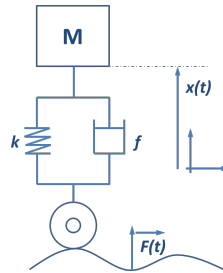


# CI 2 – SLCI : ÉTUDE DU COMPORTEMENT DES SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS INVARIANTS

## CHAPITRE 5 – ÉTUDE DES SYSTÈMES FONDAMENTAUX DU SECOND ORDRE



Amortisseur d'un véhicule automobile



Schématisme du mécanisme



Modélisation par schéma bloc

### Problématique :

- Le comportement réel de certains systèmes asservis peut se modéliser par des systèmes dits du second ordre. Comment modéliser de tels systèmes ?

### Savoirs :

- Mod-C2.3 : Modèles canoniques du second ordre
- Mod-C2-S1 : Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique, à partir d'une réponse temporelle
- Mod-C2-S2 : Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux

Savoir

*Ce document est en évolution permanente. Merci de signaler toutes erreurs ou coquilles.*

1	Définition .....	2
2	Réponse impulsionnelle .....	3
2.1	Cas 1 : $\xi > 1$ .....	3
2.2	Cas 2 : $\xi < 1$ .....	4
2.3	Cas 3 : $\xi = 1$ .....	4
3	Réponse indicielle .....	4
3.1	Cas 1 : $\xi > 1$ .....	4
3.2	Cas 2 : $\xi = 1$ .....	5
3.3	Cas 3 : $\xi < 1$ .....	6
3.4	Évolution de la réponse en fonction du coefficient d'amortissement .....	9

## 1 Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par une équation différentielle de la forme suivante :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t)$$

Dans le domaine de Laplace, la fonction de transfert de ce système est donc donnée par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

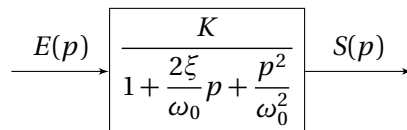
On note :

- $K$  est appelé le gain statique du système (rapport des unités de  $S$  et de  $E$ ) ;
- $\xi$  (lire *xi*) est appelé coefficient d'amortissement (sans unité) ;
- $\omega_0$  pulsation propre du système (*rad/s* ou  $s^{-1}$ ).

Définition

L'amortissement est parfois noté  $m$  ou  $z$ .

Schéma-bloc d'un système du second ordre :



**Amortisseur – ressort** On considère que la force  $f(t)$  est l'entrée du système et que  $y(t)$  est la valeur de sortie.  $y(t)$  est la position mesurée par rapport à la position d'équilibre.

En isolant la masse  $M$  et en appliquant le théorème fondamental de la dynamique, on obtient :

$$f(t) - k y(t) - \mu \dot{y}(t) = M \ddot{y}(t)$$

On obtient ainsi une équation classique de la mécanique vibratoire où on pose. En passant dans le domaine de Laplace, on a alors :

$$F(p) - k Y(p) - \mu p Y(p) = M p^2 Y(p) \iff F(p) = Y(p) (M p^2 + k + \mu p)$$

On peut donc obtenir  $H$  puis sa forme canonique :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{k + \mu p + M p^2} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{\mu}{k} p + \frac{M}{k} p^2}$$

Exemple

Exemple

Par identification on a donc :

$$K = \frac{1}{k} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \xi = \frac{\mu}{2k} \sqrt{\frac{k}{M}} = \frac{\mu}{2\sqrt{kM}}$$

## 2 Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est donnée par une entrée du type  $E(p) = 1$ .

On a donc

$$S(p) = E(p) \cdot H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Pour trouver les pôles de  $S(p)$ , calculons le discriminant associé à  $D(p)$  :

$$\Delta = \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)^2 - 4\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{4}{\omega_0^2}(\xi^2 - 1)$$

La réponse impulsionnelle va donc dépendre de  $\xi$ .

