seguir.

---

<sup>9</sup>If the utility of each possible profit expectation is multiplied by the number of ways in which it can occur, and we divide the sum of these products by the total number of possible cases, a mean utility [moral expectation] will be obtained, and the profit which corresponds to this utility will equal the value of the risk in question.

## 2.1.2 Representação das Preferências

Segundo Duffie (1988, p. 35), grande parte da teoria econômica baseia-se na premissa de que, dadas duas alternativas, um agente pode e irá, se capaz, escolher sua preferida. Formalmente, as preferências possuem propriedades analíticas, mostradas a seguir.

**Definição 1** *Seja  $X$  um conjunto de alternativas de consumo, o qual chamamos de plano de consumo. Uma relação binária, descrita como um sub-conjunto de  $X \times X$ , representado por  $P$ , é uma coleção de pares de planos de consumo  $(x,y)$ . Se  $(x,y) \in P$ , é possível escrever  $x \succcurlyeq y$  e dizer que  $x$  é preferível a  $y$ . Se  $(x,y) \notin P$ , então escreve-se  $x \not\succcurlyeq y$ , e diz-se que  $x$  não é preferível a  $y$ .*

**Definição 2** *Tanto  $x \succcurlyeq y$  quanto  $y \succcurlyeq x$  podem ser simultaneamente verdadeiros, de forma que é possível dizer que  $x$  é indiferente a  $y$ , representando simbolicamente por  $x \sim y$ .*

**Definição 3** *Finalmente, se  $x \succcurlyeq y$  mas  $y \not\succcurlyeq x$ , diz-se que  $x$  é estritamente preferível a  $y$  e sua representação é  $x > y$ .*

**Definição 4** *Uma relação binária é dita transitiva se  $x \succcurlyeq y$  e  $y \succcurlyeq v$  implicar que  $x \succcurlyeq v$ ; ou seja, se  $x$  é preferível a  $y$  e  $y$  é preferível a  $v$ , então  $x$  é preferível a  $v$ .*

**Definição 5** *Uma relação binária é dita completa se, para quaisquer dois planos de consumo  $x$  e  $y$ , for sabido que  $x \succcurlyeq y$  ou que  $y \succcurlyeq x$ ; ou seja, quaisquer dois planos de consumo sempre podem ser comparados.*

**Definição 6** *Uma relação de preferência é uma relação binária que é ao mesmo tempo transitiva e completa. Entre dois planos de consumo  $x$  e  $y$ , ela é representada por  $x \succcurlyeq y$ . É possível ainda definir uma relação de indiferença e uma relação de preferência estrita entre os planos de consumo  $x$  e  $y$ , representadas, respectivamente, por  $x \sim y$  e  $x > y$ .*

## 2.1.3 Representação da Utilidade

É possível dizer que uma função  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  representa uma preferência  $\succcurlyeq$  se, para todo  $x$  e  $y \in X$ ,  $x \succcurlyeq y$  se, e somente se,  $u(x) \geq u(y)$ . Se a função  $u$  representa a relação de preferência  $\succcurlyeq$ , podemos nos referir a ela como *função de utilidade* e dizer que  $\succcurlyeq$  possui uma representação sob a forma de utilidade.

Em termos econômicos, é muito mais vantajoso usar o conceito de utilidade que simplesmente o de preferência. Isto porque é mais conveniente expressar a decisão sob a forma

de uma maximização de uma função numérica a uma relação de preferências. Caso seja possível garantir a existência de funções de utilidade para toda relação de preferência sem perda de generalidade, conseguir-se-iam resolver situações como: alternativa  $a$  é preferível à alternativa  $b$  mais que a alternativa  $c$  é preferível à alternativa  $d$ .

Fica, portanto, a pergunta que precisa ser respondida: sob quais circunstâncias uma relação de preferência pode ser representada por uma função de utilidade? A seguinte proposição necessita ser provada.

**Proposição 1** *Quando  $X$  possui um número finito de elementos, uma relação de preferência  $\succsim$  sempre pode ser representada por uma função de utilidade.*

Segundo Rubinstein (2006), uma maneira de provar esta proposição é feita a partir da prova do seguinte lema, que diz respeito à existência de elementos mínimos (um elemento  $a \in X$  é mínimo se  $a \preccurlyeq x$  para qualquer  $x \in X$ ).

**Lema 1** *Em qualquer conjunto finito  $A \subseteq X$  existe um elemento mínimo, assim como também um máximo.*

**Prova** *Por indução, a respeito do tamanho de  $A$ : se  $A$  é um conjunto unitário, então seu único elemento é mínimo.*

*Por indução, seja  $A$  um conjunto de cardinalidade  $n + 1$  e seja  $x \in A$ . O conjunto  $A - \{x\}$  possui cardinalidade  $n$  e, pela hipótese da indução, possui um elemento mínimo o qual chamamos de  $y$ . Se  $x \succsim y$ , então  $y$  é mínimo em  $A$ . Se  $y \succ x$ , então por transitividade  $z \succ x$  para todo  $z \in A - \{x\}$  e então  $x$  é mínimo. ■*

Seja a seguinte proposição.

**Proposição 2** *Se  $\succsim$  é uma relação de preferência sobre um conjunto finito  $X$ , então  $\succsim$  possui uma representação sob a forma de utilidade cujos valores são números naturais.*

**Prova** *Será construída, por indução, uma seqüência de conjuntos. Seja  $X_1$  o sub-conjunto de elementos que são mínimos em  $X$ . Pelo Lema 1,  $X_1$  não é um conjunto vazio. Assumindo que foram construídos os conjuntos  $X_1, \dots, X_k$ , se  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ , a prova está concluída. Se não, defina  $X_{k+1}$  como sendo o conjunto de elementos mínimos em  $X - X_1 - X_2 - \dots - X_k$ . Pelo Lema 1,  $X_{k+1} \neq \emptyset$ . Uma vez que  $X$  é um conjunto finito, deve-se concluir a prova em no máximo  $|X|$  passos. Defina  $u(x) = k$  se  $x \in X_k$ . Assim,  $u(x)$  é o passo em que  $x$  é “eliminado”. Agora então, é possível verificar que  $u$  representa  $\succsim$ . Seja  $a \succsim b$ . Assim  $b \notin X - X_1 - X_2 - \dots - X_{u(a)}$  e então  $u(a) \geq u(b)$ . ■*

Agora, sem acrescentar qualquer outra hipótese a respeito das preferências, a existência de uma representação sob a forma de utilidade é garantida quando o conjunto  $X$  é enumerável.

Seja a seguinte proposição.

**Proposição 3** *Se  $X$  é enumerável, então qualquer relação de preferência a respeito de  $X$  possui uma representação sob a forma de utilidade dentro do intervalo  $(-1,1)$ .*

**Prova** *Seja  $\{x_n\}$  uma enumeração de todos os elementos de  $X$ . A função de utilidade será construída por indução. Faça  $u(x_1) = 0$ . Assumindo que todos os valores  $u(x_1), \dots, u(x_{n-1})$  foram definidos de tal forma que  $x_k \succcurlyeq x_l$  se, e somente se,  $u(x_k) \geq u(x_l)$ . Se  $x_n$  for indiferente a  $x_k$  para algum  $k < n$ , então faça  $u(x_n) = u(x_k)$ . Se não, por transitividade, todos os números no conjunto  $\{u(x_k) \mid x_k < x_n\} \cup \{-1\}$  estão abaixo de todos os números do conjunto  $\{u(x_k) \mid x_n < x_k\} \cup \{1\}$  e então escolha  $u(x_n)$  entre os dois conjuntos. Isto garante que, para qualquer  $k < n$ , teremos  $x_n \succcurlyeq x_k$  se, e somente se,  $u(x_n) \geq u(x_k)$ . Assim, a função definida sobre  $\{x_1, \dots, x_n\}$  representa a preferência a respeito destes elementos.*

*Para completar a prova de que  $u$  representa  $\succcurlyeq$ , basta tomar quaisquer dois elementos,  $x$  e  $y \in X$ . Para algum  $k$  e  $l$ , tem-se  $x = x_k$  e  $y = x_l$ . Isto aplicado a  $n = \max\{k, l\}$ , fornece  $x_k \succcurlyeq x_l$  se, e somente se,  $u(x_k) \geq u(x_l)$ . ■*

## 2.1.4 Axiomas da Teoria da Utilidade

Há seis axiomas necessários e suficientes para que uma relação binária definida sobre um espaço de probabilidades  $\mathbb{P}$  possa ter uma representação sob a forma de utilidade esperada. Conforme Bekman e Costa Neto (1980, p. 56), os axiomas são:

**Axioma 1** *Axioma da Ordenabilidade*

*$>$  é uma relação de preferência sobre  $\mathbb{P}$ , e dados os prêmios  $p$  e  $r$ , para todo  $p, r \in \mathbb{P}$  ou  $p > r$ , ou  $p \sim r$ , ou  $p < r$ .*

**Axioma 2** *Axioma da Transitividade*

*Para todo  $p, q, r \in \mathbb{P}$ , se  $p > q$  e  $q > r$ , então  $p > r$ .*

**Axioma 3** *Axioma da Continuidade*

Para todo  $p, q, r \in \mathbb{P}$ , se  $p \succ q \succ r$ , então existe  $\alpha \in (0,1)$  tal que  $q \sim \alpha p + (1 - \alpha)r$ .

Este axioma ilustra que, dadas três loterias cuja relação de preferência estrita seja da forma  $p \succ q \succ r$ , podemos combinar a preferível entre as loterias com a não-preferível  $(p,r)$  por meio de um  $\alpha \in (0,1)$  de tal forma que a composição de  $p$  e  $r$  torna-se indiferente à loteria intermediária  $q$ .

**Axioma 4** *Axioma da Substitutibilidade*

Para todo  $p, q, r \in \mathbb{P}$ , se  $p \sim q$ , então  $\alpha p + (1 - \alpha)r \sim \alpha q + (1 - \alpha)r$  para todo  $\alpha \in (0,1)$ .

Este axioma também é bastante conhecido como o axioma da independência ou, ainda, como axioma do cancelamento. Ele pode ser ilustrado com o seguinte exemplo:

**Exemplo 1** *Sejam duas loterias disponíveis  $L_1$  e  $L_2$ , que consistem no lançamento de uma moeda com chance  $\alpha$  de dar cara. Os prêmios das loterias são definidos a seguir:*

$L_1$  : se der cara, ganha-se  $p$ , caso contrário,  $r$ .

$L_2$  : se der cara, ganha-se  $q$ , caso contrário,  $r$ .

Suponha que o apostador prefere  $p$  a  $q$ . Ele então pensa: “Se der coroa, ganharei  $r$  com certeza, portanto, escolherei  $L_1$ , pois no caso do resultado ser cara, posso receber  $p$ , que é a minha preferência.”

**Axioma 5** *Axioma da Redutibilidade*

Para todo  $p, r \in \mathbb{P}$ , e  $\alpha, \beta \in (0,1)$ ,  $[\alpha p + (1 - \alpha)r]\beta + (1 - \beta)r \sim \alpha\beta p + (1 - \alpha\beta)r$ .

**Axioma 6** *Axioma da Monotonicidade*

Para todo  $p, r \in \mathbb{P}$ , e  $\alpha, \beta \in (0,1)$ , se  $p \succ r$ , então  $\alpha p + (1 - \alpha)r \succ \beta p + (1 - \beta)r$  se, e somente se,  $\alpha > \beta$ .

**2.1.5 Evidências de Violação do Axioma da Substitutibilidade**

Dentre os seis axiomas apresentados, o da substitutibilidade é freqüentemente violado em alguns experimentos. O mais importante deles foi construído por Allais (1953) e Allais e Hagen (1979), razão pela qual passou a ser conhecido por Paradoxo de Allais.



Considere dois pares de loterias<sup>10</sup>, conforme descritas na Tabela 2.1. Evidências empíricas mostram que a maioria dos decisores, quando confrontados com a Decisão 1, preferem a Loteria A, que lhes dá 100 milhões com certeza ao invés da Loteria B que contém a chance, mesmo que muito pequena, de sair sem ganho algum. Por outro lado, a maioria dos decisores, quando confrontados com a Decisão 2, preferem a Loteria D. Isto faz com que estes decisores cometam uma violação do axioma da substitutibilidade.

**Tabela 2.1 – Paradoxo de Allais.**

Decisão 1	A	Ganhar \$100 milhões	com probabilidade 1
	B	Ganhar \$500 milhões	com probabilidade 0,10
		Ganhar \$100 milhões	com probabilidade 0,89
Decisão 2	C	Ganhar \$0	com probabilidade 0,01
		Ganhar \$100 milhões	com probabilidade 0,11
	D	Ganhar \$0	com probabilidade 0,89
		Ganhar \$500 milhões	com probabilidade 0,10
		Ganhar \$0	com probabilidade 0,90

Para verificar a violação, faça a diferença entre as utilidades das loterias  $A$  e  $B$  e entre as loterias  $C$  e  $D$ :

$$\begin{aligned}
 u(A) - u(B) &= u(\$100) - 0,1u(\$500) - 0,89u(\$100) - 0,01u(\$0) \\
 &= 0,11u(\$100) - 0,1u(\$500) - 0,01u(\$0) \\
 u(C) - u(D) &= 0,11u(\$100) + 0,89u(\$0) - 0,1u(\$500) - 0,9u(\$0) \\
 &= 0,11u(\$100) - 0,1u(\$500) - 0,01u(\$0)
 \end{aligned}$$

Como as diferenças entre as utilidades dos pares de loterias que compreendem cada decisão são exatamente iguais, não faz sentido algum, além de ser uma violação do axioma da substitutibilidade, escolher as Loterias  $A$  e  $D$ . Para manter a consistência da sua regra de decisão, ou escolhem-se as Loterias  $A$  e  $C$  ou as Loterias  $B$  e  $D$ .

Machina (1982) demonstrou que análises com base na utilidade esperada são robustas a violações do axioma da substitutibilidade, como as encontradas por Allais (1953). Machina mostrou que os principais resultados se mantêm quando é assumido que as preferências são suaves, ou seja, que sua função é diferenciável.

<sup>10</sup>Os valores a seguir aparecem de maneiras distintas em diferentes artigos. Foram adotados, todavia, os valores conforme o artigo original de Allais (1953).

## 2.2 Incerteza e Risco

Uma questão ainda discutida e controversa na literatura é a que diz respeito à diferença entre incerteza e risco, conceitos muitas vezes usados de forma equivalente. Segundo a definição de Knight (1921), a diferença entre risco e incerteza está no fato de, respectivamente, ter-se ou não uma distribuição de probabilidades associada aos possíveis resultados (*outcomes*) de cada evento. Porém, esta definição foi ficando ultrapassada com o tempo.

Em finanças, conforme discutido por Zimmer (2005, p. 24), o conceito de risco é atribuído à parte indesejável de uma distribuição de probabilidades. Assim, se a variável estocástica for estritamente positiva, não haverá perdas sob a forma de valores absolutos. Poderá sim, haver alguma perda, mas apenas com relação a um valor referencial esperado (*benchmark*). De acordo com Wirch (1999), risco pode ser definido como uma exposição a eventos que podem causar perdas econômicas. Assim, o risco pode estar em um valor mobiliário, em uma carteira de ativos ou mesmo em uma empresa.

A Figura 2.1, adaptada de Zimmer (2005, p. 26) busca esclarecer a distinção entre os dois conceitos. A região hachurada à esquerda do valor de referência (*benchmark*) é a parte utilizada para o cálculo de uma medida de risco, enquanto que toda a distribuição de probabilidades representa a incerteza. Desta forma, toda distribuição de probabilidades que contém em seu domínio valores abaixo do *benchmark*, possui risco. Se o *benchmark* ficar à esquerda do domínio da distribuição, diz-se que a variável estocástica não contém risco, apenas incerteza.

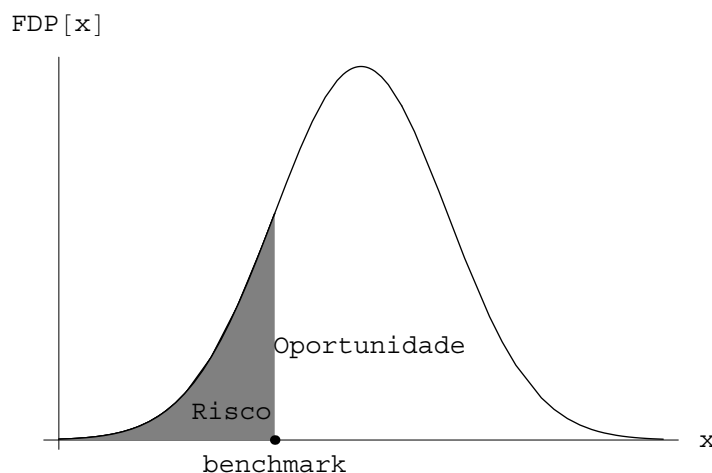


Figura 2.1 – Representação de Risco e Incerteza

## 2.3 Aversão ao Risco

Baseado na Hipótese de Bernoulli, será sempre assumido que agentes econômicos, tomadores de decisão, são maximizadores da utilidade esperada. E, dentro do contexto de economias em condições de incerteza, é importante ainda descrever os agentes com relação ao seu comportamento perante o risco.

### 2.3.1 Medida de Aversão ao Risco

Para melhor descrever como o decisor se comporta perante situações de risco, é preciso, primeiramente, definir alguma medida de aversão a esse tipo de risco. Conforme Huang e Litzenberger (1988, p. 17), um indivíduo é dito avesso ao risco se ele não estiver disposto a aceitar ou for indiferente a qualquer loteria justa – *fair gamble*. Os mesmos autores definem ainda um indivíduo como estritamente avesso ao risco se ele não estiver disposto a aceitar qualquer loteria justa.

Seja uma loteria que possui um retorno positivo  $h_1$  com probabilidade  $p$  e retorno negativo  $h_2$  com probabilidade  $1 - p$ . Por definição, uma loteria é dita justa se seu valor monetário esperado for igual a zero, conforme a equação a seguir:

$$ph_1 + (1 - p)h_2 = 0 \quad (2.2)$$

Sendo  $u(\cdot)$  uma função de utilidade para um indivíduo, tem-se, pela definição de aversão (estrita) ao risco:

$$u(W_0)(\succ) \geq p u(W_0 + h_1) + (1 - p) u(W_0 + h_2), \quad (2.3)$$

tal que  $W_0$  é a quantidade determinística que representa toda a riqueza líquida do agente econômico sob a forma de numerário.

Pela definição de loteria justa descrita na equação (2.2), a equação (2.3) pode ser reescrita como:

$$u(p(W_0 + h_1) + (1 - p)(W_0 + h_2))(\succ) \geq p u(W_0 + h_1) + (1 - p) u(W_0 + h_2). \quad (2.4)$$

A equação (2.4) demonstra que aversão ao risco implica uma função de utilidade côncava,

e que aversão estrita ao risco implica uma função de utilidade estritamente côncava, e vice-versa.

Uma vez conhecida a concavidade da função de utilidade de um decisor avesso ao risco, é preciso definir adequadamente uma medida desta aversão. Para isto, seja o seguinte exemplo, referente ao problema de alocação ótima de recursos em uma carteira de ativos para o caso de um decisor estritamente avesso ao risco e que sempre prefere mais a menos, ou seja, possui uma função de utilidade estritamente crescente. Se o indivíduo investe  $a_j$  unidades monetárias no  $j$ -ésimo ativo com risco e o restante de sua riqueza,  $(W_0 - \sum_{j=1}^n a_j)$  unidades monetárias, no ativo livre de risco, sua riqueza, estocástica, ao final do período,  $\tilde{W}$ , será:

$$\begin{aligned}\tilde{W} &= (W_0 - \sum_{j=1}^n a_j)(1 + r_f) + \sum_{j=1}^n a_j(1 + \tilde{r}_j) \\ &= W_0(1 + r_f) + \sum_{j=1}^n a_j(\tilde{r}_j - r_f),\end{aligned}\tag{2.5}$$

tal que:

$W_0$ : riqueza inicial,

$r_f$ : taxa de retorno do ativo livre de risco,

$\tilde{r}_j$ : taxa de retorno aleatória do  $j$ -ésimo ativo com risco,

$a_j$ : investimento em reais feito no  $j$ -ésimo ativo com risco.

O problema, então, resume-se ao seguinte programa:

$$\{a_j^*\}_{j=1}^n = \arg \max_{\{a\}} \mathbb{E} \left[ u \left( W_0(1 + r_f) + \sum_{j=1}^n a_j(\tilde{r}_j - r_f) \right) \right].\tag{2.6}$$

Uma vez que a função de utilidade  $u$  é côncava, para encontrar seu máximo, é preciso apenas da condição de primeira ordem:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{d}{d\tilde{W}} u(\tilde{W}) (\tilde{r}_j - r_f) \right] = 0\tag{2.7}$$

Como a função de utilidade é estritamente crescente (decisor estritamente avesso ao risco), de acordo com a equação (2.7), a probabilidade de  $\tilde{r}_j - r_f > 0$  deve se encontrar no intervalo  $[0,1]$ .

Indivíduos que forem avessos ao risco e buscarem maximizar suas utilidades, apenas in-

vestirão em ativos com risco se sua taxa de retorno for maior que a taxa de retorno do ativo livre de risco. Por exemplo: para um indivíduo decidir-se por não investir ou vender a descoberto um ativo com risco como alternativa ótima, é necessário que a condição de primeira ordem, avaliada quando não há investimento em ativo com risco, não seja positiva:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{d}{dW_0} u(W_0(1+r_f)) (\tilde{r}_j - r_f) \right] \leq 0 \quad \forall j. \quad (2.8)$$

A equação (2.8) acima também pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{dW_0} u(W_0(1+r_f)) \mathbb{E} [\tilde{r}_j - r_f] \leq 0 \quad \forall j. \quad (2.9)$$

Pela hipótese de que o indivíduo possui uma função de utilidade estritamente crescente, tem-se que  $\frac{d}{dW_0} u(\cdot) > 0$ , e, portanto, as condições das equações (2.8) e (2.9) são equivalentes a:

$$a_j \leq 0 \quad \forall j \quad \text{somente se} \quad \mathbb{E} [\tilde{r}_j - r_f] \leq 0 \quad \forall j. \quad (2.10)$$

Em outras palavras, um indivíduo com função de utilidade côncava e estritamente crescente somente não investirá em ativos com risco se nenhum dos prêmios associados aos ativos com risco for positivo. Do contrário, se pelo menos um ativo com risco possuir prêmio positivo, o indivíduo escolherá, como alternativa ótima, fazer parte deste investimento.

Suponha agora que o indivíduo decisor, estritamente avesso ao risco, e que busca maximizar sua utilidade, faz parte de uma economia em que existe apenas um ativo com risco e um ativo livre de risco, e ainda que o prêmio pelo risco seja estritamente positivo. Qual seria o mínimo prêmio pelo risco necessário para que o decisor invista toda a sua riqueza no ativo com risco?

Sejam  $\tilde{r}$  e  $a$ , respectivamente, a taxa de retorno do ativo com risco e a quantidade de dinheiro investida nele, tem-se, para o caso em que o indivíduo investe toda sua riqueza no ativo com risco:

$$\mathbb{E} \left[ \frac{d}{dW_0} u(W_0(1+\tilde{r})) (\tilde{r} - r_f) \right] \geq 0. \quad (2.11)$$

Expandindo  $\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+\tilde{r})]$  por Taylor em torno de  $\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]$  até a segunda ordem, tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+\tilde{r})] &= \frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)] + \\ &+ \frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)][W_0(1+\tilde{r}) - W_0(1+r_f)] + \\ &+ o[W_0(1+\tilde{r}) - W_0(1+r_f)]^2 \\ &= \frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)] + \frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)][W_0(\tilde{r}-r_f)] + \\ &+ o[W_0(\tilde{r}-r_f)]^2,\end{aligned}\tag{2.12}$$

tal que  $o[W_0(\tilde{r}-r_f)]^2$  são os termos de menor magnitude que  $[W_0(\tilde{r}-r_f)]^2$ .

Multiplicando ambos os lados da equação (2.12) pelo prêmio pelo risco e aplicando o operador esperança, e ignorando o resto da expansão de Taylor, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{d}{dW_0}u(W_0(1+\tilde{r}))(\tilde{r}-r_f)\right] &\approx \frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] + \\ &+ \frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)]\mathbb{E}[(\tilde{r}-r_f)^2]W_0\end{aligned}\tag{2.13}$$

Comparando as equações (2.11) e (2.13), tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]\mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] &\geq -\frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)]\mathbb{E}[(\tilde{r}-r_f)^2]W_0 \\ \mathbb{E}[\tilde{r}-r_f] &\geq -\frac{\frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)]}{\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]}\mathbb{E}[(\tilde{r}-r_f)^2]W_0\end{aligned}\tag{2.14}$$

A função  $-\frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)]/\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]$ , conforme Pratt (1964) e Arrow (1971), é interpretada como uma medida de aversão ao risco absoluta, e é conhecida como medida de Arrow-Pratt, denotada por:

$$a_2[W_0(1+r_f)] = -\frac{\frac{d^2}{dW_0^2}u[W_0(1+r_f)]}{\frac{d}{dW_0}u[W_0(1+r_f)]}\tag{2.15}$$

Analisando a equação (2.14), é possível notar que, quanto maior o coeficiente de aversão ao risco absoluto do indivíduo, maior o prêmio pelo risco necessário para que ele se sinta disposto a investir toda sua riqueza no ativo com risco.

É possível generalizar a definição do coeficiente absoluto de aversão até o  $i$ -ésimo momento centrado. Sejam  $\{a_i [x]\}_{i=2}^{\infty}$  os coeficientes absolutos de aversão ao  $i$ -ésimo momento centrado, definidos como:

$$\begin{aligned} a_i [x] &\equiv - \frac{\frac{d^i}{dx^i} [u(x)]}{\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [u(x)]} \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \ln \left( (-1)^i u^{(i-1)}(x) \right) \right] \\ &= - \frac{u^{(i)}(x)}{u^{(i-1)}(x)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Quando  $i = 2$ , tem-se o coeficiente absoluto de aversão ao risco de Arrow-Pratt. Para  $i = 3$  e  $i = 4$ , têm-se, respectivamente, os índices absolutos de prudência e temperança, conforme apresentado por Kimball (1990, 1993).

## 2.3.2 Coeficiente de Aversão ao Risco: Absoluto e Relativo

### 2.3.2.1 Coeficiente Absoluto de Aversão ao Risco

Uma propriedade importante associada ao coeficiente absoluto de aversão ao risco é a de como as preferências do decisor mudam conforme as variações de sua riqueza. Por exemplo: se a riqueza do decisor aumentar, ele investirá mais ou menos em ativos com risco? Ou manterá a mesma quantidade investida? Ou seja, suponha que a riqueza do decisor é  $W$  e que ele mantém  $W/2$  investido em um ativo com risco. Agora suponha que sua riqueza aumente para  $2W$ . O que ocorrerá com a quantidade investida no ativo com risco? Será mantida em  $W/2$ ? Aumentará? Ou diminuirá?

A resposta a esta pergunta é inerente ao conceito do coeficiente absoluto de aversão ao risco. Se a quantidade, em dinheiro, investida no ativo com risco aumentar com o aumento da riqueza do decisor, diz-se que ele possui coeficiente absoluto de aversão ao risco decrescente. Se a quantidade, em dinheiro, investida no ativo com risco for mantida, diz-se que ele possui coeficiente absoluto de aversão ao risco constante. Do contrário, se a quantidade, em dinheiro, investida no ativo com risco diminuir, ele possui coeficiente absoluto de aversão ao risco crescente.

A primeira derivada do coeficiente absoluto de aversão ao risco com relação à riqueza é a chave para as distinções entre os comportamentos, permitindo atribuir a eles sub-classificações conforme apresentadas na Tabela 2.2.

**Tabela 2.2 – Comportamento do decisor de acordo com a primeira derivada do coeficiente absoluto de aversão ao risco em relação à riqueza.**

Coeficiente Absoluto	Definição	Propriedade
Aversão ao Risco Decrescente	À medida em que a riqueza cresce, investe mais dinheiro em ativos com risco	$\frac{d}{dW}a_2(W) < 0$
Aversão ao Risco Constante	À medida em que a riqueza cresce, investe a mesma quantidade de dinheiro em ativos com risco	$\frac{d}{dW}a_2(W) = 0$
Aversão ao Risco Crescente	À medida em que a riqueza cresce, investe menos dinheiro em ativos com risco	$\frac{d}{dW}a_2(W) > 0$

### 2.3.2.2 Coeficiente Relativo de Aversão ao Risco

Uma pergunta que ainda resta ser discutida é: como a variação de riqueza influencia no percentual dela investido em ativos com risco? Por exemplo: quando a riqueza de um indivíduo é  $W$ , ele investe 50% de seu capital no ativo com risco. Quanto será que ele investiria, em termos percentuais de seu capital, no ativo com risco, se sua riqueza aumentasse para  $2W$ ?

A resposta a estas perguntas repousa no conceito de coeficiente relativo de aversão ao risco. Este coeficiente mantém uma relação próxima ao coeficiente absoluto de aversão ao risco, ou medida de Arrow-Pratt. O índice relativo refere-se a quanto varia o percentual de riqueza investido no ativo com risco, para variações na riqueza do decisor. Em termos matemáticos, o coeficiente relativo de aversão ao risco é definido como:

$$\begin{aligned} r_2(W) &= -W \frac{\frac{d^2}{dW^2}u(W)}{\frac{d}{dW}u(W)} \\ &= -W a_2(W). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Em termos econômicos, pode ser visto como o negativo da elasticidade da utilidade marginal da riqueza  $W$ . A utilidade marginal da riqueza é definida por  $du(W)/dW$ , e sua elasticidade é:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{d}{dW}u(W)\right] &= \frac{\partial \log \frac{d}{dW}u(W)}{\partial \log W} = \frac{\partial \left(\frac{d}{dW}u(W)\right)}{\frac{d}{dW}u(W)} \bigg/ \frac{\partial W}{W} \\ &= \frac{W}{\frac{d}{dW}u(W)} \frac{\partial \left(\frac{d}{dW}u(W)\right)}{\partial W} = W \frac{\frac{d^2}{dW^2}u(W)}{\frac{d}{dW}u(W)} = -r_2(W) \end{aligned} \quad (2.18)$$



Uma vantagem do coeficiente relativo sobre o coeficiente absoluto de aversão ao risco é que o primeiro independe da unidade monetária da riqueza.

Se este decisor mantivesse os mesmos 50% de sua riqueza investida no ativo com risco, seu comportamento seria o de quem possui o coeficiente relativo de aversão ao risco constante. Se ele aumentasse o percentual investido no ativo com risco, dir-se-ia que ele possui coeficiente relativo de aversão ao risco decrescente. E, por último, se o percentual investido no ativo com risco diminuísse, ele possuiria coeficiente relativo de aversão ao risco crescente.

A primeira derivada do coeficiente relativo de aversão ao risco com relação à riqueza responde pelas diferentes possibilidades de comportamento do decisor. A Tabela 2.3 resume o assunto.

**Tabela 2.3 – Comportamento do decisor de acordo com a primeira derivada do coeficiente relativo de aversão ao risco em relação à riqueza.**

Coeficiente Relativo	Definição	Propriedade
Aversão ao Risco Decrescente	À medida em que a riqueza cresce, aumenta o percentual da riqueza investido em ativos com risco	$\frac{d}{dW}r_2(W) < 0$
Aversão ao Risco Constante	À medida em que a riqueza cresce, não há variações no percentual da riqueza investido em ativos com risco	$\frac{d}{dW}r_2(W) = 0$
Aversão ao Risco Crescente	À medida em que a riqueza cresce, diminui o percentual da riqueza investido em ativos com risco	$\frac{d}{dW}r_2(W) > 0$

A seção seguinte analisa como os coeficientes absoluto e relativo de aversão ao risco se comportam para diferentes tipos de função de utilidade.

### 2.3.3 Função de Utilidade

A concavidade da função de utilidade do decisor permite saber se este é avesso ao risco (função de utilidade côncava), neutro ao risco (função de utilidade linear) ou propenso ao risco (função de utilidade convexa). Em economia e finanças, as atenções estão voltadas para a classe de funções de utilidade conhecida como HARA, *Hyperbolic Absolute Risk Aversion*<sup>11</sup>. O inverso do coeficiente absoluto de Arrow-Pratt de uma função de utilidade

<sup>11</sup>Segundo LiCalzi e Sorato (2003), este nome foi dado porque o coeficiente absoluto de Arrow-Pratt desta classe de funções é uma função hiperbólica, conforme pode ser visto na eq. (2.20). Outros autores, como Gollier (2001), chamam-na também de harmônica.

HARA é uma função linear da riqueza. Há três principais sub-classes das funções HARA: CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*), CARA (*Constant Absolute Risk Aversion*) e Funções de Utilidade Quadrática (*QUF*, da nomenclatura em inglês).

