해석개론(김성기, 김도한, 계승혁) 제2개정판 풀이

채지석

2024년 4월 1일

차 례

일러두기

다음은 가장 중요한 내용이니 꼭 읽어주었으면 한다.

- 여기에 있는 풀이들은 김성기 교수님, 김도한 교수님, 계승혁 교수님이 쓰고 서울대학교출판문화원에서 펴낸 《해석개론》의 제2개정판에 실린 연습문제들의 풀이입니다. 같은 책의 다른 판은 실린 연습문제들 및 그 번호가 제2개정판과 다를 수 있기 때문에 주의해 주세요.

- 이 문서는 공식 풀이집이 아니고, 제가 개인적으로 공부하면서 연습문제들을 풀어보고 그 내용을 정리해놓은 것입니다. 제 스스로 잘 풀기 위해 노력했지만 여전히 올바르지 않은 풀이나 내용이 있을 수 있습니다. 《해석개론》으로 공부하실 때 이 문서를 참고용으로 사용하신다면 항상 잘못된 내용은 없는지 유의하시면서 비판적으로 읽어주시길 바랍니다.

- 풀이집을 참고하는 것은 양날의 검입니다. 문제가 풀리지 않을 때 풀이집을 보는 것에 대한 부정적인 면은 잘 알고 계실것이라 믿습니다.

  하지만 문제가 너무 오랫동안 안 풀리다 보면 공부를 계속 할 동기의 부여가 어려워질 수 있고, 다른 사람들은 어떻게 생각하고 문제에 어떻게 접근하는지, 자신이 생각해내지 못했던 테크닉이나 문제해결기법은 무엇인 지 등을 살펴보는 용도 위주로 조심스럽게 풀이집을 사용한다면 이후에 다른 문제를 해결할 때의 아이디어를 얻을 수 있는 등 도움이 될 수 있습니다. 《해석개론》으로 공부하시는 사려 깊은 여러분들은 이에 대해 현명한 판단을 내리실 수 있을 것이라 믿습니다.

  특히 과제로써 문제를 풀어서 제출하는 경우, 시간에 쫓기는 등의 이유로 남의 풀이를 무작정 보고 베끼는 것은 어려움에서 벗어나는 일시적인 방법이 될 수 있지만, 장기적으로도 그것이 득이 될 지는 재고해 보아야 합니다. 모르는 것을 물어보는 것은 잘못이 아니지만, 과제는 결국 자신의 힘으로 해야 하는 것입니다. 만에 하나 학문적 명예규율(academic honor code)을 어겨서 불이익을 받게 된 것에 이 풀이집이 관여한 부분이 있더라도 불이익에 대한 책임은 전적으로 여러분에게 있습니다.

위의 내용 못지 않게 중요한 기호의 사용과 표기법에 대해 중요한 내용을 밑에 적어두었으니 이 또한 읽어주었으면 한다.

- 이 이후에, 특히 풀이 도중에 "본문"이라 함은 말 그대로 원래의 《해석개론》 책 본문을 뜻합니다.

- $\mathbb{N}$이 자연수의 집합을 나타내는 기호인 것은 모두 아실겁니다. 그런데 0은 자연수일까요? 이에 대해서는 수학자들마다 의견이 다릅니다. 하지만 한국에서 초·중·고등학교를 다녔다면 0을

포함하지 않는 편이 더 익숙할 것입니다. 풀이 내에서 예외적으로 자연수에 0을 포함한다고 적어놓지 않는 이상, $\mathbb{N}$은 1 이상의 정수의 집합입니다.

- 수열 $a_1, a_2, \cdots$ 을 나타냄에 있어 본문에선 홑화살괄호를 써서 $\langle a_n \rangle$이라 씁니다. 다만, 본문 이외의 다른 곳에서 이 표기법을 사용하는 것은 보지 못한 것 같습니다. 수열을 나타낼 때 일반적으로 사용되는 방식은 중괄호를 사용하여 $\{a_n\}$이라고 하거나, 변수와 그 범위를 명확하게 하기 위해 아랫첨자를 더해 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 등과 같이 나타내는 등입니다. 가끔씩 소괄호를 사용하는 경우도 있습니다만, 오해의 여지가 있기에 중괄호만큼 흔한 방식은 아닙니다. 이 문서에서는 대세에 발맞추어 홑화살괄호 대신 중괄호를 사용합니다.

- 2장에서 옹골집합을 정의할 때 옹골집합과 같은 뜻을 가진 다른 용어로 콤팩트집합을 소개합니다. 그런데 다들 옹골집합이라고 하기보단 콤팩트집합이라고 하지 않나요? 저도 그렇기 때문에 이 문서에서는 콤팩트집합이라는 표현을 주로 사용합니다.

- 6장에서 정의된 고른노름(균등노름, 상한노름이라고도 하며, 영어로는 uniform norm, supremum norm 등이라고 합니다)을 나타내는 표기로 본문에서는 $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ 을 사용합니다. 그런데 이 표기법도 자주 쓰이는 표기법은 아닙니다. 많은 책들이 사용하는 표기법은 그냥 아랫첨자 없이 $\|\cdot\|$라고 쓰거나, $\|\cdot\|_\infty$와 같이 나타냅니다. 아마 $\|\cdot\|_\infty$이라는 표기가 측도론이나 실해석학에서부터는 본질적 상한(essential supremum)을 나타내는 데 사용되기 때문에 혼란을 우려하여 사용하지 않은 것으로 보입니다. 하지만 고른노름을 나타낼 때 $\|\cdot\|_\infty$가 워낙 널리 사용되는 표기법이기도 하고, 어떤 의미에서는 고른노름과 본질적 상한은 “별다른 차이가 없”기 때문에, 이 문서에서는 고른노름을 $\|\cdot\|_\infty$으로 표기합니다.

아래의 내용은 위의 내용들만큼 중요하진 않습니다. 시간 날 때, 아니면 심심할 때 읽어보세요.

- 수학에 대한 글을 영어와 한국어 각각으로 쓸 때 어떻게 되는 지 잠깐 살펴봅시다. 다음은 제 옆에 있던 영어로 쓰인 해석학 책 Foundations of Mathematical Analysis에서 발췌한 문장입니다.

  We say that $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ has **limit** $L \in \mathbb{R}$ if for every $\epsilon > 0$, there exists a positive integer N, such that if $n > N$, then $|a_n - L| < \epsilon$. (R. Johnsonbaugh & W.E. Pfaffenberger, 1981)

  그런데 같은 내용을 한국어 쓴다고 할 때, 다음과 같이 썼다고 해봅시다.

  임의의 $\epsilon > 0$에 대하여 $n > N$이면 $|a_n - L| < \epsilon$인 양의 정수 N이 존재한다면 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 **극한** $L \in \mathbb{R}$을 가진다고 한다.

  어떤 느낌이 드시나요? L과 N이 실수인지 정수인지 명확하게 알려주기 전에 그 문자들을 사용하는 식이 등장하고, 어떤 내용의 문장인지도 모르고 읽다가 문장이 끝날 무렵에서야 “극한”의 정의라는 것을 알게 됩니다. 이러한 문제를 피하기 위해서는 다음과 같이 쓸 수 있을 것입니다.

  수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 **극한** $L \in \mathbb{R}$을 가진다는 것은, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 양의 정수 N이 존재하여 $n > N$이면 $|a_n - L| < \epsilon$을 만족한다는 것이다.

한국어의 어순만 놓고 보았을 때 어느 쪽의 문장이 더 자연스러운 지는 사실 잘 모르겠습니다. 다만 논리 순서에 맞는 문장은 아무래도 아래쪽의 문장이라는 것이 제 의견입니다. 풀이를 작성할 때는 최대한 이 논리적인 흐름에 따라 작성하는 방향을 택했지만, 그렇게 했을 때 어순이 너무 이상해지는 경우에는 자연스러운 어순을 따랐습니다.

제 1 장

실수의 성질과 수열의 극한

1.6.1. 실수의 집합 $\mathbb{R}$에서 양수의 집합을 P라 하자. 편의상 $K = \{a + b\sqrt{3} \in \mathbb{R} : a, b \in \mathbb{Q}\}$라 하자. $P' = P \cap K$라 하고, 먼저 $-(P \cap K) = (-P) \cap K$임을 보이자.

$\mathbb{Q} = (-\mathbb{Q})$이므로 $K = (-K)$이다. $c \in -(P \cap K)$라 해보자. 그러면 $(-c) \in P \cap K$이다. 따라서 $(-c) \in P$이므로 $c \in (-P)$이고, $(-c) \in K$이므로 $c \in (-K)$인데 $K = (-K)$이므로 $c \in K$이다. 즉, $c \in (-P) \cap K$이므로 $-(P \cap K) \subset (-P) \cap K$이다. 반대로 $c \in (-P) \cap K$라 해보자. 그러면 $c \in (-P)$이고 $c \in K = (-K)$이다. 따라서 $(-c) \in P$이고 $(-c) \in K$이므로, $(-c) \in P \cap K$이다. 즉, $c \in (-(P \cap K))$이므로 $(-P) \cap K \subset -(P \cap K)$이다. 따라서 $-(P \cap K) = (-P) \cap K$이다.

K가 순서체임을 보이기 위해, P'가 K의 부분집합으로 순1 ~ 순3을 만족함을 보이면 된다.

(순1) $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$에 대해 $a + b\sqrt{3}, c + d\sqrt{3} \in P'$이라 하자. 그러면 $(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3})$와 $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3})$이 P'의 원소임을 보이기 위해 각각이 P의 원소이면서 K의 원소임을 보이면 된다. 각각이 P의 원소임은 P가 (순1) ~ (순3)을 만족하기 때문에 당연히 성립한다. 이제,

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$$

이고

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$$

이므로 각각이 K의 원소임 또한 알 수 있다.

(순2) 이제, $K \subset \mathbb{R}$이므로

$$\begin{aligned} K = \mathbb{R} \cap K &= (P \cup \{0\} \cup (-P)) \cap K \\ &= (P \cap K) \cup \{0\} \cup ((-P) \cap K) \\ &= P' \cup \{0\} \cup (-P') \end{aligned}$$

이다.

(순3) 집합 P, $\{0\}$, $-P$가 서로소인데, $P' \subset P$이고 $-P' = (-P) \cap K \subset (-P)$이므로 집합 P', $\{0\}$, $-P'$ 또한 서로소이다.

따라서 K는 순서체이다.

1.6.2. 다음 표와 같이 된다.

	(체1)	(체2)	(체3)	(체4)	(체5)	(체6)	(체7)	(체8)	(체9)
$\mathbb{N}$	O	X	X	O	O	O	X	O	O
$\mathbb{Z}$	O	O	O	O	O	O	X	O	O
$\mathbb{Q}$	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\mathbb{R}$	O	O	O	O	O	O	O	O	O
$\mathbb{C}$	O	O	O	O	O	O	O	O	O
P	O	O	O	O	O	O	X	O	O
R	O	O	O	O	O	O	O	O	O
C	O	O	O	O	O	O	X	O	O
F	O	O	O	O	O	O	X	X	X
M_2	O	O	O	O	O	O	X	X	O

C와 F에서의 덧셈은 f와 g가 각각의 원소일 때 $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$로 정의했으므로 $\mathbb{R}$에서의 덧셈의 성질을 그대로 가져오게 된다.

P에서 x의 곱셈에 대한 역원은 존재하지 않는다. 곱셈에 대한 항등원은 1인데, 0이 아닌 다항식 $p(x)$에 대해 $xp(x)$는 1차 이상의 다항식이 되기 때문에 0차식인 1이 될 수 없다.

C에서 곱셈에 대한 항등원은 상수함수 $e(x) = 1$이 됨은 쉽게 확인할 수 있다. 따라서 $f(x) = x$의 곱셈에 대한 역원은 존재하지 않는다. 만약 곱셈에 대한 역원 $g(x)$가 존재한다고 하면 $(fg)(0) = e(0) = 1$이어야 하는데 이는 $1 = (fg)(0) = f(0)g(0) = 0 \cdot g(0) = 0$이어야 함을 뜻하기 때문에 모순이다.

F의 원소 f, g, h와 실수 x에 대해 $((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x))) = (h \circ (g \circ f))(x)$이 성립함은 쉽게 알 수 있다. 따라서 F에서의 곱셈은 결합법칙이 성립한다. 곱셈에 대한 항등원이 항등함수 $e(x) = x$이 되는 것 또한 어렵지 않게 확인할 수 있다. 따라서 $f \in F$에 대해 곱셈에 대한 역원이 존재한다는 것은 역함수가 존재한다는 뜻이므로, f가 일대일 대응이 아니면 곱셈에 대한 역원이 존재하지 않는다. 한편, $f(x) = x+1$이고 $g(x) = h(x) = x^2$이라 두면 $f \circ g \neq g \circ f$임과 $h \circ (f+g) \neq (h \circ f) + (h \circ g)$임은 간단한 계산을 통해 확인할 수 있다. 따라서 F는 곱셈의 교환법칙과 분배법칙이 성립하지 않는다.

M_2에서 덧셈에 대한 항등원은 영행렬 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이고 곱셈에 대한 항등원은 단위행렬 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$이 된다. 이제, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이라 두면

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BA$$

임을 알 수 있다. 또한, 임의의 $C \in M_2$에 대하여 AC를 계산하면 $(2,2)$-성분이 항상 0이 되므로 $AC \neq I$, 즉 A의 곱셈에 대한 역원이 존재하지 않음을 알 수 있다. 한편, 이제 임의로 $X, Y, Z \in M_2$를 골라 $X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \epsilon & \zeta \\ \eta & \theta \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \iota & \kappa \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$라 두면

$$\begin{aligned}
(XY)Z &= \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + \beta\eta & \alpha\zeta + \beta\theta \\ \gamma\epsilon + \delta\eta & \gamma\zeta + \delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota & \kappa \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\epsilon\iota + \beta\eta\iota + \alpha\zeta\lambda + \beta\theta\lambda & \alpha\epsilon\kappa + \beta\epsilon\kappa + \alpha\zeta\mu + \beta\theta\mu \\ \gamma\epsilon\iota + \delta\eta\iota + \gamma\zeta\lambda + \delta\theta\lambda & \gamma\epsilon\kappa + \delta\eta\kappa + \gamma\zeta\mu + \delta\theta\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon\iota + \zeta\lambda & \epsilon\kappa + \zeta\mu \\ \eta\iota + \theta\lambda & \eta\kappa + \theta\mu \end{pmatrix} \quad = X(YZ)
\end{aligned}$$

이므로 곱셈의 결합법칙이 성립함을 알 수 있고, 또한

$$\begin{aligned}
X(Y+Z) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon + \iota & \zeta + \kappa \\ \eta + \lambda & \theta + \mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + \alpha\iota + \beta\eta + \beta\lambda & \alpha\zeta + \alpha\kappa + \beta\theta + \beta\mu \\ \gamma\epsilon + \gamma\iota + \delta\eta + \delta\lambda & \gamma\zeta + \gamma\kappa + \delta\theta + \delta\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\epsilon + \beta\eta & \alpha\zeta + \beta\theta \\ \gamma\epsilon + \delta\eta & \gamma\zeta + \delta\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha\iota + \beta\lambda & \alpha\kappa + \beta\mu \\ \gamma\iota + \delta\lambda & \gamma\kappa + \delta\mu \end{pmatrix} \quad = XY + XZ, \\
(X+Y)Z &= \begin{pmatrix} \alpha + \epsilon & \beta + \zeta \\ \gamma + \epsilon & \delta + \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota & \kappa \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\iota + \epsilon\iota + \beta\lambda + \zeta\lambda & \alpha\kappa + \epsilon\kappa + \beta\mu + \zeta\mu \\ \gamma\iota + \epsilon\iota + \delta\lambda + \theta\lambda & \gamma\kappa + \epsilon\kappa + \delta\mu + \theta\mu \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\iota + \beta\lambda & \alpha\kappa + \beta\mu \\ \gamma\iota + \delta\lambda & \gamma\kappa + \delta\mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon\iota + \zeta\lambda & \epsilon\kappa + \zeta\mu \\ \eta\iota + \theta\lambda & \eta\kappa + \theta\mu \end{pmatrix} \quad = XZ + YZ
\end{aligned}$$

이 되는 것으로부터 분배법칙이 성립함도 확인할 수 있다.

1.6.3. **(가)** 모든 음이 아닌 정수 m, n에 대하여 $2^{-m} \leq 1$이고 $3^{-n} \leq 1$이므로 2는 A의 상계가 된다. 그리고, $2 = 2^0 + 3^0 \in A$이므로 $a < 2$이면 a는 A의 상계가 되지 않는다. 따라서 2는 A의 상한이 된다.

반대로, 모든 음이 아닌 정수 m, n에 대하여 $2^{-m} \geq 0$이고 $3^{-n} \geq 0$이므로 0은 A의 하계이다. 그런데 임의의 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 음이 아닌 정수 m_0과 n_0이 존재하여 $2^{-m_0} < \epsilon/2$와 $3^{-n_0} < \epsilon/2$를 만족하게 된다. 그러면 $2^{-m_0} + 3^{-n_0} \in A$이고 $2^{-m_0} + 3^{-n_0} < \epsilon$이므로 ϵ은 A의 하계가 아니다. 따라서 0이 A의 하한이 된다.

(나) B에서 임의의 원소 $b = 0.b_1b_2b_3\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$를 고르면 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $0 \leq b_n \leq 5$이므로, 각 $N = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{5}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{10^n} = \frac{5}{9}$$

이 성립한다. 따라서 위 식에서 $N \to \infty$일 때를 생각하면 $0 \le b \le 5/9$가 되므로 0은 B의 하계가 되고 $5/9$는 B의 상계가 된다. 이제 임의로 $0 < \epsilon < 5/9$가 주어졌다고 하자. 그러면 어떤 자연수 $m \in \mathbb{N}$이 존재하여 $\frac{1}{10^m} < \epsilon$을 만족할 것인데, 그러면 $\frac{5}{10^{m+1}}$은 B의 원소이면서 ϵ보다 작게 된다. 따라서 ϵ은 B의 하계가 될 수 없다. 또한, 어떤 자연수 $k \in \mathbb{N}$가 존재하여 $\frac{5}{9} - \epsilon > \frac{1}{10^k}$를 만족할 것인데, 그러면 $\frac{5}{9} - \frac{5}{10^{k+1}}$는 $\sum_{j=1}^{k} \frac{5}{10^j} + \sum_{j=k+2}^{\infty} \frac{5}{10^j}$와 같이 나타내어지므로 B의 원소이지만 ϵ보다 크게 된다. 따라서 ϵ은 B의 상계 또한 될 수 없다. 따라서 B의 상한은 $\frac{5}{9}$이고, 하한은 0이다.

(다) 먼저 임의의 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $-1 \le \sin x \le 1$이므로 -1과 1은 각각 C의 하계와 상계가 된다. 이제 임의의 $\epsilon > 0$을 잡고, $1 - \epsilon < \sin N$을 만족하는 정수 N의 존재함을 보임으로 $1 - \epsilon$이 상한이 될 수 없음을 보일 것이다. 0과 2π 사이에서 $\sin x > 1 - \epsilon$을 만족하는 x의 범위를 $\left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$이라 하자. 그러면 구간 $\left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$의 길이가 2δ이기 때문에 $\frac{2\delta}{3} > \frac{1}{K}$을 만족하는 자연수 K를 하나 고정하면, 어떤 자연수 m이 존재하여 $\frac{m}{K}$와 $\frac{m+1}{K}$가 둘 다 $\left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$에 포함된다.

정수에서의 연산과 비슷하게, 실수 y에 대해 $y = 2\pi k + r$를 만족하는 정수 k와 $0 \le r < 2\pi$인 실수 r에 대해, r을 "y를 2π로 나눈 나머지"라고 하고 $r = \langle y \rangle$이라고 나타내자. 그러면 두 실수 y, z에 대해 $\langle y \rangle = \langle z \rangle$이려면 $y - z$가 2π의 정수배여야 함은 쉽게 알 수 있다. 따라서 y와 z가 정수라면 π가 무리수이기 때문에 각각을 2π로 나눈 나머지가 같을 수 없다.

이제 $\frac{p}{K} < 2\pi < \frac{p+1}{K}$를 만족하는 자연수 p를 잡아서, $[0, 2\pi)$를 길이가 각각 $\frac{1}{K}$보다 작거나 같은 $p+1$개의 구간들 $\left[0, \frac{1}{K}\right), \left[\frac{1}{K}, \frac{2}{K}\right), \cdots, \left[\frac{p-1}{K}, \frac{p}{K}\right), \left[\frac{p}{K}, 2\pi\right)$으로 쪼갤 수 있다. 이제 0과 2π 사이에 놓이는 $p+2$개의 실수 $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \cdots, \langle p+2 \rangle$를 생각하면, 비둘기집의 원리에 따라 이 중 어떤 두 $\langle a \rangle, \langle b \rangle$는 앞에서 $[0, 2\pi)$를 $p+1$개로 나눈 구간들 중 하나의 구간에 동시에 속하게 된다. 다시 말해, 그러한 a와 b에 대해서는 각각을 2π로 나눈 나머지의 차가 $\frac{1}{K}$보다 작게 되는 것이다. 일반성을 잃지 않고 2π로 나눈 나머지가 더 큰 쪽을 a라 하자. 그러면, 어떤 적당한 두 정수 A와 B에 대하여 $a = 2\pi A + \langle a \rangle$, $b = 2\pi B + \langle b \rangle$라 했을 때

$$\langle a \rangle - \langle b \rangle = (a + b) - 2\pi(A + B) = \langle a + b \rangle$$

가 되므로, $\langle a - b \rangle < \frac{1}{K}$이 된다.

편의상 $c = a - b$라 하고, $l \langle c \rangle < 2\pi < (l+1) \langle c \rangle$를 만족하는 자연수 l에 대하여 $c, 2c, \cdots, lc$를 생각하자. 그러면 각각을 2π로 나눈 나머지는 $\langle c \rangle, 2\langle c \rangle, \cdots, l\langle c \rangle$가 되는데, $0 < \langle c \rangle < \frac{1}{K} < \frac{2\delta}{3}$이므로 어떤 자연수 q를, $q\alpha$가 길이 2δ인 구간 $\left(\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right)$안에 포함되도록 고를 수 있다. 그런데 이때 $\sin$이 주기가 2π인 주기함수이므로, $1 - \epsilon < \sin\left(q \langle c \rangle\right) = \sin(qc)$이 된다. 이제, qc는 정수이므로, $\sin(qc) \in C$이므로 $1 - \epsilon$은 C의 상한일 수 없다. 따라서 C의 상한은 1이 된다.

한편, 임의로 주어진 $\epsilon > 0$에 대하여 지금까지의 논의와 같이 q와 c를 잡으면

$$\sin(-qc) = -\sin(qc) < -(1 - \epsilon) = -1 + \epsilon$$

이므로 $-1 + \epsilon$이 C의 하한이 될 수 없음 또한 알 수 있다. 따라서 C의 하한은 -1이다.

1.6.4. 일반적으로 $\sup(A \cap B) = \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$는 성립하지 않는다. $A = [0,1] \cup \{2\}$, $B = [0,1] \cup \{3\}$으로 두면 $\sup(A) = 2$, $\sup(B) = 3$인데 $\sup(A \cap B) = \sup([0,1]) = 1$임을 알 수 있다.

반면 $\sup(A \cup B) = \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$은 성립한다. 편의를 위해 $\sup(A) = a$, $\sup(B) = b$라 하자. 일반성을 잃지 않고 $a \geq b$라 할 수 있다. 그러면 주어진 식이 성립함을 보이기 위해서는 $a = \sup(A \cup B)$임을 보이면 된다. 먼저, 임의의 $x \in A \cup B$를 잡자. 이때 $x \in A$라면 $x \leq a$이고 $x \in B$라면 $x \leq b \leq a$ 이므로 $\sup(A \cup B) \leq a$이다. 그런데 $a = \sup A$이므로 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 $c \in A$이면서 $c \geq a - \epsilon$를 만족하는 c가 존재한다. 그런데 $c \in A \cup B$이기도 하므로 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $a - \epsilon$은 $A \cup B$의 상계가 될 수 없다. 따라서 $a = \sup(A \cup B)$이 성립한다.