### 2.1 Cas 1 : $\xi > 1$

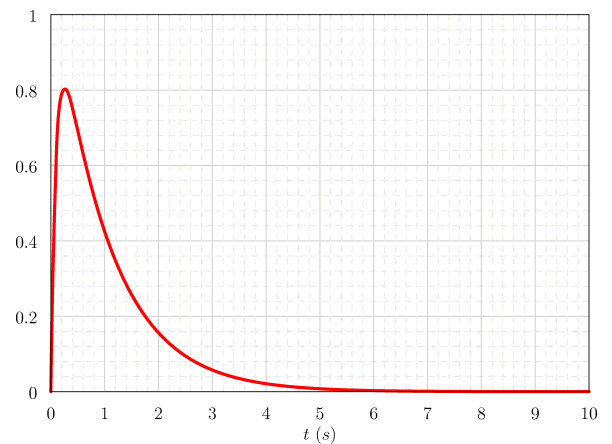
Dans ce cas,  $D(p)$  possède 2 racines réelles notées  $p_1$  et  $p_2$  :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

D'après la transformée de Laplace inverse, on a :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \cdot u(t)$$

Lorsque  $\xi > 1$  on parle de système amorti (régime apériodique).



Réponse impulsionnelle d'un système  
du second ordre – Cas où  $\xi > 1$

## 2.2 Cas 2 : $\xi < 1$

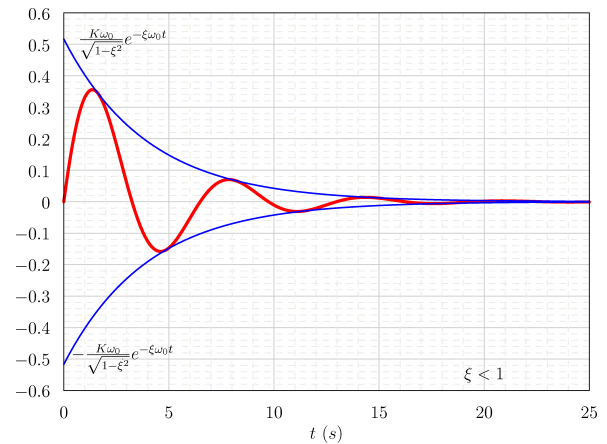
Dans le domaine temporel, on a :

$$s(t) = \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2}) u(t)$$

La pseudo-période des oscillations vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

Lorsqu'il n'y a pas d'amortissement ( $\xi = 0$ ) on a une réponse sinusoïdale de pulsation  $\omega_0$ .



Réponse impulsionnelle d'un système  
du second ordre – Cas où  $\xi < 1$

## 2.3 Cas 3 : $\xi = 1$

Dans ce cas  $D(p)$  possède une racine double.

L'allure de la réponse serait comparable à celle obtenue dans le cas du régime aperiodique mais ce cas est impossible dans la réalité : on ne peut avoir une valeur réelle de  $\xi$  exactement égale à 1.

# 3 Réponse indicielle

Dans ce cas,

$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p)$$

## 3.1 Cas 1 : $\xi > 1$

Dans ce cas,  $D(p)$  possède 2 racines réelles notées  $p_1$  et  $p_2$  :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{-2\xi\omega_0 - \sqrt{\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = \frac{-2\xi\omega_0 + \sqrt{\Delta}}{2} = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

On a  $p_1 < p_2 < 0$ .

En notant  $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$  et  $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$ , la fonction de transfert  $H(p)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

En conséquence,

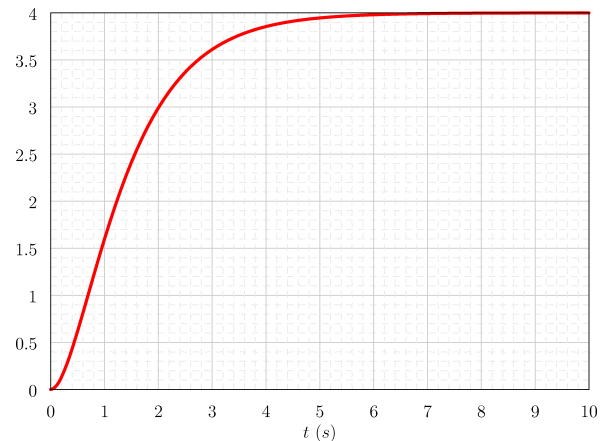
$$S(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

En calculant alors la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \cdot \left( \tau_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \tau_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right)$$

On peut aussi mettre  $s(t)$  sous la forme suivante :

$$s(t) = K \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left( \frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right) \right)$$



Réponse indicielle d'un système  
du second ordre – Cas où  $\xi > 1$

En  $t = 0$ , la courbe admet une **tangente horizontale**.