### **HARA** *Hyperbolic Absolute Risk Aversion*

A forma geral das funções de utilidade do tipo HARA é dada pela seguinte equação:

$$u(w) = \frac{1-\delta}{\delta} \left( \frac{aw}{1-\delta} + b \right)^\delta \quad (2.19)$$

O domínio destas funções deve estar definido para valores de  $w$  que satisfazem a seguinte desigualdade:  $b + aw/(1-\delta) > 0$ . Funções deste tipo apresentam um limite inferior quando  $\delta < 1$  e um limite superior quando  $\delta > 1$ . O coeficiente absoluto de Arrow-Pratt é igual a:

$$a_2(w) = \frac{1}{\frac{w}{1-\delta} + \frac{b}{a}} \quad (2.20)$$

Já o coeficiente relativo de Arrow-Pratt é dado pela seguinte equação:

$$r_2(w) = \frac{1}{\frac{1}{1-\delta} + \frac{b}{aw}} \quad (2.21)$$

Uma outra nomenclatura desta classe de funções de utilidade é *Linear Risk Tolerance* – LRT, definida assim em Ingersoll Jr. (1987, p. 39). Tolerância ao risco é uma medida advinda do coeficiente absoluto de aversão ao risco, dada pela seguinte expressão:

$$t(w) = \frac{1}{a_2(w)} \quad (2.22)$$

A definição de tolerância, segundo Clemen (1996, p. 478), é o limite máximo que um decisor estaria disposto a arriscar a perder quando decide entrar em uma loteria.

Portanto, para esta classe de funções de utilidade, o coeficiente de tolerância ao risco é igual a:

$$t(w) = \frac{w}{1-\delta} + \frac{b}{a}, \quad (2.23)$$

uma função linear, conforme sugerido pelo nome. A função do coeficiente de tolerância será crescente para valores de  $\delta < 1$  e será decrescente para valores de  $\delta > 1$ . A função do coeficiente de aversão ao risco será crescente para valores de  $\delta > 1$  e decrescente para valores de  $\delta < 1$ .

De acordo com os valores assumidos pelos parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\delta$ , as funções de utilidade da classe HARA recebem nomenclaturas específicas, apresentadas a seguir:

#### **CRRA** *Constant Relative Risk Aversion*

As funções de utilidade com coeficiente relativo de aversão ao risco constante são advindas das funções da classe HARA quando sujeitas aos seguintes valores de parâmetros:  $b = 0$  e  $\delta < 1$ . Neste caso, o coeficiente relativo de aversão ao risco é constante, ou seja, independente da riqueza, e igual a:

$$r_2(w) = 1 - \delta \quad (2.24)$$

O coeficiente absoluto de aversão ao risco é igual a:

$$a_2(w) = \frac{1 - \delta}{w} \quad (2.25)$$

A expressão geral desta sub-classe de função de utilidades, após normalizar para  $\frac{d}{dw}u(w) = 1$ , é definida por:

$$u(w) = \begin{cases} w^\delta / \delta & \text{se } \delta \neq 0 \\ \ln(w) & \text{se } \delta = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

#### **CARA** *Constant Absolute Risk Aversion*

É possível ver, a partir da equação (2.20), que quando  $(1 - \delta) \rightarrow +\infty$ ,  $a_2(w) = a/b$ . Neste caso, obtêm-se funções de utilidade cujos coeficientes absolutos de aversão ao risco são constantes.

Sua forma geral é a seguinte:

$$u(w) = -\exp\{-cw\}, \quad c > 0 \quad (2.27)$$

Seu coeficiente absoluto de aversão ao risco é constante e igual a  $c$  para todos os valores de  $w$ . Funções de utilidade desta classe apresentam como propriedade o fato de que alterações na riqueza não modificam as preferências entre loterias distintas.

### QUF Função de Utilidade Quadrática

Quando  $\delta = 2$ , a função HARA assume a forma de uma função de utilidade quadrática. Esta função é definida pela seguinte expressão:

$$u(w) = w - qw^2 \quad q > 0, \quad w \leq 1/(2q). \quad (2.28)$$

Sua representação gráfica está apresentada na Figura 2.2(a) na página 52.

A condição  $q > 0$  garante que o decisor com esta função de utilidade seja avesso ao risco. A condição  $w \leq 1/(2q)$  garante que esta função de utilidade não provoque utilidade marginal negativa para a riqueza. Conforme Arrow (1971, p. 97), neste caso, seria melhor jogar alguma riqueza fora para poder ter mais utilidade.

Esta função de utilidade apresenta coeficiente absoluto de aversão ao risco crescente, pois:

$$\frac{d}{dw}a_2(w) = \frac{4q^2}{(1 - 2qw)^2} > 0. \quad (2.29)$$

Seu coeficiente relativo de aversão ao risco também é crescente, pois:

$$\frac{d}{dw}r_2(w) = \frac{2q}{(1 - 2qw)^2} > 0. \quad (2.30)$$

Assim, decisores que tivessem este tipo de função de utilidade diminuiriam a quantidade de recursos, em termos absolutos e relativos, investidos no ativo com risco à medida que sua riqueza aumentasse. Conforme Gollier (2001, p. 27), esta função de utilidade só tem sido considerada na literatura porque é fácil trabalhar com ela. Contudo, não existe nenhuma razão lógica para um decisor possuir este tipo de representação de utilidade no mundo real.

A seguir, serão apresentados outros exemplos de funções de utilidade descritas na literatura. A Tabela 2.4 resume os valores que os parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $\delta$  devem assumir na equação (2.19) para que cada uma destas funções particulares seja gerada.

**Tabela 2.4 – Casos particulares das funções de utilidade HARA**

Funções de Utilidade	Parâmetros		
	$a$	$b$	$\delta$
Quadrática			2
Logarítmica	1	0	0
Potência		0	$< 1$
Exponencial Negativa		1	$-\infty$
Linear	1		1

### 2.3.3.1 Função de Utilidade Logarítmica Positiva

De uma maneira geral, esta função de utilidade pode ser definida pela seguinte expressão:

$$u(w) = \ln(w + \alpha), \quad \alpha \geq 0. \quad (2.31)$$

A função de utilidade logarítmica positiva possui coeficiente absoluto de aversão ao risco decrescente, uma vez que:

$$\frac{d}{dw} a_2(w) = -\frac{1}{(w + \alpha)^2} < 0. \quad (2.32)$$

Seu coeficiente relativo de aversão ao risco é:

$$\frac{d}{dw} r_2(w) = \frac{\alpha}{(w + \alpha)^2} \geq 0. \quad (2.33)$$

Portanto, o decisor com esta função de utilidade, com o aumento de sua riqueza, investirá mais dinheiro em ativos com risco. Todavia, se  $\alpha = 0$ , ele manterá a mesma proporção inicial. Se  $\alpha > 0$ , o percentual da riqueza investido no ativo com risco será menor.

A Figura 2.2(b) apresenta a função de utilidade logarítmica positiva. Esta função apresenta assíntota em  $w = -\alpha$ .

### 2.3.3.2 Função de Utilidade Exponencial Negativa

A função de utilidade exponencial negativa é uma das mais freqüentemente empregadas. Ela é definida pela seguinte expressão:

$$u(w) = 1 - \exp\{-\alpha w\}, \quad \alpha > 0. \quad (2.34)$$

Esta função de utilidade apresenta coeficiente absoluto de aversão ao risco constante, pois:

$$\frac{d}{dw}a_2(w) = 0. \quad (2.35)$$

Já seu coeficiente relativo de aversão ao risco é crescente, uma vez que:

$$\frac{d}{dw}r_2(w) = \alpha > 0. \quad (2.36)$$

Em outras palavras, à medida em que a riqueza cresce, um decisor com função de utilidade exponencial negativa mantém a mesma quantidade de dinheiro investida em ativos com risco. E se ele mantém a mesma quantidade, em dinheiro, investida no ativo com risco quando a riqueza cresce, é porque o percentual da riqueza investido decresce. Portanto, ele apresenta aversão relativa ao risco crescente. A Figura 2.2(c) apresenta a função de utilidade exponencial negativa.

### 2.3.3.3 Função de Utilidade Raiz Quadrada

A função de utilidade raiz quadrada, ilustrada na Figura 2.2(d), é definida pela seguinte expressão:

$$u(w) = \sqrt{w + \alpha} \quad \alpha \geq 0. \quad (2.37)$$

Assim como a função de utilidade logarítmica, seu coeficiente absoluto de aversão ao risco também é decrescente, dado que:

$$\frac{d}{dw}a_2(w) = -\frac{1}{2(w + \alpha)^2} < 0. \quad (2.38)$$

O coeficiente relativo de aversão ao risco desta função é:

$$\frac{d}{dw}r_2(w) = \frac{\alpha}{2(w + \alpha)^2} \leq 0. \quad (2.39)$$

Portanto, esta função de utilidade apresenta o mesmo comportamento da função de utilidade logarítmica, ou seja, com o aumento de sua riqueza, o decisor aumentará a quantidade de dinheiro investido em ativos com risco. Todavia, o percentual da riqueza ou se mantém o mesmo (se  $\alpha = 0$ ) ou diminui (se  $\alpha > 0$ ).

#### 2.3.3.4 Função de Utilidade Exponencial Positiva

A função de utilidade exponencial positiva é definida pela seguinte expressão:

$$u(w) = 1 + \exp\{\alpha w\}, \quad \alpha > 0. \quad (2.40)$$

A Figura 2.2(e) apresenta a função de utilidade exponencial positiva.

Esta função de utilidade, assim como a exponencial negativa, apresenta coeficiente absoluto de aversão ao risco constante, pois:

$$\frac{d}{dw}a_2(w) = 0. \quad (2.41)$$

Já seu coeficiente relativo de aversão ao risco é decrescente, uma vez que:

$$\frac{d}{dw}r_2(w) = -\alpha < 0. \quad (2.42)$$

Em outras palavras, à medida em que a riqueza cresce, um decisor com função de utilidade exponencial positiva mantém a mesma quantidade de dinheiro investida em ativos com risco. O caráter inconsistente desta função de utilidade é que seu coeficiente relativo de aversão ao risco é negativo, o que implica que o percentual da sua riqueza investido no ativo com risco aumenta. Se a riqueza aumenta e a quantidade permanece a mesma em termos absolutos, é impossível que em termos relativos ela aumente. Portanto, esta função de utilidade é inconsistente.

### 2.3.3.5 Função de Utilidade Logarítmica Negativa

A função de utilidade do tipo logarítmica negativa é definida pela expressão:

$$u(w) = -\ln(-w + \alpha), \quad \alpha \geq 0. \quad (2.43)$$

A Figura 2.2(f) apresenta a função de utilidade logarítmica negativa. Esta função apresenta assíntota em  $W = \alpha$ .

Esta função de utilidade, assim como a logarítmica positiva, apresenta coeficiente absoluto de aversão ao risco decrescente, uma vez que:

$$\frac{d}{dw}a_2(w) = -\frac{1}{(-w + \alpha)^2} < 0. \quad (2.44)$$

Seu coeficiente relativo de aversão ao risco é:

$$\frac{d}{dw}r_2(w) = -\frac{\alpha}{(-w + \alpha)^2} \leq 0. \quad (2.45)$$

Portanto, o decisor com esta função de utilidade, com o aumento de sua riqueza, investirá mais dinheiro em ativos com risco. Todavia, se  $\alpha = 0$ , ele manterá a mesma proporção inicial. Neste caso, esta função se comportaria exatamente como a logarítmica positiva. Contudo, se  $\alpha > 0$ , o percentual da riqueza investido no ativo com risco será ainda maior que antes, indicando que o decisor escolhe por aplicar uma maior parte de sua riqueza, em termos percentuais, no ativo com risco.

### 2.3.3.6 Resumo das Funções de Utilidade

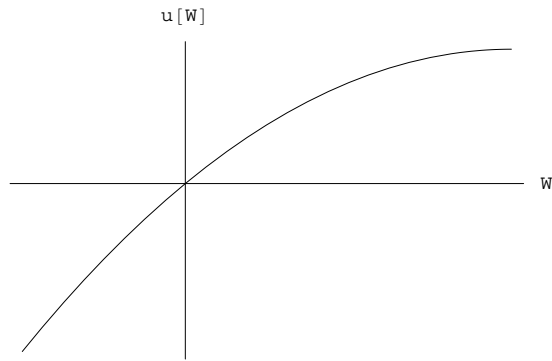
A Tabela 2.5 na página 53 resume diversas funções de utilidade, discriminadas de acordo com as características de seus coeficientes absolutos e relativos de aversão ao risco. Como é possível verificar intuitivamente, 4 das 9 possíveis caselas da tabela são situações inconsistentes. Mesmo assim, é possível encontrar funções de utilidade que se enquadram em cada uma destas seguintes categorias:

- (a) coeficiente absoluto de aversão ao risco constante e coeficiente relativo de aversão ao risco constante: não é possível manter a mesma quantidade de dinheiro investido em

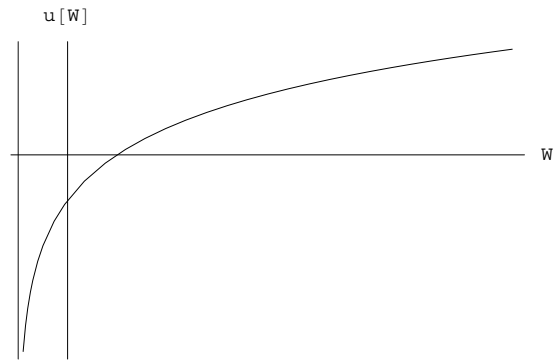


ativo com risco quando a riqueza cresce e ainda assim manter o mesmo percentual da riqueza investido em ativo com risco;

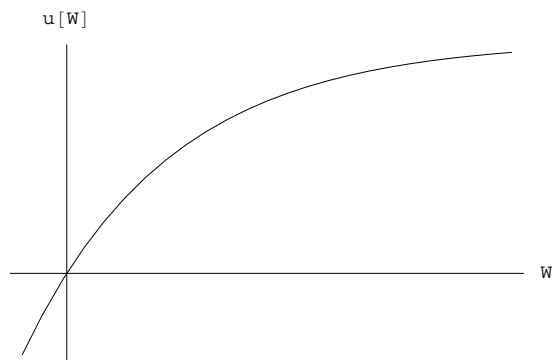
- (b) coeficiente absoluto de aversão ao risco constante e coeficiente relativo de aversão ao risco decrescente: não é possível manter a mesma quantidade de dinheiro investido em ativo com risco quando a riqueza cresce e ainda assim aumentar o percentual da riqueza investido em ativo com risco;
- (c) coeficiente absoluto de aversão ao risco crescente e coeficiente relativo de aversão ao risco constante: não é possível, à medida que a riqueza cresce, manter menor quantidade de dinheiro investida em ativos com risco e ainda assim manter o mesmo percentual de riqueza neste tipo de investimento;
- (d) coeficiente absoluto de aversão ao risco crescente e coeficiente relativo de aversão ao risco decrescente: não é possível, à medida que a riqueza cresce, manter menor quantidade de dinheiro investida em ativos com risco e ao mesmo tempo aumentar o percentual de riqueza neste tipo de investimento.



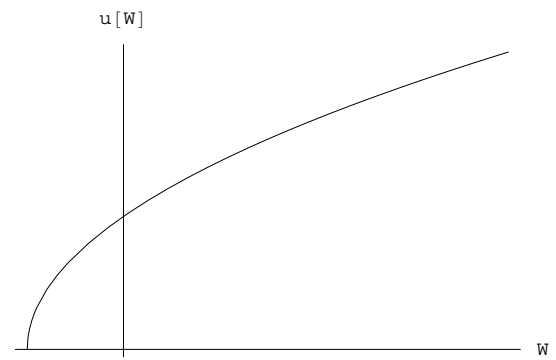
(a) Função de Utilidade Quadrática



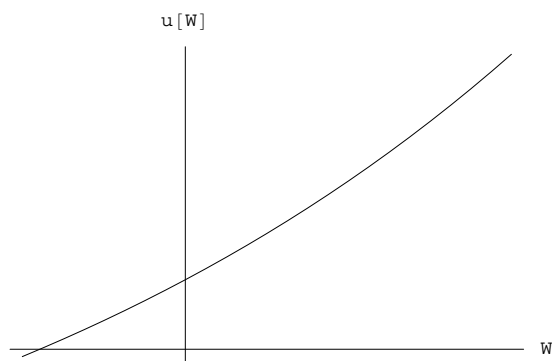
(b) Função de Utilidade Logarítmica Positiva



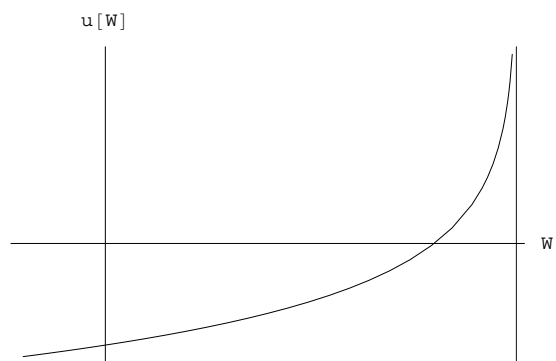
(c) Função de Utilidade Exponencial Negativa



(d) Função de Utilidade Raiz Quadrada



(e) Função de Utilidade Exponencial Positiva



(f) Função de Utilidade Logarítmica Negativa

**Figura 2.2 – Funções de Utilidade.**

Tabela 2.5 – Funções de utilidade para cada tipo de coeficiente de aversão ao risco

Coeficiente Relativo	Coeficiente Absoluto		
	$> 0$	$= 0$	$< 0$
$> 0$	$u(w) = w - qw^2, \quad q > 0 \quad w \leq 1/2q$	$u(w) = 1 - \exp\{-\delta w\}, \quad \delta > 0$	$u(w) = \ln(w + \alpha), \quad \alpha > 0$
$= 0$	$u(w) = qw^2, \quad q > 0$ FUNÇÃO INCONSISTENTE	$u(w) = \alpha w, \quad \alpha > 0$ FUNÇÃO INCONSISTENTE	$u(w) = \ln(w)$ $u(w) = \sqrt{w}$ $u(w) = -\ln(-w)$ $u(w) = -\sqrt{w}$
$< 0$	$u(w) = w + \alpha w^2, \quad \alpha > 0$ FUNÇÃO INCONSISTENTE	$u(w) = 1 + \exp\{\delta w\}, \quad \delta > 0$ FUNÇÃO INCONSISTENTE	$u(w) = -\ln(-w + \alpha), \quad \alpha > 0$ $u(w) = -\sqrt{w + \alpha}, \quad \alpha > 0$

## 2.4 Matemática da Teoria de Carteiras

Os resultados apresentados a seguir estão de acordo com os desenvolvimentos encontrados em Merton (1972), Levy e Sarnat (1972), Ingersoll Jr. (1987), Huang e Litzenberger (1988) e Campbell, Lo e MacKinlay (1997).

Suponha a existência de vários ativos com risco. Para um caso geral, assume-se também que as taxas de retorno destes ativos, que devem ser linearmente independentes<sup>12</sup>, possuem variância finita e seus retornos esperados não são necessariamente iguais. É permitida, ainda, a venda a descoberto e a economia é dita sem fricção, ou seja, não há custos ou outro tipo de restrição associados às transações.

Como os ativos são linearmente independentes, a matriz de suas covariâncias,  $\mathbf{V}$ , é não-singular. A matriz  $\mathbf{V}$  será positiva definida se  $\mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} > 0$ , tal que  $\mathbf{w}$  é o vetor de pesos dos ativos que compõem a carteira. O resultado deste produto de matrizes, que representa a variância da carteira, é estritamente positivo para  $\mathbf{w} \neq 0$ , ou seja, se pelo menos um dos elementos do vetor  $\mathbf{w}$  for diferente de zero.

Uma carteira  $p$  estará na fronteira se possuir a menor variância entre todas as carteiras possíveis de serem formadas com os ativos disponíveis para uma mesma taxa de retorno esperada. Assim, o vetor de pesos ótimo será:

$$\mathbf{w}_p = \arg \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w}, \quad (2.46)$$

sujeito às restrições:

$$\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} = r_p \quad (2.47a)$$

$$\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota} = 1, \quad (2.47b)$$

tal que  $\boldsymbol{\mu}$  é um vetor  $(n \times 1)$  das taxas de retorno esperadas de cada ativo,  $r_p$  é o retorno esperado da carteira  $p$  e  $\boldsymbol{\iota}$  é um vetor unitário  $(n \times 1)$ .

Para resolver este problema de otimização, aplica-se o método de Lagrange sobre a função  $\mathcal{L}$ , diferenciando-a com relação a  $\mathbf{w}$  e igualando o resultado a zero. A função lagrangeana é:

$$\mathcal{L} = \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda_1 (r_p - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu}) + \lambda_2 (1 - \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota}) \quad (2.48)$$

---

<sup>12</sup>Esta restrição permite que a matriz de covariâncias não seja singular.

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{V} \mathbf{w}_p - \lambda_1^* \boldsymbol{\mu} - \lambda_2^* \boldsymbol{\iota} = \mathbf{0} \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = r_p - \mathbf{w}_p^\top \boldsymbol{\mu} = 0 \quad (2.49b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 1 - \mathbf{w}_p^\top \boldsymbol{\iota} = 0 \quad (2.49c)$$

Resolvendo as equações (2.49), encontra-se que:

$$\lambda_1^* = \frac{Cr_p - A}{D} \quad (2.50a)$$

$$\lambda_2^* = \frac{B - Ar_p}{D} \quad (2.50b)$$

tal que:

$$A = \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (2.51a)$$

$$B = \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu} \quad (2.51b)$$

$$C = \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota} \quad (2.51c)$$

$$D = BC - A^2 \quad (2.51d)$$

Substituindo os valores encontrados nas equações (2.50) em (2.49a), obtém-se:

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{g} + \mathbf{h} r_p, \quad (2.52)$$

tal que:

$$\mathbf{g} = \frac{1}{D} [B (\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota}) - A (\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu})] \quad (2.53a)$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{D} [C (\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\mu}) - A (\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota})]. \quad (2.53b)$$

Assim, qualquer carteira que possa ser representada conforme a equação (2.52), é uma carteira da fronteira, e o conjunto de todas elas formam a fronteira propriamente dita.

A partir da equação (2.52), é possível constatar que  $\mathbf{g}$  é o vetor de pesos da carteira  $p$  cuja taxa de retorno esperada é igual a zero. Se a taxa de retorno esperada for igual a um, o vetor de pesos da carteira  $p$  será  $\mathbf{g} + \mathbf{h}$ .

Formando uma carteira a partir das carteiras da fronteira  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g} + \mathbf{h}$ , e adotando para esta nova carteira os pesos  $(1 - r_q; r_q)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} (1 - r_q) \mathbf{g} + r_q (\mathbf{g} + \mathbf{h}) &= \mathbf{g} + \mathbf{h} r_q \\ &= \mathbf{w}_q. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Assim, é possível afirmar que toda a fronteira de carteiras de mínima variância pode ser gerada a partir das carteiras da fronteira  $\mathbf{g}$  e  $\mathbf{g} + \mathbf{h}$ . Todavia, um resultado muito mais forte é o de que toda a fronteira de carteiras de mínima variância pode ser gerada a partir de quaisquer duas carteiras da fronteira. Para verificar este resultado, sejam  $p_1$  e  $p_2$  duas carteiras distintas e seja  $q$  uma outra carteira qualquer, também da fronteira. Uma vez que  $r_{p_1}$  é diferente de  $r_{p_2}$ , existe um valor  $\alpha$  tal que:

$$r_q = \alpha r_{p_1} + (1 - \alpha) r_{p_2} \quad (2.55)$$

Considerando uma carteira formada a partir das carteiras  $p_1$  e  $p_2$  com pesos  $(\alpha; 1 - \alpha)$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha \mathbf{w}_{p_1} + (1 - \alpha) \mathbf{w}_{p_2} &= \alpha (\mathbf{g} + \mathbf{h} r_{p_1}) + (1 - \alpha) (\mathbf{g} + \mathbf{h} r_{p_2}) \\ &= \mathbf{g} + \mathbf{h} (\alpha r_{p_1} + (1 - \alpha) r_{p_2}) \\ &= \mathbf{g} + \mathbf{h} r_q \\ &= \mathbf{w}_q \end{aligned} \quad (2.56)$$

Portanto, a fronteira de carteiras de mínima variância pode ser gerada a partir de quaisquer duas carteiras distintas da fronteira. E esta nova carteira é também de mínima variância.

A covariância entre as taxas de retorno de quaisquer duas carteiras da fronteira  $p$  e  $q$  é dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[r_p; r_q] &= \mathbf{w}_p^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_q \\ &= \frac{C}{D} \left( r_p - \frac{A}{C} \right) \left( r_q - \frac{A}{C} \right) + \frac{1}{C} \end{aligned} \quad (2.57)$$

A variância da taxa de retorno de um ativo  $p$  pode ser obtida da própria equação (2.57). Para isto, basta inserir a condição de que as carteiras  $p$  e  $q$  sejam iguais entre si. A

equação final tem a forma de uma parábola, cujo vértice é  $(1/C; A/C)$ :

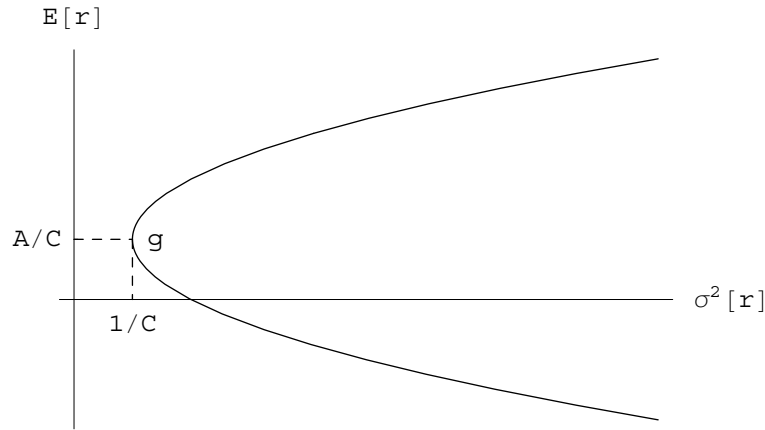
$$\mathbb{V}[r_p] = \frac{1}{D} (Cr_p^2 - 2Ar_p + B) \quad (2.58)$$

A Figura 2.3 apresenta a fronteira formada pelas carteiras de mínima variância. A carteira  $g$  com a mínima variância global é aquela que possui as seguintes características:

$$\mathbf{w}_g = \frac{1}{C} \mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\iota} \quad (2.59a)$$

$$\mathbb{E}[r_g] = \frac{A}{C} \quad (2.59b)$$

$$\mathbb{V}[r_g] = \frac{1}{C} \quad (2.59c)$$



**Figura 2.3 – Fronteira das Carteiras de Mínima Variância**

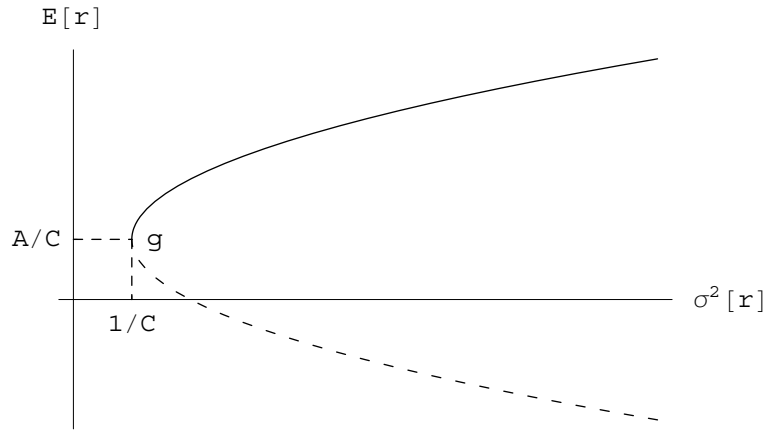
Um outro importante resultado referente à carteira de mínima variância global é que a covariância da sua taxa de retorno com a taxa de retorno de qualquer outra carteira  $a$ , seja ela da fronteira ou não, é sempre igual à sua variância, ou seja,  $\mathbb{C}[r_g; r_a] = 1/C$ . A fim de provar este resultado, suponha-se uma carteira formada pelas carteiras  $a$  e  $g$ . Sua covariância é, de acordo com a equação (2.57):

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[r_g; r_a] &= \mathbf{w}_g^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_a \\ &= \frac{1}{C} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{w}_a \\ &= \frac{1}{C} \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{w}_a \\ &= \frac{1}{C}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.4.1 Fronteira Eficiente

As carteiras da fronteira que possuem taxas de retorno esperadas estritamente maiores que a taxa de retorno esperada da carteira de mínima variância global são chamadas de carteiras eficientes. As demais carteiras, sejam elas da fronteira ou não, são chamadas de carteiras não-eficientes pois, para cada uma delas, sempre existirá uma outra carteira cuja variância é a mesma, mas que possuirá maior retorno esperado.

A Figura 2.4 apresenta a região da fronteira de carteiras de mínima variância que corresponde à fronteira eficiente. Esta região é a mostrada em linha contínua. As carteiras de mínima variância que estão sobre a região pontilhada são carteiras não-eficientes. A carteira  $g$ , representada na figura, é a carteira de mínima variância global.



**Figura 2.4 – Fronteira Eficiente**

#### 2.4.1.1 Carteiras Zero-beta

Outro resultado importante, relacionado à fronteira eficiente, diz que para cada carteira eficiente  $p$ , com exceção da carteira de mínima variância global, existe uma única carteira de mínima variância,  $op$ , cuja covariância de sua taxa de retorno esperada com a taxa de retorno esperada da carteira  $p$  é igual a zero. Esta carteira  $op$ , segundo Campbell, Lo e MacKinlay (1997, p. 185), é chamada de carteira zero-beta.

Usando a equação (2.57), é possível calcular a covariância entre dois ativos da fronteira. Igualando esta equação a zero, tem-se:

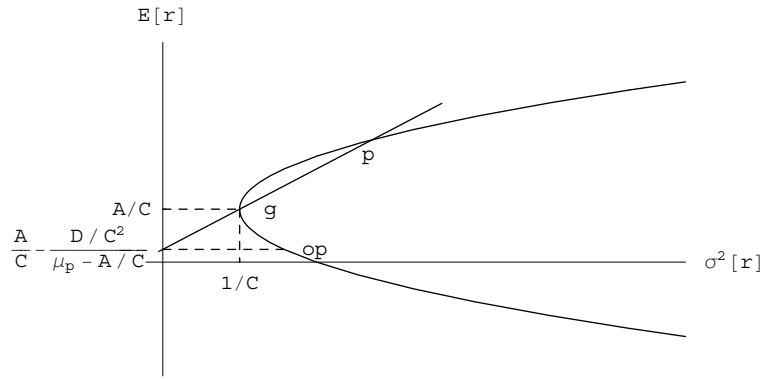
$$\mathbb{C}[r_p; r_{op}] = \frac{C}{D} \left[ \left( r_p - \frac{A}{C} \right) \left( r_{op} - \frac{A}{C} \right) + \frac{D}{C^2} \right] = 0 \quad (2.61)$$



Resolvendo a equação (2.61) para encontrar o retorno  $r_{op}$  desta carteira zero-beta, chega-se à equação:

$$r_{op} = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{r_p - A/C} \quad (2.62)$$

Uma vez encontrado o retorno esperado da carteira zero-beta, é possível localizá-la na fronteira de carteiras de mínima variância. A fim de encontrar geometricamente a localização da carteira  $p$ , basta traçar um segmento de reta que una o retorno esperado  $r_{op}$  e a carteira de mínima variância global  $g$ . O ponto onde o prolongamento deste segmento de reta toca a fronteira eficiente será a carteira eficiente  $p$ . É importante notar que a carteira zero-beta é não-eficiente. A Figura 2.5 apresenta graficamente os resultados apresentados.