마지막으로, $\sup\{f(x,y) : (x,y) \in A \times B\} = \sup\{\sup\{f(x,y) : x \in A\} : y \in B\}$이 성립함을 보이기 위해 편의상 $\alpha = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in A \times B\}$, $\beta = \sup\{\sup\{f(x,y) : x \in A\} : y \in B\}$이라 하고 $\alpha = \beta$임을 보이자. 먼저, 임의의 $(x_0, y_0) \in A \times B$에 대해

$$f(x_0, y_0) \leq \sup\{f(x, y_0) : x \in A\} \leq \sup\{\sup\{f(x,y) : x \in A\} : y \in B\} = \beta$$

이므로 상한의 정의에 의해 $\alpha \leq \beta$이다. 한편 상한의 성질에 의해 임의의 양수 ϵ이 주어지면 임의의 $(x,y) \in A \times B$에 대해 $\alpha + \epsilon > f(x,y)$이다. 따라서

$$\beta = \sup\{\sup\{f(x,y) : x \in A\} : y \in B\} \leq \sup\{\sup\{\alpha + \epsilon : x \in A\} : y \in B\} = \alpha + \epsilon$$

이므로 결과적으로 우리는 임의의 양수 ϵ에 대해 $\alpha \leq \beta \leq \alpha + \epsilon$이 성립함을 알게 되었다. 그런데 이 부등식이 임의의 양수 ϵ에 대해 성립하려면 $\alpha = \beta$이어야 하므로 $\alpha = \beta$이다.

1.6.5. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x}$라 하면 $\dfrac{m+2n}{m+n} = f\left(\dfrac{m}{n}\right)$이다. 더불어 $x > 0$일 때 $f(x) = x$를 만족하는 경우는 $x = \sqrt{2}$뿐이라는 것은 쉽게 알 수 있다.

이제 $f(x)$가 $x > 0$에서 감소함수임을 보이겠다. 두 양수 x, y가 $0 < x < y$를 만족한다고 하자. 그러면

$$f(x) - f(y) = \left(1 + \frac{1}{1+x}\right) - \left(1 + \frac{1}{1+y}\right) = \frac{y-x}{(1+x)(1+y)} > 0$$

이므로 $f(x) > f(y)$이게 되어 $f(x)$는 감소함수이다. 더 나아가서 $(1+x)(1+y) > 1$이므로

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

또한 성립함을 알 수 있다.

즉 유리수 r이 $0 < r < \sqrt{2}$라면 $f(r) > f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$이고 반대로 $r > \sqrt{2}$라면 $f(r) < \sqrt{2}$이다. 또한 양쪽 모두의 경우에 대해 $\left|f(r) - \sqrt{2}\right| < \left|r - \sqrt{2}\right|$이다. 따라서 임의의 자연수 $m, n \in \mathbb{N}$에 대하여 두 유리수 $\dfrac{m}{n}$과 $\dfrac{m+2n}{m+n}$ 사이에 $\sqrt{2}$가 있으며, 언제나 $\dfrac{m+2n}{m+n}$이 $\sqrt{2}$에 더 가깝다.

1.6.6. 먼저 정의에 의해 $a^1 = a^0 a = 1 \cdot a = a$임을 알 수 있다.

(가)

- $a^m a^n = a^{m+n}$

  먼저 $n = 1$일 때는 정의에 의해 $a^m a = a^{m+1}$이므로 모든 자연수 m에 대해 주어진 식이 성립한다. 이제 임의로 m을 어떤 자연수로 고정하고, n에 대한 귀납법으로 주어진 식이 모든 n에 대해 성립함을 보일 것이다. $n = 1$일 때는 이미 보았으므로, 어떤 자연수 k에 대해 $n = k$일 때 식이 성립하면 $n = k+1$일 때도 성립함을 보이면 충분하다. 이를 위해 $a^m a^k = a^{m+k}$라 가정하자. 그러면

  $$a^m a^{k+1} = a^m a^k a = a^{m+k} a = a^{m+k+1}$$

  이므로 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 식이 성립하는데, 처음에 m을 임의의 자연수로 고정했으므로 모든 $m \in \mathbb{N}$에 대해서도 식이 성립한다.

- $(a^m)^n = a^{mn}$

  먼저 $n = 1$일 때는 $(a^m)^1 = a^m = a^{m\cdot 1}$이므로 모든 자연수 m에 대해 주어진 식이 성립한다. 이제 임의로 m을 어떤 자연수로 고정하고, n에 대한 귀납법으로 주어진 식이 모든 n에 대해 성립함을 보일 것이다. $n = 1$일 때는 이미 보았으므로, 어떤 자연수 k에 대해 $n = k$일 때 식이 성립하면 $n = k + 1$일 때도 성립함을 보이면 충분하다. 이를 위해 $(a^m)^k = a^{mk}$라 가정하자. 그러면

  $$(a^m)^{k+1} = (a^m)^k a^m = a^{mk} a^m = a^{mk+m} = a^{m(k+1)}$$

  임을 알 수 있고, 따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 식이 성립하는데, 처음에 m을 임의의 자연수로 고정했으므로 모든 $m \in \mathbb{N}$에 대해서도 식이 성립한다.

- $(ab)^n = a^n b^n$

  n에 대한 귀납법으로 주어진 식이 모든 자연수 n에 대해 성립함을 보일 것이다. $n = 1$일 때는 $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$이므로 주어진 식이 성립한다. 이제 어떤 자연수 k에 대해 $(ab)^k = a^k b^k$라 가정하자. 그러면

  $$(ab)^{k+1} = (ab)^k (ab) = a^k b^k ab = (a^k a)(b^k b) = a^{k+1} b^{k+1}$$

  이므로 $n = k$일 때 식이 성립하면 $n = k + 1$일 때도 성립한다. 따라서 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 주어진 식이 성립한다.

- $a < b \iff a^n < b^n$

  먼저 $(\Rightarrow)$ 방향이 성립함을 n에 대한 귀납법으로 보이겠다. $n = 1$일 때는 오른쪽 부등식이 왼쪽 부등식과 같으므로 보일 것이 없다. 이제 $a < b$임이 주어졌을 때 어떤 자연수 k에 대해 $a^k < b^k$가 성립한다고 가정하자. 그러면

  $$a^{k+1} = a^k a < b^k a < b^k b = b^{k+1}$$

  또한 성립함을 알 수 있다. 따라서 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대해 주어진 식이 성립한다.

  이제 $(\Leftarrow)$ 방향이 성립함을 보이기 위해 그 대우명제인

  $$a \not< b \Rightarrow a^n \not< b^n$$

  임을 보일 것이다. 여기서 $a \not< b$는 $a < b$이 아님을 뜻한다.

  두 실수 a, b가 있으면 $a < b$이거나 $a = b$이거나 $a > b$이어야 하며 이 중 정확히 하나만을 만족한다. 이는 양수의 집합 P에 대해 $\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup (-P)$이고 P, $\{0\}$, $-P$는 쌍끼리 서로소인데, $a - b \in \mathbb{R}$일 때 만약 $a - b \in P$라면 $a > b$, 만약 $a - b \in \{0\}$이라면 $a - b = 0$이므로 $a = b$, 그리고 만약 $a - b \in -P$라면 $b - a = -(a - b) \in P$이므로 $a < b$이기 때문이다. 따라서 $a \not< b$는 $a = b$이거나 $a > b$임과 동치이다.

  이제 위에서 $(\Rightarrow)$ 방향을 보인 것에서 a와 b의 역할을 바꾸면 모든 자연수 n에 대해 $a > b \Rightarrow a^n > b^n$이 성립함을 알 수 있다. 한 편 $a = b$이면 임의의 자연수 n에 대해 $a^n = b^n$임은 자명하다. 따라서 $a \not< b$이면 $a^n > b^n$이거나 $a^n = b^n$이므로 $a^n \not< b^n$이다. 따라서 주어진 동치관계가 성립한다.

(나) 앞의 세 관계식은 m, n이 정수일 때도 성립한다.

- $a^m a^n = a^{m+n}$

  $n = 0$인 경우는 $a^0 = 1$이므로 모든 정수 m에 대해 성립한다. m과 n중 하나만 음수인 경우, 일반성을 잃지 않고 $n < 0 < m$이라 가정할 수 있다. 편의상 $n = -k$라 놓아 $k > 0$일 때 $a^m a^{-k} = a^{m-k}$임을, 즉 $\dfrac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$임을 보이자. 만약 $m \geq k$라면 (가)에서 보았듯이 $a^m = a^{m-k}a^k$이므로 성립한다. 반대로 $m < k$라면 (가)에 의해 $a^k = a^{k-m}a^m$이고 이 경우 $m - k < 0$이므로 $a^{m-k} = \dfrac{1}{a^{k-m}}$이므로 역시 성립한다.

  이제 m과 n이 모두 음수라고 하자. 편의상 $m = -k, n = -l$이라 놓아 $k > 0$이고 $l > 0$일 때 $a^{-k}a^{-l} = a^{-(k+l)}$이 성립함을 보이자. 정의상 이 식은 $\dfrac{1}{a^k} \cdot \dfrac{1}{a^l} = \dfrac{1}{a^{k+l}}$과 동치인데, (가)에서 보았듯이 이 식은 성립한다.

- $(a^m)^n = a^{mn}$

  편의상 $m = -k, n = -l$이라 놓자. 만약 $m = 0$이거나 $n = 0$이면 좌변과 우변이 모두 1이 되므로 식이 성립한다.

  $m < 0 < n$이라 해보자. 그러면 $k > 0$이므로

  $$(a^m)^n = \left(\frac{1}{a^k}\right)^n = \frac{1}{(a^k)^n} = \frac{1}{a^{kn}} = a^{-kn} = a^{mn}$$

  이 성립한다. 반대로 $n < 0 < m$이라면 $l > 0$이므로

  $$(a^m)^n = (a^m)^{-l} = \frac{1}{(a^m)^l} = \frac{1}{a^{ml}} = a^{-lm} = a^{mn}$$

  이 성립한다. 마지막으로 $m < 0$이고 $n < 0$인 경우를 생각하면, 이 경우 $l > 0$이고 $m < 0$이므로 위에서 본 것과 같이

  $$(a^m)^n = (a^m)^{-l} = \frac{1}{(a^m)^l} = \frac{1}{a^{ml}} = a^{-ml} = a^{mn}$$

  이 성립한다.

- $(ab)^n = a^n b^n$

  $n = 0$인 경우 $1 = 1 \cdot 1$이므로 주어진 식이 성립한다. 편의상 $n = -l$이라 놓고 $n < 0$이라 가정하자. 그러면 $l > 0$이므로

  $$(ab)^n = (ab)^{-l} = \frac{1}{(ab)^l} = \frac{1}{a^l b^l} = \frac{1}{a^l} \cdot \frac{1}{b^l} = a^n b^n$$

  이 성립함을 알 수 있다.

하지만 마지막 관계식은 일반적으로 n이 정수인 경우로 확장되지 않는데, 이는 $2 < 5$이지만 $n = -1$인 경우 $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}$임을 통해 쉽게 알 수 있다. 하지만 우리는 다음을 보일 수 있다.

- n이 음의 정수인 경우, $a < b \Longleftrightarrow a^n > b^n$

  편의상 $n = -l$ 이라 놓으면 $l > 0$이므로

  $$a < b \Longleftrightarrow a^l < b^l$$

임을 안다. 그런데 위의 식의 우변의 양변에 $\frac{1}{a^l b^l}$ 을 곱하면 $\frac{1}{b^l} < \frac{1}{a^l}$ 을 얻는데, $a^n = \frac{1}{a^l}$, $b^n = \frac{1}{b^l}$ 이므로

$$a < b \Longleftrightarrow a^n > b^n$$

이 성립함을 알 수 있다.

$n = 0$ 인 경우에는 항상 $a^0 = 1$ 이므로 두 양수 a, b가 있다면 그 대소관계에 관계 없이 $a^0 = b^0$ 이다.

(다) 먼저 다음 보조정리를 살펴보자.

보조정리. 단조증가수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이 어떤 실수 α 로 수렴하면 $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha$ 이다.

증명) 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이 α 를 극한으로 가지기 때문에, 임의로 $\epsilon > 0$ 이 주어지면 어떤 자연수 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 $n \geq N$ 이면 $a_n < \alpha + \epsilon$ 이 성립한다. 그런데 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이 단조증가수열이므로 모든 $n < N$ 인 자연수 n 에 대하여 $a_n \leq a_N < \alpha + \epsilon$ 이 되기 때문에, 모든 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 에 대하여 $a_n < \alpha + \epsilon$ 이다. 따라서 $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \alpha + \epsilon$ 이고, 이 식이 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대하여 성립하므로 $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \alpha$ 임을 알 수 있다.

반대로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 이므로, 임의로 양수 $\epsilon > 0$ 이 주어지면 어떤 $N \in \mathbb{N}$ 이 존재하여 $n \geq N$ 이면 $a_n \geq \alpha - \epsilon$ 이다. 즉

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq a_N \geq \alpha - \epsilon$$

이고, 위의 식이 임의의 $\epsilon > 0$ 에 대해 성립해야 하므로 $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \alpha$ 이다. 따라서 앞 문단에서의 결과와 종합하면

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$$

이 성립함을 알 수 있다. □

양의 실수 a 와 자연수 n 이 주어졌을 때, 수열 $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ 을 다음과 같이 귀납적으로 정의하자. 먼저, $\lim_{k\to\infty} k^n = \infty$ 이고 $\{k^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이 **(가)**에서 보인 것에 의해 자연수의 증가수열이므로 어떤 자연수 β_0 이 존재하여 ${\beta_0}^n \leq a < (\beta_0 + 1)^n$ 을 만족한다. 그러면

$${\beta_0}^n < \left(\beta_0 + \frac{1}{10}\right)^n < \cdots < \left(\beta_0 + \frac{9}{10}\right)^n < (\beta_0 + 1)^n$$

이므로 어떤 한 자리 자연수 m_1 이 존재하여 $\left(\beta_0 + \frac{m_1}{10}\right)^n \leq a < \left(\beta_0 + \frac{m_1 + 1}{10}\right)^n$ 을 만족한다. 이때 $\beta_1 = \left(\beta_0 + \frac{m_1}{10}\right)^n$ 으로 정의한다. 이처럼, β_k 가 주어져 ${\beta_k}^n \leq a \leq \left(\beta_k + \frac{1}{10^k}\right)^n$ 일 때, 위에서와 비슷한 이유로 어떤 한 자리 자연수 m_{k+1} 이 존재하여 $\left(\beta_k + \frac{m_{k+1}}{10^{k+1}}\right)^n \leq a < \left(\beta_0 + \frac{m_{k+1} + 1}{10^{k+1}}\right)^n$ 을 만족하는데, 이때 $\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{m_{k+1}}{10^{k+1}}$ 으로 정의한다. 그러면 정의상 $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ 는 단조증가수열이고 모든 음이 아닌 정수 k 에 대해 $\beta_0 \leq \beta_k \leq \beta_0 + 1$ 을 만족하므로 유계이다. 따라서 $\{\beta_k\}_{k\geq 0}$ 는 수렴하는 수열이고, 어떤 실수 b 가 존재하여 $\lim_{k\to\infty} \beta_k = b$ 이다.

이제 $b^n = a$ 임을 보이겠다. 이는

$$b^n = \left(\lim_{k\to\infty} \beta_k\right)^n = \lim_{k\to\infty} ({\beta_k}^n)$$

이므로 $\lim_{k\to\infty} {\beta_k}^n = a$ 임을 보이면 충분하다. 그런데 **(가)**에서 본 바에 의해 $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots$ 이므로 ${\beta_0}^n \leq {\beta_1}^n \leq {\beta_2}^n \leq \cdots$ 이 되고, 모든 음이 아닌 정수 k 에 대해 ${\beta_k}^n \leq a$ 이므로 $\{{\beta_k}^n\}_{k\geq 0}$

은 유계인 단조증가수열로써 수렴한다. 따라서 극한 $\lim_{k\to\infty} {\beta_k}^n$ 이 존재하는데, 이때 위에서 살펴본 보조정리를 적용하면 $\lim_{k\to\infty} {\beta_k}^n = \sup\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$ 이 되는 것을 안다. 따라서 $a = \sup\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$ 임을 보여도 되는데, a가 집합 $\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$ 의 상계가 되는 것은 당연하다. 이제 a가 상한이 됨을 보임에 있어 a보다 작은 수는 상계가 될 수 없다는 것을 보일 것이다. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 $\epsilon > 0$이 존재하여 $a - \epsilon$도 $\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$의 상계가 된다고 가정하자. 이것은 모든 음이 아닌 정수 k에 대해 ${\beta_k}^n \leq a - \epsilon < a < \left(\beta_k + \frac{1}{10^k}\right)^n$ 이 성립한다는 것을 의미한다. 그런데, 만약 $\beta_k \neq 0$이라면 이항정리를 이용했을 때

$$\begin{aligned} 0 \leq \left(\beta_k + \frac{1}{10^k}\right)^n - {\beta_k}^n &= \left({\beta_k}^n + \frac{n}{10^k}{\beta_k}^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 10^{2k}}{\beta_k}^{n-2} + \cdots + \frac{1}{10^{nk}}\right) - {\beta_k}^n \\ &\leq \frac{n}{10^k}(\beta_0 + 1)^{n-1} + \frac{n^2}{10^{2k}}(\beta_0 + 1)^{n-2} + \cdots + \frac{n^n}{10^{nk}}(\beta_0 + 1)^{n-n} \\ &\leq n \cdot \frac{(n(\beta_0 + 1))^n}{10^k} \end{aligned}$$

임을 알 수 있는데, 이때 n과 β_0는 어떤 상수이므로 $\lim_{k\to\infty} n \cdot \frac{(n(\beta_0+1))^n}{10^k} = 0$이다. 따라서 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{k\to\infty}\left(\left(\beta_k + \frac{1}{10^k}\right)^n - {\beta_k}^n\right) = 0$이므로, 어떤 자연수 K가 존재하여 모든 자연수 $\kappa \geq K$에 대해 $\left(\beta_\kappa + \frac{1}{10^\kappa}\right)^n - {\beta_\kappa}^n < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. 그런데 가정에 의하면 그러한 K에 대해, 구간의 길이가 $\frac{\epsilon}{2}$보다 짧은 $\left[{\beta_K}^n, \left(\beta_K + \frac{1}{10^K}\right)^n\right]$ 안에 길이가 ϵ인 구간 $(a - \epsilon, a)$이 포함되어야 하므로, 가정이 거짓이어야 함을 알 수 있다. 따라서 $a - \epsilon$은 $\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$의 상계가 될 수 없으며, $a = \sup\{{\beta_k}^n : k \geq 0\}$ 임이 보여졌다. 따라서 $b^n = a$이다.

마지막으로 $b^n = a$를 만족하는 b가 유일하게 존재함을 보이겠다. 위의 문단에서 $b^n = a$를 만족하는 b가 존재함을 보였으니 그러한 b를 잡고, 어떤 양수 $c > 0$이 존재하여 $c \neq b$인데 $c^n = a$이라고 해보자. 만약 $c < b$라면 **(가)**에서 보았듯이 $c^n < b^n = a$이므로 $c^n \neq a$이다. 반대로 $c > b$라면 역시 **(가)**에서 보았듯이 $c^n > b^n = a$이므로 $c^n \neq a$이다. 따라서 $c \neq b$라면 $c^n = a$일 수 없으므로, $b^n = a$를 만족하는 b는 유일하게 존재함을 알 수 있다.

(라) $(a^m)^{1/n} = t$라 놓으면 $a^m = t^n$이다. m과 n의 최대공약수를 d라 하고 $m = d\mu$, $n = d\nu$라 하면 $a^{d\mu} = t^{d\nu}$이므로 $(a^\mu)^d = (t^\nu)^d$인데, **(다)**에서 보았듯이 어떤 양수가 주어졌을 때 d제곱해서 그 양수가 되는 값은 유일하게 존재하므로 $a^\mu = t^\nu$이다. 한 편 p와 q의 최대공약수를 e라 하면 $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$이므로 $p = e\mu$, $q = e\nu$가 되어야 한다. 그러므로 $a^\mu = t^\nu$에서 양변을 e제곱하면 $a^{e\mu} = t^{e\nu}$, 즉 $a^p = t^q$가 된다. 이는 t가 q제곱했을 때 a^p가 되는 수라는 뜻이므로 $t = (a^p)^{1/q}$이 된다. 따라서 $(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}$이다.

이처럼 양의 유리수 r이 주어졌고 자연수 m, n, p, q에 대해 $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$라면 $(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}$이 성립하므로 $a^r = (a^m)^{1/n}$으로 정의하는 것이, 또 $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$으로 정의하는 것이 자연스러울 것이다. 실제로 이렇게 정의하면 **(가)**에서 보인 관계식들이 지수가 유리수인 경우로 확장될 수 있는지 확인해보자. 편의상 아래에서 r, s는 유리수이고 각각 어떤 정수 m, p와 자연수 n, q에 대해 $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$라 하자. 먼저 $(a^{-n})^{1/q} = a^{-n/q}$이 성립함을 확인하자. $(a^{-n})^{1/q}$는 정의상 q제곱했을 때 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$이 되는 수인데, $a^{-n/q} = \frac{1}{a^{n/q}}$를 q제곱하면

$$\left(\frac{1}{a^{n/q}}\right)^q = \frac{1^q}{(a^{n/q})^q} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

임을 알 수 있다.

- $(a^r)^s = a^{rs}$

  여러 작은 단계로 나누어서 보이겠다.

  * $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$

    다음과 같이 일련의 등식이 성립한다.

    $$(a^{1/n})^m = ((a^{1/n})^{mn})^{1/n} = (((a^{1/n})^n)^m)^{1/n} = (a^m)^{1/n}$$

    따라서 주어진 등식이 성립한다.

  * k가 정수일 때, $(a^{m/n})^k = a^{mk/n}$

    다음과 같이 일련의 등식이 성립한다.

    $$(a^{m/n})^k = ((a^{m/n})^{nk})^{1/n} = (((a^{m/n})^n)^k)^{1/n} = ((a^m)^k)^{1/n} = (a^{mk})^{1/n} = a^{mk/n}$$

    따라서 주어진 부등식이 성립한다.

  * $(a^r)^s = a^{rs}$

    우리는 $(a^{m/n})^{p/q} = a^{mp/nq}$ 임을 보이면 되는데, 좌변은 위에서 보았듯이 $(a^{mp/n})^{1/q}$ 이고, 우변은 nq제곱을 했을 때 a^{mp} 이 되는 수이다. 그런데

    $$((a^{mp/n})^{1/q})^{nq} = (((a^{mp/n})^{1/q})^q)^n = (a^{mp/n})^n = ((a^{mp})^{1/n})^n = a^{mp}$$

    이므로 $(a^{mp/n})^{1/q} = (a^{m/n})^{p/q} = a^{mp/nq}$ 이라 결론지을 수 있다.

- $(ab)^r = a^r b^r$

  먼저 **(가)**에서 본 바에 의해 $(a^r b^r)^n = (a^r)^n (b^r)^n = a^{rn} b^{rn} = a^m b^m = (ab)^m$ 이다. 이로부터 $a^r b^r = ((ab)^m)^{1/n} = (ab)^r$ 임을 알 수 있다.

- $a^r a^s = a^{r+s}$

  필요한 경우 통분하여, 일반성을 잃지 않고 $n = q$ 이라 할 수 있다. 따라서 우리는

  $$a^{m/n} a^{p/n} = a^{(m+p)/n}$$

  이 성립함을 보이면 된다. 우변을 n제곱하면 a^{m+p} 인데, 좌변을 n제곱하면

  $$\left(a^{m/n} a^{p/n}\right)^n = (a^{m/n})^n (a^{p/n})^n = a^m a^p = a^{m+p}$$

  이므로 **(다)**에 의해 $a^{m/n} a^{p/n} = a^{(m+p)/n}$ 이 성립함을 알 수 있다.

- $r > 0$ 이면 $a < b \iff a^r < b^r$ 이고, $r < 0$ 이면 $a < b \iff a^r > b^r$ 이다.