La courbe ne dépasse pas son asymptote horizontale ( $s(t)$  est monotone).

Il n'y a pas de formule pour déterminer le temps de réponse à 5%.

Nous pouvons remarquer cependant que le système ressemble à un système du premier ordre lorsqu'on s'éloigne de  $t = 0$ .

Le temps de réponse à 5% peut donc être approché par la valeur  $t_{r_{5\%}} = 3 \times 2\xi\omega_0$ .

### 3.2 Cas 2 : $\xi = 1$

Dans ce cas,  $\tau_1 = \tau_2 = \tau_0$ , on parle d'amortissement critique, l'existence d'un pôle double modifie la décomposition en éléments simples et on obtient :

$$s(t) = K \left( 1 - \left( 1 + \frac{1}{\tau_0} \right) e^{-\frac{t}{\tau_0}} \right)$$

La réponse est plus rapide que si  $\xi > 1$  ( $t_{r_{5\%}} = 5\omega_0$ ), mais l'allure de la courbe est très similaire.

### 3.3 Cas 3 : $\xi < 1$

Dans ce cas on parle de système sous amorti.

Dans ce cas,  $H(p)$  admet deux pôles complexes conjugués :

$$p = -(\xi \pm j\sqrt{1-\xi^2})\omega_0$$

La décomposition de  $S(p)$  en éléments simples et le calcul de la transformée de Laplace inverse nous donne :

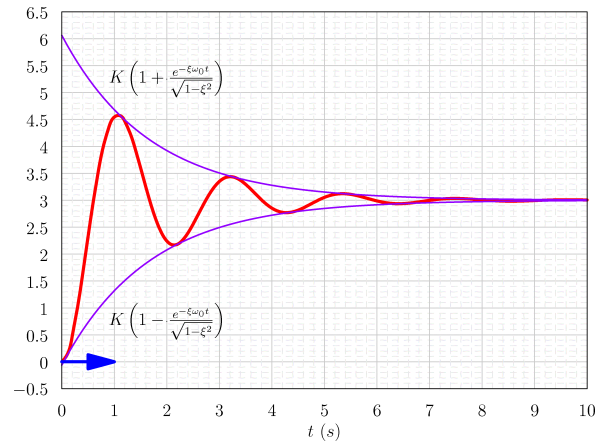
$$s(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t + \arccos\xi) \right]$$

La courbe admet toujours une tangente horizontale à  $t = 0$ .

On observe l'apparition d'oscillations autour de la valeur finale (réponse pseudo-périodique), d'autant plus amorties que  $\xi$  est élevé. Pour  $\xi = 0$ , la réponse est sinusoïdale d'amplitude  $2K$ .

Les courbes enveloppes ont pour équation les courbes suivantes :

$$y(t) = K \left( 1 \pm \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$



Remarque

On définit parfois  $\omega_p$  :

$$\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

Résultat

La pseudo-période des oscillations est donnée par :

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

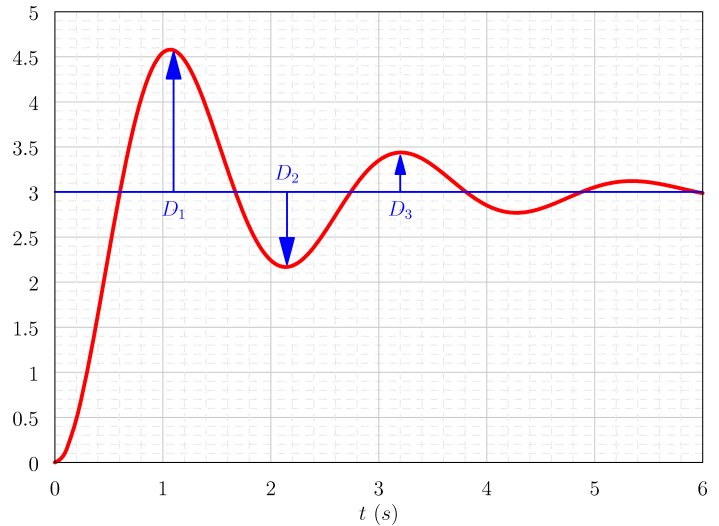
### 3.3.1 Résultats sur les dépassements

Lorsque  $\xi$  est inférieur à 1, la réponse indicielle génère des dépassements.