**Figura 2.5 – Localização da Carteira Zero-beta**

#### 2.4.1.2 Relação entre a Taxa de Retorno Esperada de Qualquer Carteira com Carteiras da Fronteira

Sejam uma carteira da fronteira,  $p$ , que não a carteira de mínima variância global, e uma outra carteira,  $q$ , qualquer, não necessariamente pertencente à fronteira. A covariância entre as taxas de retorno esperadas destas duas carteiras é dada por:

$$\mathbb{C}[r_p; r_q] = \mathbf{w}_p^T \mathbf{V} \mathbf{w}_q. \quad (2.63)$$

Como a carteira  $p$  é uma carteira da fronteira, é possível usar o resultado da equação

(2.49a). Portanto, tem-se que:

$$\mathbf{w}_p^\top = \lambda_1 \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{V}^{-1} + \lambda_2 \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{V}^{-1}. \quad (2.64)$$

Aplicando a equação (2.64) em (2.63) e usando a relação dada pela equação (2.49b) para a carteira  $q$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[r_p; r_q] &= \lambda_1 \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{w}_q + \lambda_2 \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{w}_q \\ &= \lambda_1 \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{w}_q + \lambda_2 \boldsymbol{\iota}^\top \mathbf{w}_q \\ &= \lambda_1 r_q + \lambda_2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Substituindo os resultados das equações (2.50) na equação (2.65) e resolvendo-a para  $r_q$ , obtém-se:

$$r_q = \frac{D}{Cr_p - A} \left( \mathbb{C}[r_p; r_q] - \frac{B - Ar_p}{D} \right) \quad (2.66)$$

Utilizando a relação em (2.51d) e a equação (2.58), obtém-se

$$\begin{aligned} r_q &= \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{r_p - A/C} + \frac{\mathbb{C}[r_p; r_q]}{\mathbb{V}[r_p]} \left[ \frac{1}{C} + \frac{(r_p - A/C)^2}{D/C} \right] \frac{D}{Cr_p - A} \\ &= r_{op} + \beta_{pq} \left( r_p - \frac{A}{C} + \frac{D/C^2}{r_p - A/C} \right) \\ &= r_{op} + \beta_{pq} (r_p - r_{op}) \\ &= (1 - \beta_{pq}) r_{op} + \beta_{pq} r_p, \end{aligned} \quad (2.67)$$

tal que  $\beta_{pq} = \mathbb{C}[r_p; r_q] / \mathbb{V}[r_p]$ .

Assim, ficou mostrado que a taxa de retorno composta continuamente esperada de uma carteira  $q$  qualquer pode ser escrita como uma relação linear das taxas de retorno de uma carteira de mínima variância  $p$  e da carteira zero-beta de  $p$ ,  $op$ .

## 2.4.2 Combinação de Ativos com Risco na Presença de Ativo sem Risco

Deseja-se, agora, formar uma carteira de mínima variância com  $N$  ativos com risco e um sem risco. Por conta da introdução deste ativo sem risco, a restrição anterior à soma dos

pesos dos ativos com risco da carteira ser igual a 1 deixa de existir. Haverá, também, uma posição para o ativo sem risco que, se for positiva, corresponderá ao que falta para a unidade e, se for negativa, financiará a compra dos ativos com risco.

Seja  $p$  uma carteira da fronteira dos  $N + 1$  ativos, e seja  $\mathbf{w}_p$  o vetor  $(N \times 1)$  dos pesos dos ativos com risco. Desta forma,  $\mathbf{w}_p$  é a solução para o seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{w}_p = \arg \min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w}, \quad (2.68)$$

sujeito à restrição:

$$\mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} + (1 - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota}) r_f = r_p, \quad (2.69)$$

tal que  $r_f$  é a taxa de retorno do ativo sem risco.

Para resolver o programa quadrático, forma-se o lagrangeano, dado pela seguinte equação:

$$\mathcal{L} = \mathbf{w}^T \mathbf{V} \mathbf{w} + \lambda [r_p - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} - (1 - \mathbf{w}^T \boldsymbol{\iota}) r_f] \quad (2.70)$$

A condição de primeira ordem é:

$$\mathbf{V} \mathbf{w}_p - \lambda^* (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota}) = 0 \quad (2.71)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.71) e (2.70), obtém-se como solução:

$$\mathbf{w}_p = \frac{r_p - r_f}{(\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})} \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota}) \quad (2.72)$$

A equação (2.72) acima pode ser decomposta em uma parcela escalar, que depende da taxa de retorno esperada da carteira  $p$  vezes um vetor de pesos que não depende de  $p$ :

$$\mathbf{w}_p = c_p \bar{\mathbf{w}}, \quad (2.73)$$

tal que:

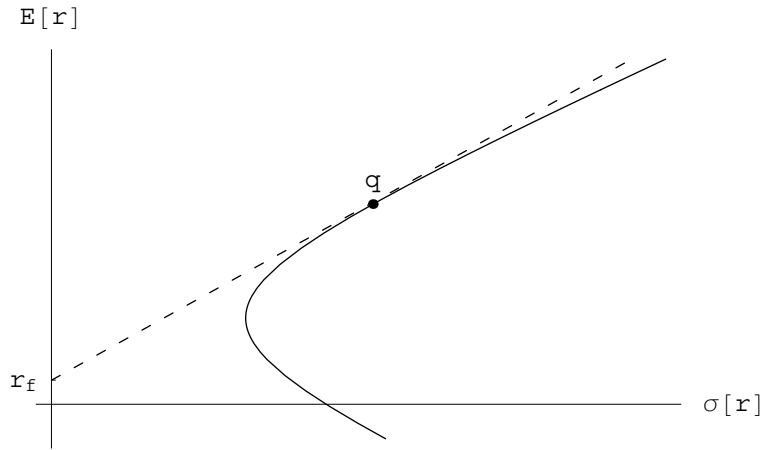
$$c_p = \frac{r_p - r_f}{(\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})^T \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})}$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota}).$$

Usando as equações (2.57) e (2.72), é possível encontrar a variância da taxa de retorno da carteira  $p$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[r_p] &= \mathbf{w}_p^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_p \\ &= \frac{(r_p - r_f)^2}{(\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})^\top \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})}\end{aligned}\quad (2.74)$$

Quando há a inclusão de um ativo sem risco, todas as carteiras de mínima variância passam a ser uma combinação de uma carteira com ativos com risco (cujos pesos são proporcionais a  $\bar{\mathbf{w}}$ ) e com um ativo sem risco. Neste caso, todas as carteiras eficientes estão sobre a tangente à hipérbole da Figura 2.6, que parte de  $r_f$  e passa pela carteira  $q$ .



**Figura 2.6 – Carteiras Eficientes na Presença de Ativo sem Risco.**

O coeficiente angular desta tangente, dado pela expressão:

$$s_q = \frac{r_q - r_f}{\sigma_q} \quad (2.75)$$

é também conhecido como Índice de Sharpe. A carteira  $q$  é, portanto, aquela que apresenta o maior Índice de Sharpe dentre as carteiras formadas por ativos com risco.

Na presença de um ativo sem risco, é possível encontrar uma relação semelhante àquela encontrada na equação (2.67). Para isto, sejam duas carteiras  $s$  qualquer e  $t$  de mínima variância, com vetores de pesos  $\mathbf{w}_s$  e  $\mathbf{w}_t$  respectivamente, tal que  $r_s \neq r_f$ . Usando a equação (2.57), tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[r_s; r_t] &= \mathbf{w}_s^\top \mathbf{V} \mathbf{w}_t \\ &= \frac{(r_s - r_f)(r_t - r_f)}{(\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})^\top \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})}\end{aligned}\quad (2.76)$$

Multiplicando os dois lados da equação (2.76) por  $(r_s - r_f)$  e rearranjando os termos, obtém-se:

$$\frac{(r_s - r_f) \mathbb{C}[r_s; r_t]}{(r_t - r_f)} = \frac{(r_s - r_f)^2}{(\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})^\top \mathbf{V}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota})} \quad (2.77)$$

O lado direito da igualdade da equação (2.77) é igual a  $\mathbb{V}[r_s]$ , de acordo com a equação (2.74). Portanto, obtém-se:

$$\begin{aligned} r_t - r_f &= (r_s - r_f) \frac{\mathbb{C}[r_s; r_t]}{\mathbb{V}[r_s]} \\ &= (r_s - r_f) \beta_{ts} \\ r_t &= r_f - \beta_{ts} r_f + r_s \beta_{ts} \\ &= (1 - \beta_{ts}) r_f + r_s \beta_{ts}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Assim, mostrou-se que a taxa de retorno composta continuamente esperada de uma carteira  $t$  de mínima variância pode ser escrita como uma relação linear das taxas de retorno de uma carteira qualquer  $s$  e da taxa livre de risco  $r_f$ .

Esta matemática da teoria de carteiras foi o ponto de partida para a elaboração dos modelos de apreçamento. Primeiramente, surgiu o modelo de apreçamento com base em dois momentos: esperança e variância. Em seguida, outros momentos foram sendo adicionados ao modelo. A seguir, são apresentados tais modelos.

## 2.5 Modelos de Apreçamento

### 2.5.1 Modelo com 2 Momentos

Foram os trabalhos de Markowitz (1952, 1959) que introduziram o conceito de seleção de carteiras com base no retorno esperado e na variância dos ativos. A partir de então, este modelo foi largamente aplicado em finanças. Sua formulação matemática constitui a base do *CAPM*, desenvolvido por Sharpe (1964) e Lintner (1965a, 1965b).

Segundo a teoria, investidores com funções de utilidade côncava e monotonamente crescentes preferem retornos esperados maiores e variância menor. Seja um indivíduo com função de utilidade  $u(\tilde{W})$ . Expandindo por Taylor esta função de utilidade em torno de

$\mathbb{E}[\tilde{W}]$  até a segunda ordem, obtém-se:

$$\begin{aligned} u(\tilde{W}) &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{d}{d\tilde{W}}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}]) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2 + R_3, \end{aligned} \quad (2.79)$$

tal que

$$R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\tilde{W}^n}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^n,$$

é o resto de Taylor, e  $\frac{d^n}{d\tilde{W}^n}u(\cdot)$  é a  $n$ -ésima derivada da função de utilidade  $u(\cdot)$ .

Aplicando o operador esperança na equação (2.79), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(\tilde{W})] &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{E}[(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2] + \mathbb{E}[R_3] \\ &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{V}[\tilde{W}] + \mathbb{E}[R_3] \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para maximizar a esperança da utilidade da riqueza,  $\mathbb{E}[u(\tilde{W})]$ , é necessário maximizar a esperança da riqueza e minimizar sua variância, uma vez que  $\frac{d^2}{d\tilde{W}^2}u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) < 0$ .

Esta análise, simplificada, é válida apenas em condições especiais, como o caso de uma função de utilidade quadrática, cujos momentos de ordem superior, representados em  $\mathbb{E}[R_3]$  são iguais a zero. Todavia, funções de utilidade quadrática apresentam alguns problemas que fazem com que sua utilização seja muito limitada. Este tipo de função de utilidade possui um ponto de saturação, o que implica que a partir de determinado ponto, a utilidade do decisor passa a diminuir com aumentos de riqueza, o que o torna um decisor não-razional.

A análise seria válida, ainda, no caso das taxas de retorno dos ativos com risco serem distribuídas conforme uma normal multivariada, conforme Tobin (1958). Isto porque uma normal multivariada é completamente descrita com base apenas em seus dois primeiros momentos, e as parcelas contidas em  $\mathbb{E}[R_3]$  seriam iguais a zero. Porém, com todas estas restrições, o modelo de esperança-variância está longe de ser um modelo geral que possa ser aplicado amplamente.

Na presença de um valor mobiliário livre de risco, sabe-se, pela equação (2.78) da página 63, que um valor mobiliário  $e$ , qualquer, tem a seguinte taxa de retorno em relação a um

outro valor mobiliário  $q$ , tangente à fronteira eficiente, conforme a Figura 2.6:

$$r_i = (1 - \beta_{qi}) r_f + \beta_{qi} r_q + \epsilon_{qi}, \quad (2.81)$$

tal que  $\mathbb{C}[r_q; \epsilon_{qi}] = \mathbb{E}[\epsilon_{qi}] = 0$ .

Assumindo que o princípio da separação se mantém, a carteira tangente da Figura 2.6 será a carteira de mercado de valores mobiliários com risco. Rearranjando os termos da equação (2.81) e aplicando o operador esperança nos dois lados, tem-se:

$$\mathbb{E}[r_i] - r_f = \beta_{im} (\mathbb{E}[r_m] - r_f), \quad (2.82)$$

para todo valor mobiliário  $i$  em equilíbrio de mercado. Esta formulação foi desenvolvida por Sharpe (1964), Lintner (1965a, 1965b) e Mossin (1966).

### 2.5.2 Modelo com 3 Momentos

Arditti (1967), seguido por Jean (1971), Levy e Sarnat (1972) dentre outros, ampliaram o modelo de esperança-variância para considerar também o terceiro momento centrado na esperança da riqueza, a assimetria. Seguindo as mesmas condições iniciais da Seção 2.5.1, ou seja, o agente econômico possui função de utilidade,  $u(\cdot)$  côncava e monotonamente crescente, e expandindo esta função por Taylor até a terceira ordem em torno de  $\mathbb{E}[\tilde{W}]$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} u(\tilde{W}) &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{d}{d\tilde{W}} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}]) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2 \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^3 + R_4, \end{aligned} \quad (2.83)$$

tal que

$$R_4 = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\tilde{W}^n} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) (\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^n,$$

é o resto de Taylor, e  $\frac{d^n}{d\tilde{W}^n} u(\cdot)$  é a  $n$ -ésima derivada da função de utilidade  $u(\cdot)$ .

Novamente aplicando o operador esperança, agora na equação (2.83), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[u(\tilde{W})] &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{E}[(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^2] + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{E}[(\tilde{W} - \mathbb{E}[\tilde{W}])^3] + \mathbb{E}[R_4] \\
 &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{V}[\tilde{W}] \\
 &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{A}[\tilde{W}] + \mathbb{E}[R_4]
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

A equação (2.84) apresenta a esperança da utilidade da riqueza do agente econômico como função também da assimetria,  $\mathbb{A}[\cdot]$  da distribuição de probabilidades da riqueza. Como o agente é avesso ao risco, tem-se que  $\frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\tilde{W}) < 0$  e o coeficiente da parcela que contém a variância é negativo.

A fim de determinar o sinal do coeficiente da parcela que contém a assimetria, Arditti (1967) vai buscar em Pratt (1964) a definição de prêmio pelo risco,  $\pi$ , que é dado pela expressão:

$$\pi(\tilde{W}) \approx -\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{\frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\tilde{W})}{\frac{d}{d\tilde{W}} u(\tilde{W})} \right). \tag{2.85}$$

Ele ainda assume que, quanto maior a riqueza do agente econômico, menor é o prêmio pelo risco associado a uma loteria. Assim, é possível escrever que

$$\frac{d}{d\tilde{W}} \pi(\tilde{W}) < 0. \tag{2.86}$$

Portanto,

$$\frac{d}{d\tilde{W}} \pi(\tilde{W}) = \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{-\frac{d}{d\tilde{W}} u(\tilde{W}) \frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\tilde{W}) + \left[ \frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\tilde{W}) \right]^2}{\left[ \frac{d}{d\tilde{W}} u(\tilde{W}) \right]^2} \right) < 0. \tag{2.87}$$

Como  $\frac{d}{d\tilde{W}} u(\tilde{W}) > 0$ , é possível verificar pela equação (2.87) que  $\frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\tilde{W}) > 0$ . Assim, o coeficiente da assimetria na equação (2.84) é positivo. Este resultado traz em si a intuição de que um agente econômico avesso ao risco deveria se negar a tomar parte de uma loteria que possuísse uma probabilidade, mesmo que pequena, de grandes perdas e apenas um pequeno ganho – assimetria negativa. O agente avesso ao risco preferirá



assimetria positiva.

Levy (1969) contesta a afirmação feita por Arditti para justificar a exclusão dos momentos de ordem superior à da assimetria. Segundo Arditti, estes momentos adicionam pouca, se alguma, informação acerca das características físicas da distribuição. Arditti se baseia no trabalho de Kaplansky (1945), em que afirma que a curtose não traz informação a respeito da forma do pico da distribuição, e que esta crença seria uma falácia<sup>13</sup>. Arditti (1969) rebate alguns dos comentários críticos feitos por Levy, mas não se pronuncia a respeito da interpretação da curtose e de sua importância no modelo. Ele apenas afirma que o corte feito até o terceiro momento deu-se por questões práticas relacionadas ao teste empírico conduzido em seu primeiro artigo.

Um modelo de apreçamento com três momentos foi inicialmente proposto por Rubinstein (1973), Ingersoll Jr. (1975) e Kraus e Litzenberger (1976). O modelo assume que a taxa de retorno de uma carteira de  $N$  ativos com risco e 1 ativo livre de risco é não-simetricamente distribuída. A esperança, a variância e a assimetria dos retornos da carteira são, respectivamente:

$$\mathbb{E}[r_p] = w_f r_f + \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} \quad (2.88a)$$

$$\mathbb{V}[r_p] = \mathbf{w}^\top \mathbf{V} \mathbf{w} \quad (2.88b)$$

$$\mathbb{A}[r_p] = \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\Gamma}, \quad (2.88c)$$

tal que  $w_f$  é a fração da riqueza investida no ativo livre de risco,  $\mathbf{w}$  é o vetor ( $N \times 1$ ) de pesos investidos nos ativos com risco,  $r_f$  é a taxa de retorno do ativo livre de risco,  $\boldsymbol{\mu}$  é o vetor ( $N \times 1$ ) da esperança das taxas de retorno dos ativos com risco,  $\mathbf{V}$  é a matriz de covariâncias ( $N \times N$ ) dos ativos com risco e  $\boldsymbol{\Gamma}$  é o vetor ( $N \times 1$ ) de coassimetrias entre as taxas de retorno de cada ativo e a taxa de retorno da carteira.

A coassimetria entre duas entidades, representada a partir de agora pela notação  $co\mathbb{A}[\cdot]$ , está assim definida:

$$\begin{aligned} co\mathbb{A}[r_i; r_p] &\equiv \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}[r_i])(r_p - \mathbb{E}[r_p])^2] \\ &= \mathbb{C}[r_i; r_p^2] - 2\mathbb{E}[r_p] \mathbb{C}[r_i; r_p], \end{aligned} \quad (2.89)$$

tal que  $\mathbb{C}[\cdot]$  é a notação para covariância.

<sup>13</sup>Segundo Spanos (1999, p. 119), o termo curtose (ou *kurtosis*, em inglês), vem da palavra grega *κύρτωση*, que significa *curvatura da coluna*. Spanos define o termo como uma medida do centro (pico) de uma distribuição com relação à sua cauda. DeCarlo (1997) reforça esta definição, afirmando que tanto o centro (pico) como a cauda fazem parte do conceito de curtose. Finucan (1964) define curtose também como uma falta de ombros na distribuição.

A assimetria da taxa de retorno de uma carteira,  $\mathbb{A}[r_p]$ , nada mais é que uma coassimetria entre a taxa de retorno desta carteira e o quadrado desta mesma taxa de retorno, ou seja,  $co\mathbb{A}[r_p; r_p]$ . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} co\mathbb{A}[r_p; r_p] &\equiv \mathbb{A}[r_p] = \mathbb{E}[(r_p - \mathbb{E}[r_p])^3] \\ &= \mathbb{C}[r_p; r_p^2] - 2\mathbb{E}[r_p] \mathbb{V}[r_p]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

O interesse do agente econômico será maximizar a esperança da utilidade de sua riqueza terminal,  $\mathbb{E}[u(\tilde{W})]$ , sujeita à seguinte restrição:  $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota} + w_f = 1$ , tal que  $\boldsymbol{\iota}$  é um vetor unitário ( $N \times 1$ ).

O lagrangeano será:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}[u(\tilde{W})] - \lambda (\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota} + w_f - 1). \quad (2.91)$$

A primeira derivada parcial do lagrangeano com relação a  $w_f$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_f} &= \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}{\partial w_f} - \lambda \\ &= k_1 r_f - \lambda = 0, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\text{tal que } k_1 \equiv \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}.$$

A primeira derivada parcial do lagrangeano com relação a  $\mathbf{w}^\top$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}^\top} &= \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} + \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} + \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} - \lambda \boldsymbol{\iota} \\ &= k_1 \boldsymbol{\mu} + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} - \lambda \boldsymbol{\iota} = 0, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\text{tal que } k_2 = \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]} \text{ e } k_3 = \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]}.$$

Substituindo (2.92) em (2.93), obtém-se:

$$\begin{aligned} k_1 \boldsymbol{\mu} + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} - k_1 r_f \boldsymbol{\iota} &= 0 \\ k_1 (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota}) + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} &= 0 \\ \boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} &= \varphi_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + \varphi_3 \boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\text{tal que } \varphi_2 = -\frac{2k_2}{k_1} \text{ e } \varphi_3 = -\frac{3k_3}{k_1}.$$

Quando a função de utilidade do agente econômico for indiferente à assimetria, a equação anterior recai no caso dos dois primeiros momentos.

Para a equação (2.94) ficar uma equação empiricamente estimável, basta fazer:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{V}\mathbf{w}}{\mathbb{V}[r_m]}, \quad (2.95)$$

e

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\mathbb{A}[r_m]}, \quad (2.96)$$

ambos vetores de dimensão  $(N \times 1)$ , e  $r_m$  é a taxa de retorno da carteira de mercado. A equação (2.94) reescrita é:

$$\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} = \varphi_2 \mathbb{V}[r_m] \boldsymbol{\beta} + \varphi_3 \mathbb{A}[r_m] \boldsymbol{\gamma}. \quad (2.97)$$

A fórmula do modelo de apreçamento com três momentos pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} = \theta_1 \boldsymbol{\beta} + \theta_2 \boldsymbol{\gamma}, \quad (2.98)$$

tal que  $\theta_1 = \varphi_2 \mathbb{V}[r_m]$  e  $\theta_2 = \varphi_3 \mathbb{A}[r_m]$ .

Para cada valor mobiliário, a fórmula do modelo generalizado para 3 momentos será:

$$\mathbb{E}[r_i] - r_f = \theta_1 \beta_i + \theta_2 \gamma_i, \quad (2.99)$$

tal que  $\beta_i = \mathbb{C}[r_i; r_m] / \mathbb{V}[r_m]$  e  $\gamma_i = co\mathbb{A}[r_i; r_m] / \mathbb{A}[r_m]$ .

### 2.5.3 Modelo com 4 Momentos

É possível estender a equação da esperança da utilidade da riqueza do agente econômico a fim de contemplar momentos de ordem superiores à assimetria. Expandindo até a quarta ordem, a equação (2.84) fica com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(\tilde{W})] &= u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tilde{W}^2} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{V}[\tilde{W}] \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\tilde{W}^3} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{A}[\tilde{W}] + \\ &\quad + \frac{1}{24} \frac{d^4}{d\tilde{W}^4} u(\mathbb{E}[\tilde{W}]) \mathbb{K}[\tilde{W}] + \mathbb{E}[R_5], \end{aligned} \quad (2.100)$$

tal que  $\mathbb{K}[\tilde{W}]$  é o quarto momento centrado na esperança de  $\tilde{W}$ , a curtose, e  $\mathbb{E}[R_5]$  é a esperança do resto de Taylor.

Seguindo o mesmo desenvolvimento conduzido para o modelo com três momentos, as equações (2.88) passam a contar com a equação da curtose da taxa de retornos:

$$\mathbb{K}[r_p] = \mathbf{w}^\top \mathbf{\Delta}, \quad (2.101)$$

tal que  $\mathbf{\Delta}$  é o vetor  $(N \times 1)$  de cocurtoses entre as taxas de retorno de cada ativo e a taxa de retorno da carteira.

A cocurtose entre duas séries, cuja notação é  $co\mathbb{K}[\cdot]$ , é assim definida:

$$\begin{aligned} co\mathbb{K}[r_i; r_p] &\equiv \mathbb{E}[(r_i - \mathbb{E}[r_i])(r_p - \mathbb{E}[r_p])^3] \\ &= \mathbb{C}[r_i; r_p^3] - 3\mathbb{E}[r_p] \mathbb{C}[r_i; r_p^2] + 3\mathbb{E}^2[r_p] \mathbb{C}[r_i; r_p]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

A fim de chegar na equação do modelo de apreçamento com quatro momentos, segue-se o mesmo caminho usado para o modelo com três momentos, ou seja, maximizar a esperança da utilidade da riqueza terminal do agente econômico,  $\mathbb{E}[u(\tilde{W})]$ , sujeito à seguinte restrição:  $\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota} + w_f = 1$ , tal que  $\boldsymbol{\iota}$  é um vetor unitário  $(N \times 1)$ .

O lagrangeano será:

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}[u(\tilde{W})] - \lambda (\mathbf{w}^\top \boldsymbol{\iota} + w_f - 1). \quad (2.103)$$

A primeira derivada parcial do lagrangeano com relação a  $w_f$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_f} &= \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}{\partial w_f} - \lambda \\ &= k_1 r_f - \lambda = 0, \end{aligned} \quad (2.104)$$

tal que  $k_1 \equiv \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}$ .

A primeira derivada parcial do lagrangeano com relação a  $\mathbf{w}^\top$  é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{w}^\top} &= \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{E}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} + \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} + \\ &+ \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} + \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{K}[\tilde{W}]} \frac{\partial \mathbb{K}[\tilde{W}]}{\partial \mathbf{w}^\top} - \lambda \boldsymbol{\iota} \\ &= k_1 \boldsymbol{\mu} + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} + 4k_4 \boldsymbol{\Delta} - \lambda \boldsymbol{\iota} = 0, \end{aligned} \quad (2.105)$$

tal que  $k_2 = \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{V}[\tilde{W}]}$ ,  $k_3 = \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{A}[\tilde{W}]}$  e  $k_4 = \frac{\partial \mathbb{E}[u(\tilde{W})]}{\partial \mathbb{K}[\tilde{W}]}$ .

Substituindo (2.104) em (2.105), obtém-se:

$$\begin{aligned} k_1 \boldsymbol{\mu} + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} + 4k_4 \boldsymbol{\Delta} - k_1 r_f \boldsymbol{\iota} &= 0 \\ k_1 (\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota}) + 2k_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + 3k_3 \boldsymbol{\Gamma} + 4k_4 \boldsymbol{\Delta} &= 0 \\ \boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} &= \varphi_2 \mathbf{V} \mathbf{w} + \varphi_3 \boldsymbol{\Gamma} + \varphi_4 \boldsymbol{\Delta}, \end{aligned} \quad (2.106)$$

tal que  $\varphi_2 = -\frac{2k_2}{k_1}$ ,  $\varphi_3 = -\frac{3k_3}{k_1}$  e  $\varphi_4 = -\frac{4k_4}{k_1}$ .

Mais uma vez, é possível verificar que, quando a função de utilidade do agente econômico for indiferente à assimetria e à curtose, a equação anterior recai no caso particular dos dois primeiros momentos.

Todavia, ainda há muita controvérsia quanto à ordem a ser usada para truncar uma expansão de Taylor. Hlawitschka (1994) apresenta evidências empíricas de que quando uma série de Taylor da utilidade esperada diverge, truncar até a segunda ordem é uma boa aproximação da utilidade esperada para fins de seleção de carteiras. Afirma, ainda, que quando a série converge, a adição de mais termos pode, em alguns casos, piorar a aproximação. Por outro lado, Berényi (2001) afirma que, para distribuições com assimetria negativa, incluir um momento de ordem superior sempre melhora a aproximação da utilidade esperada. Todavia, se a assimetria for positiva, incluir a assimetria e a curtose pode tanto melhorar como piorar a aproximação.

Scott e Horvath (1980) mostram que, para o agente econômico com coeficiente absoluto de aversão ao risco decrescente, a direção da preferência é positiva para valores positivos de momentos ímpares centrados na esperança. E negativa para os momentos pares centrados na esperança.

Para a equação (2.106) ficar uma equação empiricamente estimável, basta fazer:

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{\boldsymbol{\Delta}}{\mathbb{K}[r_m]}, \quad (2.107)$$

um vetor de dimensão  $(N \times 1)$ . A equação (2.106) reescrita é:

$$\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} = \varphi_2 \mathbb{V}[r_m] \boldsymbol{\beta} + \varphi_3 \mathbb{A}[r_m] \boldsymbol{\gamma} + \varphi_4 \mathbb{K}[r_m] \boldsymbol{\delta}. \quad (2.108)$$

A fórmula do modelo de apreçamento com quatro momentos é:

$$\boldsymbol{\mu} - r_f \boldsymbol{\iota} = \theta_1 \boldsymbol{\beta} + \theta_2 \boldsymbol{\gamma} + \theta_3 \boldsymbol{\delta}, \quad (2.109)$$

tal que  $\theta_1 = \varphi_2 \mathbb{V}[r_m]$ ,  $\theta_2 = \varphi_3 \mathbb{A}[r_m]$  e  $\theta_3 = \varphi_4 \mathbb{K}[r_m]$ .

Para cada valor mobiliário, a fórmula do modelo generalizado para 4 momentos será:

$$\mathbb{E}[r_i] - r_f = \theta_1 \beta_i + \theta_2 \gamma_i + \theta_3 \delta_i, \quad (2.110)$$

tal que  $\beta_i = \mathbb{C}[r_i; r_m] / \mathbb{V}[r_m]$ ,  $\gamma_i = co\mathbb{A}[r_i; r_m] / \mathbb{A}[r_m]$  e  $\delta_i = co\mathbb{K}[r_i; r_m] / \mathbb{K}[r_m]$ .

## Capítulo 3

# Metodologia da Pesquisa Empírica

“[...] sem o ‘método’ ou ‘critério’ de objetividade, ou sem a abordagem e a atitude empírica, a ciência como é conhecida no mundo moderno não seria possível”

---

Kerlinger (1980, p. 9)

Conforme Kerlinger (1980, p. 9), duas características importantíssimas da ciência são a objetividade e sua natureza empírica. A pesquisa em Ciências Sociais Aplicadas, especialmente em finanças, é caracterizada pelo uso de dados observacionais. E por serem observados, estes dados podem estar sujeitos a distorções advindas das predisposições e crenças do observador. Contudo, Kerlinger (1980, p. 11) afirma que a “condição principal para satisfazer o critério de objetividade é, idealmente, que *quaisquer* observadores com um mínimo de competência concordem em seus resultados.”

Os dados a serem usados nesta pesquisa são provenientes de observações ocorridas no mercado financeiro brasileiro com respeito aos preços negociados de ativos financeiros listados em bolsa de valores. Parte-se, portanto, da premissa de que os agentes econômicos que realizam diariamente as transações de compra e venda destes ativos sejam observadores com competência suficiente para satisfazer o critério de objetividade requerido.

A objetividade, contudo, não é o propósito final da ciência. É apenas o ponto de partida para ajudar o pesquisador a explicar melhor os fenômenos observados na vida cotidiana.

Para alcançar este objetivo, é necessário compreender o caráter empírico da ciência. Conforme Kerlinger (1980, p. 15-6), o termo empírico significa “guiado pela evidência obtida em pesquisa científica sistemática e controlada.” Se for possível, baseado em evidências empíricas, fazer certas afirmações, é esperado que a probabilidade dessa afirmação ser verdadeira seja maior que a probabilidade de não o ser. Com isto, espera-se chegar mais próximo dos grandes objetivos da ciência: a teoria e a explicação. Conforme Kerlinger (1980, p. 18),

[...] teorias são tentativas sistemáticas de “explicar” os vários fenômenos, postulando as relações entre os fenômenos a serem explicados e um certo número de “variáveis explicativas” que também estão relacionadas entre si de modo sistemático. O propósito básico da ciência é chegar à teoria, inventar e descobrir explicações válidas de fenômenos naturais.

Esta pesquisa é, portanto, de natureza aplicada e com abordagem quantitativa. Conforme Gil (1991), ela pode ser classificada, quanto aos seus objetivos, como uma pesquisa descritiva. Ela visa à descrição das características de determinada população com base em dados amostrais e o estabelecimento de relações entre variáveis. Quanto aos procedimentos técnicos, ainda segundo Gil (1991), a pesquisa é classificada como *ex post facto*, pois se realiza depois dos fatos terem ocorrido.

### 3.1 Modelos Empíricos de Apreçamento de Ativos Baseados em Momentos

Os momentos da distribuição das taxas de retorno de ativos estão intimamente ligados a fatores de risco. Os trabalhos de Markowitz (1952, 1959) deixam isso claro quando associaram a variabilidade da taxa de retorno de uma carteira de ativos a um atributo indesejável que investidores desejam minimizar. O terceiro momento, a assimetria, está associado ao *downside risk*, ou seja, ao risco de o ativo alcançar valores extremos no lado negativo, o lado da perda. Já o quarto momento, a curtose, apesar de não estar diretamente associado a nenhuma medida de risco, pode se comportar como um fator de risco uma vez que está associado à grossura das caudas da distribuição e, portanto, a uma maior ou menor probabilidade de ocorrência desses valores extremos, sejam do lado da perda ou do ganho.

Modelos de apreçamento de ativos buscam exatamente relacionar os fatores de risco ao



comportamento dos retornos dos ativos. Modelos parcimoniosos, como o *CAPM*, emergiram e ganharam popularidade rápida por sua simplicidade e facilidade de implementação. Contudo, conforme Harvey e Siddique (2000a), o escrutínio pelo qual este modelo passou nos últimos anos fez com que aumentasse a desconfiança de que os retornos esperados de ativos podem não ser explicados apenas por um fator de risco, o beta do ativo.