  먼저 $r = \dfrac{m}{n}$ 이라 할 때, $(a^{1/n})^n = a$ 이므로 $a^{1/n} < b^{1/n} \iff a < b$ 이다. 이제 $r > 0$ 이면 $m > 0$ 인데, 이 경우 $a^{1/n} < b^{1/n} \iff a^r = a^{m/n} < b^{m/n} = b^r$ 이다. 따라서 $a < b \iff a^r < b^r$ 이다. 한편 $r < 0$ 이면 $m < 0$ 인데, 이 경우 $a^{1/n} < b^{1/n} \iff a^r = a^{m/n} > b^{m/n} = b^r$ 이다. 따라서 $a < b \iff a^r > b^r$ 이다.

(마) 먼저 x가 유리수이면 $a^x = \sup E(x)$임을 보이자. 이를 보이기 위해, 먼저 두 유리수 y, z가 주어졌을 때 $y < z$이면 $a^y < a^z$임을 보이자. 가정에 의해 $z - y > 0$이고, $a > 1$이므로 $a^{z-y} > 1^{z-y} = 1$인데, 양변에 a^y를 곱하면 $a^y a^{z-y} = a^z$이므로 $a^z > a^y$임을 알 수 있다. 따라서 $E(x)$의 임의의 원소는 $r \leq x$인 유리수에 대해 a^r의 꼴을 갖는데, $r < x$이면 $a^r < a^x$이므로 a^x는 $E(x)$의 상계가 된다. 반면 $a^x \in E(x)$이기 때문에 a^x보다 작은 모든 실수는 $E(x)$의 상계가 될 수 없으므로 a^x는 $E(x)$의 상한이 된다.

이제 임의의 실수 x에 대해 $a^x = \sup E(x)$이라 정의하고, 여러 가지 지수법칙이 성립함을 보이자. 이하에서 x, y는 실수이다. 먼저 다음이 성립함을 볼 수 있다.

- $a^x a^y = a^{x+y}$

  임의로 $a^z \in E(x+y)$를 고르자. 이때 z는 유리수임에 주목하자. $x+y-z = 2\delta \geq 0$이라 하고 유리수 κ, λ를 $x - \delta \leq \kappa \leq x$, $y - \delta \leq \lambda \leq y$을 만족하도록 잡으면 $\kappa + \lambda \geq z$임을 알 수 있다. 따라서 $a^z \leq a^{\kappa+\lambda} = a^\kappa a^\lambda \leq a^x a^y$이므로, $a^x a^y$는 $E(x+y)$의 상계가 되므로 $a^{x+y} \leq a^x a^y$이다. 한 편, 명제 1.2.8에 의해 우리는

  $$a^x a^y = \sup E(x) \sup E(y) = \sup\left(E(x)E(y)\right)$$

  임을 알고 있다. 임의로 $a^u \in E(x)$, $a^v \in E(y)$를 고르자. 이때 u, v는 유리수임에 주목하자. 그러면 $u+v \leq x+y$이므로 $a^u a^v = a^{u+v} \in E(x+y)$이고, 따라서 $a^u a^v \leq a^{x+y}$이 성립하므로 a^{x+y}는 $E(x)E(y)$의 상계가 된다. 즉, $a^{x+y} \geq a^x a^y$이다. 이전의 결과와 함께, $a^{x+y} = a^x a^y$이라는 결론을 얻게 된다.

- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

  이는 바로 위의 결과에서 쉽게 얻어진다. $a^x a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$이기 때문이다.

- $(a^x)^y = a^{xy}$

  여기서는 $x, y \geq 0$이라 가정하고 $A = \{r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r \leq x\}$, $B = \{s \in \mathbb{Q} : 0 \leq s \leq y\}$이라 하자. 그러면 $f(x, y) = a^{xy}$에 대해 연습문제 1.6.4에서의 결과를 적용하면

  $$\sup\left\{a^{rs} : (r, s) \in A \times B\right\} = \sup\left\{\sup\left\{a^{rs} : r \in A\right\} : s \in B\right\}$$

  이 성립함을 알 수 있다. 먼저 좌변의 값을 α라 놓고 α을 살펴자. $(r, s) \in A \times B$라면 $0 \leq rs \leq xy$이므로, $\{a^{rs} : (r, s) \in A \times B\} \subset E(xy)$이다. 여기에서 각 변의 상한을 생각하면 $\alpha \leq a^{xy}$이다. 그런데 만약 $\alpha < a^{xy}$라면 α가 $E(xy)$의 상한이 아니라는 뜻이므로 어떤 유리수 $q \leq xy$에 대해 $\alpha < a^q$ 일 것이다. 이때 $\dfrac{q}{y} \leq r' \leq x$인 유리수 r'을 잡고 $\dfrac{q}{r'} = s'$이라 놓으면 $s' = \dfrac{q}{r'} \leq y$이므로 $(r', s') \in A \times B$인 반면 $r's' = q$이므로 $(a^{r'})^{s'} = a^{r's'} = a^q$이 되어 α가 $E(xy)$의 상한이 아님에 모순이다. 따라서 $\alpha = a^{xy}$이다.

  위에서 살펴본 바에 의해 $\sup\{\sup\{a^{rs} : r \in A\} : s \in B\} = \alpha$인 것 또한 알 수 있다. 이제 임의로 $s \in B$가 주어졌을 때 $\sup\{a^{rs} : r \in A\}$를 살펴보자. 먼저 s가 0보다 큰 유리수이므로 **(라)**에서 보았듯이 $a^r \leq a^x$이므로 $a^{rs} \leq (a^x)^s$에서 $(a^x)^s$이 $\{a^{rs} : r \in A\}$의 상한이 됨을 알 수 있다. 한편 $(a^x)^s$이 상한이 아니라면 어떤 유리수 $r' \in A$에 대해 $(a^x)^s < a^{r's}$일텐데, 그러면 s가 양의 유리수이므로 **(라)**의 결과에 의해 $a^x < a^{r'}$이어야 한다. 그런데 이는 a^x의

정의에 모순이므로, $(a^x)^s = \sup\{a^{rs} : a \in A\}$ 임을 알 수 있다. 따라서

$$(a^x)^y = \sup\{(a^x)^s : s \in B\} = \sup\{\sup\{a^{rs} : r \in A\} : s \in B\} = \alpha = a^{xy}$$

라는 결론을 얻는다.

한편 $x \geq 0$이고 $y < 0$인 경우, 편의상 $z = -y$라 두면

$$(a^x)^y = (a^x)^{-z} = \frac{1}{(a^x)^z} = \frac{1}{a^{xz}} = a^{-xz} = a^x y$$

임을 알 수 있다. 하지만 $x < 0$인 경우에 대해서는 이야기할 수 없다. 그 이유는, 만약 $a > 1$인 양수가 고정되었고 $x < 0$이라면, 아직 살펴보진 않았지만 이후에 마지막으로 살펴볼 지수법칙에 의해 $a^x < a^0 = 1$인데, 1보다 작은 실수 b에 대하여 b^y가 어떻게 정의되는 지에 대해서는 약속하지 않았기 때문이다.

- $(ab)^x = a^x b^x$

일반적으로 $A, B \subset \mathbb{R}$에 대해 $A \subset B$이면 $\sup A \leq \sup B$이다. 이는 A 와 $B \setminus A$에 대해 연습문제 1.6.4의 결과를 적용하면

$$\sup B = \sup(A \cup (B \setminus A)) = \sup\{\sup A,\ \sup(B \setminus A)\} \geq \sup A$$

이기 때문이다.

명제 1.2.8에 의해

$$\begin{aligned} a^x b^x &= \sup\{a^r : r \leq x,\ r \in \mathbb{Q}\} \sup\{b^s : s \leq x,\ s \in \mathbb{Q}\} \\ &= \sup\{a^r b^s : r \leq x,\ s \leq x,\ r, s \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

이고 $r \in \mathbb{Q}$에 대해서는 $a^r b^r = (ab)^r$이기 때문에 우리는

$$\sup\{a^r b^s : r \leq x,\ s \leq x,\ r, s \in \mathbb{Q}\} = \sup\{a^r b^r : r \leq x,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

임을 보이면 된다. 그런데

$$\{a^r b^s : r \leq x,\ s \leq x,\ r, s \in \mathbb{Q}\} \supset \{a^r b^r : r \leq x,\ r \in \mathbb{Q}\}$$

이므로 좌변의 상한이 우변의 상한보다 크거나 같음은 알 수 있다. 따라서 위 식의 좌변의 상한을 α, 우변의 상한을 β라고 놓고, $\alpha \not> \beta$임을 보이면 된다. 모순을 이끌어내기 위해 $\beta < \alpha$라 가정해보자. 그러면 어떤 유리수 ρ, σ가 존재하여 $\rho, \sigma \leq x$이면서 $\beta < a^\rho b^\sigma \leq \alpha$ 일 것이다. 그런데 $\tau = \max\{\rho, \sigma\}$라 하면 $\beta < a^\rho b^\sigma \leq a^\tau b^\tau \in \{a^r b^r : r \leq x,\ r \in \mathbb{Q}\}$이라서 β의 정의에 모순이다. 따라서 $\beta < \alpha$일 수 없고, 즉 $\alpha = \beta$이다. 따라서 주어진 식이 성립한다.

- $x > 0$이면 $a < b \iff a^x < b^x$이고, $x < 0$이면 $a < b \iff a^x > b^x$이다.

먼저 $x > 0$이라 가정하고, $a < b \implies a^x < b^x$임을 보이자. 이는 b^x이 $\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$의 상계가 됨을 보이면 충분하다. b^x는 $\{b^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$의 상계이기 때문에 임의의 $r \in \mathbb{Q}, r \leq x$에 대해 $b^r \leq b^x$이다. 그런데 임의의 유리수 $r > 0$에 대해서는 $a^r < b^r$이고, 임의의 유리수 $r \leq 0$에 대해서는 $a^r \leq a^0 = 1 = b^0 < b^x$이므로 $\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$의 임의의 원소는 b^x보다 작거나 같다. 즉, b^x는 $\{a^r : r \in \mathbb{Q},\ r \leq x\}$의 상계가 된다.

위의 논의에서 a와 b의 역할을 바꾸면 $a > b \Longrightarrow a^x > b^x$이 성립함 또한 알 수 있다. 한 편 $a = b \Longrightarrow a^x = b^x$이 성립함은 자명하다. 따라서 **(가)**에서의 논증과 같은 방식을 이용하면 $a^x < b^x \Longrightarrow a < b$도 성립함을 알 수 있다. 따라서 $x > 0$이면 $a < b \Longleftrightarrow a^x < b^x$이다.

이제 $x < 0$이라 하자. 편의상 $y = -x$라 하면 $y > 0$이고, 앞서 보았듯이 $a^x = \dfrac{1}{a^y}$이므로

$$a < b \Longleftrightarrow a^y < b^y \Longleftrightarrow \frac{1}{b^y} < \frac{1}{a^y} \Longleftrightarrow b^x < a^x$$

이 성립함을 알 수 있다.

1.6.7. 풀이를 시작하기 전에 다음 보조정리를 살펴보자.

보조정리. 임의의 음이 아닌 정수 a와 n에 대하여, $\sqrt[n]{a}$는 정수이거나 무리수이다.

증명) 먼저 $a = 0$일 때를 살펴보자. 만약 $\sqrt[n]{a} \neq 0$이라면 $|\sqrt[n]{a}| > 0$이기 때문에 양변을 n제곱하면 연습문제 1.6.6의 **(가)**에서 보았듯이

$$0 < |\sqrt[n]{a}|^n = \left|\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right| = |a|$$

이어야 하는데, 이는 $|a| = |0| = 0$임에 모순이다. 따라서 $a = 0$이면 $\sqrt[n]{a} = 0$이므로 정수이다.

이제 $a > 0$이라고, 즉 $a \in \mathbb{N}$이라고 가정한다. 서로소인 두 자연수 p, q가 $q > 1$일 때 자연수 $m \geq 2$에 대해 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^m$을 생각하자. 가정에 의해 p와 q는 겹치는 소인수가 없고, p^m은 소인수로 p의 소인수인 것만을 가지고 q^m은 소인수로 q의 소인수인 것만을 가질 것이므로 p^m과 q^m도 서로소이다. 따라서 $\left(\dfrac{p}{q}\right)^m = \dfrac{p^m}{q^m}$은 기약분수이다. 그런데 $q > 1$이므로 $q^m > 1$이기 때문에 $\dfrac{p^m}{q^m}$은 정수가 될 수 없다. 따라서 자연수 a와 2 이상의 정수 n에 대해 자연수 p와 q가 존재하여 $\sqrt[n]{a} = \dfrac{p}{q}$이라면 $a = \dfrac{p^n}{q^n}$이므로 $q = 1$이어야 함을 알 수 있다. □

먼저 $\sqrt{n+1} > \sqrt{n-1} \geq 0$이므로 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} > 0$임에 주의하자. 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$는 체가 됨은 연습문제 1.6.2에서 이미 살펴보았다.

모순을 이끌어내기 위해 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$이 유리수라 가정해보자. 그러면

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2}$$

도 유리수여야 하고, 즉 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$도 유리수여야 한다. 그런데 그렇다면

$$\begin{aligned} \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{2} &= \sqrt{n+1} \\ \frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}{2} &= \sqrt{n-1} \end{aligned}$$

에서 볼 수 있듯이 $\sqrt{n+1}$과 $\sqrt{n-1}$이 동시에 유리수가 되어야한다. 이는 즉 $\sqrt{n+1}$과 $\sqrt{n-1}$은 둘 다 무리수가 아니라는 뜻이므로 보조정리에 의해 둘 다 정수여야 한다. 그렇기에 어떤 음이 아닌 정수 k와 자연수 l에 대해 $\sqrt{n-1} = k$, $\sqrt{n+1} = k + l$이라 놓을 수 있다. 이제

$$2 = (n+1) - (n-1) = (k+l)^2 - k^2 = 2kl + l^2$$

이 성립해야 하는데, $2kl \geq 0$이므로 $l^2 \leq 2$이어야 하고, 따라서 $l = 1$이어야 한다. 이를 위 식에 대입하면 $2 = 2k + 1$을 얻는데, 이는 k가 정수임에 모순이다. 따라서 가정이었던 $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$이 유리수라는 것이 거짓이어야 하므로, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$는 유리수가 아닌 실수로서 무리수이다.

1.6.8. (가) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$이 (a,b) 위의 모든 점에서 증가상태이지만 증가함수는 아니라고 가정하자. 그러면 어떤 $c,d\in(a,b)$에 대해 $c<d$이지만 $f(c)\geq f(d)$이어야 한다. 집합 S를

$$S=\{x\in[c,d]\ :\ f(x)\geq f(d)\}$$

이라 놓자. 그러면 $c\in S$이므로 $S\neq\varnothing$이고, 따라서 $c\leq\sup S\leq d$이다. 편의상 $\sup S=\gamma$라 하자. f가 γ에서도 증가상태여야 하므로, 적절한 양수 δ가 존재하여 $0<h<\delta$이면 $f(\gamma-h)<f(\gamma)$이어야 한다. 한 편 그러한 δ에 대하여 어떤 양수 ϵ이 $\epsilon<\delta$을 만족하여 $\gamma-\epsilon\in S$이어야 한다. 그러면 $f(d)\leq f(\gamma-\epsilon)<f(\gamma)$이므로 $\gamma\in S$이다.

만약 $\gamma=d$라면 f가 d에서 증가상태이어야 하므로 어떤 양수 δ'가 존재하여 $0<h<\delta'$이면 $f(d-h)<f(d)$이어야한다. 하지만 한편 d가 S의 상계이므로 앞에서 정해진 δ'에 대하여서도 양수 h'가 존재하여 $h'<\delta'$이면서 $f(d-h')\geq f(d)$을 만족해야 하는데 이는 모순이다. 따라서 $\gamma<d$이어야 한다. 그렇다면 $x\in(\gamma,d)$인 모든 x는 $x\notin S$이므로 $f(x)<f(d)<f(\gamma)$인데, f는 γ에서도 증가상태여야 하므로 적당한 $\delta^*>0$에 대하여 $0<h^*<\delta^*$이면 $f(\gamma)<f(\gamma+h^*)$ 인 반면 충분히 작은 h^*에 대해서는 $\gamma+h^*\in(\gamma,d)$일 것이므로 모순이다. 따라서 $c,d\in(a,b)$에 대해 $c<d$이지만 $f(c)\geq f(d)$인 c,d는 존재할 수 없다는 결론을 얻는다. 따라서 f는 (a,b)에서 증가함수이다.

(나) 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$를

$$f(x)=\begin{cases}x^3\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) & \text{if } x\neq0\\ 0 & \text{if } x=0\end{cases}$$

으로 놓자. 0이 아닌 임의의 실수 x에 대해 $0\leq\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)\leq1$이므로 $x^3\leq f(x)\leq2x^3$이 성립한다. 따라서 샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다. 더 나아가,

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|=\left|h^2\left(1+\sin^2\left(\frac{1}{h}\right)\right)\right|\leq2h^2$$

이 성립하므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=0$이 성립하고, 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분 가능하다.

한편 $x\neq0$일 때 $1+\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$은 항상 양수이므로 $x>0$이면 $f(x)>0$이고 $x<0$이면 $f(x)<0$이다. 따라서 $f(x)$는 0에서 증가상태임을 알 수 있다.

이제 0을 포함하는 어떤 구간을 잡아도 $f(x)$가 그 구간에서 증가함수가 아님을 보일 것이다. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 두 실수 α,β에 대해 $\alpha<0<\beta$이면서 $f(x)$가 (α,β)에서 증가함수라고 하자. 자연수 k를 $k\geq2$이면서 $\dfrac{1}{k\pi}<\beta$를 만족하도록 잡자. 그러면

$$\left(\frac{2k+1}{2k}\right)^3=\left(1+\frac{1}{2k}\right)^3\leq\left(1+\frac{1}{4}\right)^3<2$$

이므로 $\dfrac{2}{(2k+1)^3}>\dfrac{1}{(2k)^3}$ 또한 성립하고, 따라서

$$f\left(\frac{2}{(2k+1)\pi}\right)=\frac{8}{(2k+1)^3\pi^3}\cdot(1+1)>\frac{8}{(2k)^3\pi^3}\cdot(1+0)=f\left(\frac{2}{2k\pi}\right)=f\left(\frac{1}{k\pi}\right)$$

이 된다. 그런데 $0<\dfrac{2}{(2k+1)\pi}<\dfrac{1}{k\pi}$이므로 $f(x)$는 (α,β)에서 증가함수라는 가정에 모순이 생긴다. 따라서 $f(x)$는 0을 포함하는 어떤 구간에서도 증가함수일 수 없다.

1.6.9. 임의의 $x, y \in A$에 대해 $\inf A \leq x, y \leq \sup A$이므로 $x - y \leq \sup A - \inf A$이 성립한다. 따라서 $\sup\{x - y : x, y \in A\} \leq \sup A - \inf A$이므로 $\sup A - \inf A$는 $\{x - y : x, y \in A\}$의 상계가 된다.

한편 임의의 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 $x, y \in A$가 존재하여 $\sup A - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \sup A$와 $\inf A \leq y < \inf A + \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. 그러면 그러한 x, y에 대해서는 $x - y > \sup A - \inf A - \epsilon$이므로 어떠한 양수 $\epsilon > 0$에 대해서도 $\sup A - \inf A - \epsilon$은 $\{x - y : x, y \in A\}$의 상계가 될 수 없다.

따라서 $\sup\{x - y : x, y \in A\} = \sup A - \inf A$이다.

1.6.10. 먼저 e의 정의에 의해

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!} = s_n + \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!}$$

이므로 $0 < \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}$임을 보이면 된다. 왼쪽의 부등식이 성립함은 가운데의 항이 양수의 합의 극한이므로 당연하다. 오른쪽 부등식이 성립함은, $n \geq 1$이라고 했으므로

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\
&\leq \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot 3} + \frac{1}{(n+1)\cdot 3\cdot 3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\right) \\
&< \frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

이 성립함에서 알 수 있다.

이제 e가 무리수임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 e가 유리수, 즉 $e > 0$이므로 서로소인 두 자연수 p, q가 존재하여 $e = \frac{p}{q}$가 된다고 가정하자. $e > 2$임은 알고 있다. 한편

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\cdots \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots \\
&\leq 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} \\
&< 3
\end{aligned}$$

이므로 $2 < e < 3$이고, 따라서 $q \geq 2$이다.

앞서 보았듯이 $0 < e - s_q < \frac{1}{q!q}$가 성립하는데, $e - s_q = \frac{p}{q} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{q!}$이고 여기의 모든 항이 $q!$의 약수이므로 통분하여 계산하면 어떤 정수 P에 대해 $e - s_q = \frac{P}{q!}$이 성립함을 알 수

있다. 즉 $0 < \dfrac{P}{q!} < \dfrac{1}{q!q}$가 성립하게 되는데, 각 변에 $q!$를 곱해주면 $0 < P < \dfrac{1}{q} \le \dfrac{1}{2}$가 되어 P가 정수임에 모순이다. 따라서 e가 유리수라는 가정이 잘못되었음을 알 수 있으므로 e는 무리수이다.

1.6.11. 양수 $a > 0$을 임의로 고정하고 n에 대한 귀납법으로 주어진 부등식이 임의의 자연수 n에 대해 성립함을 보이자. 먼저 $n = 1$인 경우, 양변이 모두 $1 + a$가 되므로 주어진 부등식이 성립한다. 이제 어떤 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $n = k$인 경우 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 즉, $(1+a)^k \ge 1+ka$라 가정하자. 그러면

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k(1+a) \ge (1+ka)(1+a) = 1 + (k+1)a + ka^2 \ge 1 + (k+1)a$$

임으로부터 $n = k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립함을 볼 수 있다. 따라서 주어진 부등식은 임의의 자연수 n에 대해 성립한다.

1.6.12. (가) 먼저 $|a| < 1$이라 가정하자. 그러면 $\dfrac{1}{|a|} > 1$이므로 $\alpha = \dfrac{1}{|a|} - 1$이라 두면 $\alpha > 0$이고 $|a| = \dfrac{1}{1+\alpha}$이다. 따라서 바로 앞의 연습문제의 부등식을 사용하면

$$(1+\alpha)^n \ge 1 + n\alpha > n\alpha$$

을 얻고 이로부터

$$\frac{1}{n\alpha} > \frac{1}{(1+\alpha)^n} = \left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n = |a|^n = |a^n|$$

이 성립함을 알 수 있다. 이제 임의의 $\epsilon > 0$을 잡자. 그러면 충분히 큰 N_0에 대해 $N > N_0$이라면 $\dfrac{1}{N\alpha} < \epsilon$이게 된다. 따라서 그러한 N_0에 대해서는 $N > N_0$이면 $\left||a^N| - 0\right| = \left|a^N\right| < \epsilon$이 성립하게 되므로, 극한의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$이 된다.

이제 $|a| > 1$이라 하자. 그러면 $\beta = |a| - 1$이라 놓으면 $\beta > 0$이므로 바로 앞의 연습문제의 부등식을 이용하면

$$|a^n| = |a|^n = (1+\beta)^n \ge 1 + n\beta$$

이 성립한다. 이제 모순을 이끌어내기 위하여 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴한다고 가정하고 어떤 실수 L에 대해 $\lim_{n\to\infty} a^n = L$ 이라 가정하자.

만약 a가 음수여서 $a < -1$이면 n이 홀수일 때는 $a^n < 0$이고 n이 짝수일 때는 $a^n > 0$이 될 것이기 때문에, $L \ne 0$이라면 L의 부호에 따라 $0 < \epsilon < |L|$인 ϵ에 대해 모든 홀수 또는 짝수 n에 대해 $a_n \notin (L-\epsilon, L+\epsilon)$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} a^n$이 L일 수 없으므로, $L = 0$이어야 한다. 그런데 $\epsilon = 1$로 두면

$$|a^n - L| = |a^n| \ge 1 + n\beta > 1 = \epsilon$$

이므로 $\lim_{n\to\infty} a^n = L$이라는 가정에 모순이다. 따라서 $a < 0$이면 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 수렴할 수 없다.

반대로 a가 양수여서 $a > 1$인 경우에는 임의의 자연수 n에 대해 $a^n > 0$이므로 $|a^n| = a^n$이다. 따라서 어떤 양수 ϵ에 대해서도 충분히 큰 N_0에 대해서는 $N > N_0$이면 $a^N \ge 1+N\beta > L+\epsilon$이어야 하므로 극한의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty} a^n$은 어떤 실수 L에 대해서도 L일 수 없다. 따라서 이 경우에도 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 수렴할 수 없다.