Résultat

On montre que le premier dépassement est obtenu pour :

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{T_p}{2}$$



La valeur du dépassement (en pourcentage) peut se calculer alors ainsi :

$$D_{1\%} = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right|$$

Résultat

Le premier dépassement pour cent vaut :

$$D_{1\%} = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

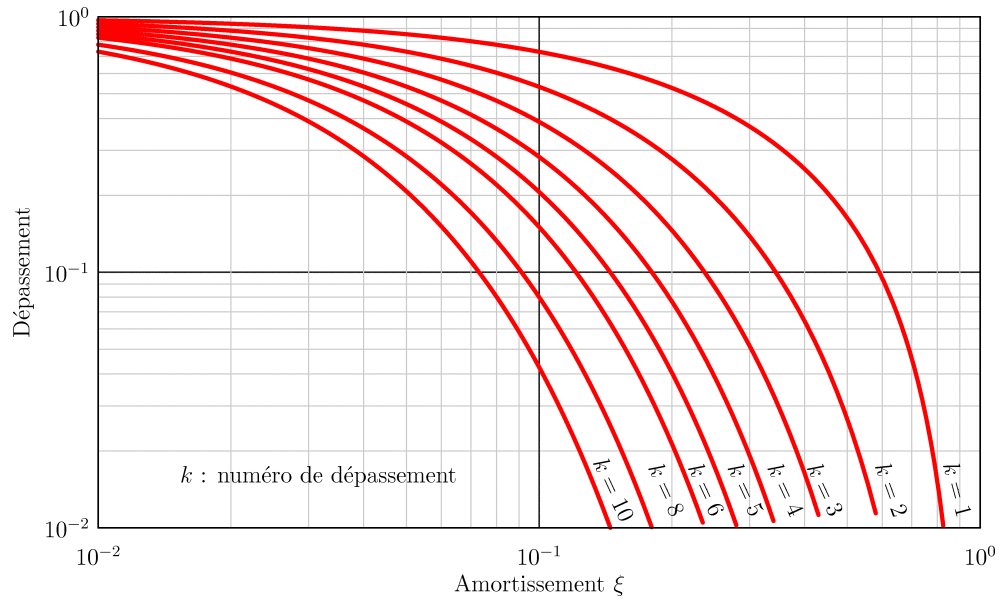
La valeur du pic est donnée par  $D_{1\%} \cdot K \cdot E_0$  ( $E_0$  valeur de l'échelon d'entrée).

Résultat

Le k<sup>e</sup> dépassement pour cent vaut :

$$D_{k\%} = e^{\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

L'abaque ci-dessous permet de connaître la valeur du k<sup>e</sup> dépassement **pour cent** en fonction du facteur d'amortissement. Lorsque l'amortissement tend vers 1, on peut ainsi mettre en évidence que la valeur des dépassements est de plus en plus faible.