Ao mesmo tempo, cresceu o interesse pela possível influência de outros momentos em modelos desta natureza. Os primeiros estudos, conduzidos por Arditti (1967, 1971), buscavam relacionar empiricamente o comportamento das taxas de retorno à assimetria em um modelo que contava ainda com a variância dos retornos. O principal resultado encontrado foi que o terceiro momento era uma medida estatisticamente significativa dentro do modelo. Contudo, em seu estudo, Arditti (1967) afirma que momentos de quarta ordem em diante adicionam pouca ou nenhuma informação para ajudar a explicar o comportamento das séries de retorno. Levy (1969) mostra que isso só é verdade porque Arditti (1969) utilizou uma função de utilidade do tipo cúbica.

Logo em seguida, o estudo de Kraus e Litzenberger (1976) testa empiricamente a preferência do investidor pelo terceiro momento, desta vez usando o conceito de coassimetria, ao invés da assimetria total usada por Arditti. Esta coassimetria foi chamada de assimetria sistêmica (não-diversificável), uma referência direta ao *CAPM* original que relaciona a covariância ao risco sistêmico. Melhor seria inclusive passar a ser chamada de variância sistêmica, uma vez que não é mais o único risco considerado no modelo. A extensão ao modelo de Sharpe-Lintner proposta por Kraus e Litzenberger se mostrou empiricamente válida para os dados utilizados, sendo a assimetria sistêmica um fator significativo no modelo. Foi verificado também que os investidores tendem a ter aversão ao segundo comomento entre o ativo e o mercado, como esperado, e preferência pelo terceiro comomento positivo, quando a assimetria da carteira de mercado é positiva. Se a assimetria desta carteira fosse negativa, investidores teriam aversão à coassimetria positiva com o mercado. Conforme Friend e Westerfield (1980), o modelo proposto por Kraus e Litzenberger (1976) ainda se mantém válido se a carteira de mercado for simétrica, desde que o ativo exiba alguma coassimetria com o mercado.

Friend e Westerfield (1980) refazem a pesquisa de Kraus e Litzenberger (1976), desta vez incorporando à análise não apenas ações, mas também títulos de dívida negociados em bolsa. Usam, portanto, uma carteira de mercado composta por estes dois tipos de ativo. Eles encontram evidências, não totalmente conclusivas, de que investidores pagam algum prêmio por assimetria positiva. Singleton e Wingender (1986) mostram que ativos com assimetria positiva em um dado período podem apresentar tanto assimetria negativa como positiva em um período seguinte e vice-versa. Dentre seus resultados, destaca-se

também a verificação de que a assimetria é reduzida quando os ativos são combinados em carteiras.

Lim (1989) testa o modelo de Kraus e Litzenberger (1976) usando o método dos momentos generalizado, *GMM*, de Hansen (1982). A vantagem da utilização de tal método é a de que ele não impõe hipóteses acerca da distribuição de probabilidade das taxas de retorno dos ativos. Este fato é especialmente interessante para este tipo de estudo uma vez que não há uma distribuição de probabilidade multivariada consensual para taxas de retorno com coassimetria. Como resultado, Lim (1989) encontrou evidências de que a assimetria sistêmica possui um preço dado pelos investidores.

Harvey e Siddique (2000a) apresentam um modelo de apreçamento de ativos em que buscam verificar se investidores percebem valor na assimetria das taxas de retorno de ativos. Eles usam um modelo semelhante ao de Kraus e Litzenberger, com a diferença que incorporam a assimetria condicional, estimada por meio de um modelo autoregressivo.

Diferentemente da assimetria, a curtose não tem recebido tanta atenção em testes de modelos de apreçamento. Jondeau e Rockinger (2003) investigam a existência e a persistência de assimetria e curtose em dados diários de diversas séries financeiras, mas não chegam especificamente a testar um modelo de apreçamento baseado nesses momentos.

A inclusão do quarto momento só foi feita por Homaifar e Graddy (1988), que derivaram um modelo de apreçamento incorporando a cocurtose<sup>14</sup> ao modelo de Kraus e Litzenberger (1976). Dentre os outros autores que testaram esse modelo com quatro momentos, estão Fang e Lai (1997), Jondeau e Rockinger (2002, 2004), Galagedera, Henry e Silvapulle (2003) e Harvey et al. (2004).

## 3.2 Periodicidade das Observações

A questão da periodicidade ou intervalo com que os dados amostrais são calculados também é um fator importante a ser considerado nesta pesquisa. Os dados de retorno, que serão calculados com base nas observações dos preços, podem ser coletados com periodicidade diária, semanal, mensal ou qualquer outra periodicidade desejada. Porém, há estudos que mostram que os resultados podem ser consideravelmente afetados por esta escolha.

---

<sup>14</sup>Homaifar e Graddy (1988) testam também a importância do quinto comomento, e encontram resultados satisfatórios quanto à sua importância.

Fogler e Radcliffe (1974) ilustram que a assimetria é mais sensível que a média e o desvio-padrão quando diferentes intervalos de tempo são usados para seu cálculo. Com uma amostra de retornos anuais de carteiras de ativos no período de 1954 a 1963, encontraram que a série das taxas de retorno eram positivamente assimétricas. Contudo, quando a assimetria foi calculada com base em intervalos menores (semestrais e trimestrais), chegava-se à conclusão oposta. O mesmo resultado foi encontrado para o índice Standard and Poor's entre os anos de 1948 e 1969.

Smith (1978) também encontrou diferenças significativas quando diferentes intervalos foram usados na construção da série de retornos. O *CAPM* foi testado em diferentes carteiras com taxas de retorno construídas a partir de intervalos distintos, e, segundo seus achados, os valores de alfa e beta foram sensíveis a esta escolha até ele separar as carteiras com base no risco sistêmico. Quando isto foi feito, as estimativas de beta das carteiras aumentaram com o aumento do intervalo para o grupo de ações de maior beta e diminuíram com o aumento do intervalo para o grupo de ações de menor beta.

Conforme Galagedera, Henry e Silvapulle (2003), a assimetria e a curtose das distribuições das taxas de retorno são mais elevadas em dados de alta frequência, razão pela qual estes autores decidiram-se por usar dados diários em sua pesquisa. Jondeau e Rockinger (2003), na estimação da volatilidade, assimetria e curtose condicionais fazem uso de dados diários. Assim também o fazem Brooks et al. (2005), que verificam em seus dados que a curtose diminui com a agregação dos retornos.

Entretanto, há também exemplos de aplicação e teste de modelos de apreçamento com taxas de retorno calculadas com intervalos de frequência mais baixa. Fang e Lai (1997), por exemplo, usam dados mensais e não fazem qualquer referência às mudanças nas estimativas dos momentos causadas por esta decisão. O mesmo comportamento foi adotado por Harvey e Siddique (2000a) para seu modelo condicional de três momentos. Estes exemplos ilustram que a decisão pela periodicidade de coleta dos preços dos ativos não é consensual na literatura.

O que alguns autores verificaram empiricamente, Hawawini (1980) mostrou analiticamente: a assimetria da taxa de retorno composta continuamente é sensível à escolha do tamanho do intervalo com que essa taxa de retorno é calculada. Além disso, mostrou também que essa sensibilidade é maior quanto maior for a ordem do momento. Lau e Wingender (1989) mostram que os efeitos sobre os momentos da decisão acerca do tamanho do intervalo para o caso em que os retornos são calculados na forma discreta também existem.

Além disso tudo, é importante notar que séries financeiras não são, em geral, estacionárias.

Com isso, parâmetros como a esperança, variância ou qualquer outro momento não são iguais ao longo do tempo. A falta de estacionariedade provoca a necessidade de tratar as séries financeiras como séries que variam no tempo, e seus momentos devem ser estimados levando-se em conta este fato.

### 3.3 Momentos Variando no Tempo

Bekaert et al. (1998) argumentam que a análise por esperança e variância tradicional no conceito de Markowitz (1952, 1959) é especialmente problemática em mercados emergentes. Em um estudo específico para esses mercados, os autores encontraram que os ativos transacionados apresentam assimetria e curtose significativas em seus retornos, implicando que é razoável acreditar que os investidores devam ter preferências por estes momentos.

Além disso, verificaram também que esses momentos variam significativamente ao longo do tempo. Esses autores dividiram sua amostra de dados e analisaram as décadas de 1980 e 1990, e verificaram que uma quantidade maior de países apresentou assimetria positiva para a década de 1990 que para a de 1980. A explicação para isto provavelmente reside no fato de que os processos de liberalização destes mercados ocorreram no final da década de 1980 ou início da década de 1990, o que explicaria tal constatação. Quanto à curtose, foi constatado que, à exceção de um país, o Chile, os demais apresentaram excesso de curtose na década de 1990, apesar de ser em menor magnitude do que o verificado na década de 1980.

A fim de tratar esse problema, faz-se necessário usar uma metodologia de cálculo dos comomentos que leve em consideração esta natureza não-estável dos dados. Por conta desta e de outras razões, a serem detalhadas mais adiante neste capítulo, decidiu-se por utilizar a análise de dados em painel. Esta técnica demanda que os comomentos, utilizados como variáveis independentes no modelo, sejam estimados em diferentes instantes do tempo.

### 3.4 População, Amostra e Dados Coletados

Faz parte da população de interesse desta pesquisa todas as empresas com ações regularmente negociadas na Bolsa de Valores do Estado de São Paulo, Bovespa, no período de 01 de janeiro de 2003 a 31 de dezembro de 2007. Conforme Barros (2001), a seleção de

um período específico para coleta dos dados por si só já constitui um critério de seleção de amostra. Neste caso, pode ainda criar um viés de sobrevivência à amostra selecionada, uma vez que apenas as empresas negociadas neste período poderão fazer parte dela. Contudo, conforme Singleton e Wingender (1986), os resultados qualitativos da análise sofrem pouca interferência por conta deste fato.

A amostra utilizada foi composta por 179 empresas não-financeiras com ações negociadas na Bovespa. A fim de chegar a este número, foram identificadas todas as empresas cujas ações tiveram data de início de negociação anterior a 01/01/2007 e data de último negócio posterior a 31/12/2003. Desta forma, foram descartadas as empresas cujas ações apresentam negociação por um período inferior a um ano. A amostra final selecionada para o estudo está disponível na Tabela A.1, constante no Apêndice A, na página 139.

A exigência da regularidade na negociação advém da necessidade de se obter dados de alta frequência dos preços negociados. Ações de empresas de baixa negociabilidade implicam séries com muitos dados faltantes, tornando complexa a determinação do seu preço correto. A fim de medir essa regularidade, foi adotado como critério de corte que as empresas deveriam apresentar um índice de liquidez mínimo de 0,01 em algum dos 5 anos do período amostral.

Para cada empresa, foi escolhida apenas uma única classe de ação: aquela com maior volume de negociação no período analisado. Esta decisão foi tomada porque na análise de dados serão utilizadas informações contábeis da empresa. Como uma mesma empresa pode ter ações de diferentes classes, mas seus dados contábeis seriam os mesmos, isto causaria uma inconsistência. Após esta última filtragem, chegou-se ao número definitivo de empresas da amostra.

Em seguida, foram coletados dados de preços semanais de cada empresa da amostra, com tolerância para que o negócio tenha sido realizado dentro da semana de interesse. Algumas empresas apresentaram, para alguns anos, pouca frequência de dados semanais. Aquelas que não apresentaram pelo menos um ano com o mínimo de 40 semanas de dados de preço foram totalmente excluídas da amostra. Das restantes, os anos com menos de 40 observações de dados semanais também foram eliminados. Ou seja, uma empresa para fazer parte da amostra deveria ter, pelo menos 40 ou mais observações de preço semanais em pelo menos um dos anos. A Tabela A.2, constante no Apêndice A, na página 145 apresenta estes dados.

Isto caracteriza a amostra como um painel desbalanceado. Esta decisão minimiza o viés de sobrevivência da amostra, uma vez que foi aceita a possibilidade de a empresa ter encerrado, ou mesmo iniciado, sua atividade bursátil durante o período amostral. Todos

os dados foram obtidos da base de dados do sistema de informações da Economatica. Foi utilizada também a classificação por setor de atuação de acordo com as 20 categorias definidas por ela. Na amostra, todos estes setores estão representados com pelo menos uma empresa. O resumo destas informações está disponível na Tabela A.3, constante no Apêndice A, na página 151.

### 3.5 Definição Operacional das Variáveis

A seguir, estão descritas as definições operacionais das variáveis utilizadas nesta tese. As mesmas encontram-se resumidas na Tabela B.1, no Apêndice B, na página 153.

#### 3.5.1 Prêmio pelo Risco das Ações

A abordagem econométrica utilizada nesta pesquisa se dá em duas etapas, conforme metodologia proposta por Black, Jensen e Scholes (1972), e descrita a seguir neste capítulo. Nestas duas etapas, usa-se como variável dependente o prêmio pelo risco das ações da amostra de interesse da pesquisa. Este prêmio é definido como a diferença entre a taxa de retorno composta continuamente do ativo e a taxa de retorno composta continuamente do ativo livre de risco:

$$\text{Prêmio}_{i,t} = \log \frac{P_{i,t}}{P_{i,t-1}} - \log \frac{P_{f,t}}{P_{f,t-1}},$$

tal que:  $\text{Prêmio}_{i,t}$  é o prêmio pelo risco do ativo  $i$  na data  $t$ ;  $P_{i,t}$  é o preço de mercado do ativo  $i$  na data  $t$ ; e  $P_{f,t}$  é o preço de mercado do ativo livre de risco na data  $t$ . O subscrito  $t - 1$  indica o preço do mesmo ativo coletado no instante de tempo anterior.

Esta tese usou o CDI como *proxy* para a taxa de retorno do ativo livre de risco. Outras variáveis poderiam ser utilizadas e o debate com relação a esta escolha é intenso na literatura financeira brasileira, mas esta decisão foi tomada a partir da recomendação de Famá, Barros e Silveira (2002), que consideram o CDI condizente “com a conceituação teórica de uma taxa pura de juros” no sentido de Sharpe (1964). Segundo Famá, Barros e Silveira (2002), o CDI apresenta correlação insignificante com a carteira de mercado e o desvio-padrão da série de suas taxas de retorno também é desprezível. Sanvicente e Minardi (1999), Garcia e Brandão (2001) e Simonassi (2006) são algumas das referências que utilizam outras *proxies* para a taxa de retorno do ativo livre de risco.

Como *proxy* para a carteira de mercado, foram utilizadas duas alternativas: a primeira delas foi o Índice da Bolsa de Valores de São Paulo, o Ibovespa; alternativamente, foi utilizado também o Índice Brasil, IBrX, carteira composta pelas 100 ações mais líquidas na Bovespa.

### 3.5.2 Tamanho da Empresa

Uma das variáveis constantemente encontradas em testes de modelos de apreçamento é o tamanho da empresa em questão. Esta variável é bastante utilizada como controle para os efeitos dos fatores de risco do modelo. O chamado efeito tamanho foi inicialmente verificado na pesquisa de Banz (1981). Nela, o autor verificou que empresas com menor valor de mercado tiveram retornos ajustados ao risco maiores que empresas com maior valor de mercado, levantando a questão de o *CAPM* ser um modelo mal-especificado.

Conforme Berk (1995), ainda não é possível explicar teoricamente este efeito. Exatamente por isto, este efeito, quando verificado, é tratado como uma anomalia. Na verdade, nas pesquisas conduzidas, nunca foi possível dizer que o tamanho, medido pelo valor de mercado da companhia, seria um fator importante, mas ausente no modelo; ou se ele era apenas uma variável capturando o efeito de alguma outra, ainda desconhecida, mas correlacionada a esta.

Nesta tese, o tamanho da empresa será definido por meio de três variáveis, a serem usadas individualmente, nunca em conjunto, na modelagem:

- (a) O logaritmo natural do valor de mercado das ações da empresa:  $\ln VM_{i,t}$ ;
- (b) O logaritmo natural do ativo total contábil da empresa:  $\ln AT_{i,t}$ ;
- (c) O logaritmo natural da receita líquida da empresa:  $\ln RL_{i,t}$ .

Os valores de mercado das ações das empresas foram calculados a partir das cotações ajustadas para proventos das ações ordinárias e preferenciais das empresas no fechamento de cada ano  $t$ , multiplicado pelas respectivas quantidades de ação em circulação. Os ativos totais contábeis foram obtidos, sempre que possível, por meio dos balanços consolidados das empresas ao final de cada ano  $t$ . As receitas líquidas, da mesma forma, foram obtidas, sempre que possível, por meio dos demonstrativos consolidados dos resultados dos exercícios.

### 3.5.3 Valor de Mercado sobre Valor Contábil das Ações

Esta variável de controle também é comumente utilizada em testes de modelos de apreçamento. Na literatura, geralmente é chamada de *book-to-market equity* ( $BE/ME$ ), que seria o inverso do valor de mercado sobre o valor contábil ( $VM/VC$ ). Stattman (1980), Rosenberg, Reid e Lanstein (1985) e Fama e French (1992) encontraram evidências do impacto desta variável sobre a taxa de retorno das ações, mesmo controlando pelo  $\beta$ . De acordo com estes estudos, quanto maior o  $BE/ME$ , maior a taxa de retorno verificada.

Nesta tese, o índice valor de mercado sobre valor contábil ( $VMVC_{i,t}$ ) das ações para cada ano foi calculado dividindo-se o valor de mercado das ações, conforme descrito no item anterior, pelo patrimônio líquido da empresa ( $PL$ ). O  $PL$  utilizado foi o de fechamento do ano em questão.

### 3.5.4 Índice Preço/Lucro

Basu (1977) foi quem primeiro apontou uma anomalia em modelos de apreçamento relacionada ao índice preço/lucro ( $IPL$ ). Esta anomalia seria explicada por expectativas exageradas por parte dos investidores, e os resultados mostraram que empresas com baixo  $IPL$  apresentaram retornos superiores mesmo quando controladas pelo  $\beta$ .

O  $IPL_{i,t}$  é calculado dividindo-se o preço por ação da empresa pelo lucro por ação da mesma com base nas cotações e demonstrativos consolidados ao final de cada ano  $t$ .

### 3.5.5 Liquidez

O índice de liquidez,  $ILLIQ_{i,t}$ , adotado foi calculado para cada empresa conforme a seguinte equação:

$$ILLIQ_{i,t} = 100 \times \frac{d_{i,t}}{D_{i,t}} \sqrt{\frac{n_{i,t}}{N_{i,t}} \times \frac{v_{i,t}}{V_{i,t}}},$$

tal que  $d_{i,t}$  é o número de dias em que houve pelo menos um negócio com a ação da empresa  $i$  dentro do ano  $t$ ;  $D_{i,t}$  é o número total de dias do ano  $t$ ;  $n_{i,t}$  é o número de negócios com a ação da empresa  $i$  no ano  $t$ ;  $N_{i,t}$  é o número de negócios com todas as ações no ano  $t$ ;  $v_{i,t}$  é o volume em dinheiro dos negócios realizados com a ação da empresa  $i$  no ano  $t$ ; e  $V_{i,t}$  é o volume em dinheiro dos negócios realizados com todas as ações no ano  $t$ .



### 3.5.6 Alavancagem

O efeito alavancagem é também frequentemente verificado como uma anomalia em testes de modelos de apreçamento. Este efeito foi apontado inicialmente por Bhandari (1988). Conforme Fama e French (1992), é plausível que a alavancagem esteja associada ao risco e ao retorno esperado dos ativos, mas o *CAPM* deveria capturar com o  $\beta$  este tipo de risco. Os resultados das pesquisas, como a de Bhandari (1988), destacam que o retorno esperado das ações é positivamente relacionado com a alavancagem de mercado, estando esta líquida dos efeitos tanto do  $\beta$  da empresa como do seu tamanho.

Nesta tese, foram usadas duas definições operacionais para a variável alavancagem, ambas a valor de mercado:

- (a)  $DBVM_{i,t}$ : Dívida bruta sobre valor de mercado das ações da empresa;
- (b)  $ETVM_{i,t}$ : Exigível total sobre valor de mercado das ações da empresa.

A dívida bruta das empresas corresponde à soma dos financiamentos de curto e longo prazos com as debêntures de curto e longo prazo emitidas pelas empresas. O exigível total corresponde à diferença entre o ativo total da empresa e seu patrimônio líquido.

### 3.5.7 Setor de Atividade

Dezenove dos vinte setores de atividade, conforme classificação da Economática, descritos na tabela A.3, estão representados neste estudo. Cada setor será representado por uma variável *dummy*, do tipo binária, que assume o valor 1 quando a empresa pertencer a um determinado setor ou 0, quando pertencer a quaisquer dos outros 18 setores. Para efeito da estimação dos modelos, empresas pertencentes ao setor financeiro e de seguros foram excluídas da amostra. Tais empresas apresentam características muito particulares, que as distingue das empresas dos demais setores, prejudicando a comparabilidade.

### 3.5.8 Dummies de Ano

Estas variáveis também são do tipo binária, assumindo valor 1 quando o seu dado se referir ao  $t$ -ésimo ano ou 0 quando se referir a quaisquer dos outros anos. O objetivo de inserir este tipo de variável no modelo é o de tentar capturar eventuais choques macroeconômicos que afetaram todas as empresas da amostra no intervalo de tempo estudado.

## 3.6 Modelo Empírico de Análise dos Dados

Um dos propósitos desta tese é o de apresentar uma inovação na forma de testar um modelo de apreçamento derivado do *CAPM*. A abordagem proposta busca evitar alguns dos problemas enfrentados por estudos anteriores, especialmente o que se refere à não-estabilidade das medidas de risco ao longo do horizonte de tempo. Todos os testes anteriormente conduzidos apóiam-se em métodos transversais<sup>15</sup> de análise empírica. Nesta pesquisa, foi utilizada uma técnica que permite a análise em duas dimensões: a dimensão transversal, representada pelas empresas, e a dimensão longitudinal, representada pelo tempo, caracterizando o estudo como um painel de dados.

A abordagem, contudo, é conduzida em duas etapas. Na primeira delas, descrita a seguir, é utilizado o modelo de fatores conforme já descrito no capítulo da fundamentação teórica desta tese. Mais adiante, após estimados os fatores de risco, estes são utilizados no teste do modelo de apreçamento, empregando o painel de dados.

### 3.6.1 Modelos de Fatores

O principal resultado da teoria proposta no *CAPM* é o estabelecimento da relação entre o prêmio pelo risco de um determinado ativo (ou carteira de ativos) e seu risco sistêmico. Esta relação foi apresentada na equação (2.82) da página 65, e está reproduzida a seguir:

$$\mathbb{E}[r_i] - r_f = \beta_{im} (\mathbb{E}[r_m] - r_f) .$$

Se for definido um  $\alpha_i$ , tal que

$$\alpha_i = \mathbb{E}[r_i] - r_f - \beta_{im} (\mathbb{E}[r_m] - r_f) ,$$

então, pela equação (2.82),  $\alpha_i = 0$  para qualquer ativo. Basta, portanto, verificar se isto é empiricamente verdadeiro.

O teste formal do *CAPM*, conforme sugerido por Black, Jensen e Scholes (1972), é testar se, para um conjunto de empresas, a equação

$$r_i - r_f \mathbf{1} = \theta_0 + \theta_1 \beta_i + \epsilon_i \tag{3.1}$$

---

<sup>15</sup> *Cross-sectional methods.*

apresenta  $\theta_0$  igual a zero e  $\theta_1$  igual ao excesso de retorno da carteira de mercado. Nesta equação,  $\mathbf{r}_i$  é um vetor  $N \times 1$  dos retornos de  $N$  empresas;  $\mathbf{1}$  é um vetor  $N \times 1$  de 1's;  $\beta_i$  é o vetor  $N \times 1$  de medidas de risco baseadas em covariâncias das taxas de retorno das empresas com a taxa de retorno da carteira de mercado; e  $\epsilon_i$  é o vetor  $N \times 1$  de erros, satisfazendo  $\mathbb{E}[\epsilon_i | r_m, r_f] = \mathbf{0}$ .

Inúmeros estudos, como os já citados anteriormente nesta tese, apontaram na direção de uma deficiência do *CAPM*, sugerindo que há fatores de risco não considerados em sua formulação. Uma das proposições para o modelo é a de que há fatores de risco associados aos comomentos além da covariância, especialmente a coassimetria e a cocurtose, que são potencialmente relevantes. A estimação desses comomentos se dá com o uso de modelos lineares nos parâmetros, conforme apresentados a seguir.

### 3.6.1.1 Modelo de Mercado Quadrático

Desde Kraus e Litzenberger (1976), o modelo de mercado quadrático é empregado na estimação das coassimetrias entre as séries de taxas de retorno dos ativos e da carteira de mercado. O processo gerador de dados para as séries de taxas de retorno, segundo este modelo, é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{r}_i - r_f \mathbf{1} = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f) + \gamma_i(r_m - r_f)^2 + \epsilon_i, \quad (3.2)$$

tal que  $\alpha_i$  é um vetor  $N \times 1$  de interceptos;  $\beta_i$  é o vetor  $N \times 1$  de covariâncias;  $\gamma_i$  é o vetor  $N \times 1$  de coassimetrias; e  $\epsilon_i$  é o vetor  $N \times 1$  de erros, satisfazendo  $\mathbb{E}[\epsilon_i | r_m, r_f] = \mathbf{0}$ .

Conforme Barone-Adesi, Gagliardini e Urga (2004), a motivação para se incluir o quadrado do excesso de retorno da carteira de mercado é considerar a coassimetria entre a taxa de retorno de cada ativo e a taxa de retorno da carteira de mercado. Estes autores verificaram que os resíduos da regressão entre o excesso de retorno de alguns ativos contra uma constante e o excesso de retorno da carteira de mercado tendem a ser positivamente (negativamente) correlacionados com o excesso de retorno ao quadrado da carteira de mercado. Tais ativos apresentaram tendência a ter taxas de retorno mais altas (mais baixas) quando o mercado exibia taxas de retorno absolutas mais altas. Constatou-se que tais ativos apresentavam coassimetria positiva (negativa) com o mercado.

Assim, além do clássico coeficiente  $\beta$  do *CAPM*, a coassimetria é, também, um fator de risco. O teste empírico do modelo de mercado quadrático é por meio da seguinte equação,

semelhante em sua estrutura à equação (2.99) da página 69:

$$\mathbf{r}_i - r_f \mathbf{t} = \theta_0 + \theta_1 \boldsymbol{\beta}_i + \theta_2 \boldsymbol{\gamma}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (3.3)$$

tal que  $\theta_0$  deve ser igual a zero e os demais coeficientes  $\theta_i$  serão significativamente diferentes de zero quando o vetor de comomentos aos quais estão relacionados for relevante para o modelo.

### 3.6.1.2 Modelo de Mercado Cúbico

Seguindo a mesma intuição do modelo de mercado quadrático, o modelo de mercado cúbico insere um outro comomento, a cocurtose entre as séries de taxas de retorno dos ativos e da carteira de mercado. O modelo de mercado cúbico é dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{r}_i - r_f \mathbf{t} = \boldsymbol{\alpha}_i + \boldsymbol{\beta}_i(r_m - r_f) + \boldsymbol{\gamma}_i(r_m - r_f)^2 + \boldsymbol{\delta}_i(r_m - r_f)^3 + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (3.4)$$

tal que, além das mesmas variáveis anteriormente descritas,  $\boldsymbol{\delta}_i$  é o vetor  $N \times 1$  de cocurtoses.

A equação a seguir permite a condução de um teste empírico para o modelo de mercado cúbico. Sua representação é semelhante á da equação (2.110) da página 72:

$$\mathbf{r}_i - r_f \mathbf{t} = \theta_0 + \theta_1 \boldsymbol{\beta}_i + \theta_2 \boldsymbol{\gamma}_i + \theta_3 \boldsymbol{\delta}_i + \boldsymbol{\epsilon}_i, \quad (3.5)$$

tal que  $\theta_0$  deve ser igual a zero e os demais coeficientes  $\theta_i$  serão significativamente diferentes de zero quando o vetor de comomentos aos quais estão relacionados for relevante para o modelo.

## 3.6.2 Dados em Painel

A análise de dados em painel, ou, em outras palavras, o agrupamento de cortes transversais ao longo do tempo, nomenclatura adotada em Wooldridge (2006), permite o estudo econométrico ao longo do tempo de unidades básicas de estudo dispostas em cortes transversais. Nesta pesquisa, a unidade básica de estudo é representada por empresas, observadas em diferentes instantes do tempo. A vantagem no uso desta técnica é, em primeiro lugar, permitir a observação de relações dinâmicas, algo que não é alcançado com apenas dados transversais. Em segundo lugar, o painel permite o controle da heterogeneidade

não-observada nos dados transversais. Este assunto será tratado em maiores detalhes na seção 3.6.3.

Outro benefício do uso desta abordagem está relacionado à possibilidade de utilização de uma base de dados maior do que seria possível apenas com dados transversais. Esta base de dados maior, segundo Baltagi (2005, 2006), permite uma maior variabilidade e uma menor colinearidade entre as variáveis estudadas.

O conjunto de dados desta pesquisa caracteriza-se por ser um painel do tipo curto<sup>16</sup>, ou seja, há disponibilidade de uma quantidade grande de observações transversais (empresas estudadas) em poucos instantes longitudinais (tempo). Outra característica da amostra estudada é que ela forma um painel desbalanceado, ou seja, não há dados disponíveis para todas as empresas em todos os anos.

A relação entre as variáveis de interesse da pesquisa pode ser representada conforme a equação linear a seguir:

$$y_{i,t} = \theta_0 + \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\Theta}_{i,t} + \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\Omega}_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.6)$$

tal que, para cada empresa  $i$  em um determinado ano  $t$ , observou-se um conjunto de  $k_1$  de comomentos  $\boldsymbol{\Theta}_{i,t}$ , um vetor de dimensão  $(k_1 \times 1)$ . O vetor  $\boldsymbol{\theta}^\top$  é o vetor  $(k_1 \times 1)$  de parâmetros associados a cada comomento, transposto. O conjunto das  $k_2$  variáveis de controle está representado no vetor  $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}$ . O vetor  $\boldsymbol{\omega}^\top$  de dimensão  $(k_2 \times 1)$ , transposto, é o conjunto de parâmetros das variáveis de controle. O termo de erro,  $\varepsilon_{i,t}$ , não deve, por hipótese, se correlacionar contemporaneamente com os regressores; e a variável de resposta,  $y_{i,t}$ , é o prêmio pelo risco da empresa  $i$  no instante de tempo  $t$ .

### 3.6.3 Heterogeneidade Não-observada

Conforme Arellano (2003), modelos de regressão são ferramentas estatísticas usadas econometricamente com o objetivo de modelar dados empiricamente para gerar previsões (econometria descritiva) ou para testar teorias (econometria estrutural). Todavia, regressões geradas a partir de dados financeiros, em geral, não podem ser usados na obtenção de implicações causais. A principal razão disto, ainda segundo Arellano (2003), reside no fato de que, para o determinado modelo proposto, é possível haver correlação entre variáveis explicativas observadas e não-observadas.

---

<sup>16</sup> *Short panel.*

Entre outras razões para a existência de correlação entre variáveis observadas e não-observadas, está o problema da simultaneidade. Um exemplo muito comum é a questão de oferta e demanda. A regressão da quantidade em relação ao preço não pode ser interpretada como uma equação de demanda porque uma mudança exógena não-observada na demanda afetaria não apenas as compras, mas também os preços, que se relacionam também com a quantidade ofertada. A fim de resolver este problema, duas alternativas são possíveis: a primeira delas é adotar um sistema de equações simultâneas, a outra é considerar apenas uma equação, porém utilizando regressores defasados como forma de minimizar ou eliminar totalmente o problema.

Outro fator é o erro de mensuração: se a variável explicativa observada tiver sido mensurada de maneira incorreta, o termo de erro da equação do modelo conterá uma parcela que será correlacionada ao regressor. Se uma determinada variável observada,  $x_{i,t}$ , tiver sido mensurada de maneira incorreta, seu verdadeiro valor,  $x'_{i,t}$ , será:

$$x'_{i,t} = x_{i,t} \pm e_{i,t}, \quad (3.7)$$

tal que  $e_{i,t}$  é o erro de mensuração. A fim de evitar problemas com este fator, é comum adotarem-se diferentes variáveis para mensurar o mesmo construto teórico. Este procedimento foi usado nesta tese em alguns casos.