따라서 $|a| > 1$이면 $\{a^n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 발산한다.

(나) 먼저 $a > 1$이라 하자. 그러면 임의의 자연수 n에 대하여 $a^{1/n} > 1^{1/n} = 1$이다. 자연수 n을 고정하고, $\alpha = \dfrac{a-1}{n}$이라 놓자. 그러면 $a = 1 + n\alpha$이므로 앞의 연습문제의 부등식을 이용하면

$$1 + \frac{a-1}{n} = 1 + \alpha \ge (1+n\alpha)^{1/n} = a^{1/n} > 1$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right) = 1$이고 위의 부등식은 모든 n에 대해 성립하므로, 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$임을 알 수 있다.

반대로 $a < 1$이라 하자. 그러면 $\frac{1}{a} > 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{1/n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^{1/n} = 1$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^{1/n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{1/n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

이 되는 것을 볼 수 있다.

마지막으로 $a = 1$이면 임의의 자연수 n에 대해서 $a^{1/n} = 1$이 되기 때문에 $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$이다. 따라서 $a > 0$이면 $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$이 된다.

(다) $n > 1$인 경우만 생각하자. 먼저 $\sqrt{n}^{1/n} = n^{1/2n} > 1^{1/2n} = 1$임에 유의하여 $a_n = \sqrt{n}^{1/n} - 1$이라 두면 $a_n > 0$이다. 따라서 앞의 연습문제의 부등식을 이용하면

$$\sqrt{n} = (1+a_n)^n \geq 1 + na_n > na_n$$

에서 $0 \leq a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$임을 알 수 있다. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}^{1/n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}^{1/n} = 1$이고, 이로부터 $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = \left(\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}^{1/n}\right)^2 = 1$임을 알 수 있다.

1.6.13. 먼저 $x \neq y$라 하자. 일반성을 잃지 않고 $x > y$라 가정할 수 있다. $\epsilon = \frac{|x-y|}{3}$로 두면 두 구간 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$과 $(y-\epsilon, y+\epsilon)$은 서로소이다. 극한의 정의에 의해, 어떤 두 자연수 N_1과 N_2가 존재하여 $N > N_1$이면 $x_N \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$이고 $N > N_2$이면 $y_N \in (y-\epsilon, y+\epsilon)$이다. 따라서 $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$라 두면 $N > N_0$인 모든 자연수 N에 대하여 $y_N < y+\epsilon < x-\epsilon < x_N$이 되어, 항상 $\max\{x_N, y_N\} = x_N$이고 $\min\{x_N, y_N\} = y_N$이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\max\{x_n, y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n = x = \max\{x, y\}$$
$$\lim_{n\to\infty}\min\{x_n, y_n\} = \lim_{n\to\infty} y_n = y = \min\{x, y\}$$

이 된다.

반대로 $x = y$라 가정하자. 임의의 양수 ϵ이 주어지면 어떤 자연수 N_1, N_2가 존재하여 $N > N_1$이면 $x_N \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$이고 $N > N_2$이면 $y_N \in (x-\epsilon, x+\epsilon)$을 만족한다. 따라서 $N_0 = \max\{N_1, N_2\}$라 하면 $N > N_0$인 모든 자연수 N에 대하여 x_N과 y_N 둘 다 구간 $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ 안에 들어오게 된다. 따라서 그러한 N_0에 대해서는 $N > N_0$이면 $|\max\{x_N, y_N\} - x| < \epsilon$이고 $|\min\{x_N, y_N\} - x| < \epsilon$이므로 극한의 정의에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\max\{x_N, y_N\} = x = \lim_{n\to\infty}\min\{x_N, y_N\}$$

인데 $x = \max\{x, y\} = \min\{x, y\}$이므로 주어진 식들이 성립한다.

1.6.14. 만약 $m!x$이 정수라면 $|\cos(m!\pi x)| = 1$이고 $m!x$이 정수가 아니라면 $|\cos(m!\pi x)| < 1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{if } m!x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{if } m!x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 이제 x가 유리수라고 가정하자. 그러면 어떤 정수 p와 자연수 q에 대해 $x = \dfrac{p}{q}$라고 쓸 수 있는데, $m \ge q$이면 $m!x \in \mathbb{Z}$이므로

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)\right) = 1$$

이 된다. 한편 x가 무리수이면 어떤 자연수 m에 대해서도 $m!x \notin \mathbb{Z}$이므로 $\left\{\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$은 모든 항이 0인 수열이다.

따라서 결과를 종합하면

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}(m!\pi x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

임을 알 수 있다.

1.6.15. 만약 $a_1 = b_1$이라면 $a_2 = b_2 = a_1$임을 볼 수 있다. 따라서 임의의 자연수 m과 n에 대해 $a_m = b_n = a_1$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a_1$이다. 따라서 $a_1 \ne b_1$인 경우만 살펴보면 된다. 일반성을 잃지 않고 $a_1 > b_1$이라 가정하자. 먼저 임의의 자연수 n에 대해

$$(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} > \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$$

이므로, n에 대한 수학적 귀납법을 이용하면 임의의 자연수 n에 대해 $a_n > b_n$임을 알 수 있다. 이로부터 임의의 자연수 n에 대해 $a_n = \dfrac{a_n + a_n}{2} > \dfrac{a_n + b_n}{2} = a_{n+1}$이고 $b_n = \sqrt{b_n b_n} < \sqrt{a_n b_n} = b_{n+1}$임 또한 알 수 있고, 따라서 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조감소수열이고 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조증가수열임을 알 수 있다. 그런데 임의의 자연수 n에 대해서 $a_1 > a_n > b_n > b_1$이므로 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 b_1에 의해 아래로 유계, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 a_1에 의해 위로 유계이고, 따라서 두 수열 모두 수렴한다. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim_{n\to\infty} b_n = M$이라 하자. 이제 $L = M$임을 보이면 된다.

모순을 이끌어내기 위해 $L \ne M$이라 가정해 보자. 만약 $L < M$이라면 $\delta = \dfrac{M-L}{3}$으로 두었을 때 어떤 두 자연수 N_1, N_2가 존재하여 $n > N_1$이면 $a_n \in (L-\delta, L+\delta)$이고 $n > N_2$이면 $b_n \in (M-\delta, M+\delta)$을 만족한다. 따라서 $N > \max\{N_1, N_2\}$인 N을 잡으면 $a_N < L+\delta < M-\delta < b_N$이 되어, 앞서 보인 $a_N > b_N$에 모순이다. 따라서 $L > M$이어야 한다.

$\epsilon = \dfrac{L-M}{3}$으로 놓으면 어떤 두 자연수 N_3와 N_4가 존재하여 $N > N_3$이면 $a_N \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$이고 $N > N_4$이면 $a_N \in (M-\epsilon, M+\epsilon)$을 만족하게 된다. 따라서 $N_5 = \max\{N_3, N_4\}$로 두면 $N > N_5$인 모든 자연수 N에 대해서 $b_N < M+\epsilon < L-\epsilon < a_N$이므로 $a_N - b_N > \epsilon$이어야 한다. 그런데, 임의의 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n - b_n}{2} = a_{n+1} - b_n > a_{n+1} - b_{n+1}$$

이므로 n에 대한 수학적 귀납법을 사용하면 $a_n - b_n < \dfrac{a_1 - b_1}{2^{n-1}}$임을 알 수 있다. 그런데 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}} = 0$이므로 어떤 자연수 N_0에 대해서 $N > N_0$이면 $a_N - b_N < \epsilon$이어야 하는데, $N > \max\{N_5, N_0\}$인 N에 대해서는 $a_N - b_N < \epsilon$이면서 동시에 $a_N - b_N > \epsilon$이어야 하므로 모순이다.

따라서 $L = M$임을 알 수 있고, 즉 주어진 두 수열이 같은 극한으로 수렴한다.

1.6.16. (가) 가정에 의해 어떤 자연수 N_0이 존재하여 $N > N_0$ 이면 $a_N \le b_N$이다. 모순을 이끌어내기 위해 $\beta < \alpha$라고 가정하자. 그러면 $\epsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{3}$에 대해, 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$이면

$b_n < \beta + \epsilon$이다. 그런데 $a_n > \alpha - \epsilon$을 만족하는 n이 무한히 많아야 하므로 $N_2 > \max\{N_0, N_1\}$이면서 $a_{N_2} > \alpha - \epsilon$을 만족하는 자연수 N_2를 고를 수 있다. 그런데 그러면

$$a_{N_2} > \alpha - \epsilon > \beta + \epsilon > b_{N_2}$$

이 성립해야 하므로 모순이다. 따라서 $\alpha \le \beta$이어야 한다.

(나) 자연수 n이 주어지면 $m \ge n$인 모든 m에 대해 $a_n \le \sup\limits_{k \ge n} a_k$이고 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해서도 마찬가지이므로

$$a_m + b_m \le \sup_{k\ge n} a_k + \sup_{k \ge n} b_k$$

이 모든 $m \ge n$인 m에 대해 성립한다. 따라서 $\sup\limits_{k\ge n} a_k + \sup\limits_{k\ge n} b_k$이 $\{(a_n+b_n), (a_{n+1}+b_{n+1}), \cdots\}$의 상계가 된다. 즉,

$$\sup_{k \ge n}(a_k + b_k) \le \sup_{k\ge n} a_k + \sup_{k\ge n} b_k$$

이 성립한다. 이제 양변에 $n \to \infty$일 때의 극한을 취해주면

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$$

임을 알 수 있다.

(다) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 양수들의 유계수열이므로 $0 \le \alpha, \beta < \infty$이고, 따라서 $\alpha\beta$가 잘 정의된다. 이제 **(나)**의 증명과정에서 덧셈을 곱셈으로 바꾸면

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$$

임을 보일 수 있다.

이제 **(나)**와 **(다)**에서 등호가 성립하지 않는 예시를 보기 위해 $a_n = (-1)^n + 2$, $b_n = -(-1)^n + 2$로 두자. 그러면 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 3$이다. 그런데 n의 값에 상관없이 $a_n + b_n = 4$, $a_n b_n = 3$이므로 이 경우

$$\begin{aligned} 4 \ = \ \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ &\ne \ \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \ = \ 6 \\ 3 \ = \ \limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \ &\ne \ \left(\limsup_{n\to\infty} a_n\right)\left(\limsup_{n\to\infty} b_n\right) \ = \ 9 \end{aligned}$$

임을 볼 수 있다.

하극한에 대해 각각에 대응하는 명제와 그 증명은 다음과 같다. 아래에서는 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$로 둔다.

(가) 충분히 큰 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$이면 $\alpha \le \beta$이다.

가정에 의해 어떤 자연수 N_0이 존재하여 $N > N_0$ 이면 $a_N \le b_N$이다. 모순을 이끌어내기 위해 $\beta < \alpha$라고 가정하자. 그러면 $\epsilon = \dfrac{\alpha - \beta}{3}$에 대해, 자연수 N_1이 존재하여 $n > N_1$이면 $a_n > \alpha - \epsilon$이다. 그런데 $b_n < \beta + \epsilon$을 만족하는 n이 무한히 많아야 하므로 $N_2 > \max\{N_0, N_1\}$이면서 $b_{N_2} < \beta + \epsilon$을 만족하는 자연수 N_2를 고를 수 있다. 그런데 그러면

$$a_{N_2} > \alpha - \epsilon > \beta + \epsilon > b_{N_2}$$

이 성립해야 하므로 모순이다. 따라서 $\alpha \le \beta$이어야 한다.

(나) $\liminf\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \ge \alpha + \beta$이다.

자연수 n이 주어지면 $m \geq n$인 모든 m에 대해 $a_n \geq \inf_{k\geq n} a_k$이고 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해서도 마찬가지이므로

$$a_m + b_m \geq \inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k$$

이 모든 $m \geq n$인 m에 대해 성립한다. 따라서 $\inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k$이 $\{(a_n+b_n), (a_{n+1}+b_{n+1}), \cdots\}$의 하계가 된다. 즉,

$$\inf_{k\geq n} (a_k + b_k) \geq \inf_{k\geq n} a_k + \inf_{k\geq n} b_k$$

이 성립한다. 이제 양변에 $n \to \infty$일 때의 극한을 취해주면

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = \alpha + \beta$$

임을 알 수 있다.

(다) 만일 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 양수들의 수열이면 $\liminf_{n\to\infty} (a_n b_n) \geq \alpha\beta$이다.

$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 양수들의 유계수열이므로 $0 \leq \alpha, \beta < \infty$이고, 따라서 $\alpha\beta$가 잘 정의된다. 이제 **(나)**의 증명과정에서 덧셈을 곱셈으로 바꾸면

$$\liminf_{n\to\infty} (a_n b_n) \geq \left(\liminf_{n\to\infty} a_n\right)\left(\liminf_{n\to\infty} b_n\right) = \alpha\beta$$

임을 보일 수 있다.

1.6.17. 음이 아닌 정수 n에 대하여 P_k를 k차 정수 계수 다항식들의 집합이라 하자. 먼저 P_k가 셀 수 있는 집합임을 보일 것이다. P_k는

$$\left\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \;:\; a_0, a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{Z}, a_k \neq 0\right\}$$

와 같이 나타낼 수 있다. $\mathbb{Z}$에서 $\mathbb{N}$으로 가는 전단사함수 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$이 존재함은 이미 알고 있고, $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$을

$$1, -1, 2, -2, 3, \cdots$$

와 같이 늘어놓으면 $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$에서 $\mathbb{N}$으로 가는 전단사함수 $f_0 : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ 또한 존재함을 알 수 있다. 따라서 P_k의 원소 $a_0 + a_1 x + \cdots a_k x^k$에 대하여 $g_k : P_k \to \mathbb{N}^{k+1}$을

$$g\left(a_0 + a_1 x + \cdots a_k x^k\right) = (f(a_0), f(a_1), \cdots, f(a_{k-1}), f_0(a_k))$$

으로 정의하면 g가 전단사함수가 됨은 쉽게 알 수 있다.

$\mathbb{N}^2$과 $\mathbb{N}$ 사이에 전단사함수가 존재함은 $\mathbb{Q}$와 $\mathbb{N}$ 사이에 전단사함수가 존재함을 보일 때처럼 $\mathbb{N}^2$의 원소들을

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\ (0,3), \cdots$$

와 같이 늘어놓아 확인할 수 있다. 이 전단사함수를 $h_2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$으로 놓고, 이로부터 임의의 자연수 m이 주어졌을 때 $\mathbb{N}^m$와 $\mathbb{N}$ 사이에 전단사함수가 존재함을 보이자. m에 대한 귀납법을 사용할 것이다. $m = 1$일 때는 자명하며, $m = 2$인 경우는 이미 보았다. 어떤 자연수 m에 대해 $\mathbb{N}^m$에서 $\mathbb{N}$으로 가는 전단사함수 $h_m : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$가 있을 때, 전단사함수 $h_{m+1} : \mathbb{N}^{m+1} \to \mathbb{N}$이 존재함을 보일 것이다. 임의로 $(b_1, b_2, \cdots, b_{m+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$이 주어졌을 때, h_{m+1}을

$$h_{m+1}\left((b_1, b_2, \cdots, b_m, b_{m+1})\right) = h_2\left(h_m\left(b_1, b_2, \cdots, b_m\right), b_{m+1}\right)$$

으로 정의하면 h_2와 h_m이 전단사함수임으로부터 h_{m+1}도 전단사함수임을 확인할 수 있다.

이제 음이 아닌 정수 m에 대하여 $F_k : P_k \to \mathbb{N}$을 $F_k = h_k \circ g_k$으로 정의하면 F_k도 전단사함수가 된다. 따라서 P_k는 셀 수 있는 집합이다.

모든 정수 계수 다항식의 집합을 P라 하자. 그러면 $P = \bigcup_{k=0}^{\infty} P_k$이고, 이때 P_0, P_1, P_2, $\cdots$는 쌍끼리 서로소이다. 함수 $G : P \to \mathbb{N}^2$을 다음과 같이 정의하자. $p(x) \in P$가 주어졌을 때, 음이 아닌 정수 k가 유일하게 존재하여 $p(x) \in P_k$이다. 이때 k는 $p(x)$의 차수가 된다. 이때

$$G(p(x)) = \Big(k, F_k(p(x)\Big)$$

으로 정의하면, F_k가 전사함수이므로 G도 전사함수임은 쉽게 알 수 있다. 또한 $G(p(x))$의 첫 번째 성분이 k이기 때문에 $p(x), q(x) \in P$에 대해 $G(p(x)) = G(q(x))$이면 $p(x)$와 $q(x)$의 차수가 같고, 차수가 같은 다항식에 대해 F_k에 의한 함수값이 같아야 하는데 F_k가 단사함수이므로 $p(x) = q(x)$이어야 한다. 따라서 G는 단사함수가 되고, 나아가 전단사함수가 된다. 이제 $F : P \to \mathbb{N}$을 $F = h_2 \circ G$로 정의하면 G와 h_2가 각각 전단사함수이므로 F도 전단사함수가 된다. 따라서 모든 정수 계수 다항식의 집합 P는 셀 수 있는 집합이다.

마지막으로 정수 계수 다항식들의 실근 전체의 집합을 Q라 놓고, Q가 셀 수 있는 집합임을 보이고자 한다. P의 원소들을

$$P = \{p_j(x) : p_j(x) = F^{-1}(j), j \in \mathbb{N}\}$$

으로 이름 붙이자. 어떤 자연수 k에 대해 $p_k(x)$의 차수가 m이라면 p_k는 많아야 m개의 실근을 갖는다. p_k가 l개의 실근 $r_1, r_2, \cdots, r_l$을 가진다고 하고, 이때 r_j를 $\mathbb{N}^2$의 원소 (k, j)에 대응시키자. 그러면 이 대응에 따라서 $\mathbb{N}^2$을 늘어놓는 순서

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\ (0,3), \cdots$$

에 따라, $\mathbb{N}^2$의 원소 중 대응되지 않는 것을 건너뛰고 각각에 대응되는 순서대로 Q의 원소를 늘어놓을 수 있다. 이렇게 늘어놓으면 같은 Q의 원소가 여러 번 등장할 수 있으므로, 이미 앞에서 등장한 Q의 원소를 지우자. 그 뒤 늘어놓인 순서대로 $q_1, q_2, \cdots$로 이름 붙이면 함수 $H : \mathbb{N} \to Q$를 $H(n) = q_n$으로 정의하면 H는 단사함수가 된다. 한 편 H는 전사함수 또한 되는데, 이는 임의의 Q의 원소 q는 정의상 q를 실근으로 가지는 P의 원소 $p_n(x)$가 존재함으로부터 알 수 있다 따라서 Q 또한 $\mathbb{N}$과 H에 의해 일대일 대응이 되므로 셀 수 있는 집합이다.

1.6.18. $[0,1]$에서 $(0,1)$로 가는 함수 $f : [0,1] \to (0,1)$를

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & x = 0\text{일 때} \\[2ex] \dfrac{1}{n+2} & \text{어떤 자연수 } n\text{이 존재하여 } x = \dfrac{1}{n} \text{ 일 때} \\[2ex] x & \text{위에 해당되지 않을 때} \end{cases}$$

와 같이 정의하자. 또한 $N = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \cdots\right\} \subset (0,1)$이라 하자.

먼저 f가 전사함수임을 보이자. $x \in (0,1)$을 하나 고르자. 만약 $x \in N$이면 어떤 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $x = \dfrac{1}{n}$인데, $x = \dfrac{1}{2}$이라면 $f(0) = x$, $x \neq \dfrac{1}{2}$라면 $f\left(\dfrac{1}{n-2}\right) = x$이다. 반대로

$x \notin N$이라면 $f(x) = x$이므로 $(0,1)$의 모든 원소가 f에 의해 $[0,1]$의 원소와 대응된다. 따라서 f는 전사함수이다.

이제 f가 단사함수임을 보이자. 먼저, f의 정의역을 $N \cup \{0,1\}$으로 제한하면 f는 $N \cup \{0,1\}$과 N 사이의 일대일 대응이 된다는 것에 유의하자. 어떤 $x, y \in [0,1]$에 대해 $f(x) = f(y)$라 가정하자. 만약 $x, y \in N \cup \{0,1\}$이라면 앞에서 유의한 점에 의해 $x = y$이다. 또한 만약 둘 중 하나만 $N \cup \{0,1\}$이라면 일반성을 잃지 않고 $x \in N \cup \{0,1\}$이고 $y \notin N \cup \{0,1\}$이라 가정할 수 있는데, 그러면 $f(x) \in N$인 반면 $f(y) \in N$이라면 $y \notin N \cup \{0,1\}$에 모순이므로 $f(y) \notin N$이 되어 $f(x) \neq f(y)$일 수밖에 없다. 따라서 x, y 둘 중 하나만 $N \cup \{0,1\}$의 원소일 수는 없다. 마지막으로 둘 다 $N \cup \{0,1\}$인 경우에는, $x = f(x) = f(y) = y$가 성립한다. 따라서 어떠한 x, y에 대해서도 $f(x) = f(y)$이면 $x = y$이므로 f는 단사함수이다. 따라서 f는 $[0,1]$과 $(0,1)$ 사이의 전단사함수이다.

1.6.19. 먼저 전단사함수인 $h : [0,1] \to (0,1]$이 존재함을 보이자. h를

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x = 0\text{일 때} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{어떤 자연수 } n\text{이 존재하여 } x = \dfrac{1}{n} \text{ 일 때} \\ x & \text{위에 해당되지 않을 때} \end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 문제 1.6.18에서의 N을 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$으로 대신하여 비슷하게 논리를 전개하여 h가 전단사함수임을 보일 수 있다. 또한 $h' : [0,1]^2 \to (0,1]^2$를 $h'(x,y) = (h(x), h(y))$으로 정의하면 h'도 전단사함수이다.

이제 전단사함수인 $g : (0,1] \to (0,1]^2$이 존재함을 보이자. $(0,1]$의 원소를 (십진법) 소수로 나타내었을 때 만약 유한소수라면 무한히 반복되는 9를 이용한 표기를 선택해서 무한소수로 만들자. 예를 들어, $\frac{1}{2}$를 소수로 표현한다면 0.5 또는 $0.500\ldots$ 대신 $0.499\ldots$로 표현하자는 것이다. 이렇게 하면 같은 숫자가 여러 가지 다른 방식으로 표현되는 것 또한 피할 수 있다. 임의의 $x \in (0,1]$에 대해, x를 소수로 나타내었을 때 $0.a_1a_2a_3\cdots$이 된다고 하자. 이때 각 a_j는 숫자들의 묶음으로, 이 묶음은 0이 아닌 숫자를 만났을 때 끝나고 다음 묶음으로 넘어간다. 예를 들어, $x = 0.01004071700082\ldots$이면 $a_1 = 01$, $a_2 = 004$, $a_3 = 07$, $a_4 = 1$, $a_5 = 7$, $a_6 = 0008$, $\cdots$이 된다. 이때 $g(x) = (0.a_1a_3a_5\cdots, 0.a_2a_4a_6\cdots)$이라 정의한다. 그러면 숫자 묶음 $a_1, a_2, \cdots$이 전부 0이 아닌 숫자로 끝나기 때문에 $g(x)$의 첫 번째 성분과 두 번째 성분 모두 소수점 아래 어떤 자리를 고르든 그보다 더 아랫자리에 0이 아닌 수가 존재하고, 따라서 소수점 아래 어떤 자리 이후로 0만이 나오는 일은 일어나지 않는다. 이는 즉 g가 함수값이 유일하게 결정되는, 잘 정의된 함수임을 보여준다.

이와 같이 정의된 g를 생각하면, x에서 $g(x)$를 구하는 과정의 역과정 또한 $(0,1]^2$의 원소를 골라 각 성분을 묶음으로 분해한 뒤 순서를 엇갈려 합치는 과정이므로 g는 역함수가 존재하는 함수이다. 즉 이렇게 구성된 g는 전단사함수이다. 따라서 $f = (h')^{-1} \circ g \circ h$으로 정의하면 f는 $[0,1]$에서 $[0,1]^2$으로 가는 함수이자 전단사함수이므로 우리가 구하고자 한 함수가 된다.