### 3.3.2 Résultat sur le temps de réponse à 5%

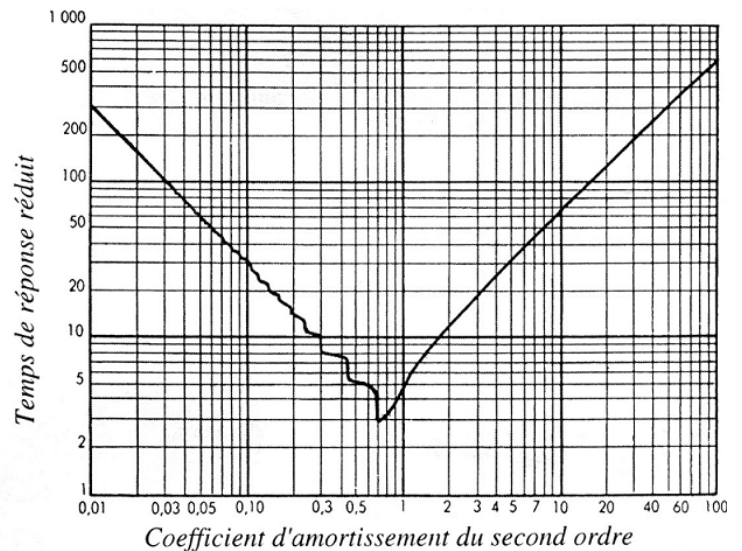
La rapidité d'un système du second ordre va se calculer par le temps de réponse à 5%. Le temps de réponse dépend de  $\omega_0$  et  $\xi$  et ne pas s'écrire sous une forme analytique simple.

L'abaque ci-contre donne le temps de réponse réduit  $t_{r5\%}\omega_0$  en fonction du coefficient d'amortissement  $\xi$ .

Résultat

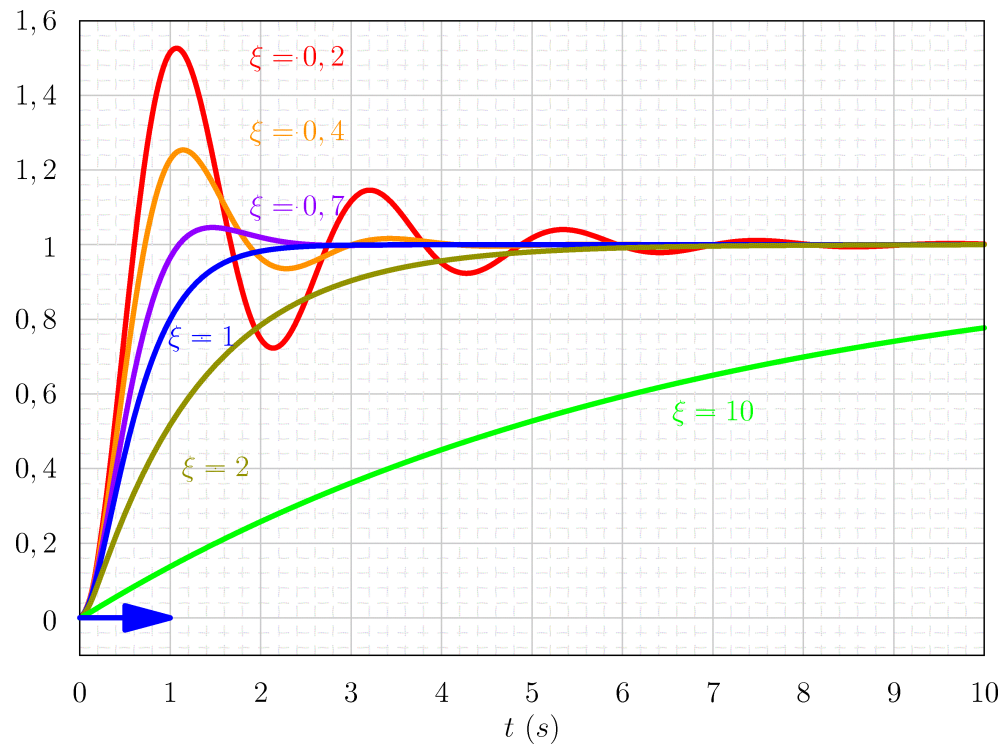
On note que le temps de réponse est minimum lorsque  $\xi \approx 0,7$ . Dans ces conditions :

$$t_{r5\%} \cdot \omega_0 = 3$$





### 3.4 Évolution de la réponse en fonction du coefficient d'amortissement



Résultat

- On peut montrer que pour la réponse indicielle d'un système du second ordre
- il existe une tangente horizontale à l'origine ;
  - la valeur finale tend vers  $KE_0$  (si l'échelon d'entrée vaut  $E_0$ ).