E, por fim, a correlação pode ser causada pela heterogeneidade não-observada. Se aspectos que afetam tanto a variável dependente como as independentes forem omitidos, haverá correlação entre o termo de erro e as variáveis explicativas, tornando viesados os parâmetros estimados. A análise de dados em painel permite controlar o problema da heterogeneidade invariante no tempo sem a necessidade de observá-la. Isto é feito adotando-se o seguinte modelo:

$$y_{i,t} = \theta_0 + \boldsymbol{\theta}^\top \boldsymbol{\Theta}_{i,t} + \boldsymbol{\omega}^\top \boldsymbol{\Omega}_{i,t} + \eta_i + v_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T \quad (3.8)$$

tal que  $\mathbb{E}[v_{i,t} | \boldsymbol{\Theta}_{i,t}, \boldsymbol{\Omega}_{i,t}, \eta_i] = 0$ . Esta condição é também conhecida como suposição de exogeneidade estrita, ou seja, o termo  $v_{i,t}$  não está correlacionado com valores passados, contemporâneos ou futuros das variáveis regressoras e com a variável que captura a heterogeneidade não-observada invariante no tempo. O termo  $\eta_i$  é um *input* que traz informações específicas de cada empresa, mas que permanece constante ao longo do tempo.

Um outro termo, que leva em consideração informações específicas que ocorrem ao longo do tempo e que afetam todas as empresas, poderia ser adicionado à equação (3.8). Este termo, que poderia ser chamado de  $\zeta_t$ , seria capaz de capturar, por exemplo, efeitos macroeconômicos ocorridos em instantes de tempo específicos, mas que afetaram as empresas de

maneira homogênea. Conforme Wooldridge (2002), esta abordagem pode ser substituída pela utilização de *dummies* de ano. Tal procedimento foi adotado nesta tese.

Uma alternativa ao modelo descrito pela equação (3.8) trata o termo  $\eta_i$  como uma variável aleatória não-observada, possivelmente correlacionada com os regressores observados. Esta variante recebe o nome de modelo de efeitos fixos<sup>17</sup>. Se os efeitos fixos estiverem presentes e forem correlacionados com o conjunto de variáveis regressoras,  $\Theta_{i,t}$  e  $\Omega_{i,t}$ , a abordagem dada pela equação (3.6), chamada de modelo de dados agrupados<sup>18</sup>, é inconsistente.

Outra alternativa ao modelo da equação (3.8) assume que os efeitos não-observados,  $\eta_i$ , são variáveis aleatórias distribuídas independentemente dos regressores. Este modelo recebe o nome de modelo de efeitos aleatórios<sup>19</sup>. Contudo, é importante deixar claro que, tanto no modelo de efeitos fixos como no de efeitos aleatórios, o termo  $\eta_i$  é uma variável aleatória.

### 3.6.4 Métodos de Estimação

A seguir, serão apresentados, conforme Cameron e Trivedi (2005) e Wooldridge (2002, 2006), alguns dos métodos de estimação dos coeficientes para dados em painel. Suas estimativas diferem à medida em que as dimensões transversais e longitudinais dos dados são usadas, assim como pela presença ou não de efeitos fixos.

#### 3.6.4.1 Modelo de Dados Agrupados

O agrupamento dos dados é obtido utilizando-se todo o conjunto de dados a despeito do instante de tempo  $t$  em que ocorrem. Obtém-se, desta forma, uma regressão com  $N \times T$  observações. Seja a equação (3.6). Por simplicidade de notação, o conjunto de variáveis representada em  $\Theta_{i,t}$  e  $\Omega_{i,t}$  será, a partir de agora, referenciado como  $\Psi_{i,t}$ , e a equação passa a ser escrita como:

$$y_{i,t} = \theta_0 + \psi^\top \Psi_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.9)$$

Se o modelo estiver corretamente especificado, os regressores não serão correlacionados com o termo de erro, ou seja,  $\mathbb{C}[\varepsilon_{i,t}; \Psi_{i,t}] = \mathbf{0}$ , e a consistência da estimação da equação (3.9) é obtida se  $N \rightarrow \infty$  ou  $T \rightarrow \infty$ .

<sup>17</sup>Fixed effects model.

<sup>18</sup>Pooled model.

<sup>19</sup>Random effects model.

Todavia, se o termo de erro for correlacionado ao longo do tempo para uma determinada empresa  $i$ , as estimativas apresentarão erros-padrão viesados para baixo, tornando seu uso bastante comprometido. Neste caso, é importante detectar a possibilidade de existência de correlação serial após a estimação do modelo. Se for identificada uma autocorrelação nos dados, o termo de erro em cada instante de tempo pode conter um fator invariante no tempo, mas que foi omitido na formulação do modelo. Este teste pode ser feito estimando-se um modelo auto-regressivo, por exemplo, um do tipo AR(1). Todavia, conforme Wooldridge (2002), um teste mais adequado é o desenvolvido por Breusch e Pagan (1980), que derivam uma estatística usando o princípio do multiplicador de Lagrange, um teste descrito em detalhes em Baltagi (2005, p.59–61).

Uma variante do modelo descrito pela equação (3.9) é obtida ao se permitir que o intercepto,  $\theta_0$ , seja estimado para diferentes instantes do tempo e para diferentes empresas. A equação passaria a ser a seguinte:

$$y_{i,t} = \theta_{0,i} + \theta_{0,t} + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\Psi}_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.10)$$

Isto é possível ao se incluir no modelo um conjunto de variáveis *dummy* para cada instante de tempo e para cada empresa da amostra. Nesta tese, este modelo não será empregado, uma vez que ele só produz estimativas consistentes para os parâmetros se tanto  $N \rightarrow \infty$  como  $T \rightarrow \infty$ , o que não é o caso, dado que  $T$  é limitado.

### 3.6.4.2 Modelo de Efeitos Aleatórios

Na presença de heterogeneidade não-observada, a formulação apresentada na equação (3.11), a seguir, é mais adequada que aquela apresentada na equação (3.9).

$$y_{i,t} = \theta_0 + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\Psi}_{i,t} + \eta_i + v_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.11)$$

Diferentemente do modelo de dados agrupados, o modelo de efeitos aleatórios inclui o termo  $\eta_i$  no erro do modelo. Este modelo impõe ainda outras hipóteses adicionais, como a exogeneidade estrita, dada pela equação (3.12a), e a ortogonalidade entre  $\eta_i$  e os regressores  $\boldsymbol{\Psi}_{i,t}$ , equação (3.12b):

$$\mathbb{E}[v_{i,t} | \boldsymbol{\Psi}_i, \theta_0, \eta_i] = 0, \quad t = 1, \dots, T, \quad (3.12a)$$

$$\mathbb{E}[\eta_i | \boldsymbol{\Psi}_i, \theta_0] = \mathbb{E}[\eta_i] = 0, \quad (3.12b)$$

tal que  $\boldsymbol{\Psi}_i \equiv (\boldsymbol{\Psi}_{i,1}, \boldsymbol{\Psi}_{i,2}, \dots, \boldsymbol{\Psi}_{i,T})$ .



A equação (3.11) torna-se um modelo de efeitos aleatórios quando é assumido que o efeito não-observado,  $\eta_i$  é não-correlacionado com os regressores. Adicionalmente, o valor esperado do termo  $\eta_i$ , dados todos os outros regressores,  $\Psi_i$ , é constante, ou seja:

$$\mathbb{E}[\eta_i | \Psi_i, \theta_0] = \eta. \quad (3.13)$$

A hipótese acima elimina a correlação entre o efeito não-observado e as variáveis explicativas, que é a principal distinção entre os modelos de efeitos fixos e aleatórios. Uma vez que é assumido que  $\eta_i$  não é correlacionado com os regressores, é possível incluir neste tipo de modelo variáveis que são invariantes no tempo, como o setor de atividade, por exemplo.

Outra hipótese importante é a homocedasticidade dos termos  $\eta_i$ : a variância de  $\eta_i$ , dados todos os regressores do modelo, é constante, ou seja:

$$\mathbb{V}[\eta_i | \Psi_i, \theta_0] = \sigma_\eta^2. \quad (3.14)$$

Atendidas as hipóteses apresentadas, o estimador de efeitos aleatórios é consistente quando  $N$  é grande e  $T$  é fixo.

### 3.6.4.3 Modelo de Efeitos Fixos

O modelo de efeitos fixos também considera a presença de efeitos não-observados, conforme apresentado na equação (3.11). A abordagem por efeitos aleatórios para estimação dos parâmetros apóia-se no princípio de que o termo  $\eta_i$  é ortogonal aos regressores  $\Psi_{i,t}$ . Todavia, muitas das vezes é desejável usar uma abordagem de dados em painel que permita que o termo  $\eta_i$  seja arbitrariamente correlacionado com os regressores. Este é o propósito do modelo de efeitos fixos.

A primeira hipótese assumida pelo modelo de efeitos fixos é a exogeneidade estrita dos regressores condicional em  $\eta_i$ :

$$\mathbb{E}[v_{i,t} | \Psi_i, \theta_0, \eta_i] = 0, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.15)$$

Esta hipótese é idêntica à primeira parte da hipótese do modelo de efeitos aleatórios, dada pela equação (3.12a), ou seja, a exogeneidade estrita dos regressores sobre os efeitos não-observados fica mantida. A principal diferença é que, ao não assumir a hipótese dada pela equação (3.12b),  $\mathbb{E}[\eta_i | \Psi_i]$  pode assumir qualquer função de  $\Psi_i$ .

Ao relaxar a hipótese da ortogonalidade entre os regressores e o termo  $\eta_i$ , é possível estimar de maneira consistente os efeitos parciais na presença de variáveis omitidas invariantes no tempo que são potencialmente correlacionadas com as variáveis observadas  $\Psi_{i,t}$ . Este aspecto torna a análise com efeitos fixos mais robusta que a análise com efeitos aleatórios.

Todavia, esse ganho de robustez não vem sem um preço: não é possível, por exemplo, incluir entre os regressores observados fatores invariantes no tempo. Isto porque se  $\eta_i$  puder ser arbitrariamente correlacionado com cada elemento de  $\Psi_{i,t}$ , não há como distinguir os efeitos de variáveis observáveis invariantes no tempo dos efeitos não-observáveis invariantes no tempo,  $\eta_i$ . Portanto, a variável setor de atividade é um exemplo desta limitação, uma vez que todas as empresas da amostra não mudaram de setor de atividade ao longo do período estudado. Contudo, este problema pode ser contornado adotando-se uma variável de interação entre o setor de atividade e um outro regressor que possui variação no tempo, tal como uma *dummy* de ano.

Outras hipóteses para que a estimação seja válida são as de que os termos de erro  $v_{i,j}$  sejam homocedásticos,

$$\mathbb{V}[v_{i,t}|\Psi_{i,t},\theta_0,\eta_i] = \mathbb{V}[v_{i,t}] = \sigma_v^2 \quad \text{para todo } t = 1, \dots, T, \quad (3.16)$$

e que sejam serialmente não-correlacionados ao longo do tempo, ou seja, que para todo  $t \neq s$ , os erros idiossincráticos sejam não-correlacionados, condicionais a todos regressores e a  $\eta_i$ ,

$$\mathbb{C}[v_{i,t}, v_{i,s}|\Psi_i, \theta_0, \eta_i] = 0. \quad (3.17)$$

Se todas estas hipóteses forem atendidas, o estimador de efeitos fixos dos parâmetros do modelo será o melhor estimador linear não-viesado.

Uma vez que a principal consideração sobre o uso do modelo de efeitos fixos ou aleatórios reside no fato de o termo  $\eta_i$  estar ou não correlacionado com os regressores  $\Psi_{i,t}$ , é importante dispor de um método para testar esta hipótese. O teste proposto por Hausman (1978) serve a este propósito, baseando-se nas diferenças entre as estimativas obtidas com o modelo de efeitos fixos e com o de efeitos aleatórios.

Sabendo-se que o estimador de efeitos fixos é consistente quando o termo  $\eta_i$  é correlacionado aos regressores, fato que torna o estimador de efeitos aleatórios inconsistente, uma diferença estatisticamente significativa é interpretada como evidência contrária ao estimador de efeitos aleatórios. Essencialmente, o resultado do teste é que a covariância de um estimador eficiente com sua diferença para um estimador não-eficiente é zero.

### 3.6.5 Alternativas Robustas de Análise

Uma preocupação de qualquer pesquisa empírica deve recair sobre a estabilidade dos resultados encontrados perante a formulação do modelo proposto. Determinado modelo estimado pode chegar a resultados satisfatórios e coerentes com a teoria subjacente à pesquisa, porém, se não forem submetidos a uma análise de sensibilidade, de nada adiantará chegar a conclusões a partir dele. A fim de dirimir esta preocupação, esta pesquisa explorou diferentes definições operacionais das variáveis de forma que o mesmo construto teórico foi medido por diferentes *proxies*.

Outra preocupação recorrente diz respeito às observações ditas extremas, os *outliers*. Para tratar este problema, foram utilizadas variáveis “Winsorizadas”<sup>20</sup>. Este método consiste na criação de uma nova variável, igual à original, exceto pelo fato de que os “h” maiores valores e os “h” menores valores de cada variável são substituídos pelo valor adjacente não-extremo. A quantidade “h” pode também ser substituída por uma certa proporção “p”. Nesta pesquisa, adotou-se  $p = 0,01$ , ou seja, 2% dos valores das variáveis foram considerados extremos, sendo 1% na parte inferior e 1% na parte superior. Barnett e Lewis (1994) apresentam esta técnica detalhadamente, e ressaltam sua importância pelo fato de que, ao contrário de outras técnicas que excluem da amostra certas observações consideradas extremas, a “Winsorização” não joga fora nenhuma observação, apenas torna-a menos extrema.

### 3.6.6 Limitações do Modelo Empírico

O método de pesquisa proposto está sujeito a limitações. As principais delas são discutidas a seguir.

#### 3.6.6.1 Associação *versus* Causalidade

A pesquisa econométrica busca encontrar associação entre diferentes variáveis estudadas. Ao encontrar uma associação, o pesquisador pode se sentir tentado a inferir relações de causalidade entre essas variáveis, porém, estará entrando em uma seara delicada. Nesta pesquisa, ao encontrar que determinados comomentos estão relacionados aos prêmios pelo risco dos ativos não será possível afirmar que estes causem no prêmio uma elevação ou diminuição de sua magnitude. Mesmo que este fato seja verdadeiro, ele está além do que

---

<sup>20</sup>Esta transformação recebe este nome em referência ao bioestatístico Charles P. Winsor (1895 – 1951).

o método estatístico aqui empregado é capaz de afirmar. Isto porque, estatisticamente, pode ser verdadeiro tanto afirmar que o valor de um comomento causa um maior (ou menor) prêmio como afirmar que um valor de prêmio causa um maior (ou menor) valor do comomento.

#### 3.6.6.2 Amostragem

Outra limitação desta pesquisa refere-se à amostra utilizada. Ela, sem dúvidas, não é uma amostra aleatória das empresas brasileiras, uma vez que um dos critérios de seleção foi a disponibilidade de dados, e, conseqüentemente, sua característica de alta negociabilidade (liquidez). Além disso, a seleção do período amostral criou um viés de seleção de amostra, dado que apenas empresas sobreviventes além do período amostral inicial puderam ser candidatas ao estudo. Portanto, o máximo que pode ser dito com relação às empresas que fazem parte da amostra é que elas representam um subconjunto de empresas de capital aberto, com alta liquidez e que estiveram operando entre janeiro de 2003 e dezembro de 2007.

#### 3.6.6.3 Definição Operacional das Variáveis

As definições operacionais das variáveis desta pesquisa não são consenso entre os estudos realizados na área. Durante a pesquisa bibliográfica, métodos concorrentes de cálculo dos comomentos foram encontrados. Além disso, as *proxies* usadas para a carteira de mercado e para o ativo livre de risco são sujeitas a críticas, assim como também é possível encontrar críticas a outras definições não utilizadas nesta tese. Contudo, as definições adotadas aqui se deram pela aparente maior aceitação pela comunidade científica, não excluindo com isso suas potenciais fragilidades.

#### 3.6.6.4 Modelo Especificado

A estimação dos parâmetros de interesse do modelo proposto por esta pesquisa deve permitir inferências válidas. Para isso, todas as técnicas de identificação e mitigação dos problemas de estimação foram aplicadas. Contudo, mesmo a aplicação de técnicas mais robustas podem não ser suficientes para eliminar os problemas de inconsistência nas estimações. Outro aspecto relevante é o uso de variáveis de controle. Estas variáveis foram escolhidas por, em estudos anteriores, mostrarem-se relevantes para esta linha de

pesquisa. Contudo, há a possibilidade de outras variáveis não adotadas por este estudo serem igualmente relevantes.



# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Estatísticas Descritivas

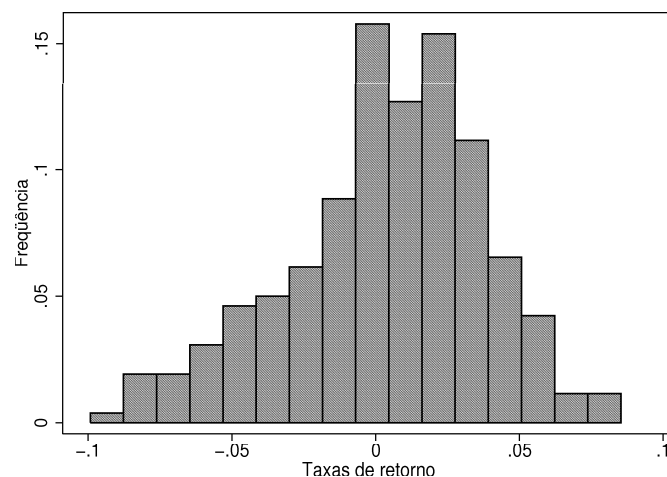
O índice de mercado utilizado nesta tese foi aproximado por duas carteiras, o Ibovespa e o IBrX. As taxas de retorno semanais de ambas as carteiras foram calculadas, e suas estatísticas descritivas são apresentadas na Tabela 4.1. É possível perceber, tanto pela referida tabela quanto pelos histogramas das séries das taxas de retorno das duas carteiras, apresentados na Figura 4.1, que ambas são assimétricas à esquerda.

**Tabela 4.1 – Estatísticas descritivas das carteiras de mercado**

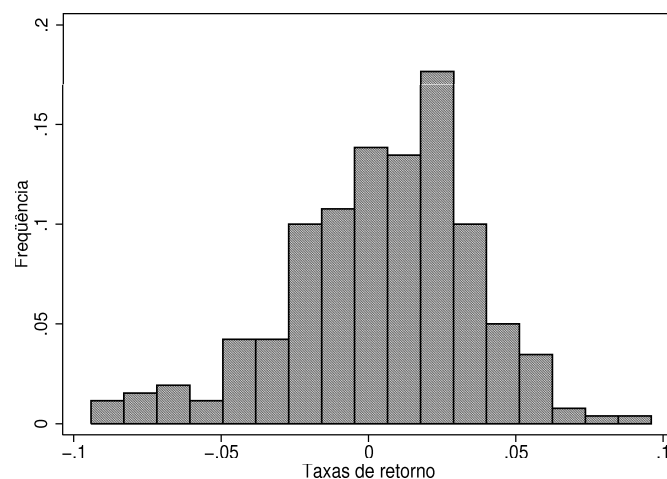
Ano	Índice	Média	DP	Assim.	Curt.	1° qt.	Med.	3° qt.
2003	Ibov.	0,0083	0,0345	−0,6928	3,0448	−0,0095	0,0144	0,0321
	IBrX	0,0069	0,0267	−0,3775	3,5802	−0,0108	0,0114	0,0225
2004	Ibov.	0,0006	0,0378	−0,1584	2,8731	−0,0260	0,0033	0,0222
	IBrX	0,0024	0,0325	−0,4553	3,4075	−0,0177	0,0062	0,0201
2005	Ibov.	0,0014	0,0331	−0,3996	2,4865	−0,0182	0,0035	0,0241
	IBrX	0,0028	0,0313	−0,3774	2,6111	−0,0175	0,0084	0,0242
2006	Ibov.	0,0028	0,0307	−0,6194	3,1418	−0,0177	0,0077	0,0235
	IBrX	0,0032	0,0330	−0,7238	3,6347	−0,0176	0,0116	0,0267
2007	Ibov.	0,0048	0,0357	−0,7141	3,7159	−0,0060	0,0045	0,0282
	IBrX	0,0054	0,0355	−0,6297	3,5539	−0,0063	0,0067	0,0284
Total	Ibov.	0,0036	0,0343	−0,4943	3,0665	−0,0156	0,0059	0,0265
	IBrX	0,0041	0,0317	−0,5529	3,4821	−0,0153	0,0077	0,0246

As siglas utilizadas na tabela e seus significados são: DP – desvio-padrão, Assim. – assimetria, Curt. – curtose, qt. – quartil, Ibov. – Ibovespa.

Ao contrário das séries de taxas de retorno das duas *proxies* utilizadas como carteira de mercado, as séries das empresas selecionadas para a amostra são, em sua maioria,



(a) Ibovespa



(b) IBrX

**Figura 4.1 – Histograma das taxas de retorno das *proxies* para a carteira de mercado**

assimétricas à direita. Setenta e dois por cento dessas empresas tem assimetria acima de zero. Para algumas empresas, a estabilidade dos momentos ao longo dos cinco anos pesquisados é bastante fraca. Um exemplo é a ArcelorMittal Inox Brasil (ACES4) que, no ano de 2003, apresentou assimetria positiva; nos dois anos seguintes apresentou assimetria negativa, voltando a apresentar assimetria positiva nos dois últimos anos. Estes resultados podem ser verificados na Tabela 4.2.

Outro exemplo de grandes variações nos momentos pode ser observado na empresa AES Elpa (AELP3), conforme Tabela 4.3. Neste caso, a curtose ora apresenta valores tão altos quanto 14,636 no ano de 2005, ora valores mais moderados como 3,158 no ano de 2007. Variações tão grandes observadas de um ano para outro corroboram com a intenção desta tese em usar uma estrutura mais dinâmica no tratamento dos dados ao invés de tratar todo o período de cinco anos como algo homogêneo.



**Tabela 4.2 – Assimetria e Curtose da ArcelorMittal Inox Brasil**

Ano	Assimetria	Curtose
2003	0,309	2,492
2004	−0,095	3,561
2005	−0,460	2,938
2006	1,062	4,472
2007	0,303	3,415
Total	−0,146	4,216

**Tabela 4.3 – Assimetria e Curtose da AES Elpa**

Ano	Assimetria	Curtose
2003	3,208	14,169
2004	0,954	5,208
2005	2,621	14,636
2006	0,416	3,386
2007	0,207	3,158
Total	4,663	37,147

A Tabela 4.4 apresenta o resultado do teste de normalidade das séries de taxas de retorno das carteiras de mercado. Como pode ser visto pelo baixo nível de significância observado (p-valor), as duas séries não são distribuídas conforme uma normal. Foi utilizado o teste de normalidade de Doornik e Hansen (1994), implementado em Stata por Baum e Cox (2001). Segundo os autores, este teste apresenta poder mais elevado que os demais testes de normalidade univariada e multivariada, conforme resultados obtidos em simulação.

**Tabela 4.4 – Teste de normalidade de Doornik e Hansen (1994) para *proxies* da carteira de mercado**

Variável	Estat. Assint.	Signif.
Ibovespa	10,64	0,0049
IBrX	15,77	0,0004

A estatística assintótica segue uma distribuição  $\chi^2_2$ .

Um teste de normalidade particularmente importante para os propósitos desta pesquisa é o teste de assimetria e curtose de D’Agostino, Belanger e D’Agostino Jr. (1990). Por meio do resultado deste teste, é possível perceber qual momento é o responsável pela rejeição da hipótese nula de normalidade da variável. A Tabela 4.5 apresenta os resultados para as *proxies* da carteira de mercado. É possível perceber que a assimetria das duas variáveis é estatisticamente diferente de zero, porém a curtose não é causadora desta não-normalidade.

**Tabela 4.5 – Teste de normalidade de D’Agostino, Belanger e D’Agostino Jr. (1990) para *proxies* da carteira de mercado**

Variável	Significância Assimetria	Significância Curtose	Teste conjunto	
			$\chi^2$ ajust.	Sign. conjunta
Ibovespa	0,001	0,664	9,32	0,0094
IBrX	0,000	0,117	12,81	0,0017

A versão utilizada do teste é a corrigida por Royston (1991).

A estatística do teste segue uma distribuição  $\chi^2_2$ .

Adicionalmente, todas as empresas da amostra foram submetidas aos testes de normalidade sugerido por D’Agostino, Belanger e D’Agostino Jr. (1990). Os resultados mostraram que 51% da amostra apresentou nível de significância observado inferior a 5% para a assimetria. O nível de significância observado para a curtose foi inferior a 5% em 63% dos casos. No geral, considerando o teste conjunto dos dois momentos, a normalidade foi rejeitada em 68% das vezes em ambos os testes utilizados, indicando assim que a maioria das empresas apresenta distribuição de probabilidade diferente da normal.

A Tabela A.3 do Apêndice A mostra que as empresas que compõem a amostra desta pesquisa são provenientes de diferentes setores da economia. A distribuição por setor é relativamente homogênea, porém há predominância de empresas dos setores de Energia Elétrica (11,73%) e Telecomunicações (10,06%).

**Tabela 4.6 – Estatísticas descritivas das variáveis de controle**

Variável	Média	D.Padrão	1° quartil	Mediana	3° quartil
$\ln AT$	14,513	1,483	13,286	14,503	15,702
$\ln RL$	14,094	1,462	12,970	14,055	15,260
$\ln VM$	14,179	1,851	12,853	14,270	15,699
$VMVC$	1,999	1,440	0,840	1,670	2,805
$IPL$	12,037	12,205	5,000	9,700	17,300
$ILIQ$	0,304	0,425	0,009	0,070	0,448
$ETVM$	1,749	2,222	0,274	0,698	2,146
$DBVM$	0,470	0,637	0,028	0,202	0,592

As definições das variáveis desta tabela estão na Tabela B.1 do Apêndice B.

As estatísticas descritivas das variáveis de controle estão apresentadas na Tabela 4.6. É possível observar que as medidas utilizadas como *proxy* para o tamanho da empresa são aproximadamente iguais entre si, e que seus desvios-padrão também apresentam comportamento semelhante. Em média, o valor de mercado das companhias é aproximadamente o dobro do seu valor contábil, e a liquidez média das empresas é aproximadamente 0,3.

A estimação dos comomentos seguiu o procedimento descrito na seção 3.6.1.2. O modelo

utilizado, chamado de modelo de mercado cúbico, é dado pela seguinte equação:

$$r_i - r_f \iota = \alpha_i + \beta_i(r_m - r_f) + \gamma_i(r_m - r_f)^2 + \delta_i(r_m - r_f)^3 + \epsilon_i, \quad (4.1)$$

tal que  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  e  $\delta_i$  são os vetores  $N \times 1$  de covariâncias, coassimetrias e cocurtoses, respectivamente.

A Tabela 4.7 traz as informações acerca dos comomentos estimados pela primeira etapa do método empírico utilizado (ver seção 3.6.1). A estimação foi feita pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO). Os valores médios dos coeficientes  $\beta$  das empresas são aproximadamente iguais tanto para o caso em que a *proxy* para a carteira de mercado foi o Ibovespa quanto para o IBrX. As medidas de desvio-padrão também não diferem significativamente. O mesmo pode ser dito com relação aos demais comomentos. O único comomento capaz de assumir valores negativos é a coassimetria. A maior parte das empresas da amostra são negativamente coassimétricas com as *proxies* para a carteira de mercado.

**Tabela 4.7 – Estatísticas descritivas dos comomentos**

<i>Proxy</i>	Comom.	Média	DP	1° quartil	Mediana	3° quartil
Ibovespa	$\beta$	0,598	0,736	0,222	0,585	0,975
	$\gamma$	-0,978	8,132	-4,694	-0,727	2,287
	$\delta$	11,868	190,540	-59,432	9,727	85,572
IBrX	$\beta$	0,633	0,707	0,270	0,664	1,014
	$\gamma$	-1,149	9,107	-5,107	-1,240	2,439
	$\delta$	15,455	188,339	-71,263	4,699	77,401

DP – desvio-padrão, Comom. – comomento,  $\beta$  – covariância,  $\gamma$  – coassimetria,  $\delta$  – cocurtose.

## 4.2 Modelo de Apreçamento de Ativos

O principal teste desta pesquisa é o do modelo de apreçamento de ativos que utiliza comomentos como regressores. Desde o *CAPM* de Sharpe (1964), Lintner (1965a, 1965b) e outros autores já citados nesta tese, modelos de apreçamento se utilizam de momentos estatísticos como medidas de risco. A metodologia usual dos testes era a regressão linear simples, utilizando o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO, ou *OLS* em inglês) ou algum outro mais moderno como o Método dos Momentos Generalizado (MMG, ou *GMM* em inglês).

A natureza das séries financeiras é claramente uma sucessão cronológica, ou seja, uma série de dados no tempo, e pode ser observada para diferentes empresas ao longo desses

mesmos instantes de tempo. Apesar disso, a análise de dados em painel, técnica estatística que combina dados observados tanto na dimensão transversal (empresas) como na dimensão longitudinal (tempo), não havia sido utilizada para testar modelos de apreçamento baseados em comomentos.

Após a estimação dos comomentos, conforme descrito pela equação (4.1), o próximo passo foi o de testar a significância dos mesmos em explicar o comportamento das taxas de retorno dos ativos. O modelo básico a ser estimado, anteriormente descrito na seção 3.6.2, é o representado na equação a seguir:

$$y_{i,t} = \theta_0 + \boldsymbol{\theta}^T \boldsymbol{\Theta}_{i,t} + \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Omega}_{i,t} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.2)$$

tal que, para cada empresa  $i$  em um determinado ano  $t$ , foi observado um conjunto  $k_1$  de comomentos representados em  $\boldsymbol{\Theta}_{i,t}$ , um vetor de dimensão  $(k_1 \times 1)$ . O vetor  $\boldsymbol{\theta}^T$  é o vetor  $(k_1 \times 1)$  de parâmetros associados a cada comomento, transposto. O conjunto das  $k_2$  variáveis de controle está representado no vetor  $\boldsymbol{\Omega}_{i,t}$ . O vetor  $\boldsymbol{\omega}^T$  de dimensão  $(k_2 \times 1)$ , transposto, é o conjunto de parâmetros das variáveis de controle. O termo de erro,  $\varepsilon_{i,t}$ , não deve, por hipótese, estar correlacionado contemporaneamente com os regressores; e a variável de resposta,  $y_{i,t}$ , é o prêmio pelo risco da empresa  $i$  no instante de tempo  $t$ .

As variáveis de controle utilizadas são sempre baseadas em pesquisas empíricas anteriores. Nestas pesquisas, determinados efeitos foram verificados, e tais variáveis foram consideradas regressores importantes em modelos de apreçamento. Nesta pesquisa, tais variáveis foram consideradas como controle, ou seja, será verificado o efeito de cada comomento expurgados os efeitos dos controles. Os controles utilizados foram:

- (a) tamanho da empresa;
- (b) valor de mercado sobre valor contábil das ações;
- (c) índice preço/lucro;
- (d) liquidez;
- (e) alavancagem;
- (f) setor de atividade;
- (g) *dummies* de ano.

Os prêmios observados nas taxas de retorno das ações das empresas podem estar correlacionados com as mais diversas características observáveis ou não-observáveis das empresas.

As variáveis de controle, discutidas na seção 3.6.6.3 e resumidas na tabela B.1 do Apêndice B, são importantes para a tentativa de isolar certos aspectos inerentes às empresas. Conjuntos diferentes de variáveis de controle foram utilizados para garantir certa robustez aos resultados apresentados. Outro aspecto metodológico tratado pela investigação empírica foi com relação às observações extremas, ou *outliers*. Foi empregada a técnica de “Winsorização” das variáveis, conforme procedimento descrito por Barnett e Lewis (1994) e também apresentado na seção 3.6.5).

### 4.2.1 Modelo de Dados Agrupados

O modelo de apreçamento de ativos descrito na equação (4.2) foi primeiramente estimado pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinário. Este método é potencialmente sujeito a problemas como a heterogeneidade não-observada, viés de variáveis omitidas ou erros de mensuração nos regressores, aspectos já discutidos no capítulo metodológico. Porém, seus resultados foram apresentados para servir de comparação aos resultados estimados pelos métodos de efeitos fixos e aleatórios, a serem apresentados posteriormente.

Essa primeira especificação é chamada de agrupada porque todos os dados são utilizados na regressão sem levar em consideração o instante de tempo  $t$  em que são observados. Contudo, a estimação dos erros-padrão foi conduzida de forma a ser robusta a falhas de especificação do modelo, especificamente com o fator de correção de viés da matriz de covariâncias proposto White (1980). Assim, a estimativa pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinário dessa matriz é assintoticamente consistente mesmo na presença de heterocedasticidade. Conforme Davidson e MacKinnon (1993, p. 553), a correção proposta por White (1980) deve ser usada com reservas no caso em que o tamanho da amostra não é grande.