1.6.20. (가) X에서 $\{0,1\}$로 가는 함수 전체의 집합을 2^X으로 나타내자. 함수 $\mathfrak{f} : 2^X \to \mathcal{P}(X)$를 2^X의 원소 f이 주어졌을 때

$$\mathfrak{f}(f) = \{x \in X \ : \ f(x) = 1\}$$

으로 정의하자. 먼저 $\mathfrak{f}$이 단사함수임을 보이자. $f, g \in 2^X$에 대하여 $f \neq g$라 하자. 그럼 어떤 $x \in X$에 대해 $f(x) \neq g(x)$이다. 일반성을 잃지 않고 $f(x) = 1$, $g(x) = 0$이라 가정할 수 있다. 그럼

$x \in \mathfrak{f}(f)$ 인데 비해 $y \in \mathfrak{f}(g)$ 이므로 $\mathfrak{f}(f) \neq \mathfrak{f}(g)$ 이다. 따라서 $\mathfrak{f}$는 단사함수이다. 반면 X의 부분집합 A가 주어졌을 때 $x \in A$이면 $f(x) = 1$, $x \notin A$이면 $f(x) = 0$으로 함수 $f : X \to \{0, 1\}$을 정의할 수 있고, 이러한 f에 대해 $\mathfrak{f}(f) = A$이므로 $\mathfrak{f}$는 전사함수이다.

따라서 2^X와 $\mathcal{P}(X)$ 사이에 전단사함수 $\mathfrak{f}$가 존재한다.

(나) 모순을 이끌어내기 위해 전사함수 $\mathfrak{g} : X \to \mathcal{P}(X)$가 존재한다고 가정하자. X의 부분집합 S를

$$S = \{x \in X : x \notin \mathfrak{g}(x)\}$$

이라 정의하자. $\mathfrak{g}$가 전사함수이므로, 어떤 $s \in X$에 대해 $\mathfrak{g}(s) = S$이어야 한다. 그렇다면 S의 정의상 s는 $S = \mathfrak{g}(s)$의 원소가 될 수 없다. 그런데 이것은 $s \notin \mathfrak{g}(s)$을 의미하므로 다시 S의 정의상 s는 S의 원소가 되어야 한다. 이로부터 모순이 발생하므로, 전사함수 $\mathfrak{g}$가 존재한다는 가정이 거짓이어야 함을 알 수 있다. 따라서 X에서 $\mathcal{P}(X)$으로 가는 전사함수는 존재할 수 없다.

제 2 장

좌표공간의 위상적 성질

2.7.1. (가) 각 $x \in X$에 대해 $f, g, h : X \to \mathbb{R}$이 주어졌다고 할 때, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 실수라는 점에 주목하면 (벡1), (벡4), (벡5), (벡6), (벡7)은 전부 실수의 성질로부터 성립한다는 것을 알 수 있다. 나머지 두 조건을 살펴보자.

(벡2) $\mathbf{0} : X \to \mathbb{R}$을 모든 $x \in X$에 대해 $\mathbf{0}(x) = 0$인 함수로 정의하자. 그러면 임의의 $f : X \to \mathbb{R}$와 $x \in X$에 대해

$$f(x) + \mathbf{0}(x) = f(x) = \mathbf{0}(x) + f(x)$$

이므로

$$f + \mathbf{0} = \mathbf{0} + f = f$$

이 성립한다.

(벡3) 각 $f : X \to \mathbb{R}$에 대해 $-f : X \to \mathbb{R}$을, 각 $x \in X$에 대해

$$(-f)(x) = -f(x)$$

으로 정의하면, 위에서 정의한 $\mathbf{0}$와 임의의 $x \in X$에 대해

$$f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x) = -f(x) + f(x) = (-f)(x) + f(x)$$

이므로

$$f + (-f) = 0 = (-f) + f$$

이 성립한다.

(나) 문제에서 정의된 대응 $x \mapsto f_x$를 $g : \mathbb{R}^n \to (\{1, \cdots, n\} \to \mathbb{R})$으로 나타내자. 다시 말해, g를 각 $x \in \mathbb{R}^n$에 대해 $g(x) = f_x$가 되도록 정의하자. g가 전단사함수임을 보이기 위해 먼저 g가 단사임을 먼저 보이자. $x, y \in \mathbb{R}^n$이 $x \neq y$를 만족한다고 하자. 그러면 어떤 $i \in \{1, \cdots, n\}$에 대해 $x_i \neq y_i$이어야 한다. 그런데 그러면

$$f_x(i) = x_i \neq y_i = f_y(i)$$

이므로 $g(x) = f_x \neq f_y = g(y)$이다. 따라서 $x \neq y$이면 $g(x) \neq g(y)$이므로, g는 단사이다.

이제 g가 전사임을 보이면 된다. 그런데 임의의 $h : \{1, \cdots, n\} \to \mathbb{R}$이 주어졌을 때

$$\tilde{h} = (h(1), h(2), \cdots, h(n)) \in \mathbb{R}^n$$

를 생각하면 모든 $i = 1, \cdots, n$에 대해 $g\left(\tilde{h}\right)(i) = h(i)$이므로 $g\left(\tilde{h}\right) = h$임을 알 수 있다. 따라서 임의의 $\{1, \cdots, n\}$에서 $\mathbb{R}$로 가는 함수에 대해 g에 의한 상이 그 함수가 되는 $\mathbb{R}^n$의 원소가 존재하므로 g는 전사이다. 따라서 g는 전단사함수이다.

(다) $\mathbb{R}^n$ 상의 벡터의 합과 스칼라곱을 정의한 방식에 따라 모든 $i \in \{1, \cdots, n\}$에 대해

$$f_{x+y}(i) = (x+y)_i = x_i + y_i = f_x(i) + f_y(i)$$

이고

$$f_{ax}(i) = (ax)_i = ax_i = af_x(i)$$

이므로

$$f_{x+y} = f_x + f_y, \quad f_{ax} = af_x$$

이 성립한다.

2.7.2. 편의를 위해 $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$으로 두자. 그러면 x와 y의 각 성분 x_1, x_2와 y_1, y_2에 대해 $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$라고 쓸 수 있다.

함수 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$이 주어져서 (내1), (내2), (내3)을 만족한다고 하자. 그러면 임의의 $z, v, w \in \mathbb{R}^2$에 대해

$$f(z, v+w) = f(v+w, z) = f(v, z) + f(w, z) = f(z, v) + f(z, w)$$

와 함께 임의의 $a \in \mathbb{R}$에 대해

$$f(z, aw) = f(aw, z) = af(w, z) = af(z, w)$$

이 성립하므로

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= f(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= f(x_1e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + f(x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= f(x_1e_1, y_1e_1) + f(x_1e_1, y_2e_2) + f(x_2e_2, y_1e_1) + f(x_2e_2, y_2e_2) \\ &= x_1y_1f(e_1, e_1) + x_1y_2f(e_1, e_2) + x_2y_1f(e_2, e_1) + x_2y_2f(e_2, e_2) \end{aligned}$$

이 됨을 알 수 있다. 따라서 $a = f(e_1, e_1)$, $b = f(e_1, e_2)$, $c = f(e_2, e_1)$, $d = f(e_2, e_2)$라 두면 (내1), (내2), (내3)을 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$는

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

의 꼴로 표시됨을 알 수 있다.

이제 이러한 함수들 중 (내1), (내2), (내3), (내4), (내5)를 모두 만족하는 것들을 골라내자. 사실 (내1)에 의해 $f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1)$이어야 하므로 $b = c$이어야 한다. 이제 (내4)를 만족하려면

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$$

이 0보다 크거나 같아야 하고, (내5) 또한 만족하기 위해선 $a = f(e_1, e_1)$와 $d = f(e_2, e_2)$은 양수여야 한다. 그러면

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \left(d - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2$$

와 같이 쓸 수 있고, 위의 식이 항상 0보다 크거나 같으려면 $d - \frac{b^2}{a} \geq 0$이어야 함을 알 수 있다. 그런데 (내5)를 만족한다면 위의 식의 값이 0인 경우는 $x_1 = x_2 = 0$인 경우 뿐만이어야 하는데, $d - \frac{b^2}{a} = 0$이면 $x_1 = -b, x_2 = a \neq 0$인 경우에도 식의 값이 0이 되므로 (내5)를 만족하기 위해서는 $d - \frac{b^2}{a} > 0$이어야 한다. 따라서 (내1), (내2), (내3), (내4), (내5)를 모두 만족하는 함수 $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$는

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2$$

와 같이 나타내었을 때 $b = c, a > 0, d > 0, ad - bc > 0$을 만족해야 한다. 마지막 부등식의 조건이 그 앞의 조건들에 의해 $d - \frac{b^2}{a} > 0$와 동치임에 주목하자. 한 가지 주목할만한 점은, 위의 조건들이 행렬

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

이 양의 정부호 대칭행렬이라는 것과 동치라는 것이다.

2.7.3. 노음의 정의와 내적의 성질에 따라

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= 2\left(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle\right) \\
&= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)
\end{aligned}$$

이 성립함을 보일 수 있다. 한편 노음 $\|\cdot\|_1$과 $\|\cdot\|_\infty$에 대해서는 평행사변형 공식이 성립하지 않는데, 예를 들어 $x = (1, 0, \cdots, 0)$, $y = (0, 1, 0, \cdots, 0)$에 대해서는

$$\begin{aligned}
x + y &= (1, 1, 0, \cdots, 0) \\
x - y &= (1, -1, 0, \cdots, 0)
\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|_1 = 2, \quad \|x-y\|_1 = 2, \quad \|x\|_1 = \|y\|_1 = 1, \\
&\|x+y\|_\infty = 1, \quad \|x-y\|_\infty = 1, \quad \|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1
\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 이로부터 평행사변형 공식이 성립하지 않음 또한 알 수 있다.

2.7.4. 먼저 $\operatorname{int} A$가 열린 집합임을 보이기 위해, $x \in \operatorname{int} A$를 생각하자. 그러면 정의에 의해 어떤 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $N(x, \varepsilon) \subset A$이다. 그런데 이때 임의로 $y \in N(x, \varepsilon)$을 고정하고 $\delta = \varepsilon - \|x - y\|$라 놓으면 $\delta > 0$이고, $\|y - z\| < \delta$를 만족하는 모든 z에 대해

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \|x - y\| + \|y - z\| \\ &< \|x - y\| + \varepsilon - \|x - y\| \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

이므로 $z \in N(x, \varepsilon)$이다. 이는 즉 $N(y, \delta) \subset N(x, \varepsilon) \subset A$임을 의미하므로, 모든 $y \in N(x, \varepsilon)$에 대해 y는 A의 내점이 된다. 따라서 $N(x, \varepsilon) \subset \operatorname{int} A$임을 알 수 있다. 이때 x를 $\operatorname{int} A$ 안에서 임의로 잡았으므로 열린집합의 정의에 의해 $\operatorname{int} A$는 열린 집합이 된다.

한편 열린집합 $U \subset A$에 대해, 임의로 $x \in U$를 잡으면 어떤 $\epsilon > 0$이 존재하여 $N(x, \epsilon) \subset U \subset A$이 된다. 그러면 정의에 의해 x는 A의 내점이 되므로 $x \in \operatorname{int} A$이고, 따라서 $U \subset \operatorname{int} A$임을 알 수 있다.

2.7.5. 먼저 집합 A의 닫힘 $\overline{A}$가 닫힌집합임을 보이자. 그러기 위해서 임의로 $x \in \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}\right)$를 고정하자. 그러면 $x \notin A$이고 $x \notin A'$이므로 극한점의 정의의 부정을 생각하면 어떤 $\epsilon > 0$이 존재하여

$$N(x, \epsilon) \cap A = \varnothing$$

이 성립한다. 따라서 $N(x, \epsilon) \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$인데, 이때 $N(x, \epsilon)$는 열린집합이므로 임의의 $y \in N(x, \epsilon)$에 대해 $N(x, \epsilon)$안에 포함되는 y의 근방을 잡을 수 있고, 이 y의 근방 또한 A와의 교집합이 공집합이 되므로 y는 $\overline{A}$의 원소가 될 수 없다. 따라서 $N(x, \epsilon) \subset \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}\right)$ 임을 알 수 있고, 이로부터 $\left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}\right)$가 열린집합임을 알 수 있다. 따라서 $\overline{A}$는 닫힌집합이다.

이제 $\overline{A}$가 A를 포함하는 가장 작은 닫힌집합임을 보이기 위해서, 임의의 닫힌집합 F가 $A \subset F$이면 $\overline{A} \subset F$임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 $x \in \overline{A}$인데 $x \notin F$라고 가정하자. 그러면 $\mathbb{R}^n \setminus F$는 열린집합이므로 어떤 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $N(x, \varepsilon) \subset (\mathbb{R}^n \setminus F)$을 만족한다. 그런데 $x \in \overline{A}$이므로 x는 A의 극한점이어야 하고, 따라서 극한점의 정의에 의해 $N(x, \varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$이다. 그런데 이는 어떤 $y \in N(x, \varepsilon)$이 존재하여 $y \neq x$이면서 $y \in A \subset F$이어야 함을 뜻한다. 그런데 이와 동시에 $y \in N(x, \varepsilon) \subset (\mathbb{R}^n \setminus F)$이어야 하므로 모순이 생긴다. 따라서 $x \in \overline{A}$이면 $x \in F$이어야 하고, 즉 $\overline{A} \subset F$이다.

2.7.6. **(가)** 경계점의 정의로 주어진 조건, 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대하여

$$N(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$$

으로부터 $x \in \partial A$이면 $x \in \overline{A}$임을,

$$N(x, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \varnothing$$

으로부터 $x \in \partial A$이면 $x \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$임을 알 수 있다. 이 두 조건이 동시에 만족되어야 하므로

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$$

임을 얻는다. 이와 같이 ∂A는 두 닫힌집합의 교집합으로 나타내어지므로 닫힌집합이다.

(나) A가 열린 집합이라고 하자. 그러면 $\mathbb{R}^n \setminus A$는 닫힌 집합이므로, $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus A$이고, 따라서

$$\partial A \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = \mathbb{R}^n \setminus A$$

가 되어 $\partial A \cap A = \varnothing$이라는 결론을 얻는다.

반대로 $A \cap \partial A = \varnothing$이라고 가정해보자. 그러면

$$\begin{aligned}\varnothing &= A \cap \partial A \\ &= A \cap \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \\ &= A \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \subset (\mathbb{R}^n \setminus A)$이 성립하게 되고, 이로부터 $\overline{\mathbb{R}^n \setminus A} = (\mathbb{R}^n \setminus A)$ 임을 얻는다. 이제 여기에 정리 2.2.3을 적용하면 $(\mathbb{R}^n \setminus A)$가 닫힌집합임을 알 수 있으므로, A가 열린집합이라는 결론을 얻는다.

(다) 위 **(가)**에서의 결과로부터 $\partial A \subset \overline{A}$인데, A가 닫힌집합이면 $A = \overline{A}$이므로 $\partial A \subset A$이다.

반대로 $\partial A \subset A$라 가정해보자. 그러면 $\partial A \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \varnothing$이다. 이때

$$\begin{aligned}\partial(\mathbb{R}^n \setminus A) &= \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)} \\ &= \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \overline{A} \\ &= \partial A\end{aligned}$$

임에 주목하면 $(\partial(\mathbb{R}^n \setminus A)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \varnothing$이 성립함을 알 수 있다. 여기에 **(나)**의 결과를 적용하면 $\mathbb{R}^n \setminus A$가 열린집합이라는 결론을 얻는다. 따라서 A는 닫힌집합이다.

(라) 만약 A가 닫힌집합이면 $\mathbb{R}^n \setminus A$가 열린집합이 되는데, **(다)**에서 보았듯이 $\partial A = \partial(\mathbb{R}^n \setminus A)$이므로, A가 닫힌집합이라면 A 대신 $\mathbb{R}^n \setminus A$를 고려함으로써 일반성을 잃지 않고 A가 열린집합이라고 가정할 수 있다. 그러면 $\mathbb{R}^n \setminus A$이 닫힌집합이므로

$$\begin{aligned}\partial A &= \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \\ &= \overline{A} \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \\ &= \overline{A} \setminus A\end{aligned}$$

이 되기 때문에, $\partial A \cap A = \varnothing$이고, 만약 어떤 x가 존재하여 $x \in \partial A$이면 $x \in A'$이어야 한다. 이제 어떤 y가 존재하여 $y \in \mathrm{int}(\partial A)$라고 해보자. 그러면 $\mathrm{int}(\partial A) \subset \partial A$이므로 $y \in A'$이다. 즉 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해 $N(y,\epsilon) \cap (A \setminus \{y\}) \neq \varnothing$이어야 한다. 그런데 한편으로는 $y \in \mathrm{int}(\partial A)$이므로 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $N(y,\delta) \subset \partial A$을 만족해야 한다. 그렇다면 그러한 δ에 대해 $N(y,\delta) \cap A = \varnothing$이 성립하고, 따라서 $N(y,\delta) \cap (A \setminus \{y\}) = \varnothing$ 또한 성립해야 하기 때문에 모순이 발생한다. 따라서 $\mathrm{int}(\partial A)$는 원소가 존재하지 않는 집합이라는 결론을 얻을 수 있고, 즉 $\mathrm{int}(\partial A) = \varnothing$이다.

한편 그 역은 성립하지 않는데, $A = (0,1] \subset \mathbb{R}$을 생각하면 A는 열린집합도 아니고 닫힌집합도 아니다. 하지만 연습문제 2.7.5에 의해, 어떤 집합의 닫힘은 그 집합을 포함하는 가장 작은 닫힌집합이므로, $\overline{A} = [0,1]$이고, $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty,0] \cup (1,\infty)$이므로 $\overline{\mathbb{R} \setminus A} = (-\infty,0] \cup [1,\infty)$이다. 따라서 $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus A} = \{0,1\}$이고, 이로부터 $\mathrm{int}(\partial A) = \varnothing$임을 알 수 있다.

(마) $A = \mathbb{Q}$라 두자. 그러면 본문 2.3절의 보기 7에서 $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$임을 이미 보았다. 한편, 임의의 유리수 q에 대해 $\left\{q + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$은, $\sqrt{2}$가 무리수이기 때문에, q로 수렴하는 무리수열이다. 그러므로

$\overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$이고, 따라서

$$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

이므로, $\operatorname{int}(\partial\mathbb{Q}) = \operatorname{int}\mathbb{R} = \mathbb{R} \neq \varnothing$이다.

2.7.7. A가 열린집합이라고 가정하자. 임의로 $z \in A+B$를 잡으면 어떤 $x \in A, y \in B$가 존재하여 $z = x+y$를 만족한다. 그런데 A가 열린집합이므로, 그러한 x에 대해 적당한 $\epsilon > 0$이 존재하여 $N(x,\epsilon) \subset A$이다. 이때, $N(x+y,\epsilon)$와 $A+\{y\}$는 각각 $N(x,\epsilon)$와 A의 평행이동이므로

$$N(z,\epsilon) = N(x+y,\epsilon) \subset A+\{y\} \subset A+B$$

이 성립하고, 따라서 $A+B$는 열린집합이다.

한편 A와 B가 닫힌집합이라고 해서 $A+B$가 닫힌집합인 것은 아니다. 그 예로서 $\mathbb{R}$ 안의 두 닫힌집합 $A = \{2,3,\cdots\}$, $B = \left\{-n+\dfrac{1}{n} : n \in A\right\}$를 생각할 수 있다. 이 두 집합이 실제로 닫힌집합인 것은 $(\mathbb{R}\setminus A)$와 $(\mathbb{R}\setminus B)$가 각각 열린구간들의 합집합으로 나타내어질 수 있음으로부터 알 수 있다. 이 경우, $A \subset \mathbb{Z}$이지만 B는 정수가 아닌 유리수만을 원소로 가지기 때문에 $A+B$는 어떠한 정수도 원소로 가질 수 없고, 따라서 $0 \notin A+B$이지만, 1보다 큰 정수 k에 대해 $k \in A$, $-k+\dfrac{1}{k} \in B$이므로 $\dfrac{1}{k} \in A+B$가 되어 0으로 수렴하는 $A+B$ 안의 수열이 존재하게 된다.

A가 열린집합이라는 조건만으로부터 AB가 열린집합이라고 할 수는 없는데, $B = \{0\}$이라 두면 A가 공집합이 아닌 이상 $AB = \{0\}$이 되어 열린집합이 아니기 때문이다. 하지만 B 또한 열린집합이면 AB는 열린집합이 된다. 이를 확인하기 위해 $z \in AB$를 잡자. 그러면 $x \in A, y \in B$가 존재하여 $z = xy$를 만족한다. 만약 $z = 0$이라면 $x = 0$이거나 $y = 0$이어야 하므로, A와 B 둘 중 하나는 0을 원소로 가진다. 필요하다면 A와 B의 역할을 바꿈으로써 일반성을 잃지 않고 $0 \in A$라 가정하자. 그러면 B가 열린집합이므로 모든 $y \in B$에 대해 y의 적당한 근방이 B에 포함되므로 $y \neq 0$이 되도록 y를 잡을 수 있다. 한편 $z \neq 0$이면 $x \neq 0$이고 $y \neq 0$이다. 따라서 어떤 경우에든 $y \neq 0$이도록 x와 y를 골랐다고 가정할 수 있다. 이제 $\epsilon > 0$을 $(x-\epsilon, x+\epsilon) = N(x,\epsilon) \subset A$가 되도록 잡자. 그러면 이때, 만약 $y > 0$이면 $(xy-\epsilon y, xy+\epsilon y) = N(xy,\epsilon y) \subset AB$이고, $y < 0$이면 $(xy+\epsilon y, xy-\epsilon y) = N(xy,|\epsilon y|) \subset AB$이므로 어느 경우에든지 $N(xy,|\epsilon y|) \subset AB$가 되어 $z = xy$의 적당한 근방이 AB에 포함됨을 볼 수 있다. 따라서 AB가 열린집합이 된다는 것을 알 수 있다.

2.7.8. **(가)** 임의로 $x \in N(A,\epsilon)$을 잡자. 정의에 의해 $\inf_{y\in A}\|x-y\| < \epsilon$이므로, 어떤 $k \in [0,1)$에 대해 $\inf_{y\in A}\|x-y\| = k\epsilon$이고, 이때 $c \in (0,1-k]$가 되도록 어떤 c를 고정하면 $k \le 1-c < 1$이므로 어떤 $y \in A$가 존재하여 $\|x-y\| < (1-c)\epsilon$을 만족한다. 그러면 임의의 $z \in N(x,c\epsilon)$에 대해

$$\begin{aligned}\|y-z\| &\le \|y-x\| + \|x-z\| \\ &\le (1-c)\epsilon + c\epsilon \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $z \in N(A,\epsilon)$이다. 따라서 $N(x,c\epsilon) \subset N(A,\epsilon)$이므로 $N(A,\epsilon)$는 열린집합이다.

(나) 먼저 $\rho(x,A) = \epsilon$이면 $x \in \overline{N(A,\epsilon)}$임을 보이자. 임의로 $r > 0$을 잡고, $\delta = \min\left\{\dfrac{r}{\epsilon}, \dfrac{1}{2}\right\}$로 잡자. 그러면 $\delta\epsilon \le r$임에 유의하자. 그리고 $\inf_{y\in A}\|x-y\| = \epsilon$이므로 어떤 $y \in A$를 $\|x-y\| = \left(1+\dfrac{\delta}{4}\right)\epsilon$

이 되도록 잡을 수 있다. 이때 $z = x - \frac{\delta\epsilon}{2\|x-y\|}(x-y)$를 생각하면

$$\frac{\delta\epsilon}{2\|x-y\|} \le \frac{\epsilon/2}{2\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\epsilon} = \frac{1}{4+\delta} \le \frac{1}{4}$$

이므로 z는 x와 y를 잇는 선분 위에 있다는 것을 알 수 있다. 이때,

$$\begin{aligned}\|z-x\| &= \left\|-\frac{\delta\epsilon}{2\|x-y\|}(x-y)\right\| \\ &= \frac{\delta\epsilon}{2\|x-y\|}\|x-y\| \\ &= \frac{\delta\epsilon}{2} \\ &< r\end{aligned}$$

인 한편

$$\begin{aligned}\|z-y\| &= \|x-y\| - \|x-z\| \\ &= \left(1+\frac{\delta}{4}\right)\epsilon - \frac{\delta\epsilon}{2} \\ &= \epsilon - \frac{\delta\epsilon}{4} \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

이므로 $z \in N(x,r) \cap (N(A,\epsilon) \setminus \{x\})$이 된다. 이때 r은 임의로 고른 양수이므로, x는 $N(A,\epsilon)$의 극한점이 되고, 따라서 $x \in \overline{N(A,\epsilon)}$이다.