O estimador da matriz de covariâncias é chamado de HCCME<sup>21</sup>, e pode ser estimado de quatro diferentes formas:

$$HC_0 : \hat{u}_t^2 \quad (4.3a)$$

$$HC_1 : \frac{n}{n-k} \hat{u}_t^2 \quad (4.3b)$$

$$HC_2 : \frac{\hat{u}_t^2}{1 - \hat{h}_t} \quad (4.3c)$$

$$HC_3 : \frac{\hat{u}_t^2}{(1 - \hat{h}_t)^2}, \quad (4.3d)$$

---

<sup>21</sup>*Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator.*

tal que  $\hat{u}_t^2$  são os quadrados dos resíduos viesados estimados pelo método MQO,  $n$  é o tamanho da amostra,  $k$  é a quantidade de parâmetros estimados e  $\hat{h}_t \equiv \hat{\mathbf{X}}_t \left( \hat{\mathbf{X}}^\top \hat{\mathbf{X}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{X}}_t^\top$  é o  $t$ -ésimo elemento da diagonal da matriz de projeção ortogonal dos regressores.

Conforme MacKinnon e White (1985), que investigaram as propriedades dos estimadores HCCME para amostras finitas, o estimador  $HC_0$  é o pior de todos, pois não apresenta nenhum fator de correção, e não deve ser usado em hipótese alguma, uma vez que  $HC_1$  apresenta melhores resultados nas simulações conduzidas e seu custo de cálculo é praticamente igual. Assim, estimar a matriz de covariâncias sem nenhuma correção nos resíduos ( $HC_0$ ) não é, definitivamente, recomendável.

A decisão de usar  $HC_2$  ou  $HC_3$  é uma questão de saber se os erros são, respectivamente, homocedásticos ou heterocedásticos. Caso seja possível verificar esta hipótese, um dos dois métodos deve ser usado ao invés de  $HC_1$ . A fim de verificar, ou não, a homocedasticidade dos termos de erro, foi aplicado o teste de heterocedasticidade de Breusch e Pagan (1980) e Cook e Weisberg (1983), que não rejeitou a hipótese nula de homocedasticidade, mesmo quando a hipótese de normalidade dos regressores foi relaxada.

As estimativas dos parâmetros estimados com o fator de correção de viés da matriz de covariâncias estão apresentadas na Tabela 4.8. Nesta estimação, a *proxy* para a carteira de mercado foi o Ibovespa. Como *proxy* para o tamanho da empresa foi utilizado o logaritmo natural da receita líquida das empresas, e como *proxy* para a alavancagem foi utilizada a dívida bruta sobre o valor de mercado das ações das empresas. Foi também criado e utilizado na estimação, um conjunto de variáveis *dummy* para cada ano do intervalo amostral e para cada setor de atividade das empresas.

A fim de verificar a relevância para o modelo dos dois conjuntos de variáveis *dummy*, foi conduzido um teste de Wald para verificar se os parâmetros de cada grupo de variáveis *dummy* eram conjuntamente iguais a zero. Caso o fossem, não haveria importância estatística em manter tais variáveis no modelo. Os resultados encontrados, para ambos os conjuntos, mostraram que as *dummies* empregadas são estatisticamente diferentes de zero, e, portanto, relevantes para o modelo. Tais variáveis são capazes de capturar fatores macroeconômicos que afetam a todas as empresas ou características idiossincráticas dos setores de atividade ao qual pertencem.

As estimativas apresentadas na Tabela 4.8 mostram que o coeficiente  $\beta$ , que captura a covariância entre as taxas de retorno dos ativos e da carteira de mercado, e o coeficiente  $\delta$ , que captura a cocurtose entre as mesmas duas entidades, são significativamente diferentes de zero, sendo o primeiro no nível de significância de 10% e o segundo no nível de 5%. Esses resultados são líquidos dos efeitos das variáveis de controle empregadas. Os sinais

Tabela 4.8 – Modelo de apreçamento com dados agrupados (Ibovespa)

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,213 <sup>†</sup>	(0,121)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,006	(0,005)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001*	(0,000)
$\ln RL$	-0,024	(0,018)
$VMVC$	0,017*	(0,007)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,017	(0,018)
$DBVM$	0,003	(0,012)
Constante	0,296	(0,201)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		577
$R^2$ ajust.		0,175
F (30,546)		5,866

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln RL$  (logaritmo natural da receita líquida da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) e os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

dos coeficientes também se mostraram coerentes com o esperado, ou seja, quanto maior o risco sistêmico medido pelo  $\beta$ , maior a expectativa de retorno da ação. A mesma relação foi encontrada para o coeficiente  $\delta$ , que mede a curtose sistêmica.

Entre as variáveis que compõem o conjunto de regressores de controle, duas delas se mostraram estatisticamente diferentes de zero. O valor de mercado em relação ao valor contábil ( $VMVC$ ) foi significativo no nível de 5%, e o índice preço/lucro ( $IPL$ ) foi significativo no nível de 1%. Quanto ao sinal do coeficiente estimado, o da variável  $VMVC$  foi positivo, diferentemente daquilo que era esperado. Já o  $IPL$  apresentou sinal consistente com os achados de estudos anteriores.

A robustez dos resultados foi investigada por meio de diferentes especificações do modelo. Especificamente, algumas variáveis foram substituídas por outras *proxies*, e os resultados comparados. Quando a variável de tamanho foi substituída pelo logaritmo natural do ativo

total, a significância da curtose sistêmica diminuiu, passando a ser significativa apenas no nível de 10%. Todavia, a variável tamanho passou a ser significativa também no nível de 10% e seu sinal foi negativo, consistentemente com o que era esperado. Apesar de não ser significativa em nenhum modelo estimado, o sinal da alavancagem mudou de positivo para negativo quando a alavancagem foi medida pelo endividamento total sobre o valor de mercado das empresas.

Ao utilizar o logaritmo natural do valor de mercado como *proxy* para tamanho, os coeficientes dos comomentos passaram a não ser mais significativos. Porém, isso não ocorreu pelo fato desta variável capturar os efeitos dos prêmios, pois seu coeficiente tampouco foi significativo, apresentando inclusive ora sinal positivo, ora negativo. As variáveis relevantes nesta especificação foram *VMVC* e *IPL*. Isto indica que o modelo com o tamanho medido pelo valor de mercado é mais fraco que os demais, e que talvez esta variável não seja tão adequada para uso como *proxy* de tamanho.

Em todos os modelos estimados, verificou-se uma certa estabilidade dos coeficientes dos comomentos, mostrando que, apesar das mudanças de *proxies*, os resultados são homogêneos. O modelo estimado com a variável logaritmo natural do ativo total como *proxy* para tamanho e dívida bruta sobre valor de mercado como *proxy* para alavancagem está apresentado no Apêndice C, na Tabela C.1.

Adicionalmente, ainda como forma de verificação da robustez dos resultados encontrados, as variáveis de controle, exceto as *dummies* foram “Winsorisadas” e os mesmos modelos foram reestimados. Mesmo após esse procedimento, os comomentos significantes continuaram sendo a covariância sistêmica e a curtose sistêmica, porém apenas no nível de 10%. Esses resultados foram encontrados exceto quando o valor de mercado foi utilizado como *proxy* para o tamanho das empresas. Os coeficientes dos comomentos estimados ficaram bastante próximos dos estimados sem a “Winsorização”, e os sinais das variáveis de controle foram também os mesmos dos já relatados. Um desses modelos está apresentado na Tabela C.2 do Apêndice C.

Quando o IBrX foi utilizado como *proxy* para a carteira de mercado, a significância da cocurtose foi alterada. Este comomento, que com o Ibovespa vinha se mostrando significativamente diferente de zero nos modelos estimados, perdeu seu poder de explicação sobre a variável dependente. A Tabela 4.9 apresenta a estimação do modelo para o IBrX que utiliza como *proxy* para o tamanho o logaritmo natural da receita líquida e como *proxy* para alavancagem a dívida bruta sobre o valor de mercado das empresas.

Ao substituir o ativo total pela receita líquida, o comomento  $\beta$  continuou sendo o único significativo, ainda no nível de 10%, porém o efeito da variável tamanho passou a não ser



Tabela 4.9 – Modelo de apreçamento com dados agrupados (IBrX)

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,180 <sup>†</sup>	(0,108)
$\gamma_{IBrX}$	-0,002	(0,004)
$\delta_{IBrX}$	0,000	(0,000)
$\ln A$	-0,032*	(0,015)
$VMVC$	0,015*	(0,007)
$IPL$	-0,000 <sup>†</sup>	(0,000)
$ILIQ$	-0,008	(0,016)
$DBVM$	0,004	(0,012)
Constante	0,395*	(0,186)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		586
$R^2$ ajust.		0,165
F (30,555)		5,489

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) e os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

mais significativa. Por outro lado, aumentou a significância do  $IPL$ . Este resultado está apresentado na Tabela C.3. A “Winsorização” das variáveis de controle alterou pouco os resultados já encontrados. Mais uma vez, o  $IPL$  passou a não ser mais significativa. Em contrapartida, a variável  $VMVC$  tornou-se significativa a 1%. Os resultados destas estimações foram todos omitidos.

#### 4.2.2 Modelo de Dados em Painel

A característica longitudinal e temporal das observações que fazem parte da amostra desta tese permite a análise dos dados por meio de modelos de dados em painel. Nesta modelagem, a informação transversal está refletida nas diferenças entre as empresas analisadas, enquanto a informação longitudinal está refletida em como as variáveis do estudo se modificam ao longo do tempo. Os resultados apresentados na seção anterior podem

estar sujeitos ao viés de variáveis omitidas no modelo. Este viés surge quando há pelo menos uma variável não-observada (ou até não-observável) mas que é correlacionada com a variável dependente da pesquisa.

A análise proposta nesta seção possibilita controlar o viés de variável omitida mesmo sem que tais variáveis sejam observadas. Isto é possível ao se observar as mudanças que a variável dependente sofre ao longo do tempo. Os modelos de painel permitem o tratamento desta natureza de problema, mas requerem atenção sobre alguns pressupostos acerca das variáveis observadas. Uma discussão mais detalhada foi apresentada nas seções 3.6.2 e 3.6.3.

Ao contrário da equação (4.2), utilizada para a estimação do modelo de dados agrupados, a equação a seguir leva em consideração a heterogeneidade não-observada. Esta equação foi apresentada na seção 3.6.4.2 e está reproduzida a seguir:

$$y_{i,t} = \theta_0 + \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\Psi}_{i,t} + \eta_i + v_{i,t}, \quad i = 1, \dots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \dots, T, \quad (4.4)$$

tal que o termo  $\eta_i$  representa os efeitos não-observados, comumente chamado na literatura econométrica de painel de heterogeneidade não-observada, e  $\boldsymbol{\Psi}_{i,t}$  representa o conjunto de regressores, ou seja, os comomentos e as variáveis de controle.

A equação (4.4) foi estimada utilizando-se as técnicas de efeitos aleatórios e efeitos fixos. Estas técnicas, descritas em maior detalhe nas seções 3.6.4.2 e 3.6.4.3, respectivamente, diferem basicamente no fato de que quando os efeitos são tratados como aleatórios, a heterogeneidade não-observada,  $\eta_i$ , é ortogonal ao conjunto de regressores  $\boldsymbol{\Psi}_{i,t}$ , ou seja:

$$\mathbb{E}[\eta_i | \boldsymbol{\Psi}_i, \theta_0] = \mathbb{E}[\eta_i] = 0.$$

Um dos aspectos relevantes na implementação da técnica econométrica desta pesquisa é definir qual dos dois tratamentos é mais adequado, se com efeitos fixos ou aleatórios. Outro aspecto não menos importante é o de verificar se há heterogeneidade não-observada nos dados. Isto pode ser verificado por meio do teste de multiplicador de Lagrange de Breusch e Pagan (1979, 1980), em que a hipótese nula de que a variância da heterogeneidade não-observada,  $\mathbb{V}[\eta_i]$ , é igual a zero. Se a hipótese nula não for rejeitada neste teste, o modelo de dados agrupados apresentado na seção anterior é mais adequado que a abordagem em painel com heterogeneidade não-observada. Contudo, a rejeição da hipótese nula implica que os resultados obtidos com o modelo de dados agrupados não são apropriados.

Todos os modelos estimados tiveram a hipótese nula do teste do multiplicador de Lagrange

rejeitada. Assim, os modelos descritos na seção anterior não se mostraram apropriados, uma vez que foi identificada a existência de heterogeneidade não-observada nos dados. A fim de testar a melhor formulação para o tratamento dos dados em painel, se por efeitos fixos ou aleatórios, foi empregado o teste proposto por Hausman (1978), modificado conforme Wooldridge (2002, p. 290–291). Esta modificação tem por objetivo tornar o teste robusto a erros heterocedásticos e/ou autocorrelacionados.

No teste de Hausman, a hipótese nula da não-correlação entre os termos de erro e os regressores é testada indiretamente por meio da verificação de hipótese de que não há diferenças significativas entre as estimativas dos parâmetros obtidas com o modelo de efeitos fixos e aleatórios. Se esta hipótese nula for rejeitada, há indícios de que a heterogeneidade não-observada,  $\eta_i$ , é correlacionada com os regressores, e as estimativas dos parâmetros pelo método de efeitos fixos é consistente, e que pelo método de efeitos aleatórios não é. Se a hipótese nula não for rejeitada, ambos os métodos são consistentes, porém o método de efeitos fixos é ineficiente, indicando que o modelo de efeitos aleatórios deve ser empregado.

Todos os modelos estimados foram submetidos ao teste de Hausman a fim de testar a hipótese nula de consistência da estimação dos coeficientes por efeitos aleatórios. A rejeição desta hipótese nula é favorável ao modelo de estimação com efeitos fixos como mais adequado. A seguir, serão apresentados os resultados dos principais modelos estimados. Alguns outros resultados serão apresentados apenas em Apêndice. Contudo, todos os resultados dos modelos estimados serão, mesmo que brevemente, comentados. Ao final, uma tabela resumirá os modelos.

#### 4.2.2.1 Ibovespa como *Proxy* para Carteira de Mercado

A segunda especificação do modelo de apreçamento testado por esta pesquisa foi mostrada na equação (4.4). Primeiramente, serão apresentados os resultados destas estimações quando o conjunto de comomentos foi obtido a partir do uso do Ibovespa como *proxy* da carteira de mercado.

A estimação do modelo de apreçamento com efeitos aleatórios gerou os resultados apresentados na Tabela 4.10. Neste modelo, ambos os coeficientes dos comomentos relativos à covariância e à cocurtose se mostraram significativamente diferentes de zero. O primeiro no nível de 5% de significância e o segundo no nível de 1% de significância. A coassimetria não se mostrou significantivamente diferente de zero.

O conjunto de variáveis *dummy* de ano e de setor foi utilizado, e ambos se mostraram significativamente, de forma conjunta, diferentes de zero no nível de 1%. A constante do

modelo também se mostrou significativamente diferente de zero, fato que é indesejável em um modelo de apreçamento. Dentre as variáveis de controle, três delas se mostraram significativamente diferentes de zero, todas no nível de 1%.

**Tabela 4.10 – Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos aleatórios (Ibovespa)**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,190*	(0,078)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,006	(0,006)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
$\ln A$	-0,030**	(0,010)
$VMVC$	0,016**	(0,005)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,010	(0,012)
$DBVM$	0,004	(0,010)
Constante	0,398**	(0,099)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,204

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

O modelo de apreçamento com efeitos fixos está apresentado na Tabela 4.11. A magnitude dos coeficientes estimados com efeitos fixos para os três comomentos foram próximas das estimadas para os comomentos com efeitos aleatórios. Os níveis de significância observados também foram equivalentes, sendo a coassimetria não-significante e os outros dois comomentos, a covariância e a cocurtose, significantes, respectivamente, no nível de 5% e 1%.

O conjunto de variáveis *dummy* de ano foi utilizado na estimação, e se mostraram conjuntamente diferentes de zero, sendo sua inclusão no modelo útil, portanto, para capturar efeitos macroeconômicos que afetam todas as empresas de maneira uniforme dentro de determinado ano. Conforme desejado em um modelo de apreçamento, a constante do modelo não se mostrou significativamente diferente de zero. Dentre as variáveis de con-

trole, o tamanho, medido pelo logaritmo natural do ativo total das empresas deixou de ser significativo.

**Tabela 4.11 – Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa)**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,197*	(0,084)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,006	(0,006)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
$\ln A$	-0,044	(0,093)
$VMVC$	0,043 <sup>†</sup>	(0,023)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,046	(0,041)
$DBVM$	-0,018	(0,015)
Constante	0,946	(1,306)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,228

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

A fim de verificar qual dos dois modelos é mais adequado aos dados amostrais, o procedimento proposto por Hausman foi conduzido. Este procedimento rejeitou, no nível de 1%, a hipótese nula de consistência da estimação dos coeficientes por efeitos aleatórios em favor da aceitação do modelo com efeitos fixos como mais adequado.

Quando a *proxy* da alavancagem foi substituída pelo quociente entre o endividamento total e o valor de mercado das ações da empresa, os resultados foram apenas levemente alterados. A magnitude dos coeficientes dos comomentos muda um pouco, mas as significâncias permanecem as mesmas. Dentre as variáveis de controle significativamente diferentes de zero, agora está também a própria alavancagem, significativa no nível de 5%.

Os resultados da estimação com efeitos fixos está apresentado na Tabela 4.12. O teste

de Hausman conduzido para esta formulação do modelo também rejeitou a hipótese nula em favor do modelo com efeitos fixos. Os resultados do modelo com efeitos aleatórios não serão, portanto, apresentados.

**Tabela 4.12 – Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): alavancagem medida pelo quociente entre o endividamento total e o valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,195*	(0,088)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,005	(0,006)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
$\ln A$	-0,032	(0,085)
$VMVC$	0,041†	(0,022)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,047	(0,040)
$ETVM$	-0,029*	(0,013)
Constante	0,853	(1,182)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,259

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

Quando a *proxy* para a variável tamanho passa a ser o logaritmo natural da receita líquida, os resultados também pouco se alteram. O teste de Hausman ainda indica o modelo com efeitos fixos como o mais adequado e os comomentos significativamente diferentes de zero são os mesmos e nos mesmos níveis de significância. Com relação às variáveis de controle, o quociente entre o valor de mercado da empresa e o seu valor contábil passa a não ser mais significativo, e a constante do modelo continua não sendo estatisticamente diferente de zero.

Quando o valor de mercado das ações é utilizado como *proxy* para o tamanho das empresas, os resultados diferem consideravelmente. Qualquer que seja a *proxy* da variável

**Tabela 4.13 – Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,210*	(0,089)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,005	(0,006)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
$\ln RL$	0,093	(0,058)
$VMVC$	0,036	(0,022)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,057	(0,042)
$ETVM$	-0,029*	(0,014)
Constante	-0,911	(0,798)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		577
R <sup>2</sup> ajust.		0,261

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln RL$  (logaritmo natural da receita líquida da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

alavancagem utilizada, esta formulação do modelo faz com que os comomentos não sejam estatisticamente diferentes de zero.

O modelo, apresentado na Tabela 4.14, apresenta também que esta variável de tamanho é estatisticamente diferente de zero no nível de 1%, porém com sinal contrário ao esperado. Além disso, a constante do modelo também é estatisticamente diferente de zero no nível de 1%, fato que invalida a aceitação desta formulação como um bom modelo de apreçamento.

A fim de avaliar a robustez dos resultados encontrados, variáveis “Winsorizadas” foram utilizadas como regressores. Este procedimento foi descrito na seção 3.6.5, e já foi empregado nos modelos de dados agrupados, porém, sem alterar significativamente os resultados obtidos com variáveis não “Winsorizadas”.

**Tabela 4.14 – Modelo alternativo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural do valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,086	(0,074)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,005	(0,006)
$\delta_{Ibovespa}$	0,000	(0,000)
$\ln VM$	0,440**	(0,088)
$VMVC$	0,016	(0,018)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,078†	(0,042)
$ETVM$	-0,016	(0,013)
Constante	-5,604**	(1,215)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		598
R <sup>2</sup> ajust.		0,363

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln VM$  (logaritmo natural do valor de mercado das ações da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

A Tabela 4.15 apresenta os resultados da estimação com efeitos fixos para o caso em que o tamanho da empresa é medido pelo logaritmo natural do ativo total das empresas, e a alavancagem é medida pelo quociente entre o endividamento total e o valor de mercado das ações da empresa. As variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram submetidas ao procedimento de “Winsorização”. Os modelos estimados apresentados aqui são os com efeitos fixos, uma vez que a hipótese nula do teste de Hausman foi rejeitada ao nível de 1% de significância.

Os coeficientes dos comomentos não sofreram fortes alterações em seus valores, e continuam significantes nos mesmos níveis que estavam quando variáveis de controle não “Winsorizadas” foram utilizadas. Uma mudança no que diz respeito à significância dos controles foi que o Índice Preço/Lucro deixou de ser significativo. O quociente entre o valor



**Tabela 4.15 – Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural do ativo total e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,200*	(0,073)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,007	(0,005)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
w-ln $A$	-0,058	(0,061)
w- $VMVC$	0,135**	(0,033)
w- $IPL$	0,000	(0,001)
w- $ILIQ$	-0,106	(0,064)
w- $ETVM$	-0,026†	(0,014)
Constante	1,069	(0,866)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,327

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorizadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa, ln  $A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

de mercado e o valor contábil aumentou sua significância de 10% para 1% e a alavancagem diminuiu sua significância de 5% para 10%. Porém, ambos controles apresentaram sinal contrário ao esperado. A constante do modelo não se mostrou estatisticamente diferente de zero.

A utilização da dívida bruta em relação ao valor de mercado das ações da empresa como *proxy* para a alavancagem alterou pouco os resultados da estimação. A única alteração em significância de coeficientes ocorreu exatamente na alavancagem, que deixou de ser considerada estatisticamente diferente de zero.

Quando o logaritmo natural da receita líquida foi utilizado como *proxy* para o tamanho da empresa, este passou a ser significativo no modelo de apreçamento no nível de 10%, porém

com sinal positivo. Este resultado foi encontrado tanto para o caso em que a alavancagem foi medida pelo quociente entre o endividamento total e o valor de mercado quanto quando foi medida pelo quociente entre a dívida bruta e o valor de mercado. O Índice de Liquidez também ficou significativo no nível de 10%, contudo, o sinal do seu coeficiente foi negativo, conforme esperado teoricamente. Quando o endividamento total sobre a dívida bruta foi usado como *proxy* da alavancagem, esta variável se mostrou estatisticamente diferente de zero no nível de 10%. Este último resultado está mostrado na Tabela C.4 do Apêndice C.

Empregando o logaritmo natural do valor de mercado das ações como *proxy* para o tamanho das empresas, os comomentos deixaram de ser significativamente diferentes de zero. A variável tamanho passou a ser significativa no nível de 1%, porém com sinal positivo, diferentemente daquilo que era esperado. A constante do modelo também ficou significativa no nível de 1%. Estes resultados foram encontrados para ambas formulações da variável alavancagem adotada. O resultado quando a alavancagem adotada foi a razão entre o endividamento total e o valor de mercado das ações da empresa está mostrado na Tabela C.5 do Apêndice C.

#### 4.2.2.2 IBrX como *Proxy* para Carteira de Mercado

Os resultados dos modelos com dados em painel estimados até aqui foram baseados na suposição de que a carteira Ibovespa aproxima adequadamente a carteira de mercado brasileira. Uma outra alternativa utilizada nesta tese é a carteira IBrX. O uso dessas duas formulações é também uma maneira de verificar a consistência e robustez dos resultados encontrados e apresentados até este momento.

Todos os modelos estimados com IBrX foram submetidos ao teste baseado no multiplicador de Lagrange, e a hipótese nula do teste foi rejeitada, indicando que o modelo em painel, que leva em consideração a heterogeneidade não-observada, é mais adequado que a estimação com dados agrupados.

Outro teste empregado na determinação da melhor especificação do modelo a ser estimado foi o teste de Hausman. Para a carteira de mercado IBrX, o referido teste também rejeitou sua hipótese nula em todas as especificações analisadas, e, portanto, apenas os resultados dos modelos com efeitos fixos serão apresentados.

O modelo em que o tamanho da empresa é o logaritmo natural do ativo total e a alavancagem é o quociente entre o endividamento total e o valor de mercado das ações da empresa está apresentado na Tabela 4.16.

**Tabela 4.16 – Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural do ativo total e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,190**	(0,060)
$\gamma_{IBrX}$	-0,003	(0,004)
$\delta_{IBrX}$	0,000**	(0,000)
$\ln A$	-0,028	(0,086)
$VMVC$	0,039†	(0,021)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILLIQ$	-0,045	(0,039)
$ETVM$	-0,029*	(0,013)
Constante	0,764	(1,201)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,259

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILLIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

A principal diferença entre este modelo e os anteriormente apresentados reside na significância do comomento  $\beta$ , a covariância. Quando o IBrX é utilizado como *proxy* da carteira de mercado, este comomento é sempre significativo no nível de 1%, exceto quando o logaritmo natural do valor de mercado é utilizado como *proxy* do tamanho. Neste caso, mais uma vez, nenhum comomento é significativamente diferente de zero.

O comomento  $\delta$  deixa de ser significativo no nível de 1%, sendo significativo no nível de 5%, quando o logaritmo natural da receita líquida é usado com variável de tamanho e o quociente do endividamento total sobre o valor de mercado das ações é usado como variável de alavancagem. Este modelo está apresentado na Tabela C.6 do Apêndice C.

Quando as variáveis de controle são “Winsorisadas”, é verificado o único modelo, exceto

aqueles em que o tamanho é medido pelo logaritmo natural do valor de mercado das ações, em que o comomento  $\delta$  não é significativo. Neste modelo, apenas o  $\beta$  é significativo, o sendo no nível de 1%. Este modelo está apresentado na Tabela 4.17.

**Tabela 4.17 – Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,181**	(0,052)
$\gamma_{IBrX}$	-0,004	(0,004)
$\delta_{IBrX}$	0,000	(0,000)
w- $\ln RL$	0,071 <sup>†</sup>	(0,035)
w- $VMVC$	0,127**	(0,033)
w- $IPL$	0,000	(0,001)
w- $ILLIQ$	-0,113 <sup>†</sup>	(0,062)
w- $ETVM$	-0,028 <sup>†</sup>	(0,014)
Constante	-0,770	(0,516)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		577
R <sup>2</sup> ajust.		0,328

Níveis de significância :    <sup>†</sup> : 10%    \* : 5%    \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorizadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX,  $\ln RL$  (logaritmo natural da receita líquida da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILLIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

A Tabela 4.18 apresenta um outro modelo com variáveis de controle “Winsorizadas”. Neste modelo, a covariância e a cocurtose são significativamente diferentes de zero nos níveis de 1% e 5%, respectivamente. Ao mudar a alavancagem para o quociente entre a dívida bruta e o valor de mercado das ações, as significâncias dos comomentos não se alteraram. Porém, na formulação em que o tamanho é medido pelo logaritmo natural da receita líquida e a alavancagem pelo quociente entre a dívida bruta e o valor de mercado das ações, a significância da cocurtose é de 10%.

**Tabela 4.18 – Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,181**	(0,051)
$\gamma_{IBrX}$	-0,004	(0,004)
$\delta_{IBrX}$	0,000*	(0,000)
w-ln $A$	-0,054	(0,061)
w- $VMVC$	0,133**	(0,034)
w- $IPL$	0,000	(0,001)
w- $ILIQ$	-0,102	(0,062)
w- $ETVM$	-0,027 <sup>†</sup>	(0,014)
Constante	0,995	(0,867)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		586
R <sup>2</sup> ajust.		0,326

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorizadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX, ln  $A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

## 4.3 Síntese dos Principais Resultados

As unidades observacionais desta tese foram empresas regularmente negociadas na Bovespa, e delas foram coletados preços de fechamento semanais. A partir destas observações, as séries de taxas de retorno semanais foram construídas, e, inicialmente, a normalidade distribucional foi testada. O que as estatísticas descritivas já evidenciavam, os testes formais foram capazes de comprovar: seja para carteiras de mercado, seja para os ativos individuais, a normalidade é, na maioria dos casos, rejeitada.

Foram empregados dois tipos diferentes de teste, sendo um deles específico para identificar qual momento, assimetria ou curtose, é responsável pela rejeição da normalidade dos

dados. Os resultados mostraram que, para as carteiras de mercado, a assimetria causou a rejeição da hipótese nula do teste, enquanto que a curtose não. Quando os mesmos testes foram empregados nos ativos individuais, a curtose, mais que a assimetria, foi o momento mais vezes responsável pela rejeição da normalidade.

Em seguida, foram estimados modelos de apreçamento, mas ainda sem usar a abordagem em painel. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) com correção dos resíduos para heterocedasticidade e autocorrelação. As variáveis de controle empregadas, exceto as *dummies*, foram também “Winsorizadas”, procedimento descrito na seção 3.6.5. Esta “Winsorização” serve ao propósito de eliminar algumas observações extremas sem excluí-las da amostra estudada.

Os resultados dos modelos estimados estão apresentados na Tabela C.7, no Apêndice C. Como pode ser visto, a coassimetria não é significativa em nenhuma formulação. Os coeficientes da covariância e da cocurtose são significantes, exceto nos modelos em que a *proxy* do tamanho é o logaritmo natural do valor de mercado das ações das empresas. A variável de controle Tamanho só é significativamente diferente de zero quando sua *proxy* é o logaritmo natural do ativo total. Quando as variáveis de controle são “Winsorizadas”, o Índice Preço/Lucro deixa de ser significativo. A Liquidez e a Alavancagem não são significantes em nenhum modelo.

Os resultados quando o IBrX foi utilizado como *proxy* para a carteira de mercado foram apresentados na Tabela C.8, no Apêndice C. A cocurtose deixa de ser significativamente diferente de zero nos modelos estimados, mas a covariância continua significativa, no nível de 10%, exceto quando o logaritmo natural do valor de mercado das ações da empresa é usado como *proxy* para o tamanho. Os demais resultados são muito semelhantes aos dos modelos da Tabela C.7.

Em seguida, foram conduzidas as estimações do modelo usando a característica transversal e longitudinal dos dados. A fim de determinar se esta especificação era, ou não, mais adequada que a de dados agrupados, testes baseados no multiplicador de Lagrange, sugeridos por Breusch e Pagan (1979, 1980), foram realizados. Em todas as especificações de modelo adotadas, o teste rejeitou sua hipótese nula, indicando que a estimação agrupada não era a mais adequada.

A fim de decidir entre o modelo com dados em painel com efeitos fixos ou aleatórios, foi utilizado o teste de especificação proposto por Hausman (1978) com uma modificação proposta por Wooldridge (2002, p. 290–291) com o objetivo de tornar o teste robusto a erros heterocedásticos e/ou autocorrelacionados. Também, neste teste, o resultado foi unânime em favor do modelo com efeitos fixos. Os modelos foram gerados e os coeficientes dos

regressores testados para os casos em o Ibovespa e o IBrX foram usados como *proxy* para a carteira de mercado. Os resultados sintetizados estão apresentados, respectivamente, nas Tabelas C.9 e C.10 do Apêndice C.

Ao se usar o modelo de efeitos fixos, a covariância e a cocurtose foram sempre significativamente diferentes de zero, exceto quando o logaritmo natural do valor de mercado das ações da empresa foi usado como *proxy* da variável tamanho. Quando o IBrX foi usado como *proxy* da carteira de mercado, o  $\beta$  foi significativo no nível de 1%, enquanto que foi significativo no nível de 5% quando o Ibovespa foi empregado.

Não houve grandes mudanças verificadas quando as variáveis de controle foram “Winsorizadas”. Exceção feita para o caso em que o logaritmo natural da receita líquida foi usado como *proxy* para o tamanho e o quociente entre endividamento total e o valor de mercado das ações da empresa foi usado como *proxy* para alavancagem. Nesta especificação, a cocurtose não se mostrou significativamente diferente de zero, e apenas o  $\beta$  foi significativo.

Foi feito ainda um último teste em todos modelos: o de que, conjuntamente, os três comomentos são estatisticamente diferentes de zero. Apesar de a coassimetria não ser significativa individualmente em nenhum dos modelos, foi possível rejeitar a hipótese de que os três comomentos são, conjuntamente, iguais a zero. Assim, mesmo não sendo individualmente diferente de zero dentro dos níveis de significância desejados, a coassimetria foi mantida como regressora nos modelos.

Uma das possíveis causas para o coeficiente da coassimetria não ter sido estatisticamente diferente de zero recai sobre o fato de a carteira de mercado ter assimetria negativa e a maioria das empresas apresentarem assimetria positiva. Restaram, portanto, poucas empresas que apresentaram coassimetria positiva com a carteira de mercado. Há um aparente contra-senso no fato do Ibovespa e IBrX apresentarem assimetria negativa e as ações das empresas, muitas delas integrantes destes índices, terem, em sua maioria, assimetria positiva. No entanto, como a composição destas carteiras leva em consideração fatores como volume, presença em bolsa e índice de negociabilidade, é provável que empresas com assimetria negativa tenham sido mais relevantes na formação do índice neste período.