이제 $\rho(x,A) > \epsilon$이면 $x \notin \overline{N(A,\epsilon)}$임을 보이자. 이는 $\inf_{y\in A}\|x-y\| > \epsilon$이라는 뜻이므로, 어떤 양수 d를 $\epsilon < d < \rho(x,A)$가 되도록 잡을 수 있다. 이제 $r = \rho(x,A) - d$로 두고 임의의 $z \in N(x,r)$와 $y \in A$에 대해 삼각부등식을 사용하면

$$\begin{aligned}\rho(x,A) \le \|x-y\| &\le \|x-z\| + \|z-y\| \\ &< r + \|z-y\|\end{aligned}$$

이므로 $\|z-y\| > \rho(x,A) - r = d > \epsilon$이다. 이는 즉 임의의 $z \in N(x,r)$은 $\rho(z,A) > \epsilon$임을 뜻하므로, $N(x,r) \cap N(A,\epsilon) = \varnothing$이고, 따라서 x는 $N(A,\epsilon)$의 원소도 아니고 극한점도 아니다. 따라서 $x \notin \overline{N(A,\epsilon)}$이다.

만약 x가 $\rho(x,A) < \epsilon$을 만족하면 $x \in N(A,\epsilon)$이므로 당연히 $x \in \overline{N(A,\epsilon)}$이다. 따라서

$$\overline{N(A,\epsilon)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x,A) \le \epsilon\}$$

으로 주어진다.

(다) 임의의 $y \in A$에 대해 $\|y-y\| = 0$이므로 $\rho(y,A) = 0$이고, 여기에 **(나)**의 결과를 적용하면 모든 $\epsilon > 0$에 대해 $y \in \overline{N(A,\epsilon)}$임을 알 수 있다. 따라서 $y \in \bigcap_{\epsilon>0}\overline{N(A,\epsilon)}$이고, 이로부터 A가 공집합이 아니기만 한다면 $A \subset \bigcap_{\epsilon>0}\overline{N(A,\epsilon)}$이 성립하는 것 또한 알 수 있다.

이제 어떤 x가 $x \in \bigcap_{\epsilon>0}\overline{N(A,\epsilon)}$를 만족한다고 하자. 이는 x가 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $x \in \overline{N(A,\epsilon)}$이라는 것과 동치임에 주목하자. 만약 $\rho(x,A) = d > 0$이면 $x \notin \overline{N\left(A, \frac{d}{2}\right)}$이 될 것이므로, $\rho(x,A) = 0$

이어야 함을 알 수 있다. 반대로 y가 $\rho(y, A) = 0$를 만족하면 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $y \in \overline{N(A, \epsilon)}$이다. 즉, $\rho(x, A) = 0$인 것과 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $x \in \overline{N(A, \epsilon)}$인 것은 동치이다.

어떤 x가 $\rho(x, A) = 0$을 만족하는데 $x \notin A$라 하자. 그러면 ρ의 정의에 의해 임의의 $\delta > 0$에 대해 어떤 $y \in A$가 존재하여 $\|x - y\| < \delta$이어야 하는데, 이때 $x \neq y$이므로, 임의의 $\delta > 0$에 대해 $N(x, \delta) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing$임을 알 수 있다. 따라서 $\rho(x, A) = 0$이면 $x \in A$이거나 x는 A의 극한점이므로 $x \in \overline{A}$이고, 이는

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, A) = 0\} \subset \overline{A}$$

임을 뜻한다. 그런데 바로 전 문단으로부터 좌변의 집합이 $\bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$임을 보았으므로, 일반적으로 임의의 비어있지 않은 집합 A에 대해

$$A \subset \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)} \subset \overline{A}$$

이 성립한다는 결론을 얻는다.

A가 닫힌집합이라고 가정하자. 그러면 $A = \overline{A}$이므로, 위의 포함관계로부터 $A = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$임을 알 수 있다. 반대로 $A = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$이라 가정하자. 그러면 $\bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$는 A를 포함하는 집합이고, 닫힌집합들의 교집합이므로 닫힌집합이 되어, 연습문제 2.7.5에 의해 $\overline{A}$를 포함해야 한다. 따라서 $\overline{A} \subset A$이고, 즉 A는 A'를 포함하게 되어 정리 2.2.3에 의해 A는 닫힌집합이다.

따라서 A가 닫힌집합인 것일 필요충분조건이 $A = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$인 것임을 알 수 있다.

(라) 첨수집합으로 $\mathcal{I}$를 가지는 두 첨수족 $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$, $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \mathcal{I}\}$가 주어졌을 때 모든 $\alpha \in \mathcal{I}$에 대해 $A_\alpha \subset B_\alpha$이라고 하자. 이때, $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha$을 생각하면 x는 모든 $\alpha \in \mathcal{I}$에 대해 $x \in A_\alpha$이고, 역시 모든 $\alpha \in \mathcal{I}$에 대해 $A_\alpha \subset B_\alpha$이므로, x는 모든 $\alpha \in \mathcal{I}$에 대해 $x \in B_\alpha$를 만족한다. 따라서 $x \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha$이므로, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha \in \mathcal{I}} B_\alpha$임을 알 수 있다.

모든 양수 $\epsilon > 0$에 대해 $N(A, \epsilon) \subset \overline{N(A, \epsilon)}$이 성립하므로 $\bigcap_{\epsilon > 0} N(A, \epsilon) \subset \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$이 성립한다. 한편, 어떤 x에 대해 $\rho(x, A) \leq \epsilon$이면 $\rho(x, A) < 2\epsilon$이므로, 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\overline{N(A, \epsilon)} \subset N(A, 2\epsilon)$이 성립한다. 따라서 $\bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)} \subset \bigcap_{\epsilon > 0} N(A, 2\epsilon)$이 성립하는데, 이때 $\delta = 2\epsilon$으로 첨수변환을 해주면

$$\{2\epsilon : \epsilon > 0\} = \{\delta : \delta > 0\}$$

이라는 사실에 의해 $\bigcap_{\epsilon > 0} N(A, 2\epsilon) = \bigcap_{\delta > 0} N(A, \delta)$임을 알 수 있다. 즉,

$$\bigcap_{\epsilon > 0} N(A, \epsilon) \subset \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)} \subset \bigcap_{\delta > 0} N(A, \delta)$$

이 되므로, 사실은 $\bigcap_{\epsilon > 0} N(A, \epsilon) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{N(A, \epsilon)}$이었음을 알 수 있다. 따라서 **(다)**에서 $N(A, \epsilon)$을 $\overline{N(A, \epsilon)}$으로 바꾸어도 A가 닫힌집합인 것과 동치가 된다.

2.7.9. 먼저 θ가 무리수일 때 집합 Z를

$$Z = \left\{e^{2\pi i n \theta} : n = 1, 2, \cdots\right\}$$

이라 놓고, Z가 단위원 $T = \{e^{2\pi it} : t \in [0,1)\}$ 안에서 조밀함을 보이자. 이때, 실수(또는 복소수) z에 대해 항등식 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$이 성립함과, 복소수의 집합 $\mathbb{C}$에서의 열린집합은 $z = x+yi \in \mathbb{C}$ (단, $x, y \in \mathbb{R}$)와 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$를 동일시했을 때 열린집합이 되는 집합(즉 복소평면에서의 열린집합)인 것으로 한다는 사실은 잘 알려져 있는 것으로 간주하겠다. 전자의 사실로부터 t가 실수 전체의 범위를 가질 때 $t \mapsto e^{2\pi it}$로 주어지는 함수는 주기가 1인 주기함수임을 알 수 있으며, 후자의 사실로부터 복소수 z에 대해 $N(z,r)$은 $\mathbb{R}^2$에서 (x,y)와 거리가 r 미만인 점들에 해당하는 복소수들의 집합을 나타내는 등, 복소수의 범위로 근방과 같은 용어들의 정의가 자연스럽게 확장될 수 있음을 알 수 있다.

항등식 $e^{iz} = \cos z + i\sin z$으로부터 $e^{2\pi it} = 1$일 필요충분조건이 $t \in \mathbb{Z}$이고, 임의의 $r \in \mathbb{R}$에 대해 $e^r \neq 0$임을 알 수 있다. 더 나아가, θ가 무리수이면 어떤 두 정수 k와 l에 대해서도 $e^{2\pi ik\theta} \neq e^{2\pi il\theta}$임을 알 수 있는데, 이는 만약 $e^{2\pi ik\theta} = e^{2\pi il\theta}$이라면 양변을 $e^{2\pi il\theta}$으로 나누었을 때 $e^{2\pi i(k-l)\theta} = 1$이 성립해야 하므로 $(k-l)\theta \in \mathbb{Z}$이어야 하지만 이는 θ가 무리수인 이상 성립할 수 없기 때문이다.

Z가 T에서 조밀함을 보이기 위해서는 $\overline{Z} = T$임을 보여야 한다. 그러기 위해서 임의로 $t \in [0,1)$을 잡아 $\tau = e^{2\pi it}$라 놓고, 임의로 $\delta > 0$을 잡자. 우리가 보여야 할 것은 $N(\tau,\delta) \cap Z \neq \varnothing$이 성립한다는 것이다. 만약 δ가 충분히 커서 $N(\tau,\delta)$가 T를 부분집합으로 가진다면 $Z \subset T$이므로 $N(\tau,\delta) \cap Z \neq \varnothing$이 당연히 성립한다. 따라서 δ가 충분히 작아서 $N(\tau,\delta)$에는 포함되지만 T에는 포함되지 않는 원소가 존재한다고 가정할 수 있는데, 그러면 이때 $N(\tau,\delta)$는 열린 원판이고 T는 단위원이므로 $N(\tau,\delta) \cap T$는 τ가 중점이 되면서 T 전체가 아닌 T의 열린 원호가 된다. 이 원호에서 τ를 빼면 원호가 이등분되고, 이렇게 나뉘어진 두 부분 중 하나는 1을 포함하지 않게 되는데, 이 1을 포함하지 않는 부분은 적당한 $a, b \in [0,1]$에 대해 $\{e^{2\pi is} : a < s < b\}$이라고 표현될 수 있다. 이때 $\{e^{2\pi is} : a < s < b\} \subset N(\tau,\delta)$임을 기억하자.

이제 충분히 큰 자연수 N을 잡으면, 어떤 양의 정수 p에 대하여 $a < \dfrac{p}{N} < \dfrac{p+1}{N} < b$을 만족하도록 할 수 있다. 한편 $\{e^{2\pi in\theta} : n = 1, 2, \cdots, N+1\}$를 생각하면 이 집합은 $N+1$개의 서로 다른 복소수를 포함하고 있으므로, 비둘기집의 원리에 의해 어떤 $0 \leq q < N$인 정수 q와 $1 \leq k, l \leq N+1$인 정수 k와 l에 대해 $e^{2\pi ik\theta}$와 $e^{2\pi il\theta}$가 동시에 $\left\{e^{2\pi is} : \dfrac{q}{N} \leq s < \dfrac{q+1}{N}\right\}$의 원소가 된다. 일반성을 잃지 않고 $k > l$이라 하면, $e^{2\pi i(k-l)\theta} \in \left\{e^{2\pi is} : |s| < \dfrac{1}{N}\right\}$이 성립하게 된다. 이때 복소수를 거듭제곱하면 편각이 지수에 비례하여 변한다는 것을 떠올린다면 적당한 양의 정수 M에 대해 $e^{2\pi i(j-k)M\theta} \in \left\{e^{2\pi is} : \dfrac{p}{N} \leq s \leq \dfrac{p+1}{N}\right\} \subset \{e^{2\pi is} : a < s < b\}$이 성립한다는 것을 알 수 있으므로 $e^{2\pi i(j-k)M\theta} \in N(\tau,\delta) \cap Z$이 성립하게 된다. 따라서 Z는 T에서 조밀하다.

이제 집합 A를 $A = \{\sin n : n = 1, 2, \cdots\}$라 두고 A가 $[-1,1]$에서 조밀함을 보이자. $\dfrac{1}{2\pi}$가 무리수이므로 앞에서의 결과에 의해 $\{e^{in} : n = 1, 2, \cdots\}$이 T에서 조밀하다. 따라서 임의로 $b \in [-1,1]$을 잡고 $a = \sqrt{1-b^2}$에 대해 $a+bi$를 생각하면 $a+bi \in T$이므로 $\{e^{in} : n = 1, 2, \cdots\}$ 안에 $a+bi$로 수렴하는 수열 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$이 존재하게 된다. 이때 각 z_k에 대해 그 허수부 $y_k = \mathrm{Im}(z_k)$를 취하면 실수열 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$을 얻는데, $e^{in} = \cos n + i\sin n$이므로 이 수열은 $A = \{\sin n : n = 1, 2, \cdots\}$ 안의 수열이면서 b로 수렴하게 된다. 따라서 $b \in \overline{A}$이 성립하고, 이로부터 $[-1,1] \subset \overline{A}$이 성립함을 알 수 있다.

한편 임의의 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대해 $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$이므로 $[-1,1]$은 임의의 자연수 n에 대해 $\sin n$을 포함하는 닫힌집합이다. 따라서 연습문제 2.7.5로부터 $\overline{A} \subset [-1,1]$임을 알 수 있으므로, 앞에서의 결과와 종합하면 $\overline{A} = [-1,1]$이 된다는 결론을 얻게 된다. 따라서 $A = \{\sin n : n = 1, 2, \cdots\}$는

$[-1,1]$에서 조밀하다.

2.7.10. 어떤 위로 유계이면서 공집합이 아닌 F의 부분집합 S를 고정하고, S의 상계들을 모아놓은 집합을 $U(S)$라 하자. 어떤 $\alpha \in S$와 $\beta \in U(S)$를 고르면 아르키메데스 성질에 의해 어떤 음의 정수 M_1과 양의 정수 M_2을 $M_1 < \alpha \le \beta < M_2$이 되도록 잡을 수 있다. 이제 각 양의 정수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 집합 S_n을

$$S_n = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{k}{2^n} \in U(S), \frac{k}{2^n} \le M_2\right\}$$

이라 정의하면 S_n은 $2^n M_2$을 포함하므로 비어있지 않다. 또한 $2^n M_2$보다 작은 원소만을 포함할 수 있으며, $2^n M_1$보다 작은 정수들에 대해서는 2^n으로 나눈 값이 α보다 작게 되어 $U(S)$의 원소가 될 수 없으므로, S_n은 $2^n M_1$ 이상 $2^n M_2$ 이하의 유한개의 정수만을 포함할 수 있게 되어 유한집합임을 알 수 있다. 따라서 각 자연수 n에 대해 $k_n = \min S_n$으로 정의된 정수의 수열 $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 정의할 수 있다. 이때 각 자연수 n에 대해 $a_n = \dfrac{k_n}{2^n}$으로 정의한 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 그러면 k_n의 정의에 의해 $\dfrac{2k_n}{2^{n+1}} = \dfrac{k_n}{2^n} \in U(S)$이고 $\dfrac{2k_n - 2}{2^{n+1}} = \dfrac{k_n - 1}{2^n} \notin U(S)$이므로 k_{n+1}은 $2k_n$이거나 $2k_n - 1$이고, 따라서 $a_{n+1} = \dfrac{k_{n+1}}{2^{n+1}}$은 $\dfrac{k_n}{2^n} = a_n$이거나 $\dfrac{k_n}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}} = a_n - \dfrac{1}{2^{n+1}}$이므로 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 감소수열이다. 또한 이로부터 $|a_n - a_{n+1}| \le \dfrac{1}{2^{n+1}}$임을 알 수 있으므로, 삼각부등식에 의해 임의의 두 정수 m, n에 대해 $1 \le m < n$이면

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\le \sum_{i=m}^{n-1} |a_i - a_{i+1}| \\ &\le \sum_{i=m}^{n-1} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &\le \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

이 되기 때문에 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 $\dfrac{1}{2^N} < \epsilon$이 되는 자연수 N을 고르면 모든 $N < m < n$인 자연수 m, n에 대해 $|a_m - a_n| \le \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^N} < \epsilon$이 성립한다. 따라서 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$는 코시수열이고, 가정에 의하여 어떤 $a \in F$에 대해 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$이다.

앞에서 구한 a가 S의 상한임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 a가 상한이 아니라고 가정하면 어떤 $x \in S$가 존재하여 $a < x$를 만족한다. 그러면 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 a로 수렴하는 감소수열이므로 어떤 자연수 N에 대해 $a_N - a < x - a$가 성립한다. 그런데 이는 a_N이 S의 상한임에도 $a_N < x$을 만족하는 S의 원소 x가 존재한다는 것이 되므로, 모순이 되어 가정이 틀렸음을 알 수 있다. 따라서 a는 S의 상한이다.

이제 a가 S의 최소상계임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 $a' \in U(S)$가 존재하여 $a' < a$라 가정해보자. 자연수 M을 $\dfrac{1}{2^M} < a - a'$이 되도록 잡으면 $a' < a - \dfrac{1}{2^M} < a_M - \dfrac{1}{2^M} = \dfrac{k_M - 1}{2^M}$이 되어야 한다. 그런데 그렇다면 $k_M - 1 \in S_M$이 되어 $k_M = \min S_M$임에 모순이므로 가정이 틀렸음을 알 수 있다. 따라서 a는 S의 최소상계임을 알 수 있다.

즉 F의 비어있지 않고 위로 유계인 집합은 최소상계를 가지므로, F는 완비순서체이다.

2.7.11. 실수열 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 n에 대해 $y_n = x_n - x_{n+1}$으로 정의하자. 주어진 조건을

$$x_n - x_{n+1} \le x_{n-1} - x_n$$

와 같이 쓰면 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 단조감소수열임을 알 수 있다. 그런데 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 유계실수열이므로 어떤 양수 $M \in \mathbb{R}$이 존재하여 각 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $-M \le x_n \le M$을 만족한다. 그렇기 때문에 모든 자연수 m, n에 대해 $-2M \le x_n - x_m \le 2M$이 성립하며, 특히 모든 자연수 n에 대해 $-2M \le x_n - x_{n+1} \le 2M$임에 주목하자. 따라서 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 아래로 유계인 단조감소수열이므로 수렴한다. 이때 $y = \lim_{n\to\infty} y_n$이라 놓자.

이제 $y = 0$임을 보이고자 한다. 모순을 이끌어내기 위해, 먼저 $y > 0$이라 가정해보자. 그러면 각 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x_n - x_{n+1} = y_n \ge y > 0$이므로 자연수 N이 $N > \frac{2M}{y}$를 만족하면

$$x_1 - x_{N+1} = \sum_{i=1}^{N}(x_i - x_{i+1}) \ge \sum_{i=1}^{N} y = Ny > 2M$$

이 되어 모순이 일어난다.

반대로 $y < 0$을 가정해보자. 그러면 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 감소수열이므로 어떤 자연수 N에 존재하여 자연수 n이 $n > N$을 만족하면 $y < y_n < \frac{y}{2}$이 성립한다. 따라서 그러한 자연수 N에 대해 자연수 n을 $n > \frac{2(x_{N+1} - x_1 - 2M)}{y}$가 되도록 잡고 $y < 0$임에 주의하면 $x_1 - x_{N+1} + \frac{ny}{2} < -2M$이 되기 때문에

$$\begin{aligned}
x_1 - x_{N+n+1} &= x_1 - x_{N+1} + x_{N+1} - x_{N+n+1} \\
&= x_1 - x_{N+1} + \sum_{i=1}^{n}((x_{N+i} - x_{N+i+1})) \\
&< x_1 - x_{N+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{y}{2} \\
&= x_1 - x_{N+1} + \frac{ny}{2} \\
&< -2M
\end{aligned}$$

이 성립하여 모순이 일어난다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} y_n = y = 0$이다.

2.7.12. 먼저 $a = 0$인 경우부터 생각한다. 임의로 양수 $\epsilon > 0$을 잡으면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이므로 어떤 양의 정수 N이 존재하여 $n > N$인 모든 자연수 n에 대해 $|a_n| < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. 편의상 $S = \sum_{i=1}^{N} a_i$라 두고, 자연수 M을 $|S| < \epsilon N + \frac{\epsilon M}{2}$를 만족하도록 고를 수 있다. 그러면 자연수 m이 $m > N + M$

을 만족하면

$$\begin{aligned}
|\sigma_m| &= \left|\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right| \\
&= \frac{1}{m}\left|S + \sum_{i=N+1}^{m} a_i\right| \\
&\le \frac{1}{m}\left(|S| + \frac{1}{m}\sum_{i=N+1}^{m} |a_i|\right) \\
&\le \frac{1}{m}\left(|S| + \sum_{i=N+1}^{m} \frac{\epsilon}{2}\right) \\
&< \frac{1}{m}\left(\epsilon N + \frac{\epsilon M}{2} + \frac{\epsilon(m-N)}{2}\right) \\
&< \frac{\epsilon(m+N+M)}{2m} \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

이 성립하므로 극한의 정의에 의해 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$임을 알 수 있다.

이제 $a \neq 0$인 경우를 생각하자. 각 자연수 n에 대해 $b_n = a_n - a$로 정의한 수열 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$임을 알 수 있고, 따라서 각 자연수 n에 대해

$$\tau_n = \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n)$$

으로 정의한 수열 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하면 $\lim_{n\to\infty} \tau_n = 0$이다. 그런데 각 자연수 n에 대해

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) \\
&= \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n + na) \\
&= a + \frac{1}{n}(b_1 + \cdots + b_n) \\
&= a + \tau_n
\end{aligned}$$

이 성립하므로 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = a$이 된다.

2.7.13. 노름은 항상 음이 아닌 실수이므로 $r \ge 0$이다. 만약 $r = 0$이면 2 이상의 모든 자연수 n에 대해 $\|x_{n+1} - x_n\| = 0$이 되어 $x_n = x_{n+1}$이 성립하게 되므로 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 당연히 코시수열이다. 따라서 $r \neq 0$인 경우만 살펴보면 된다.

임의로 자연수 n을 골랐을 때

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &\le r\,\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\le r^2\,\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\
&\;\;\vdots \\
&\le r^{n-1}\,\|x_2 - x_1\|
\end{aligned}$$

이 성립함으로부터 모든 자연수 n, m에 대해

$$\begin{aligned}\|x_{n+m} - x_n\| &\le \sum_{i=1}^{m} \|x_{n+i} - x_{n+i-1}\| \\ &\le \sum_{i=1}^{m} r^{n-2+i} \|x_2 - x_1\| \\ &= \|x_2 - x_1\| \frac{r^{n-1}(1-r^m)}{1-r} \\ &< \frac{\|x_2 - x_1\|}{r(1-r)} r^n\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 편의상 $K = \dfrac{\|x_2 - x_1\|}{r(1-r)}$이라 두자. 그러면 어떤 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 자연수 N을 $Kr^N < \epsilon$을 만족하도록 잡으면 자연수 n, M이 $N < n < M$을 만족하기만 하면, 편의상 $M - n = m$이라 두었을 때

$$\|x_M - x_n\| = \|x_{n+m} - x_n\| < kr^n < kr^N < \epsilon$$

이 성립하는 것을 볼 수 있다. 따라서 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이다.

한편 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 조건

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| < \|x_{n+1} - x_n\|$$

을 만족한다고 해서 코시수열인 것은 아닌데, 그 예로 $\mathbb{R}$ 안의 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각할 수 있다. 실제로 $|x_{n+1} - x_n| = \dfrac{1}{n}$이므로

$$\frac{1}{n+1} = |x_{n+2} - x_{n+1}| < |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{n}$$

이 성립하지만, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$이므로 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 수렴하지 않아 코시수열일 수 없음을 알 수 있다.