Linhas de pesquisa como a Teoria Perspectiva<sup>22</sup>, iniciada com Kahneman e Tversky (1979), ajudam a entender que investidores são mais dispostos a investir em ativos que apresentam assimetria positiva. A possibilidade de ganhos extraordinários, ainda que com pequena probabilidade, é um fator motivador para investir nesses ativos. Um exemplo clássico são

---

<sup>22</sup>*Prospect theory*.

as loterias, que pagam prêmios vultosos, mas com probabilidades ínfimas e, mesmo assim uma grande quantidade de pessoas fazem apostas.



# Capítulo 5

## Conclusão

O *CAPM* tradicional, desenvolvido por Sharpe (1964), é largamente utilizado em estudos financeiros para determinar, em termos teóricos, a taxa de retorno exigida de um ativo ou carteira de ativos, dada uma única medida de risco sistêmico. Apoiado em alguns pressupostos já discutidos anteriormente nesta tese, este modelo foi largamente verificado empiricamente e os testes sugerem resultados ora negativos, ora ambíguos. Além disso, diversos fatos observados empiricamente levaram os pesquisadores a acreditar que algumas anomalias são regularmente encontradas, tornando a formulação tradicional inconsistente. Nas palavras de Barone-Adesi, Gagliardini e Urga (2004):

Apesar de a persistência no tempo dessas anomalias ainda ser objeto de debate, a evidência sugere que o *CAPM* baseado em esperança-variância não é uma descrição satisfatória do equilíbrio de mercado. Estas anomalias podem estar relacionadas à possibilidade de que fatores sem utilidade estão sendo apreçados. Certamente, também é possível que as anomalias se devam a fatores omitidos.<sup>23</sup>

Outro aspecto amplamente debatido e testado empiricamente é a questão da distribuição da taxa de retorno dos ativos. Conforme Branco e Arellano-Valle (2004), estudos de dados contínuos têm sido, em grande parte, desenvolvidos assumindo-se hipóteses de normalidade. A violação desta hipótese pode causar inadequação das estimações de parâmetros de interesse, implicando decisões incorretas a respeito do teste das hipóteses derivadas das argumentações teóricas das pesquisas.

---

<sup>23</sup> “Although the persistence of these anomalies over time is still subject to debate, the evidence suggests that the mean-variance *CAPM* is not a satisfactory description of market equilibrium. These pricing anomalies may be related to the possibility that useless factors appear to be priced. Of course, it is also possible that pricing anomalies are due to omitted factors.”

Segundo Brooks et al. (2005), a distribuição não-normal das taxas de retorno dos ativos é um fato estilizado aceito quase universalmente<sup>24</sup>. Conforme Silva (2005):

Sem a normalidade, é improvável que o *CAPM* se mantenha, mas quando as taxas de retorno são normalmente distribuídas, nós só precisamos da esperança e da variância para descrever perfeitamente a distribuição. No entanto, um número infinito de momentos são geralmente requeridos para especificar completamente as caudas da distribuição. Investidores estão preocupados com o risco, e o risco deve ser mensurado em termos da distribuição de probabilidades completa, que pode, por sua vez, ser mensurado pelos momentos distribucionais. Apenas em casos muito particulares, como funções de utilidade quadráticas ou normalidade das taxas de retorno, pode-se ignorar os momentos de ordem superior e os comomentos sistêmicos.<sup>25</sup>

Se, por um lado, estudos como os de Fama e French (1992, 1993) argumentam que outros fatores como o tamanho e valor das empresas devem ser considerados em modelos de apreçamento, do outro lado estão os estudos que argumentam que o risco sistêmico medido pelo  $\beta$  não deveria ser o único presente no modelo. Autores como Rubinstein (1973), Kraus e Litzenberger (1976), Fang e Lai (1997) e muitos outros, sugerem formulações de modelos que levam em consideração riscos sistêmicos relacionados à assimetria e à curtose.

A pesquisa desenvolvida nesta tese faz uso dos comomentos baseados na variância, assimetria e curtose das taxas de retorno dos ativos e da carteira de mercado como regressores em um modelo de apreçamento. Além destes, outros fatores inspirados em estudos anteriores, reportados na literatura sobre o tema como responsáveis pelo aparecimento de relações ditas anômalas, foram também utilizados como variáveis de controle. A intenção, evidentemente, foi a de verificar empiricamente se, com dados brasileiros, em uma abordagem metodológica inovadora, os comomentos seriam significantes.

Especificamente, o interesse da pesquisa recaiu sobre as empresas mais líquidas negociadas na Bovespa no período de 2003 a 2007. Empresas com baixa liquidez foram excluídas da amostra porque a determinação verdadeira de seu preço fica prejudicada, dado que a ocorrência de negociação dos seus papéis é baixa. Além destas empresas, empresas do

<sup>24</sup> “It is an almost universally accepted stylized fact that asset returns are not normally distributed.”

<sup>25</sup> “Without normality, the *CAPM* is unlikely to hold, but when returns are normal, we only need the mean and variance to perfectly describe the distribution. However, an infinite number of moments are generally required to specify the tails completely. Investors are concerned about risk, and risk must be measured in terms of the entire probability distribution, which in turn can be measured with the moments of the distribution. Only in very special cases, such as quadratic utility or normality of returns, can we ignore the higher moments and systematic co-moments.”

setor financeiro também foram excluídas, uma vez que apresentam características muito particulares, que as fazem diferir sobremaneira das demais empresas pertencentes a outros setores de atividade.

A importância deste estudo também reside no fato de serem usados dados de um mercado emergente como o Brasil para realizar a pesquisa. Estudos que utilizam dados americanos para testar a relevância estatística dos comomentos em modelos de apreçamento estão se tornando, aos poucos, comuns. No entanto, existem poucos estudos realizados com dados de outros países. No Brasil, especificamente, modelos semelhantes foram testados por Silva (2005) e Ceretta, Catarina e Muller (2007), porém em uma abordagem metodologicamente distinta da desta tese.

É especialmente importante considerar alguns aspectos relevantes aos mercados emergentes, especialmente o brasileiro. Conforme Bekaert et al. (1998),

[...] a análise padrão baseada em esperança e variância é um tanto problemática em mercados emergentes. Nesta análise, investidores se preocupam com retornos esperados, variâncias e covariâncias, mas em mercados emergentes as taxas de retorno não podem ser completamente caracterizadas por apenas estas medidas. [...] há assimetria e curtose significativas nessas taxas de retorno.<sup>26</sup>

Após determinadas as empresas da amostra, as variáveis, especialmente as de controle, foram definidas, e foram criadas alternativas de mensuração das mesmas. Estas formulações alternativas foram sempre extraídas de pesquisas anteriores que encontraram resultados relevantes com o seu uso. Ter mais de uma variável para medir o mesmo construto possibilita ainda uma análise da robustez dos resultados encontrados. Havendo mudanças significativas nos sinais dos coeficientes ou mesmo na significância dos principais regressores de interesse da pesquisa, os comomentos, indicariam claramente uma vulnerabilidade dos resultados encontrados.

A metodologia empregada nos testes empíricos de modelos de apreçamento, seja ele na concepção original do *CAPM* baseado em esperança-variância, com ou sem fatores de risco adicionais como tamanho ou valor, ou empregando momentos relacionados à assimetria e à curtose, costuma negligenciar o efeito conjunto que a característica transversal e

---

<sup>26</sup> “[...] the standard mean-variance analysis is somewhat problematical with respect to emerging markets. In this analysis, investors care about expected returns, variances, and covariances, but emerging market returns cannot be completely characterized by these measures alone. [...] there is significant skewness and kurtosis in these returns.”

longitudinal dos dados pode proporcionar. Esta pesquisa, além de empregar variáveis de controle baseadas nos efeitos anômalos mais comuns relatados na literatura, fez uso de uma abordagem metodológica de dados em painel para testar os comomentos estatísticos, utilizados como medidas de risco do modelo. Esta verificação empírica, até onde sabemos, é inédita na literatura, constituindo assim uma das principais contribuições do trabalho.

No processo de estimação dos modelos, foram usados ainda métodos robustos a observações extremas, ditas *outliers*. Este tratamento foi feito por meio da “Winsorização” das variáveis de controle, exceto as variáveis *dummy*. Foram também empregadas técnicas de estimação robustas à possível presença de heterocedasticidade e/ou autocorrelação dos resíduos. A fim de determinar qual método de estimação era mais adequado ao conjunto de dados amostrais (modelos com dados agrupados, com efeitos fixos ou com efeitos aleatórios), diversos testes de especificação foram conduzidos e os resultados reportados.

Uma primeira verificação dos dados de taxas de retorno das empresas que fazem parte da amostra da pesquisa mostraram que, de fato, a normalidade distribucional não é um evento muito comum. Foram aplicados dois testes distintos a fim de verificar ou não a normalidade das séries de taxas de retorno, e a maioria das empresas apresentou distribuição diferente da normal para suas taxas. Os índices utilizados como *proxy* para a carteira de mercado também foram submetidos aos mesmos testes, e ambos tiveram a hipótese nula de normalidade distribucional rejeitada. Especificamente, as *proxies* para a carteira de mercado tiveram a assimetria considerada distante da assimetria de uma normal, que é zero. Suas curtoses, todavia, se encontravam dentro do esperado para uma distribuição normal. O mesmo resultado não foi observado nos ativos, em que a curtose foi rejeitada como normal mais vezes que a assimetria.

Os resultados da pesquisa indicaram que os comomentos  $\beta$  e  $\delta$ , respectivamente, a covariância e a cocurtose entre as taxas de retorno dos ativos e da carteira de mercado, são altamente significantes nos modelos estimados. Quando o Ibovespa foi utilizado como *proxy* para a carteira de mercado, o comomento  $\beta$ , a covariância, se mostrou significativo no nível de 5% em todos os modelos, exceção feita aos modelos que consideraram o logaritmo natural do valor de mercado como *proxy* do tamanho das empresas. Já o comomento  $\delta$ , a cocurtose, foi significativo no nível de 1% nos mesmos modelos em que  $\beta$  foi significativo. O comomento  $\gamma$ , a coassimetria, não se mostrou significativo em nenhum dos modelos estimados. É importante ressaltar que estes resultados foram obtidos a despeito da presença nos modelos das variáveis de controle, representando os possíveis efeitos anômalos verificados em estudos anteriores.

Quando o IBrX foi utilizado como *proxy* para a carteira de mercado, o resultados ficaram bastante parecidos, ou seja, o comomento  $\beta$  e  $\delta$ , respectivamente a covariância e a cocur-

tose, foram significativamente diferentes de zero. A covariância foi sempre significativa no nível de 1%, exceto quando o logaritmo natural do valor de mercado foi utilizado como *proxy* para o tamanho. Já a significância da cocurtose variou entre 1% e 10% conforme o modelo.

A consistência observada nos resultados entre as diferentes especificações do modelo leva a acreditar que há fortes indícios acerca da validade empírica do modelo de apreçamento adotado nesta tese. Apesar de a coassimetria não ter sido significativa em nenhum dos modelos propostos, ela, em conjunto com os outros dois comomentos, se mostrou significativamente contributiva para o apreçamento, uma vez que o teste conjunto de que os três comomentos passam pela origem foi rejeitado.

Portanto, esta tese proporcionou a primeira evidência com dados brasileiros de um modelo de apreçamento baseado em comomentos, controlando as anomalias comumente reportadas na literatura, e com abordagem metodológica transversal e longitudinal. Os resultados permitem afirmar que a formulação clássica do *CAPM* é falha ao não considerar outros fatores de risco como relevantes para a determinação do preço dos ativos. As evidências aqui reportadas são consistentes com outros estudos já realizados, porém a comparação fica comprometida, dado que o método empregado é bastante distinto.

Pesquisas futuras podem seguramente ser feitas explorando ainda mais este tema de pesquisa. De maneira prática, é possível explorar os efeitos de outros comomentos, como os de ordem superior à cocurtose. Conforme Chung, Johnson e Schill (2006), há indícios de que o aumento da quantidade de comomentos no modelo de apreçamento diminui a relevância estatística de fatores de risco como os propostos por Fama e French (1992, 1993). Ademais, é possível também explorar como a relevância dos comomentos se altera para diferentes períodos de composição das taxas de retorno. Particularmente, esta tese utilizou dados de taxas semanais de retorno, mas os resultados poderiam ser diferentes se fossem utilizadas taxas diárias ou mensais. Outros períodos de tempo podem ser estudados, ou diferentes amostras podem ser utilizadas, assim como diferentes definições operacionais para as variáveis de controle. Desta forma, será possível verificar a estabilidade dos resultados obtidos nesta pesquisa.



# Referências

ALLAIS, Maurice F. C. Le Comportement de l'Homme Rationnel Devant le Risque, Critique des Postulates et Axioms de l'École Américaine. *Econometrica*, v. 21, n. 1, p. 503–546, 1953.

ALLAIS, Maurice F. C.; HAGEN, Ole (Ed.). *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*. Dordrecht, Holanda: Reidel, 1979.

ARDITTI, Fred D. Risk and the Required Return on Equity. *The Journal of Finance*, v. 22, n. 1, p. 19–36, 1967.

\_\_\_\_\_. A Utility Function Depending on the First Three Moments: Reply. *The Journal of Finance*, v. 24, n. 4, p. 720, 1969.

\_\_\_\_\_. Another Look at Mutual Fund Performance. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 3, p. 909–912, 1971.

ARELLANO, Manuel. *Panel Data Econometrics*. New York: Oxford, 2003.

ARROW, Kenneth Joseph. *Essays in the Theory of Risk-bearing*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

ASSAF NETO, Alexandre. *Finanças Corporativas e Valor*. 3a. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

BALTAGI, Badi H. *Economic Analysis of Panel Data*. 3rd. ed. Chichester, England: Wiley, 2005.

\_\_\_\_\_. Panel Data Models. In: MILLS, Terence C.; PATTERSON, Kerry (Ed.). *Palgrave Handbook of Econometrics*. New York: Palgrave Macmillan, 2006. Capítulo 17, p. 633–661.

BANZ, Rolf W. The Relationship between Return and Market Value of Common Stocks. *Journal of Financial Economics*, v. 9, n. 1, p. 3–18, 1981.

BARNETT, Vic; LEWIS, Toby. *Outliers in Statistical Data*. 3rd. ed. Chichester: Wiley, 1994.

- BARONE-ADESI, Giovanni; GAGLIARDINI, Patrick; URGÀ, Giovanni. Testing Asset Pricing Models with Coskewness. *Journal of Business & Economic Statistics*, v. 22, n. 4, p. 474–486, 2004.
- BARROS, Lucas A. B. de Campos. *Estrutura de Capital e Valor da Empresa no Contexto de Assimetria de Informações e Relações de Agência: Um Estudo Empírico*. Dissertação (Mestrado em Administração) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.
- BASU, Sandip K. Investment Performance of Common Stocks in Relation to Their Price-Earnings Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis. *The Journal of Finance*, v. 32, n. 3, p. 663–682, 1977.
- BAUM, Christopher F.; COX, Nicholas J. *OMNINORM: Stata module to calculate omnibus test for univariate/multivariate normality*. 2001. Statistical Software Components, Boston College Department of Economics. Acessado em 04 de maio de 2008. Disponível em: <http://ideas.repec.org/c/boc/bocode/s417501.html>.
- BEKAERT, Geert et al. Distributional Characteristics of Emerging Market Equities and Asset Allocation. *Journal of Portfolio Management*, v. 24, n. 2, p. 102–116, 1998.
- BEKMAN, Otto R.; COSTA NETO, Pedro Luiz O. *Análise Estatística da Decisão*. São Paulo: Edgard Blücher, 1980.
- BERÉNYI, Zsolt. *Accounting for Illiquidity and Non-normality of Returns in the Performance Assessment*. Munique: University of Munich, Institute of Capital Market Research and Finance, Jun 2001. Working Paper.
- BERK, Jonathan B. A Critique of Size-related Anomalies. *Review of Financial Studies*, v. 8, n. 2, p. 275–286, 1995.
- BERNOULLI, Daniel. Exposition of a New Theory of the Measurement of Risk. *Econometrica*, v. 22, n. 1, p. 23–36. Tradução do Latim para o Inglês do Original: Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis (1738), 1954.
- BHANDARI, Laxmi Chand. Debt/Equity Ratio and Expected Common Stock Returns: Empirical Evidence. *The Journal of Finance*, v. 43, n. 2, p. 507–528, 1988.
- BLACK, Fischer S. Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing. *The Journal of Business*, v. 45, n. 3, p. 444–455, 1972.
- \_\_\_\_\_. Beta and Return - Announcements of the ‘Death’ of Beta Seem Premature. *Journal of Portfolio Management*, v. 20, p. 8–18, 1993.



BLACK, Fischer S.; JENSEN, Michael C.; SCHOLES, Myron. The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests. *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger, New York, v. 6, 1972.

BLUME, Marshall E. On the Assessment of Risk. *The Journal of Finance*, v. 26, n. 1, p. 1–10, 1971.

BOLLERSLEV, Tim; ENGLE, Robert F.; WOOLDRIDGE, Jeffrey M. A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances. *Journal of Political Economy*, v. 96, n. 1, p. 116–31, Fev. 1988.

BORCH, Karl Henrik. *The Economics of Uncertainty*. Princeton, NJ: Princeton, 1968.

BRANCO, Márcia D'Elia; ARELLANO-VALLE, Reinaldo. *Distribuições Elípticas Assimétricas*. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 16º SINAPE – 26 a 30/07, 2004.

BREUSCH, Trevor S.; PAGAN, Adrian Rodney. A Simple Test for Heteroscedasticity and Random Coefficient Variation. *Econometrica*, v. 47, n. 5, p. 1287–1294, 1979.

\_\_\_\_\_. The Lagrange Multiplier Test and its Applications to Model Specification in Econometrics. *Review of Economic Studies*, v. 47, n. 1, p. 239–253, 1980.

BROCKETT, Patrick L.; KAHANE, Yehuda. Risk, Return, Skewness and Preference. *Management Science*, v. 38, n. 6, p. 851–866, 1992.

BROOKS, Chris et al. Autoregressive Conditional Kurtosis. *Journal of Financial Econometrics*, Oxford, v. 3, n. 3, p. 399, 2005.

CAMERON, A. Collin; TRIVEDI, Pravin K. *Microeconometrics: Methods and Applications*. New York, NY: Cambridge, 2005.

CAMPBELL, John Y.; LO, Andrew W.; MACKINLAY, A. Craig. *The Econometrics of Financial Markets*. New Jersey: Princeton, 1997.

CERETTA, Paulo Sergio; CATARINA, Graciele F. Santa; MULLER, Ivanor. Modelo de Precificação Incorporando Assimetria e Curtose Sistemática. In: *Encontro da ANPAD – XXXI EnANPAD, 2007, Rio de Janeiro. Anais...* Rio de Janeiro: ANPAD, 2007.

CHUNG, Y. Peter; JOHNSON, Herb; SCHILL, Michael J. Asset Pricing When Returns Are Nonnormal: Fama-French Factors versus Higher Order Systematic Comoments. *Journal of Business*, v. 79, n. 2, p. 923–940, 2006.

CLEMEN, Robert T. *Making Hard Decisions*. 2nd. ed. Pacific Grove, CA: Duxbury, 1996.

COCHRANE, John H. *Asset Pricing*. Revised ed. Princeton, NJ: Princeton, 2005.

- COOK, R. Dennis; WEISBERG, Sanford. Diagnostics for Heteroscedasticity in Regression. *Biometrika*, v. 70, n. 1, p. 1–10, 1983.
- D'AGOSTINO, Ralph B.; BELANGER, Albert; D'AGOSTINO JR., Ralph B. A Suggestion for Using Powerful and Informative Tests of Normality. *The American Statistician*, v. 44, n. 4, p. 316–321, 1990.
- DAVIDSON, Russel; MACKINNON, James G. *Estimation and Inference in Econometrics*. New York: Oxford, 1993.
- DECARLO, Lawrence T. On the Meaning and Use of Kurtosis. *Psychological Methods*, v. 2, n. 3, p. 292–307, 1997.
- DOORNIK, Jurgen A.; HANSEN, Henrik. An Omnibus Test for Univariate and Multivariate Normality. *Unpublished working paper, Nuffield College, Oxford University*, 1994. Acessado em 4 de maio de 2008. Disponível em: <http://ideas.uqam.ca/ideas/data/Papers/wuknucowp9604.html>.
- DUFFIE, Darrell. *Security Markets: Stochastic Models*. Boston: Academic, 1988.
- FABOZZI, Frank J.; FRANCIS, Jack Clark. Beta as a Random Coefficient. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 13, n. 1, p. 101–116, 1978.
- FAMA, Eugene F. Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments. *The Journal of Finance*, v. 23, n. 1, p. 29–40, 1968.
- FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The Cross-Section of Expected Stock Returns. *The Journal of Finance*, v. 47, n. 2, p. 427–465, 1992.
- \_\_\_\_\_. Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds. *Journal of Financial Economics*, v. 33, p. 3–56, 1993.
- FAMA, Eugene F.; MACBETH, James D. Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests. *The Journal of Political Economy*, v. 81, n. 3, p. 607–636, 1973.
- FAMÁ, Rubens; BARROS, Lucas Ayres B. C.; SILVEIRA, Héber P. Conceito de taxa livre de risco e sua aplicação no capital asset pricing model - um estudo exploratório para o mercado brasileiro. In: *Segundo Encontro Brasileiro de Finanças*. São Paulo: Sociedade Brasileira de Finanças, 2002.
- FANG, Hsing; LAI, Tsong-Yue. Co-kurtosis and Capital Asset Pricing. *The Financial Review*, v. 32, n. 2, p. 293–307, Mai. 1997.
- FERSON, Wayne E.; HARVEY, Campbell R. The Variation of Economic Risk Premiums. *Journal of Political Economy*, v. 99, n. 2, p. 385–415, Abril 1991.

\_\_\_\_\_. The Risk and Predictability of International Equity Returns. *Review of Financial Studies*, v. 6, n. 3, p. 527–66, 1993.

\_\_\_\_\_. Conditioning Variables and the Cross Section of Stock Returns. *The Journal of Finance*, v. 54, n. 4, p. 1325–1360, 1999.

FINUCAN, Henry M. A Note on Kurtosis. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, v. 26, n. 1, p. 111–112, 1964.

FOGLER, H. Russel; RADCLIFFE, Robert C. A Note on Measurement of Skewness. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, JSTOR, v. 9, n. 3, p. 485–489, 1974.

FRENCH, Craig W. Jack Treynor's 'Toward a Theory of Market Value of Risky Assets'. *SSRN eLibrary*, SSRN, 2002. Acessado em 22 de março de 2008. Disponível em: <http://ssrn.com/paper=628187>.

FRIEND, Irwin; WESTERFIELD, Randolph. Co-skewness and Capital Asset Pricing. *Journal of Finance*, v. 35, n. 4, p. 897–913, Set. 1980.

GALAGEDERA, Don U. A.; HENRY, Darren; SILVAPULLE, Param. Empirical Evidence on the Conditional Relation between Higher-order Systematic Co-moments and Security Returns. *Quarterly Journal of Business and Economics*, v. 42, n. 1/2, p. 121–137, 2003.

GARCIA, Márcio G. P.; BRANDÃO, Tatiana G. Didier. Taxa de Juros, Risco Cambial e Risco Brasil. In: *Anais do XXIX Encontro Nacional de Economia*. Salvador: ANPEC - Associação Nacional dos Centros de Pós-graduação em Economia, 2001.

GIL, Antônio Carlos. *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas, 1991.

GOLLIER, Christian. *The Economics of Risk and Time*. Cambridge, MA: MIT, 2001.

HANSEN, Lars Peter. Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 1029–1054, 1982.

HARVEY, Campbell R. Time-varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models. *Journal of Financial Economics*, v. 24, n. 2, p. 289–317, 1989.

HARVEY, Campbell R. et al. *Portfolio Selection With Higher Moments*. 2004. Working Paper. Acessado em 29 de março de 2008. Disponível em: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=634141](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=634141).

HARVEY, Campbell R.; SIDDIQUE, Akhtar. Conditional Skewness in Asset Pricing Tests. *Journal of Finance*, v. 55, n. 3, p. 1263–1295, 2000.

\_\_\_\_\_. Time-Varying Conditional Skewness and the Market Risk Premium. *Research in Banking and Finance*, v. 1, n. 1, p. 27–60, 2000.

- HAUSMAN, Jerry A. Specification Tests in Econometrics. *Econometrica*, v. 46, n. 6, p. 1251–1271, 1978.
- HAWAWINI, Gabriel A. An Analytical Examination of the Intervaling Effect on Skewness and Other Moments. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 15, n. 5, p. 1121–1127, 1980.
- HLAWITSCHKA, Walter. The Empirical Nature of Taylor-series Approximations to Expected Utility. *The American Economic Review*, v. 84, n. 3, p. 713–719, 1994.
- HOMAIFAR, Ghassem; GRADDY, Duane B. Equity Yields in Models Considering Higher Moments of the Return Distribution. *Applied Economics*, v. 20, n. 3, p. 325–34, 1988.
- HUANG, Chi-fu; LITZENBERGER, Robert H. *Foundations for Financial Economics*. New Jersey: Prentice Hall, 1988.
- INGERSOLL JR., Jonathan E. Multidimensional Security Pricing. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 10, n. 5, p. 785–798, 1975.
- \_\_\_\_\_. *Theory of Financial Decision Making*. Savage, MD: Rowman & Littlefield, 1987.
- JACOB, Nancy L. The Measurement of Systematic Risk for Securities and Portfolios: Some Empirical Results. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 2, p. 815–833, 1971.
- JAGANNATHAN, Ravi; WANG, Zhenyu. The Conditional CAPM and the Cross-Section of Expected Returns. *The Journal of Finance*, v. 51, n. 1, p. 3–53, 1996.
- JEAN, William H. The Extension of Portfolio Analysis to Three or More parameters. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 6, n. 1, p. 505–515, 1971.
- JONDEAU, Eric; ROCKINGER, Michael. FAME Research Paper Series, *The Allocation of Assets Under Higher Moments*. 2002. Acessado em 29 de março de 2008. Disponível em: <http://ideas.repec.org/p/fam/rpseri/rp71.html>.
- \_\_\_\_\_. Conditional Volatility, Skewness, and Kurtosis: Existence, Persistence, and Comovements. *Journal of Economic Dynamics and Control*, Elsevier Science, v. 27, n. 10, p. 1699–1737, 2003.
- \_\_\_\_\_. Optimal Portfolio Allocation Under Higher Moments. In: EFMA MEETINGS PAPER. *The European Financial Management Association*. Basiléia, Suíça, 2004. Acessado em 29 de março de 2008. Disponível em: <http://ssrn.com/abstract=498322>.
- KAHNEMAN, Daniel; TVERSKY, Amos. Prospect theory: an analysis of decisions under risk. *Econometrica*, v. 47, n. 2, p. 263–292, 1979.

KAN, Raymond; ZHANG, Chu. GMM Tests of Stochastic Discount Factor Models with Useless Factors. *Journal of Financial Economics*, v. 54, n. 1, p. 103–127, 1999.

\_\_\_\_\_. Two-Pass Tests of Asset Pricing Models with Useless Factors. *The Journal of Finance*, v. 54, n. 1, p. 203–235, 1999.

KAPLANSKY, Irving. A Common Error Concerning Kurtosis. *Journal of the American Statistical Association*, v. 40, n. 230, p. 259, 1945.

KERLINGER, Fred Nichols. *Metodologia de Pesquisa em Ciências Sociais: Um Tratamento Conceitual*. São Paulo: EPU, 1980.

KIMBALL, Miles Spencer. Precautionary Saving in the Small and in the Large. *Econometrica*, v. 58, n. 1, p. 53–73, 1990.

\_\_\_\_\_. Standard Risk Aversion. *Econometrica*, v. 61, n. 3, p. 589–611, 1993.

KLEMKOSKY, Robert C.; MARTIN, John D. The Adjustment of Beta Forecasts. *The Journal of Finance*, v. 30, n. 4, p. 1123–1128, 1975.

KNIGHT, Frank Hyneman. *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton Mifflin, 1921.

KORAJCZYK, Robert A. *Asset Pricing and Portfolio Performance*. London: Risk Books, 1999.

KRAUS, Alan; LITZENBERGER, Robert H. Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets. *The Journal of Finance*, v. 31, n. 4, p. 1085–1100, 1976.

LAU, Hon-Shiang; WINGENDER, John R. The Analytics of the Intervaling Effect on Skewness and Kurtosis of Stock Returns. *The Financial Review*, Blackwell Synergy, v. 24, n. 2, p. 215–233, 1989.

LEVY, Haim. A Utility Function Depending on the First Three Moments. *The Journal of Finance*, v. 24, n. 4, p. 715–719, 1969.

LEVY, Haim; SARNAT, Marshall. *Investment and Portfolio Analysis*. New York: Wiley, 1972.

LICALZI, Marco; SORATO, Annamaria. *The Pearson System of Utility Functions*. Economics Working Paper Archive – EconWPA, 2003. Acessado em 29 de março de 2008. Disponível em: <http://ideas.repec.org/p/wpa/wuwpga/0311002.html>.

LIM, Kian-Guan. A New Test of the Three-Moment Capital Asset Pricing Model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 24, n. 2, p. 205–216, Jun. 1989.

- LINTNER, John. Security Prices, Risk, and Maximal Gains From Diversification. *The Journal of Finance*, v. 20, n. 4, p. 587–615, 1965.
- \_\_\_\_\_. The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets. *The Review of Economics and Statistics*, v. 47, n. 1, p. 13–37, 1965.
- LUENBERGER, David G. *Investment Science*. New York: Oxford, 1998.
- MACHINA, Mark J. “Expected Utility” Analysis without the Independence Axiom. *Econometrica*, v. 50, n. 2, p. 277–324, 1982.
- MACKINNON, James G.; WHITE, Halbert. Some Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimators with Improved Finite Sample Properties. *Journal of Econometrics*, v. 29, n. 3, p. 305–325, 1985.
- MARKOWITZ, Harry Max. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952.
- \_\_\_\_\_. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*. NY: Wiley, 1959.
- MERTON, Robert Carhart. An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 4, p. 1851–1872, 1972.
- \_\_\_\_\_. An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. *Econometrica*, v. 41, n. 5, p. 867–887, 1973.
- MOSSIN, Jan. Equilibrium in a Capital Asset Market. *Econometrica*, v. 34, n. 4, p. 768–783, 1966.
- PARK, Chan S.; SHARP-BETTE, Gunter P. *Advanced Engineering Economics*. New York: Wiley, 1990.
- PRATT, John Winsor. Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica*, v. 32, p. 122–136, 1964.
- ROSENBERG, Barr; REID, Kenneth; LANSTEIN, Ronald. Persuasive Evidence of Market Inefficiency. *Journal of Portfolio Management*, v. 11, n. 9, p. 17, 1985.
- ROSS, Stephen A. The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing. *Journal of Economic Theory*, v. 13, n. 3, p. 341–360, 1976.
- ROSS, Stephen A.; WESTERFIELD, Randolph W.; JAFFE, Jeffrey F. *Administração Financeira*. 2a. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

- ROYSTON, Patrick. Tests for Departure from Normality. *Stata Technical Bulletin*, v. 2, p. 16–17, 1991.
- RUBINSTEIN, Ariel. *Lecture Notes in Microeconomic Theory: The Economic Agent*. Princeton, NJ: Princeton, 2006.
- RUBINSTEIN, Mark. The Fundamental Theorem of Parameter-preference Security Valuation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 8, p. 61–69, 1973.
- SANVICENTE, Antonio Zoratto; MINARDI, Andrea M. A. F. Finance Lab Working Paper, *Problemas de Estimação do Custo de Capital no Brasil*. São Paulo: Ibmecc Business School, 1999.
- SCHWERT, G. William. Size and Stock Returns, and Other Empirical Regularities. *Journal of Financial Economics*, v. 12, n. 1, p. 3–12, 1983.
- SCOTT, Robert C.; HORVATH, Philip A. On the Direction of Preference for Moments of Higher Order than the Variance. *The Journal of Finance*, v. 35, n. 4, p. 915–919, 1980.
- SEARS, R. Stephen; WEI, K. C. John. Asset Pricing, Higher Moments, and the Market Risk Premium: A Note. *Journal of Finance*, v. 40, n. 4, p. 1251–53, Set. 1985.
- \_\_\_\_\_. The Structure of Skewness Preferences in Asset Pricing Models with Higher Moments: An Empirical Test. *The Financial Review*, v. 23, n. 1, p. 25–38, Fev. 1988.
- SHANKEN, Jay. On the Estimation of Beta-pricing Models. *Review of Financial Studies*, v. 5, n. 1, p. 1–55, 1992.
- SHARPE, William F. Capital Asset Market Prices: a Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.
- SILVA, André Luiz Carvalhal da. Modeling and Estimating a Higher Systematic Co-Moment Asset Pricing Model in the Brazilian Stock Market. *Latin American Business Review*, v. 6, p. 4, 2005.
- SILVEIRA, Héber P.; CASTRO JUNIOR, F. Henrique F. Modelagem da Distribuição das Taxas de Retorno dos Índices Ibovespa e S&P500. In: *Encontro da ANPAD – XXX EnANPAD, 2006, Salvador. Anais...* Salvador: ANPAD, 2006.
- SIMONASSI, Andrei G. Estimando a Taxa de Retorno Livre de Risco no Brasil. In: *Anais do XXXIV Encontro Nacional de Economia*. Salvador: ANPEC - Associação Nacional dos Centros de Pós-graduação em Economia, 2006.
- SINGLETON, J. Clay; WINGENDER, John. Skewness Persistence in Common Stock Returns. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 21, n. 3, p. 335–341, Set. 1986.

- SMITH, Keith V. The Effect of Intervaling on Estimating Parameters of the Capital Asset Pricing Model. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, v. 13, n. 2, p. 313–332, 1978.
- SPANOS, Aris. *Probability Theory and Statistical Inference*. Cambridge, UK: Cambridge, 1999.
- STATTMAN, Dennis. Book Values and Stock Returns. *The Chicago MBA: A Journal of Selected Papers*, v. 4, p. 25–45, 1980.
- STOLL, Hans R.; WHALEY, Robert E. Transaction Costs and the Small Firm Effect. *Journal of Financial Economics*, v. 12, n. 1, p. 57–79, 1983.
- TOBIN, James. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk. *The Review of Economic Studies*, v. 25, n. 2, p. 65–86, 1958.
- TREYNOR, Jack. Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Manuscrito não-publicado. 1961.
- VON NEUMANN, John; MORGENSTERN, Oskar. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton, 1947.
- WHITE, Halbert. A Heteroskedasticity-consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. *Econometrica*, v. 48, n. 4, p. 817–838, 1980.
- WIRCH, Julia Lynn. *Coherent Beta Risk Measures for Capital Requirements*. Tese (Doutorado em Estatística) — University of Waterloo, Ontario, Canadá, 1999.
- WOOLDRIDGE, Jeffrey M. *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 2002.
- \_\_\_\_\_. *Introdução à Econometria: uma abordagem moderna*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- ZIMMER, Christian Johannes. *Novos critérios de precificação em mercados incompletos: consistência, racionalidade e desvio-padrão normalizado por volume*. Tese (Doutorado em Administração) — Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2005.



# Apêndice A

## Amostra do Estudo

**Tabela A.1 – Empresas que compõem a amostra**

	<b>Código na Bolsa</b>	<b>Empresa</b>	<b>Setor Econômica</b>
1	ABNB3	Abnote	Outros
2	ABYA3	Abyara	Construção
3	ACES4	Am Inox Br	Siderurgia e Metalurgia
4	AELP3	AES Elpa	Energia Elétrica
5	ALBA3	Albarus	Veículos e Peças
6	ALLL11	ALL Amer Lat	Transporte
7	ALPA4	Alpargatas	Têxtil
8	AMBV4	Ambev	Alimentos e Bebidas
9	ARCE3	Arcelor BR	Siderurgia e Metalurgia
10	ARCZ6	Aracruz	Papel e Celulose
11	ASTA4	SantisTêxtil	Têxtil
12	AVIL3	Acos Vill	Siderurgia e Metalurgia
13	BCAL6	Bic Caloi	Veículos e Peças
14	BDLL4	Bardella	Máquinas Industriais
15	BISA3	Brascan Res	Construção
16	BMT04	Brasmotor	Eletroeletrônicos
17	BOBR4	Bombril	Química
18	BRAP4	Bradespar	Outros
19	BRKM5	Braskem	Química
20	BRTO4	Brasil Telec	Telecomunicações
21	BRTP4	Brasil T Par	Telecomunicações
22	BSUL5	Bahia Sul	Papel e Celulose

Continua na próxima página

Tabela A.1 – continuação da página anterior

<b>Código na Bolsa</b>	<b>Empresa</b>	<b>Setor Econômica</b>
23 CARD3	CSU CardSystem	Outros
24 CBMA4	Cobrasma	Veículos e Peças
25 CCRO3	CCR Rodovias	Transporte
26 CESP6	Cesp	Energia Elétrica
27 CGAS5	Comgas	Petróleo e Gás
28 CHAP3	Chapeco	Alimentos e Bebidas
29 CLSC6	Celeesc	Energia Elétrica
30 CMET4	Caemi	Mineração
31 CMIG4	Cemig	Energia Elétrica
32 CNFB4	Confab	Siderurgia e Metalurgia
33 COCE5	Coelce	Energia Elétrica
34 CPCA4	Trikem	Química
35 CPFE3	CPFL Energia	Energia Elétrica
36 CPLE6	Copel	Energia Elétrica
37 CPNY3	Company	Construção
38 CPSL3	Copesul	Química
39 CRTP5	CRT Celular	Telecomunicações
40 CRUZ3	Souza Cruz	Outros
41 CSAN3	Cosan	Alimentos e Bebidas
42 CSMG3	Copasa	Outros
43 CSNA3	Sid Nacional	Siderurgia e Metalurgia
44 CSPC4	Cosipa	Siderurgia e Metalurgia
45 CSTB4	Sid Tubarao	Siderurgia e Metalurgia
46 CTAX4	Contax	Outros
47 CTNM4	Coteminas	Têxtil
48 CYRE3	Cyrela Realty	Construção
49 DASA3	Dasa	Outros
50 DPPI4	Ipiranga Dis	Petróleo e Gás
51 DSUL3	Datasul	Software e Dados
52 DURA4	Duratex	Outros
53 EBCO4	Embraco	Máquinas Industriais
54 EBTP4	Embratel Part	Telecomunicações
55 ECOD3	Ecodiesel	Outros
56 ELET6	Eletrobras	Energia Elétrica
57 ELEV3	Eleva	Alimentos e Bebidas
58 ELPL6	Eletropaulo	Energia Elétrica

Continua na próxima página

Tabela A.1 – continuação da página anterior

<b>Código na Bolsa</b>	<b>Empresa</b>	<b>Setor Econômica</b>
59	EMAE4	Energia Elétrica
60	EMBR3	Veículos e Peças
61	ENBR3	Energia Elétrica
62	ENMA3B	Energia Elétrica
63	EQTL11	Energia Elétrica
64	ESTR4	Outros
65	ETER3	Minerais não Metálicos
66	FBRA4	Química
67	FESA4	Siderurgia e Metalurgia
68	FFTL4	Química
69	FJTA4	Siderurgia e Metalurgia
70	FLCL5	Energia Elétrica
71	FRAS4	Veículos e Peças
72	GETI4	Energia Elétrica
73	GFSA3	Construção
74	GGBR4	Siderurgia e Metalurgia
75	GOAU4	Siderurgia e Metalurgia
76	GOLL4	Transporte
77	GPCP3	Outros
78	GRND3	Têxtil
79	GUAR3	Têxtil
80	HGTX3	Têxtil
81	IDNT3	Outros
82	IENG5	Energia Elétrica
83	ILMD4	Química
84	IMBI4	Transporte
85	INEP4	Outros
86	INET3	Telecomunicações
87	ITSA4	Outros
88	JBDU4	Alimentos e Bebidas
89	JFEN3	Construção
90	KEPL3	Siderurgia e Metalurgia
91	KLBN4	Papel e Celulose
92	KSSA3	Construção
93	LAME4	Comércio
94	LEVE4	Veículos e Peças

Continua na próxima página

Tabela A.1 – continuação da página anterior

<b>Código na Bolsa</b>	<b>Empresa</b>	<b>Setor Económica</b>
95	LIGT3	Light S/A
96	LIPR3	LightPar
97	LIXC4	Lix da Cunha
98	LPSB3	Lopes Brasil
99	LREN3	Lojas Renner
100	LUPA3	Lupatech
101	MAGS5	Magnesita
102	MDIA3	M. Diasbranco
103	MEDI3	Medial Saude
104	MGEL4	Mangels Indl
105	MLFT4	La Fonte Par
106	MMXM3	MMX Miner
107	MNDL4	Mundial
108	MSAN3	Bunge Brasil
109	MWET4	Wetzel S/A
110	NATU3	Natura
111	NETC4	Net
112	ODPV3	Odontoprev
113	OHLB3	OHL Brasil
114	PCAR4	P.Acucar-CBD
115	PEFX5	Petroflex
116	PETR4	Petrobras
117	PFRM3	Profarma
118	PLDN4	Polialden
119	PLTO6	Politeno
120	POMO4	Marcopolo
121	POSI3	Positivo Inf
122	PRGA3	Perdigao S/A
123	PTIP4	Ipiranga Pet
124	RAPT4	Randon Part
125	RCSL4	Recrusul
126	RENT3	Localiza
127	RHDS3	M G Poliest
128	RIPI4	Ipiranga Ref
129	RNAR3	Renar
130	ROMI3	Inds Romi

Continua na próxima página

Tabela A.1 – continuação da página anterior

	<b>Código na Bolsa</b>	<b>Empresa</b>	<b>Setor Econômica</b>
131	RPSA4	Ripasa	Papel e Celulose
132	RSID3	Rossi Resid	Construção
133	RSIP4	Rasip Agro	Agro e Pesca
134	SALM4	Seara Alim	Alimentos e Bebidas
135	SAPR4	Sanepar	Outros
136	SBSP3	Sabesp	Outros
137	SCAR3	Sao Carlos	Outros
138	SDIA4	Sadia S/A	Alimentos e Bebidas
139	SGAS4	Wlm Ind Com	Petróleo e Gás
140	SLED4	Saraiva Livr	Outros
141	SNSY5	Sansuy	Outros
142	STBR11	Santos Brasil	Transporte
143	STRP4	Botucatu Tex	Têxtil
144	SUBA3	Submarino	Comércio
145	SUZB5	Suzano Papel	Papel e Celulose
146	SZPQ4	Suzano Petr	Química
147	TAMM4	TAM S/A	Transporte
148	TBLE3	Tractebel	Energia Elétrica
149	TCOC3	Tele Centroeste Cel	Telecomunicações
150	TCSL4	Tim Part S/A	Telecomunicações
151	TDBH3	Telefonica Data Hld	Telecomunicações
152	TEKA4	Teka	Têxtil
153	TELB4	Telebras	Outros
154	TLCP4	Tele Leste Celular	Telecomunicações
155	TLPP4	Telesp	Telecomunicações
156	TMAR5	Telemar N L	Telecomunicações
157	TMCP4	Telemig Part	Telecomunicações
158	TNCP4	Tele Nort Cl	Telecomunicações
159	TNEP3	Tele Nordeste Celul	Telecomunicações
160	TNLP4	Telemar	Telecomunicações
161	TOTS3	Totvs	Software e Dados
162	TOYB3	Tectoy	Outros
163	TPRC6	Tim Sul	Telecomunicações
164	TRNA11	Terna Part	Energia Elétrica
165	TRPL4	Tran Paulist	Energia Elétrica
166	TSEP3	Tele Sudeste Celula	Telecomunicações

Continua na próxima página

Tabela A.1 – continuação da página anterior

Código na Bolsa		Empresa	Setor Econômica
167	TUPY3	Tupy	Veículos e Peças
168	TXRX4	Tex Renaux	Têxtil
169	UGPA4	Ultrapar	Química
170	UNIP6	Unipar	Química
171	UOLL4	Uol	Software e Dados
172	USIM5	Usiminas	Siderurgia e Metalurgia
173	VAGV4	Savirg	Transporte
174	VALE5	Vale R Doce	Mineração
175	VCPA4	V C P	Papel e Celulose
176	VGOR4	Vigor	Alimentos e Bebidas
177	VIVO4	Vivo	Telecomunicações
178	VVAX11	Vivax	Outros
179	WHRL4	Whirlpool	Eletroeletrônicos

Tabela A.2 – Painel de dados semanais por empresa e por ano

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
ABNB3				35	52					52
ABYA3				18	52					52
ACES4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
AELP3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ALBA3	41	51	30			41	51			
ALLL11			40	52	52			40	52	52
ALPA4	47	53	52	52	52	47	53	52	52	52
AMBV4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ARCE3	47	49	52	52	25	47	49	52	52	
ARCZ6	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ASTA4	51	51	44	30	40	51	51	44		40
AVIL3	35	53	52	52	52		53	52	52	52
BCAL6	49	51	52	52	52	49	51	52	52	52
BDLL4	51	53	52	50	52	51	53	52	50	52
BISA3				10	52					52
BMTO4	43	41	32	38	52	43	41			52
BOBR4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
BRAP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
BRKM5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
BRTO4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
BRTP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
BSUL5	51	32				51				
CARD3				35	52					52
CBMA4		2	1	11	50					50
CCRO3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CESP6				22	52					52
CGAS5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CHAP3	51	53	17			51	53			
CLSC6	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CMET4	51	53	52	18		51	53	52		
CMIG4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CNFB4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
COCE5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CPCA4	51	8				51				

Continua na próxima página

Tabela A.2 – continuação da página anterior

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
CPFE3		13	52	52	52			52	52	52
CPLE6	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CPNY3				43	52				43	52
CPSL3	51	53	52	52	42	51	53	52	52	42
CRTP5	51	53	52	13		51	53	52		
CRUZ3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CSAN3			6	52	52				52	52
CSMG3				46	52				46	52
CSNA3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CSPC4	51	53	14			51	53			
CSTB4	51	53	45			51	53	45		
CTAX4			18	52	52				52	52
CTNM4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
CYRE3			24	52	52				52	52
DASA3		6	52	52	52			52	52	52
DPPI4	42	53	52	52	52	42	53	52	52	52
DSUL3				30	52					52
DURA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
EBCO4	51	53	52	24		51	53	52		
EBTP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ECOD3				5	52					52
ELET6	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ELEV3	47	53	48	52	52	47	53	48	52	52
ELPL6				17	52					52
EMAE4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
EMBR3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ENBR3			24	52	52				52	52
ENMA3B	2	5	25	52	52				52	52
EQTL11				39	52					52
ESTR4	47	51	45	52	52	47	51	45	52	52
ETER3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
FBRA4	42	53	52	50	2	42	53	52	50	
FESA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
FFTL4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
FJTA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52

Continua na próxima página



Tabela A.2 – continuação da página anterior

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
FLCL5	51	53	52	52	14	51	53	52	52	
FRAS4	47	53	48	52	52	47	53	48	52	52
GETI4	42	53	52	52	52	42	53	52	52	52
GFSA3				45	52				45	52
GGBR4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
GOAU4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
GOLL4		27	52	52	52			52	52	52
GPCP3	16	13	25	20	52					52
GRND3		9	52	52	52			52	52	52
GUAR3	37	48	52	52	52		48	52	52	52
HGTX3	18	11	24	44	52				44	52
IDNT3	51	41	52	52	52	51	41	52	52	52
IENG5	44	51	52	52	52	44	51	52	52	52
ILMD4	51	53	52	50	52	51	53	52	50	52
IMBI4	5	6	52	52	52			52	52	52
INEP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
INET3		4	12	5	49					49
ITSA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
JBDU4	35	49	52	52	52		49	52	52	52
JFEN3	29	27	33	52	52				52	52
KEPL3	33	51	48	39	41		51	48		41
KLBN4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
KSSA3				12	52					52
LAME4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
LEVE4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
LIGT3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
LIPR3	49	53	42	24	47	49	53	42		47
LIXC4	26	27	17	45	52				45	52
LPSB3				2	52					52
LREN3			26	52	52				52	52
LUPA3				33	52					52
MAGS5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
MDIA3				10	52					52
MEDI3				14	52					52
MGEL4	49	53	52	52	52	49	53	52	52	52

Continua na próxima página

Tabela A.2 – continuação da página anterior

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
MLFT4	29	40	35	15	52		40			52
MMXM3				23	52					52
MNDL4	31	51	52	52	52		51	52	52	52
MSAN3	49	41				49	41			
MWET4	28	51	52	52	52		51	52	52	52
NATU3		31	52	52	52			52	52	52
NETC4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
ODPV3				4	52					52
OHLB3			24	52	52				52	52
PCAR4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
PEFX5	8	22	52	50	52			52	50	52
PETR4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
PFRM3				9	52					52
PLDN4	49	53	48	20		49	53	48		
PLTO6	51	53	48	41	16	51	53	48	41	
POMO4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
POSI3				3	52					52
PRGA3	2	11	11	41	52				41	52
PTIP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
RAPT4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
RCSL4	20	30	52	35	52			52		52
RENT3			32	52	52				52	52
RHDS3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
RIPI4	49	53	52	52	52	49	53	52	52	52
RNAR3			44	52	52			44	52	52
ROMI3	45	45	34	45	49	45	45		45	49
RPSA4	51	53	52	26		51	53	52		
RSID3	43	42	42	52	52	43	42	42	52	52
RSIP4	28	49	33	34	52		49			52
SALM4	51	53	14			51	53			
SAPR4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
SBSP3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
SCAR3	35	39	40	52	52			40	52	52
SDIA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
SGAS4	45	53	52	52	48	45	53	52	52	48

Continua na próxima página

Tabela A.2 – continuação da página anterior

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
SLED4	49	42	52	52	52	49	42	52	52	52
SNSY5	3	39	18	14	52					52
STBR11				11	49					49
STRP4	32	47	50	50	52		47	50	50	52
SUBA3			39	52	32				52	
SUZB5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
SZPQ4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TAMM4		5	50	52	52			50	52	52
TBLE3	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TCOC3	51	53	52	13		51	53	52		
TCSL4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TDBH3	51	53	52	35		51	53	52		
TEKA4	40	49	44	43	52	40	49	44	43	52
TELB4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TLCP4	51	53	52	13		51	53	52		
TLPP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TMAR5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TMCP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TNCP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TNEP3	51	41				51	41			
TNLP4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TOTS3				42	52				42	52
TOYB3	8	10	34	50	52				50	52
TPRC6	51	53	27			51	53			
TRNA11				9	52					52
TRPL4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
TSEP3	51	53	52	13		51	53	52		
TUPY3	4	10	32	39	52					52
TXRX4		11	24	12	50					50
UGPA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
UNIP6	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
UOLL4			2	52	52				52	52
USIM5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
VAGV4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
VALE5	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52

Continua na próxima página

Tabela A.2 – continuação da página anterior

Empresa	Antes do Critério de Corte					Após Critério de Corte				
	2003	2004	2005	2006	2007	2003	2004	2005	2006	2007
VCPA4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
VGOR4	12	19	40	47	52			40	47	52
VIVO4	51	53	52	52	52	51	53	52	52	52
VVAX11				46	28				46	
WHRL4	13	24	45	48	52			45	48	52

Os valores numéricos representam a quantidade de observações semanais de taxa de retorno disponíveis para cada empresa em cada ano considerado na pesquisa.

**Tabela A.3 – Setores de atividade das empresas da amostra**

<b>Setor</b>	<b>Qtde. Empresas</b>	<b>Proporção</b>
Agro e Pesca	2	1,12%
Alimentos e Bebidas	11	6,15%
Comércio	6	3,35%
Construção	10	5,59%
Eletroeletrônicos	3	1,68%
Energia Elétrica	21	11,73%
Máquinas Industriais	3	1,68%
Mineração	4	2,23%
Minerais não Metálicos	1	0,56%
Outros	26	14,53%
Papel e Celulose	6	3,35%
Petróleo e Gás	6	3,35%
Química	14	7,82%
Siderurgia e Metalurgia	16	8,94%
Software e Dados	3	1,68%
Telecomunicações	18	10,06%
Têxtil	9	5,03%
Transporte	9	5,03%
Veículos e Peças	11	6,15%
<b>Total</b>	<b>179</b>	<b>100%</b>



# Apêndice B

## Resumo das Variáveis

**Tabela B.1 – Resumo das definições das variáveis**

Variável	Definição
$DB$	Soma dos financiamentos de curto e longo prazo com as debêntures de curto e longo prazo emitidas pelas empresas
$DBVM$	Dívida bruta sobre valor de mercado das ações da empresa
$ET$	Diferença entre o ativo total da empresa e seu patrimônio líquido
$ETVM$	Exigível total sobre valor de mercado das ações da empresa
$ILIQ$	Índice de liquidez da empresa
$IPL$	Índice preço/lucro
$\ln AT$	Logaritmo natural do ativo total da empresa
$\ln RL$	Logaritmo natural da receita líquida da empresa
$\ln VM$	Logaritmo natural do valor de mercado da empresa
$P$	Preço de mercado de um ativo qualquer
$PL$	Patrimônio líquido da empresa
$Premio$	Diferença entre as taxas de retorno de um ativo qualquer e as do ativo livre de risco
$VM$	Valor de mercado das ações ordinárias e preferenciais da empresa
$VMVC$	Valor de mercado sobre valor contábil da empresa





# Apêndice C

## Resultados das Estimações

Tabela C.1 – Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,189 <sup>†</sup>	(0,107)
$\gamma_{Ibovespa}$	−0,006	(0,004)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001 <sup>†</sup>	(0,000)
$\ln A$	−0,030*	(0,014)
$VMVC$	0,016*	(0,007)
$IPL$	−0,000*	(0,000)
$ILIQ$	−0,009	(0,016)
$DBVM$	0,004	(0,012)
Constante	0,397*	(0,170)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		586
$R^2$ ajust.		0,166
F (30,555)		5,774

Níveis de significância (Ibovespa) : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa,  $\ln A$  (logaritmo natural do ativo total da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) e os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

**Tabela C.2 – Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados com variáveis “Winsorisadas” (Ibovespa)**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,196 <sup>†</sup>	(0,111)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,006	(0,004)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001 <sup>†</sup>	(0,000)
w-ln <i>A</i>	-0,032 <sup>†</sup>	(0,016)
w- <i>VMVC</i>	0,033**	(0,010)
w- <i>IPL</i>	-0,000	(0,001)
w- <i>ILLIQ</i>	-0,019	(0,022)
w- <i>ETVM</i>	-0,003	(0,006)
Constante	0,425*	(0,188)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		586
$R^2$ ajust.		0,180
F (30,555)		7,154

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorisadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa, ln *A* (logaritmo natural do ativo total da empresa), *VMVC* (Valor de Mercado/Valor Contábil), *IPL* (Índice Preço/Lucro), *ILLIQ* (Índice de Liquidez), *ETVM* (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) e os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

Tabela C.3 – Modelo alternativo de apreçamento com dados agrupados (IBrX)

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,183 <sup>†</sup>	(0,111)
$\gamma_{IBrX}$	−0,001	(0,004)
$\delta_{IBrX}$	0,000	(0,000)
$\ln RL$	−0,024	(0,018)
$VMVC$	0,016*	(0,007)
$IPL$	−0,000**	(0,000)
$ILIQ$	−0,015	(0,018)
$DBVM$	0,004	(0,012)
Constante	0,282	(0,215)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		SIM
N		577
R <sup>2</sup> ajust.		0,173
F (30,546)		5,615

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX,  $\ln RL$  (logaritmo natural da receita líquida da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $DBVM$  (Dívida Bruta/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano e de setor de atividade. Foi utilizado o método dos Mínimos Quadrados Ordinário (MQO) e os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

**Tabela C.4 – Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,216*	(0,076)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,007	(0,005)
$\delta_{Ibovespa}$	0,001**	(0,000)
w-ln <i>RL</i>	0,065 <sup>†</sup>	(0,034)
w- <i>VMVC</i>	0,130**	(0,033)
w- <i>IPL</i>	0,000	(0,001)
w- <i>ILLIQ</i>	-0,120 <sup>†</sup>	(0,065)
w- <i>ETVM</i>	-0,027 <sup>†</sup>	(0,014)
Constante	-0,676	(0,494)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		577
R <sup>2</sup> ajust.		0.328

Níveis de significância :    <sup>†</sup> : 10%    \* : 5%    \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorizadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa, ln *RL* (logaritmo natural da receita líquida da empresa), *VMVC* (Valor de Mercado/Valor Contábil), *IPL* (Índice Preço/Lucro), *ILLIQ* (Índice de Liquidez), *ETVM* (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

**Tabela C.5 – Modelo robusto de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{Ibovespa}$	0,112	(0,098)
$\gamma_{Ibovespa}$	-0,006	(0,005)
$\delta_{Ibovespa}$	0,000	(0,000)
w-ln $VM$	0,309**	(0,072)
w- $VMVC$	0,085**	(0,027)
w- $IPL$	0,000	(0,001)
w- $ILLIQ$	-0,123 <sup>†</sup>	(0,063)
w- $ETVM$	-0,023	(0,014)
Constante	-3,900**	(0,994)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		598
R <sup>2</sup> ajust.		0,379

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Todas as variáveis de controle utilizadas, exceto as variáveis *dummy*, foram “Winsorizadas” conforme procedimento descrito em Barnett e Lewis (1994). Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o Ibovespa, ln  $VM$  (logaritmo natural do valor de mercado das ações da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILLIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

**Tabela C.6 – Modelo de apreçamento com dados em painel com efeitos fixos (IBrX): tamanho medido pelo logaritmo natural da receita líquida e endividamento medido pelo quociente entre endividamento total e valor de mercado das ações**

Variável	Coefficiente	(Erro-padrão)
$\beta_{IBrX}$	0,193**	(0,059)
$\gamma_{IBrX}$	-0,002	(0,005)
$\delta_{IBrX}$	0,000*	(0,000)
$\ln RL$	0,099	(0,058)
$VMVC$	0,034	(0,021)
$IPL$	-0,000**	(0,000)
$ILIQ$	-0,053	(0,039)
$ETVM$	-0,030*	(0,013)
Constante	-1,015	(0,795)
<i>Dummies</i> de ano		SIM
<i>Dummies</i> de setor		NÃO
N		577
R <sup>2</sup> ajust.		0,262

Níveis de significância : † : 10% \* : 5% \*\* : 1%

A variável dependente usada na estimação foi o prêmio pelo risco de cada ativo da amostra. Sua definição operacional segue a descrição feita na seção 3.5.1. Os regressores utilizados foram: comomentos calculados conforme procedimento descrito na seção 3.6.1.2, utilizando-se como *proxy* para a carteira de mercado o IBrX,  $\ln RL$  (logaritmo natural da receita líquida da empresa),  $VMVC$  (Valor de Mercado/Valor Contábil),  $IPL$  (Índice Preço/Lucro),  $ILIQ$  (Índice de Liquidez),  $ETVM$  (Endividamento Total/Valor de Mercado) e ainda os conjuntos de variáveis *dummy* de ano. As variáveis *dummy* de setor de atividade não são usadas pois não há variação de seu valor ao longo do horizonte de tempo estudado. Os erros-padrão calculados são robustos a quaisquer formas de heterocedasticidade e autocorrelação.

Tabela C.7 – Síntese das estimações dos modelos com dados agrupados (Ibovespa)

## Variáveis não “Winsorisadas”

	Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1	$\ln A$	ETVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 5	(-) 10	(-)	(-)
M2	$\ln A$	DBVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 5	(-) 5	(-)	(+)
M3	$\ln RL$	ETVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 5	(-) 1	(-)	(-)
M4	$\ln RL$	DBVM	(+) 10	(-)	(+) 5	(-) 5	(+) 5	(-) 1	(-)	(+)
M5	$\ln VM$	ETVM	(+)	(-)	(+)	(-) 10	(+) 10	(-) 1	(-)	(-)
M6	$\ln VM$	DBVM	(+)	(-)	(+)	(+) 10	(-) 10	(-) 1	(-)	(+)

## Variáveis “Winsorisadas”

	Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1	$\ln A$	ETVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 1	(-) 1	(-)	(-)
M2	$\ln A$	DBVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 10	(+) 1	(-) 1	(-)	(+)
M3	$\ln RL$	ETVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 1	(+) 1	(-)	(-)
M4	$\ln RL$	DBVM	(+) 10	(-)	(+) 10	(-) 5	(+) 1	(+) 1	(-)	(+)
M5	$\ln VM$	ETVM	(+)	(-)	(+)	(-) 10	(+) 1	(-) 1	(-)	(-)
M6	$\ln VM$	DBVM	(+)	(-)	(+)	(-) 10	(+) 1	(-) 1	(-)	(+)

Os sinais entre parênteses representam o sinal do coeficiente estimado para cada variável.

O número à direita do sinal, quando há, representa o nível de significância observado.

Tabela C.8 – Síntese das estimações dos modelos com dados agrupados (IBrX)

## Variáveis não “Winsorizadas”

	Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1	Ativo	ETVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 5	(-) 10	(-)	(-)
M2	Ativo	DBVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 5	(-) 10	(-)	(+)
M3	Rec. Liq.	ETVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 5	(-) 5	(-)	(-)
M4	Rec. Liq.	DBVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 5	(-) 1	(-)	(+)
M5	Val. Merc.	ETVM	(+)	(-)	(+)	(-) 5	(+) 10	(-) 5	(-)	(-)
M6	Val. Merc.	DBVM	(+)	(-)	(+)	(+) 5	(+) 10	(-) 5	(-)	(+)

## Variáveis “Winsorizadas”

	Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1	Ativo	ETVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(-) 5	(-)	(-)
M2	Ativo	DBVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(-) 5	(-)	(+)
M3	Rec. Liq.	ETVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(+) 5	(-)	(-)
M4	Rec. Liq.	DBVM	(+) 10	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(+) 5	(-)	(+)
M5	Val. Merc.	ETVM	(+)	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(-) 5	(-)	(-)
M6	Val. Merc.	DBVM	(+)	(-)	(+)	(-) 5	(+) 1	(-) 5	(-)	(+)

Os sinais entre parênteses representam o sinal do coeficiente estimado para cada variável.

O número à direita do sinal, quando há, representa o nível de significância observado.



Tabela C.9 – Síntese das estimações dos modelos com dados em painel com efeitos fixos (Ibovespa)

## Variáveis não “Winsorizadas”

Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.	
M1	Ativo	ETVM	(+)	5	(-)	1	(-)	1	(-)	5
M2	Ativo	DBVM	(+)	5	(-)	1	(-)	1	(-)	(-)
M3	Rec. Liq.	ETVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	5
M4	Rec. Liq.	DBVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	(-)
M5	Val. Merc.	ETVM	(+)	(-)	(+)	1	(-)	1	(-)	(-)
M6	Val. Merc.	DBVM	(+)	(-)	(+)	1	(-)	1	(-)	(-)

Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.	
M1	Ativo	ETVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	10
M2	Ativo	DBVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	(-)
M3	Rec. Liq.	ETVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	10
M4	Rec. Liq.	DBVM	(+)	5	(-)	1	(+)	1	(-)	(-)
M5	Val. Merc.	ETVM	(+)	(-)	(+)	1	(+)	1	(-)	10
M6	Val. Merc.	DBVM	(+)	(-)	(+)	1	(+)	1	(-)	(-)

Os sinais entre parênteses representam o sinal do coeficiente estimado para cada variável.

O número à direita do sinal, quando há, representa o nível de significância observado.

Tabela C.10 – Síntese das estimações dos modelos com dados em painel com efeitos fixos (IBrX)

## Variáveis não “Winsorizadas”

Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1 Ativo	ETVM	(+)	1	(-)	(+)	1	(-)	(-)	5
M2 Ativo	DBVM	(+)	1	(-)	(+)	1	(-)	(-)	(-)
M3 Rec. Liq.	ETVM	(+)	1	(-)	(+)	5	(+)	(-)	5
M4 Rec. Liq.	DBVM	(+)	1	(-)	(+)	1	(-)	(-)	(-)
M5 Val. Merc.	ETVM	(+)		(-)	(+)	1	(-)	(-)	10
M6 Val. Merc.	DBVM	(+)		(-)	(+)	1	(-)	(-)	5

Tamanho	Alavanc.	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	Tamanho	V.Merc/V.Cont.	Preço/Lucro	Liquidez	Alavanc.
M1 Ativo	ETVM	(+)	1	(-)	(+)	5	(-)	(-)	(-)
M2 Ativo	DBVM	(+)	1	(-)	(+)	5	(-)	(-)	10
M3 Rec. Liq.	ETVM	(+)	1	(-)	(+)	10	(+)	(-)	10
M4 Rec. Liq.	DBVM	(+)	1	(-)	(+)	10	(+)	(-)	10
M5 Val. Merc.	ETVM	(+)		(-)	(+)	1	(-)	(-)	10
M6 Val. Merc.	DBVM	(+)		(-)	(+)	1	(-)	(-)	10

Os sinais entre parênteses representam o sinal do coeficiente estimado para cada variável.

O número à direita do sinal, quando há, representa o nível de significância observado.