2.7.14. 먼저 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$임을 보일 것이다. 그러기 위해서는 모든 자연수 k에 대해 $x \in \overline{A_k}$임을 보이면 된다. 그런데 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 x으로 수렴하므로 임의의 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 어떤 자연수 N이 존재하여 자연수 n이 $n > N$이면 $\|x_n - x\| < \epsilon$을 만족하므로 모든 자연수 k에 대해 $x_{\max\{N+1,k\}} \in N(x,\epsilon) \cap A_k$이 성립한다. 따라서 $x \in \overline{A_k}$이 모든 자연수 k에 대해 성립하고, 이로부터 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$임을 알 수 있다.

이제 $y \neq x$인 y는 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$의 원소가 될 수 없음을 보이자. $y \neq x$이므로 $\epsilon = \dfrac{\|y - x\|}{3}$이라 두면 $\epsilon > 0$이고 $N(y,\epsilon) \cap N(x,\epsilon) = \varnothing$이 된다. 그런데 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 x으로 수렴하므로 어떤 자연수 N이 존재하여 $n > N$을 만족하는 모든 자연수 n에 대해 $|x_n - x| < \epsilon$이 성립하게 하므로, 그러한 자연수 N에 대해 $A_{N+1} \subset N(x,\epsilon)$이 된다. 그렇기 때문에 $N(y,\epsilon) \cap A_{N+1}$이어야 하므로, $y \notin \overline{A_{N+1}}$임을 알 수 있다. 따라서 $y \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$ 또한 성립한다.

따라서 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}$은 x만을 원소로 가지는 집합이 되고, 다시 말해 $\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} = \{x\}$이다.

2.7.15. **(가)** 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 이 수렴하고, 따라서 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이다. 즉 어떤 자연수 N 에 대해 자연수 n 이 $n > N$ 을 만족하면 $|a_n| < 1$ 이 성립하게 된다. 그러한 자연수 N 에 대해 자연수 n 이 $n > N$ 을 만족하면 $0 \le a_n^2 < |a_n|$ 이 성립하므로, 비교판정법에 의해 $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2$ 가 수렴한다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2$ 또한 수렴함을 알 수 있다. 그런데 $a_n^2 = \left|a_n^2\right|$ 이므로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 은 절대수렴한다.

(나) 앞에서와 같이 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ 이므로 어떤 자연수 N 에 대해 자연수 n 이 $n > N$ 을 만족하면 $|a_n| < \frac{1}{2}$ 가 성립하게 된다. 그러한 N 에 대해 자연수 n 이 $n > N$ 이면 $\frac{1}{2} < 1 + a_n < \frac{3}{2}$ 이게 되고, 그렇기 때문에 그러한 n 에 대해서는

$$\left|\frac{a_n}{1+a_n}\right| = \frac{|a_n|}{1+a_n} < 2\,|a_n|$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\,|a_n|$ 이 수렴하므로 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n}{1+a_n}\right|$ 또한 수렴한다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 은 절대수렴한다.

(다) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 절대수렴하면 **(가)**에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 이 절대수렴하고, 여기에 **(나)**의 결과를 적용하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 또한 절대수렴함을 알 수 있다.

2.7.16. 본문의 정리 2.4.2 다음에 나오는 보기 2와 비율판정법을 사용하여 주어진 급수가 수렴함을 보일 수도 있다. 여기에서는 다른 방법을 소개한다.

문제에서와 같이 주어진 실수열 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ 이 있을 때 모든 양의 정수 n 에 대해 $a_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 임을 n 에 대한 강한 귀납법을 통해 보이자. $n = 1$ 일 때는 $a_1 = 1$ 이므로 당연히 성립한다. 이제 어떤 자연수 k 에 대해 $n = 1, 2, \cdots, k$ 인 경우에 $a_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k-2} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{k}$$

이므로 $n = k+1$ 인 경우에도 $a_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 이 성립한다. 따라서 모든 자연수 n 에 대해 $a_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

그런데 그렇다면 모든 양의 정수 n 에 대해 $0 \le \frac{1}{a_n} \le \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ 이 성립하고, 등비수열의 합

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-2/3} = 3$$

이 수렴함에 주목하면, 비교판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 이 수렴함을 알 수 있다. 따라서 당연히 급수 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 또한 수렴한다.

2.7.17. 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 k에 대해

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k}, \quad a_{2k} = \frac{2}{k}$$

이 되도록 정의하자. 그러면 각 n에 대해 $0 \le a_n \le \dfrac{4}{n}$임은 쉽게 확인할 수 있으므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$이 성립함을 볼 수 있다.

한편 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$이 수렴하는 지를 확인하기 위해서는 부분합 $s_k = \sum\limits_{n=1}^{k}(-1)^n a_n$이 수렴하는 지 확인하면 된다. 그런데

$$\begin{aligned} s_{2k} &= \sum_{n=1}^{2k}(-1)^n a_n \\ &= \sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{n} \end{aligned}$$

이므로 $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$가 무한대로 발산하고, 이로부터 $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \infty$임을 알 수 있다. 다시 말해, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$은 수렴하지 않는다.

2.7.18. 단조감소수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다고 가정하자. 그러면 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$인 단조감소수열이어야 함으로부터 모든 자연수 n에 대해 $a_n \ge 0$임을 알 수 있다. 한편 임의의 자연수 k에 대해 $2^{k-1} < m \le 2^k$을 만족하는 자연수 m을 생각하면 $a^m \ge a^{2^k}$이다. 이때

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m\right) \end{aligned}$$

의 꼴로 급수를 나타내고

$$\sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_m \ge \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{2^k} = 2^{k-1}a_{2^k} \ge 0$$

임에 주목하여 비교판정법을 사용하면 급수 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}a_{2^k}$이 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$도 수렴한다.

반대로 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$이 수렴한다고 가정하자. 그러면 $\lim\limits_{k\to\infty} 2^k a_{2^k} = 0$이므로 임의로 양수 $\varepsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N이 존재하여 자연수 n이 $n > N$이면 $|2^n a_{2^n}| < \varepsilon$을 만족할 것이다. 이제 2^N보다 큰 자연수 k를 잡으면 어떤 N보다 큰 자연수 n이 존재하여 $2^N \le k \le 2^n$을 만족하고, 이때 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 단조감소수열이므로

$$-\varepsilon < -\frac{\varepsilon}{2^n} < a_{2^n} < a_k < a_{2^N} < \frac{\varepsilon}{2^N} < \varepsilon$$

이 성립한다. 즉, 임의로 양수 $\varepsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 $M(= 2^N)$이 존재하여 자연수 k가 $k > M$을 만족하면 $|a_k| < \varepsilon$이 성립하므로, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$이다. 앞의 문단에서와 같은 이유로, 모든

자연수 k에 대해 $a_k \geq 0$이다. 이제 임의의 자연수 k에 대해 $2^k \leq m < 2^{k+1}$을 만족하는 자연수 m에 대해서는 $a_{2^k} \geq a_m$이므로

$$\begin{aligned} a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} &= a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_{2^k} \\ &\geq a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \cdots + a_7) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

임에 주목하면 비교판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다. 따라서 단조감소수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 필요충분조건은 $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$이 수렴하는 것이다.

이제 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$이 수렴할 필요충분조건을 찾아보자. 각 자연수 n에 대해 $a_n = \frac{1}{n^s}$라 놓으면

$$2^n a_{2^n} = \frac{2^n}{(2^n)^s} = \frac{1}{2^{n(s-1)}} = \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^s$$

이므로 앞에서의 결과를 이용하면 이 급수가 수렴할 필요충분조건은 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)^s$이 수렴하는 것이다. 그런데 후자는 등비급수로써 수렴할 필요충분조건이

$$\frac{1}{2^{s-1}} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2^{s-1} > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s > 1$$

이므로, $s > 1$인 것이 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$이 수렴할 필요충분조건이 된다는 것을 알 수 있다.

2.7.19. 수열 a_n의 각 항이 0 또는 한 자리 자연수인 경우 모든 자연수 n에 대해 $0 \leq a_n 10^{-n} \leq 9 \cdot 10^{-n}$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9/10}{1 - 1/10} = 1$$

이므로 비교판정법에 의해 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$이 수렴하고, 이 급수가 수렴하는 점은 $[0, 1]$ 안의 한 점이다.

이제 $x \in [0, 1]$이 주어졌다고 하자. 만약 $x = 1$이면 위에서 보았듯이 모든 자연수 n에 대해 $a_n = 9$로 정의하면 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$이 된다. 따라서 $0 \leq x < 1$인 경우만 살펴보면 된다. 우선 반열린구간들 $\left[0, \frac{1}{10}\right), \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right), \cdots, \left[\frac{9}{10}, \frac{10}{10}\right)$을 생각하면 쌍끼리 서로소인 구간들이면서 합집합인 $[0, 1)$이 x를 포함하므로, 어떤 0 이상 9 이하의 정수 α가 유일하게 존재하여 $x \in \left[\frac{\alpha}{10}, \frac{\alpha+1}{10}\right)$을 만족한다. 그러한 α에 대해 $a_1 = \alpha$라 두고, 귀납적으로 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 정의함에 있어

$$\sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} + 10^{-n}$$

을 만족하도록 $a_1, \cdots, a_n$ 이 결정되었다고 하자. 이때 편의상 $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ 이라 놓고, 반열린구간들 $\left[s_n, s_n + \frac{1}{10^{n+1}}\right), \left[s_n + \frac{1}{10^{n+1}}, s_n + \frac{2}{10^{n+1}}\right), \cdots, \left[s_n + \frac{9}{10^{n+1}}, s_n + \frac{10}{10^{n+1}}\right)$ 을 생각하면 a_1 을 정할 때와 비슷한 이유로 어떤 정수 α_n 이 유일하게 존재하여 $x \in \left[s_n + \frac{\alpha_n}{10^{n+1}}, s_n + \frac{\alpha_n + 1}{10^{n+1}}\right)$ 을 만족하고, 이때 $0 \le \alpha_n \le 9$ 이다. 이때 그러한 α_n 에 대해 $a_{n+1} = \alpha_n$ 이라 둔다.

이렇게 정의된 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 에 대해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 이 실제로 x 로 수렴하는 지를 확인해야 한다. 급수 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}$ 에 대해 n 번째 항까지의 부분합이 s_n 이고, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 의 구성 방식으로부터 임의의 자연수 n 에 대해 $s_n \le x$ 이면서 $x - s_n \le 10^{-n}$ 임을 알 수 있다. 따라서 임의로 $\epsilon > 0$ 이 주어지면, 어떤 자연수 N 이 존재하여 $10^{-N} < \epsilon$ 을 만족하고, 그러한 자연수 N 에 대해 $n > N$ 인 자연수 n 을 생각하면 $x - s_n \le 10^{-n} \le 10^{-N} < \epsilon$ 이 된다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} s_n = x$ 이고, 이는 즉 부분합의 극한인 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 의 값이 x 임을 뜻한다.

2.7.20. A 와 B 가 좌표공간의 부분집합인 콤팩드집합이므로 하이네-보렐 정리에 의해 닫힌집합이면서 유계이다. 따라서 어떤 유계닫힌구간들 $I_1, I_2, \cdots, I_{n+m} \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 $A \subset I_1 \times \cdots \times I_n$ 이고 $B \subset I_{n+1} \times \cdots \times I_{n+m}$ 이므로 $A \times B \subset I_1 \times \cdots \times I_{n+m}$ 이 되어 $A \times B$ 또한 유계임을 알 수 있다.

한편 어떤 $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ 에 대하여 $x \in A$ 인 동시에 $y \in B$ 이면 당연히 $(x, y) \in A \times B$ 이다. 따라서 대우를 생각하면 $(x, y) \notin A \times B$ 이면 $x \notin A$ 이거나 $y \notin B$ 이어야 함을 알 수 있다. 반대로 $x \notin A$ 이거나 $x \notin B$ 이면 $(x, y) \notin A \times B$ 이므로

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus (A \times B) = \Big((\mathbb{R}^n \setminus A) \times \mathbb{R}^m\Big) \cup \Big(\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \setminus B)\Big)$$

이 된다. 즉 $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \setminus (A \times B)$ 는 두 열린집합의 합집합으로 나타내어지므로 열린집합이고, 그 여집합인 $A \times B$ 는 닫힌집합이다. 따라서 하이네-보렐 정리에 의해 $A \times B$ 이 콤팩트집합임을 알 수 있다.

2.7.21. 먼저 A 가 닫힌집합임을 보이자. 이는 $\mathbb{R} \setminus A$ 가 열린집합임을 보이면 충분하고, 그러기 위해 임의로 $x \in \mathbb{R} \setminus A$ 를 잡자. 만약 $x < 0$ 이거나 $x > 1$ 이면 $[0, 1]$ 이 닫힌집합이므로 어떤 양수 $\epsilon > 0$ 이 존재하여 $N(x, \epsilon) \cap [0, 1] = \varnothing$ 을 만족해야 하는데, $A \subset [0, 1]$ 이므로 $N(x, \epsilon) \subset (\mathbb{R} \setminus A)$ 이 되어 x 는 $\mathbb{R} \setminus A$ 의 내점이다. 한편 $x \in [0, 1]$ 이면, $x \notin A$ 이기 때문에 x 의 십진법전개 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ (단, a_n 은 0 또는 한 자리 자연수)을 생각했을 때 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 에는 1 또는 5 가 아닌 항이 적어도 하나 포함된다. 그러한 첫 번째 항을 a_m 이라 하자. 이제 임의의 $y \in A$ 와 그 십진법전개 $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$ (단, $b_n \in \{1, 5\}$)를 생각하면 어떤 m 이하의 자연수 k 에 대해 $a_k \neq b_k$ 이어야 한다. 이때, 모든 자연수 j 에 대해 $b_j \in \{1, 5\}$ 임으로부터 $1 \le |a_j - b_j| \le 8$ 이므로 등비급수의 합 공식을 떠올려보면

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} (a_j - b_j) 10^{-j} \right| &\le \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_j - b_j|\, 10^{-j} \\ &\le \sum_{j=k+1}^{\infty} 8 \cdot 10^{-j} \quad = \frac{8}{9} 10^{-k} \end{aligned}$$

이고, 마지막 줄의 값이 10^{-k} 보다 작은 것에 주목하면

$$\begin{aligned}|x-y| &= \left|\sum_{j=k}^{\infty}(a_j-b_j)10^{-j}\right| \\ &\geq |a_k-b_k|\,10^{-k} - \left|\sum_{j=k+1}^{\infty}(a_j-b_j)10^{-j}\right| \geq 10^{-k} - \frac{8}{9}10^{-k} = \frac{1}{9}10^{-k}\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 이로부터 $N\left(x, \frac{1}{18}10^{-k}\right)$ 안에는 A의 원소가 포함될 수 없음을 알 수 있고, 따라서 $N\left(x, \frac{1}{18}10^{-k}\right) \subset (\mathbb{R}\setminus A)$이므로 x는 $\mathbb{R}\setminus A$의 내점이다. 따라서 $\mathbb{R}\setminus A$의 임의의 점은 $\mathbb{R}\setminus A$의 내점이므로, $\mathbb{R}\setminus A$는 열린집합이다. 이제 A가 닫힌집합임은 당연하다.

$A \subset [0,1]$으로부터 A가 유계집합임은 당연하다. 즉, A는 좌표공간의 부분집합으로서 닫힌집합이면서 유계집합이므로 콤팩트집합이다.

어떠한 A의 점도 고립점이 아님을 보이기 위해 임의로 $y \in A$를 잡고 그 십진법전개 $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n}$ (단, $b_n \in \{1,5\}$)를 생각하자. 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면, 적당한 자연수 N이 존재하여 $\frac{1}{10^N} < \epsilon$을 만족한다. 그런데 만약 b_{N+1}이 1이면 $y + \frac{4}{10^{N+1}}$은 A의 원소이면서 $N(y,\epsilon)$에 포함되고, 만약 b_{N+1}이 5이면 $y - \frac{4}{10^{N+1}}$이 A의 원소이면서 $N(y,\epsilon)$에 포함된다. 따라서 어떤 경우에든 $N(y,\epsilon) \cap (A \setminus y) \neq \varnothing$이므로, y는 A의 극한점이 된다. 따라서 A는 고립점을 가지지 않는다.

마지막으로 A가 어떠한 구간도 포함할 수 없음을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 구간 I가 존재하여 $I \subset A$라 가정하자. 필요하다면 I로부터 양 끝점을 제거함으로써 I가 열린구간이라 가정할 수 있다. 임의로 $y \in I$를 잡으면, I가 열린구간으로서 열린집합이므로 어떤 양수 $\epsilon > 0$에 대해 $N(y,\epsilon) \subset I$이다. 이때 적당한 자연수 N에 대해 $\frac{2}{10^N} < \epsilon$이 성립하는데, 그러한 N에 대해 $y + \frac{1}{10^N}$은 십진법전개에서 소수점 아래 N번째 자리가 2 또는 6인데도 $N(x,\epsilon)$의 원소이므로 I에 포함되고, 더 나아가 A의 원소가 되어야 하는데 이는 A의 정의에 모순이다. 따라서 우리의 가정이 거짓이어야 하므로, A는 어떠한 구간도 포함할 수 없다.

2.7.22. 증명 이전에 다음 보조정리를 살펴보자.

보조정리. 유한개의 닫힌구간 $I_1, I_2, \cdots, I_n$에 대해 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$는 콤팩트집합이다.

증명) 정리 2.5.2에 의해 각 $I_1, I_2, \cdots, I_n$은 콤팩트집합이다. $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$의 임의의 열린덮개 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$를 생각했을 때, 각 j에 대해 I_j가 콤팩트집합이므로 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$의 유한부분덮개 S_j를 갖는다. 그러면 $\bigcup_{j=1}^{n} S_j$는 유한개의 유한집합의 합집합이므로 유한집합이고 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 모두를 덮는다. 따라서 $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ 또한 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$의 유한부분덮개를 가지므로 콤팩트집합이다. □

함수 $f : (a,b) \to \mathbb{R}$이 모든 점에서 증가상태인 함수라 가정하고, 임의로 $x, y \in (a,b)$가 주어져 $x < y$이라고 하자. 그러면 $\alpha, \beta \in (a,b)$를 $a < \alpha < x, y < \beta < b$를 만족하도록 고를 수 있다. 조건에 의해 각 $c \in [\alpha,\beta]$에 대해 어떤 양수 $\delta'_c > 0$이 존재하여 $0 < h < \delta'_c$이면 $f(c-h) < f(c) < f(c+h)$을

만족한다. 이제 $\delta_x = \min\left\{\delta'_x, \dfrac{|x-y|}{3}\right\}$, $\delta_y = \min\left\{\delta'_y, \dfrac{|x-y|}{3}\right\}$이라 두어 $N(x,\delta_x)\cap N(y,\delta_y) = \varnothing$이 되게 하자. 또한 각 $c \in [\alpha,\beta] \setminus \{x,y\}$에 대해 $\delta_c = \min\{\delta'_c, |x-c|, |y-c|\}$라 두어 $N(c,\delta_c)$가 x와 y를 포함하지 않도록 하자. 이때 여전히 $0 < h < \delta_c$이면 $f(c-h) < f(c) < f(c+h)$이 성립함에 유의하자.

이제 각 $c \in [\alpha,\beta]$에 대해 $U_c = N(c,\delta_c)$라 정의하면 $\{U_c : c \in [\alpha,\beta]\}$는 $[\alpha,\beta]$의 열린덮개가 되고, 따라서 $[\alpha,\beta] \setminus (N(x,\delta_x) \cup N(y,\delta_y)) = [\alpha, x-\delta_x] \cup [x+\delta_x, y-\delta_y] \cup [y+\delta_y, \beta]$의 열린덮개 또한 된다. 앞에서 본 보조정리에 의해 $[\alpha, x-\delta_x] \cup [x+\delta_x, y-\delta_y] \cup [y+\delta_y, \beta]$은 콤팩트집합이다. 따라서 어떤 유한집합 $S \subset [\alpha,\beta]$에 대해 $\{U_s : s \in S\}$ 또한 $[\alpha,\beta] \setminus (N(x,\delta_x) \cup N(y,\delta_y))$의 열린덮개가 되고, 이 열린덮개가 덮지 않는 $[\alpha,\beta]$의 점은 U_x와 U_y가 덮으므로, $T = S \cup \{x,y\}$라 두면 $\{U_s : s \in T\}$는 $[\alpha,\beta]$의 열린덮개가 된다.

$T = \{c_1, \cdots, c_n\}$이라고 T의 각 원소를 나열하고, 편의상 U_{c_j}을 U_j이라 다시 이름붙여 $\inf U_j = l_j, \sup U_j = r_j$라 하자. 일반성을 잃지 않고, 어떠한 j,k에 대해서도 $j \neq k$이면 $U_j \not\subset U_k$이라 가정할 수 있으며, 더 나아가 $j < k$이면 $c_j < c_k$라 가정할 수 있다. 이 가정 하에서도 x는 U_x만이 덮고 y는 U_y만이 덮으므로 $\{x,y\} \subset T$임에 유의하자. 이제 1 이상 n 미만의 자연수 j에 대해 $l_j < l_{j+1}$임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 $l_j \geq l_{j+1}$이라 가정하면

$$\delta_{c_j} = c_j - l_j \leq c_{j+1} - l_{j+1} = \delta_{c_{j+1}}$$

이고 따라서

$$r_j = c_j + \delta_{c_j} \leq c_{j+1} + \delta_{c_{j+1}} = r_{j+1}$$

또한 성립하여 $U_j \subset U_{j+1}$가 되어 가정에 모순이 발생한다. 이로부터 $j < k$이면 $l_j < l_k$ 또한 성립함을 알 수 있다. 비슷한 방식으로 $1 \leq j < k \leq n$이면 $r_j < r_k$인 것 또한 보일 수 있다.

이제 1 이상 n 미만의 자연수 j에 대해 $U_j \cap U_{j+1} \neq \varnothing$임을 보이자. 앞에서 보인 것으로부터 $i < j$인 자연수 i에 대해서 U_i는 r_j를 포함할 수 없다. 그런데 만약 U_{j+1}이 r_j를 포함하지 않는다면 $r_j \leq r_{j+1}$이므로 $U_j \not\subset U_{j+1}$이려면 $r_j \leq l_{j+1}$이어야 하는데, 그러면 $j < k \leq n$인 모든 자연수 k에 대해 $r_j \leq l_k < c_k$이 되어 r_j는 $\{U_1, \cdots, U_n\}$이 덮지 못하는 $[\alpha,\beta]$의 한 점이 되므로 모순이다. 따라서 U_{j+1}는 r_j를 포함한다. 그런데 U_{j+1}이 열린집합이므로 충분히 작은 어떤 양수 $\epsilon > 0$에 대해 $N(r_j,\epsilon) \subset U_{j+1}$인데, r_j은 U_j의 극한점이므로 $N(r_j,\epsilon)$은 U_j의 원소인 점 또한 포함한다. 그러면 그 점은 U_j에도 포함되고 U_{j+1}에도 포함되므로 $U_j \cap U_{j+1} \neq \varnothing$이다.

어떤 $d_j \in U_j \cap U_{j+1}$를 고르면, 가정에 의해 $f(c_j) < f(d_j) < f(c_{j+1})$임을 알 수 있고, 더 나아가 두 자연수 j, k가 $1 \leq j < k \leq n$을 만족하면 $f(c_j) < f(c_k)$이 성립함 또한 알 수 있다. 그런데 어떤 두 자연수 l, m이 존재하여 $x = c_l$, $y = c_m$이고, $x < y$이므로 $l < m$이어야 한다. 따라서 $f(x) < f(y)$이다.

2.7.23. **(가)** $X \subset \overline{X}$이고 $\operatorname{diam}(X) = \sup\{|x-y| : x,y \in X\}$이므로 $\operatorname{diam}(X) \leq \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right)$임은 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\operatorname{diam}(X) \geq \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right)$임을 보이면 충분하다. 모순을 이끌어내기 위해 $\operatorname{diam}(X) < \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right)$이라 가정하고, 편의상 $\epsilon = \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right) - \operatorname{diam}(X) > 0$이라 놓자. sup의 정의에 의해 어떤 $x', y' \in \overline{X}$가 존재하여 $|x'-y'| > \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right) - \dfrac{\epsilon}{4}$이다. 이때, $x', y' \in \overline{X}$이므로 어떤

$x, y \in X$가 존재하여 $x \in N\left(x', \frac{\epsilon}{4}\right) \cap X$, $y \in N\left(y', \frac{\epsilon}{4}\right) \cap X$를 만족해야 한다. 그런데 그렇다면

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right) - \frac{\epsilon}{4} &< |x' - y'| \\ &\le |x' - x| + |x - y| + |y - y'| \\ &< \frac{\epsilon}{4} + |x - y| + \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

이 성립하고 이때 $\operatorname{diam}\left(\overline{X}\right) = \operatorname{diam}(X) + \epsilon$임을 이용하면

$$\begin{aligned} |x - y| &> \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right) - \frac{3}{4}\epsilon \\ &= \operatorname{diam}(X) + \frac{\epsilon}{4} \end{aligned}$$

가 되는데, 이는 $\operatorname{diam}(X) = \sup\{|x - y| : x, y \in X\}$에 모순이다. 따라서 우리의 가정이 거짓이어야 하므로 $\operatorname{diam}(X) \ge \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right)$이어야 하고, 즉 $\operatorname{diam}(X) = \operatorname{diam}\left(\overline{X}\right)$이 성립한다.

(나) 먼저 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이면 $\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\{x_k : k \ge N\} = 0$임을 보이자. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이 코시수열이기 때문에 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N이 존재하여 $m, n \ge M$이면 $|x_m - x_n| < \epsilon/2$을 만족한다. 이는 즉 $\operatorname{diam}\{x_k : k \ge N\} = \sup\{|x_m - x_n| : m, n \ge N\} \le \epsilon/2 < \epsilon$임을 뜻하므로 극한의 정의를 이용하면 $\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\{x_k : k \ge N\} = 0$이 성립한다.

반대로 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam}\{x_k : k \ge N\} = 0$을 만족하면 코시수열임을 보이자. 정의에 의해 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해 어떤 자연수 N이 존재하여 $M \ge N$이면 $\operatorname{diam}\{x_k : k \ge M\} < \epsilon/2$을 만족할 것이고, 특히 $\operatorname{diam}\{x_k : k \ge N\} < \epsilon/2$이다. 그러면 임의의 $k \ge N$에 대해서는 $|x_k - x_N| < \epsilon/2$이므로, 자연수 m, n이 $m, n \ge N$이면

$$|x_m - x_n| \le |x_m - x_N| + |x_N - x_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이 성립한다. 따라서 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이다.

(다) 만약 어떤 자연수 m에 대해 $X_m = \varnothing$이면 $k \ge m$인 자연수 k에 대해서는 $X_k = \varnothing$이어야 하는데, 그러면 그러한 k에 대해서는 $\operatorname{diam} X_k = \sup\{|x - y| : x, y \in X_k = \varnothing\} = \sup \varnothing = -\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n = -\infty$가 되어 가정에 모순이다.

콤팩트집합열 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $X_{n+1} \subset X_n$을 만족하면 임의의 자연수의 유한 부분집합 J에 대해 $\bigcap_{i\in J} X_i = K_{\max J} \ne \varnothing$이므로 정리 2.5.5에 의해 $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \ne \varnothing$이다. 임의로 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$를 잡자.

모순을 이끌어내기 위해 어떤 y가 존재하여 $y \ne x$인데 $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$라 가정해보자. 그러면 임의의 자연수 k에 대해 $x, y \in X_k$이므로

$$|x - y| \le \sup |x - y| : x, y \in X_k = \operatorname{diam} X_k$$

가 되어 $\{\operatorname{diam} X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$는 모든 항이 $|x - y|$보다 작지 않은 수열이 된다. 그런데 그럼 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n = 0$일 수 없으므로, 가정인 $y \ne x$이면서 $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$인 y가 존재한다는 것이 거짓이어야 한다. 따라서 $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$이면 $y = x$이어야 하고, 이는 즉 $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$이 단 한 점으로만 이루어진 집합임을 뜻한다.

2.7.24. A가 $\mathbb{R}$이나 $\varnothing$이면 당연히 A는 열린집합인 동시에 닫힌집합이다. 이제 모순을 이끌어내기 위해 A가 $\mathbb{R}$이나 $\varnothing$이 아닌데도 열린집합인 동시에 닫힌집합이라고 가정해보자. 그러면 A와 $\mathbb{R} \setminus A$

는 둘 다 열린집합이면서 $A \neq \varnothing, \mathbb{R} \setminus A \neq \varnothing$이다. 그러면 $\mathbb{R} = A \cup (\mathbb{R} \setminus A)$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \varnothing$이므로 $\mathbb{R}$이 연결집합이 아니라는 결론을 얻게 되어 모순이다. 따라서 A가 열린집합인 동시에 닫힌집합이면 A는 $\mathbb{R}$이거나 $\varnothing$이다.

2.7.25. 연결집합인 A에 대해 $A \subset B \subset \overline{A}$를 만족하는 집합 B가 주어졌다고 하자. B의 열린 집합 U와 V가 존재하여 $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = B$를 만족한다고 가정하자. 그러면 $X = A \cap U$, $Y = A \cap V$를 생각했을 때 X와 Y가 각각 A의 열린집합이면서 $X \cap Y = A \cap U \cap V = \varnothing$이고 $X \cup Y = (A \cap U) \cup (A \cap V) = A \cap (U \cup V) = A \cap B = A$이다. 그런데 A가 연결집합이기 때문에 X와 Y 둘 중 하나는 공집합이어야 한다. 일반성을 잃지 않고 $X = \varnothing$이라고 하면 $A = Y = A \cap V$이므로 $A \subset V$이다. 이때, 만약 $U \neq \varnothing$이어서 U의 원소 x가 존재한다고 하면 $x \in U \subset B \subset \overline{A}$이므로 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해 $N(x, \epsilon) \cap A \neq \varnothing$이다. 그런데 U가 열린집합이므로 ϵ를 충분히 작게 잡으면 $N(x, \epsilon) \subset U$가 되게 할 수 있고, 그러면 $\varnothing \neq N(x, \epsilon) \cap A \subset U \cap V$이 되어 $U \cap V = \varnothing$임에 모순이다. 따라서 $U = \varnothing$이어야 하므로, U와 V가 동시에 공집합이 아닐 수 없다. 즉, B는 연결집합이다.

2.7.26. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 $x \in A$에 대해 x가 A의 극한점이 아니라고 가정하자. 그러면 어떤 $\varepsilon > 0$이 존재하여 $N(x, 2\varepsilon) \cap A = \{x\}$이다. 편의상 $U = N(x, \varepsilon)$, $V = N(x, 2\varepsilon)$, $K = \overline{N(x, \varepsilon)}$이라 두면 $\{x\} \subset U \subset K \subset V$이고 U와 V는 열린집합이며 K는 닫힌집합이다. 또한 $A \cap V = \{x\}$이므로 $A \cap U = A \cap K = \{x\}$이며, 즉 $A \cap U$는 $A \cap K$와 같은 집합이고 A의 비어있지 않은 열린집합이다. 그런데 $\mathbb{R}^n \setminus K$이 열린집합이므로, $A \cap (\mathbb{R}^n \setminus K) = A \setminus K$는 A의 열린집합이 되는데 이때 A가 적어도 두 점을 포함하므로 x가 아닌 A의 원소가 존재하게 되고, 따라서 $A \setminus K$는 공집합이 아니다. 그런데 그렇다면 $A \cap K$와 $A \setminus K$는 각각 비어있지 않은 A의 열린집합으로서 교집합이 공집합이고 합집합이 A이게 되어, A가 연결집합임에 모순이 생긴다. 따라서 가정이 거짓이어야 하므로, x가 A의 원소이면 A의 극한점이어야 한다는 결론을 얻는다.

제 3 장

연속함수의 성질

3.5.1. **(가)** 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $f(x) = 0$으로 정의하고 열린집합 $V = (0,1)$을 생각하면 f는 연속함수이지만 $f(V) = \{0\}$은 $\mathbb{R}$의 열린집합이 아니다. 따라서 이 명제는 거짓이다.

(나) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $f(x) = x^3 - x$으로 정의하고 열린집합 $V = (-1,1)$을 생각하면 f는 다항함수이므로 연속함수이고 $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$이지만 미적분학에서 배운 내용에 의해 $f(V) = \left[-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$이므로 $f(V)$는 $f(\mathbb{R})$의 열린집합이 아니다. 따라서 이 명제는 거짓이다.

(다) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$으로 정의하고 닫힌집합 $F = \mathbb{R}$을 생각하면 모든 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $1 + x^2 > 0$이므로 f는 연속함수이지만 $\{1+x^2 : x \in \mathbb{R}\} = [1,\infty)$이므로 $f(F) = (0,1]$이 되어 $f(F)$는 $\mathbb{R}$의 닫힌집합이 아니다. 따라서 이 명제는 거짓이다.

(라) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

으로 정의하면 $x \neq 0$일 때 f가 연속임은 **(다)**를 참고하여 쉽게 알 수 있고, $f(0) = 1 = \lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 $x = 0$일 때도 f가 연속이므로 f는 정의역 전체에서 연속이다. 닫힌집합 $F = [0,\infty)$를 생각하면 $f(F) = (0,1]$인데, $f(\mathbb{R}) = (-\infty,1]$이므로 $f(\mathbb{R}) \setminus f(F) = (\infty,0]$이 $f(\mathbb{R})$의 열린집합이 아니기 때문에 $f(F)$는 $f(R)$의 닫힌집합이 아니다. 따라서 이 명제는 거짓이다.

3.5.2. 조건에 의해 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$이므로 $f(0) = 0$이다. 이로부터 임의의 실수 r에 대해 $0 = f(0) = f\big(r + (-r)\big) = f(r) + f(-r)$이므로 $f(-r) = -f(r)$이다.

임의의 자연수 n과 실수 r에 대해 $f(nr) = nf(r)$이 성립함을 n에 대한 수학적 귀납법으로 보일 것이다. $n = 1$인 경우에는 당연히 성립함을 알 수 있다. 이제 어떤 자연수 k에 대해 $n = k$일 때 등식이 성립한다고, 즉, $f(kr) = kf(r)$이라고 가정하자. 그러면

$$f\Big((k+1)r\Big) = f(kr + r) = kf(r) + f(r) = (k+1)f(r)$$

이므로 $n = k+1$일 때도 등식이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 임의의 자연수 n과 실수 r에 대해 $f(nr) = nf(r)$이 성립한다. 특히, $f(n) = nf(1)$임과, $r = \dfrac{1}{n}$이라 놓았을 때 $f(1) = nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$이 됨으로부터 $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(1)$이 성립함에 유의하자.

임의로 유리수 $q \in \mathbb{Q}$를 잡으면 어떤 정수 m과 자연수 n에 대해 $q = \dfrac{m}{n}$이라고 놓을 수 있는데, 그러면

$$f(q) = f\left(\frac{m}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1)$$

이 성립한다.

이제 $\mathbb{Q}$가 $\mathbb{R}$에서 조밀함으로부터 임의로 실수 r을 잡았을 때 r로 수렴하는 $\mathbb{Q}$ 안의 수열 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각할 수 있다. 이때 각 r_n은 유리수임과 f가 연속함수임을 이용하면

$$f(r) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = rf(1)$$

임을 알 수 있다. 따라서 임의의 실수 x에 대해 $f(x) = xf(1)$이므로, $f(1)$의 값에 의해 f에 의한 함수값이 결정된다. 즉, 조건을 만족하는 연속함수 f는 $f(1)$의 값을 a라 두었을 때 $f(x) = ax$이다.

3.5.3. $\mathbb{R}$의 부분집합 $V = \left(\dfrac{f(x_0)}{2}, \infty\right)$를 생각하면 $f(x_0) > 0$이므로 V는 0을 포함하지 않는 $\mathbb{R}$의 열린집합이다. 그러면 f가 연속이므로 정리 3.1.5에 의해 $U = f^{-1}(V)$는 X의 열린집합이다. 이때 $f(x_0) \in V$이므로 $x_0 \in U$이고, $f(U) = f\left(f^{-1}(V)\right) \subset V$이므로 $x \in U$이면 $f(x) \in V$이므로 $f(x) > \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$이다. 따라서 U는 문제에서 주어진 조건을 만족하는 열린집합이다.

3.5.4. 집합 G를

$$G = \{(x, f(x) : x \in \mathbb{R})\}$$

이라 놓자. 먼저 f가 연속이면 G가 닫힌집합임을 보이자. 임의로 $x \in \mathbb{R}$을 잡고, $y \neq f(x)$를 생각하자. 그러면 f의 연속성에 의해 $\epsilon = \dfrac{|y - f(x)|}{3} > 0$이라 두면 적당한 $\delta > 0$이 존재하여 $|z - x| < \delta$이면 $|f(z) - f(x)| < \epsilon$를 만족한다. 이때 $U = N(x, \delta)$, $V = N(y, \epsilon)$이라 두면 $U \times V$는 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 열린집합이고 (x, y)를 포함하며, 임의의 $u \in U$에 대해

$$|y - f(u)| \geq |y - f(x)| - |f(u) - f(x)| > 3\epsilon - \epsilon = 2\epsilon$$

이므로 $f(u) \notin V$이다. 이로부터 (x, y)가 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G$의 내점이 됨을 알 수 있고, 따라서 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G$는 열린집합이므로 G는 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 닫힌집합이다.

반대로 G가 닫힌집합이면 f가 연속임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 임의로 $x \in \mathbb{R}$를 잡고 x로 수렴하는 어떤 실수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 존재하여 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x)$이라 가정하자. 이는 적당한 $\epsilon > 0$이 존재하여 어떠한 자연수 N을 잡더라도 $n > N$인 어떤 자연수 n이 $|f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon$을 만족한다는 것이다. 이때 f가 유계이므로 어떤 실수 M에 대해 $|f| \leq M$이라 할 수 있는데, 만약 $[-M, M] \setminus N(f(x), \epsilon)$ 안에 유한 개의 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$의 항만이 존재한다면 앞 문장의 조건을 만족할 수 없음을 알 수 있다. 따라서 $[-M, M] \setminus N(f(x), \epsilon)$은 수열 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$의 무한히 많은 항을 포함하면서, 유계이자 닫힌집합이므로서 콤팩트집합이므로 정리 2.5.4에 의해 그 안에서 수렴하는 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$의 부분수열 $\left\{f(x_{n(k)})\right\}_{k\in\mathbb{N}}$이 존재하게 된다. 이때 $y = \lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)})$라 하자.

수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 x로 수렴하므로 명제 2.3.6에 의해 유계이고, 따라서 어떤 실수 L이 존재하여 모든 자연수 n에 대해 $x_n \in [-L, L]$이다. 따라서 $G \cap [-L, L] \times [-M, M]$은 유계인 닫힌 집합으로 콤팩트집합이다. 이때, 수열 $\left\{(x_{n(k)}, f(x_{n(k)}))\right\}_{k\in\mathbb{N}}$을 생각하면 첫 번째 성분은 x로 수렴하고 두 번째 성분은 y로 수렴하므로 $\lim_{k\to\infty}(x_{n(k)}, f(x_{n(k)})) = (x, y)$이다. 그런데 한편 이 수열은 $G \cap [-L, L] \times [-M, M]$ 안의 수열이므로 정리 2.5.4로부터 $G \cap [-L, L] \times [-M, M]$ 안의 어떤 점으로 수렴해야 하는데, $y \neq f(x)$이므로 $(x, y) \notin G$이므로 도움정리 2.3.7을 생각하면 모순이 발생함을 알 수 있다.

따라서 가정이 거짓이어야 하므로, 어떤 실수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$이면 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$임을 알 수 있다. 이제 명제 3.1.3에 의해 f가 연속임을 알 수 있다.

f가 연속이면 G가 닫힌집합임을 보일 때는 f가 유계임을 사용하지 않았음에 주의하자. 즉, f가 유계가 아니더라도 f가 연속이기만 하면 G는 닫힌집합이다. 한편 f가 유계가 아니면 G가 닫힌집합이더라도 f가 연속이 아닐 수도 있는데, 그 예로 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

이라 정의하면 f가 0에서 연속이 아님은 쉽게 알 수 있다. 이제 G가 닫힌집합임을 보이기 위해 $(x, y) \in \mathbb{R}$을 잡고 $y \neq f(x)$이라 가정하자. 만약 $x \neq 0$이면 f가 x에서는 연속이므로 앞에서 본 f가 연속일 때 (x, y)를 포함하면서 G와의 교집합이 없는 열린집합을 찾는 과정을 그대로 따라하면 (x, y)가 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G$의 내점임을 알 수 있다. 반대로 $x = 0$이면 가정에 의해 $y \neq 0$이다. 이때 $A = N\left(0, \left|\dfrac{1}{3y}\right|\right)$, $B = N\left(y, \left|\dfrac{y}{2}\right|\right)$라 놓고 $A \times B$를 생각하면 이 집합은 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$의 열린 집합이고 $(0, y) = (x, y)$를 포함한다. 더불어

$$f(A) = \{0\} \cup (-\infty, -3|y|) \cup (3|y|, \infty)$$

이므로 $f(A) \cap B = \varnothing$이기 때문에 $A \times B \cap G = \varnothing$임 또한 알 수 있다. 즉, $x = 0$인 경우에도 (x, y)는 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G$의 내점이다. 이로부터 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus G$은 열린집합임을 알 수 있고, 따라서 G는 닫힌집합이다.

이와 같이, f가 연속이면 항상 G가 닫힌집합이지만 f가 유계라는 조건이 없으면 G가 닫힌집합이더라도 f가 연속인지는 알 수 없다.

3.5.5. 완비성공리로부터 축소구간정리가 유도됨을 상기하자. 먼저 f가 아래로부터 유계임을 보일 것인데, 모순을 이끌어내기 위해 f가 하계를 가지지 않는다고 가정해보자. $a_1 = a$, $b_1 = b$라 두고 $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$라 하자. 이제 귀납적으로 감소하는 유계닫힌구간들의 구간열 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 정의함에 있어 f가 각 I_n에서 하계를 가지지 않도록 하고자 한다. 이를 위해 어떤 자연수 n에 대해 $I_n = [a_n, b_n]$이 정의되었다고 하자. 그러면 f이 $I_n = [a_n, b_n]$에서 아래로부터 유계가 아니므로 두 구간 $\left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right]$과 $\left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$중 적어도 하나에서는 f가 아래로부터 유계가 아니어야 한다. 그러한 구간을 I_{n+1}으로 놓는다.

이렇게 얻은 구간열 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 축소구간정리를 적용하면 어떤 $c \in [a, b]$이 존재하여 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$이다. 그런데 f가 c에서 연속이므로 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $|x - c| < \delta$이면 $|f(x) - f(c)| < 1$을 만족한다. 그런데 자연수 N을 $\dfrac{|a - b|}{2^N} < \delta$가 되도록 잡으면 I_{N+1}은 길이가 $\dfrac{|a - b|}{2^N}$인 구간이면서 c를 포함하므로 $y \in I_{N+1}$이면 $|y - c| < \dfrac{|a - b|}{2^N} < \delta$이고, 따라서 그러한 y에 대해서는 $f(y) > f(c) - 1$이어야 한다. 그런데 이는 f가 I_{N+1}에서 아래로부터 유계가 아니어야 함에 모순이므로, f가 아래로부터 유계가 아니라는 가정이 거짓이어야 한다. 따라서 f는 아래로부터 유계이다.

그런데 이때 $g = -f$를 생각하면 g 또한 $[a, b]$에서 연속이므로 아래로부터 유계이다. 즉 어떤 실수 M에 대해 $-f = g > M$이므로 $f < -M$이다. 그렇기 때문에 f는 위로부터도 유계이고, 따라서 f는 유계이다.

이제 따름정리 3.2.4를 보이자. f가 아래로부터 유계이므로 $L = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$을 만족하는 실수 L이 존재한다. 그런데 만약 f가 최소값을 가지지 않아 $f(x) = L$이 되는 실수 $x \in [a, b]$가 존재하지 않는다면 모든 $x \in [a, b]$에 대해 $f(x) > L$이고, 즉 $h(x) = \dfrac{1}{f(x) - L}$은 $[a, b]$에서

연속인 함수가 된다. 그러면 h 또한 유계이므로 어떤 실수 R에 대해 $h \le R$이어야 하는데, 양수 $\epsilon > 0$을 $R < 1/\epsilon$가 되도록 잡으면 어떤 $y \in [a,b]$에 대해 $L < f(y) < L + \epsilon$이어야 하므로 $h(y) = \dfrac{1}{f(y) - L} > \dfrac{1}{\epsilon} > R$이 되어 모순이 발생한다. 따라서 f는 최소값을 가진다. 그런데 다시 $g = -f$를 생각하면 g도 $[a,b]$에서 연속이므로 최소값을 가지고, 따라서 $f = -g$는 최대값 또한 가짐을 알 수 있기에 따름정리 3.2.4가 증명되었다.

3.5.6. 임의로 $x \in [a,b]$를 고정하고, 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 그러면 f의 연속성에 의해 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $y \in [a,b]$일 때 $|x - y| \le \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/4$을 만족한다. 이는 즉 $f(x) - \epsilon/4 < f(y) < f(x) + \epsilon/4$이라는 것임에 주목하자.

만약 $y > x$이면서 $|x - y| < \delta$이면 $[a,x] \subset [a,y]$이므로 g의 정의로부터 $g(x) \le g(y)$이다. 이때 $g(x) \ne g(y)$이면 $g(y) = \max\{f(z) : x \le z \le y\}$이 될 것인데, $x \le z \le y$이면 $|z - x| < \delta$이므로 $f(z) < f(x) + \epsilon/4$이 항상 성립하게 되어 $g(y) \le f(x) + \epsilon/4 < f(x) + \epsilon/2$임을 알 수 있다. 그런데 다시 g의 정의상 $f(x) \le g(x)$이므로 $f(x) \le g(x) \le g(y) < f(x) + \epsilon/2$이 되어, $|g(x) - g(y)| < \epsilon/2$이 된다.

한편 $y < x$이면서 $|x - y| < \delta$이면 $[a,y] \subset [a,x]$이므로 g의 정의로부터 $g(y) \le g(x)$이다. 이때 $g(x) \ne g(y)$이면 $g(x) = \max\{f(z) : y \le z \le x\}$이 될 것인데, $y \le z \le x$이면 $f(z) < f(x) + \epsilon/4$이므로 $g(x) \le f(x) + \epsilon/4 < f(x) + \epsilon/2$임을 알 수 있다. 그런데 다시 g의 정의로부터 $f(y) \le g(y)$이므로, 종합하면 $f(x) - \epsilon/4 < f(y) \le g(y) \le g(x) < f(x) + \epsilon/2$가 되어 $|g(y) - g(x)| < \dfrac{3\epsilon}{4}$이 된다.

따라서 $|x - y| < \delta$이면 $|g(x) - g(y)| < \epsilon$임이 보여졌다. 그런데 처음에 양수 ϵ을 임의로 잡았으므로, 연속성의 정의로부터 g가 연속함수임을 알 수 있다.

3.5.7. 따름정리 3.2.11에 의해 $[0,1]$의 연속함수에 의한 상은 유계닫힌구간이어야 한다. 그런데 $(0,1)$은 닫힌 구간이 아니므로 $[0,1]$의 연속함수에 의한 상이 될 수 없다. 이는 즉 $[0,1]$에서 $(0,1)$로 가는 연속함수는 전사일 수 없음을 뜻하므로, $[0,1]$에서 $(0,1)$로 가는 전사연속함수는 존재하지 않는다.

3.5.8. 먼저 $\alpha = 0$인 경우를 생각한다. $\lim_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = 0$이므로 임의로 양수 $\epsilon > 0$을 잡았을 때 실수 R이 존재하여 $x \ge R$이면 $|f(x+1) - f(x)| < \epsilon/2$를 만족한다. 이때 f가 연속이므로 $[R, R+1]$에서 유계이기 때문에, $R \le t \le R+1$이면 $|f(t)| < M$을 만족하는 실수 M이 존재한다. 그러면 임의의 자연수 N에 대해 $R \le t \le R+1$일 때

$$\begin{aligned}
|f(t+N) - f(t)| &= \left|\sum_{k=1}^{N} \big(f(t+k) - f(t+k-1)\big)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{N} \big|f(t+k) - f(t+k-1)\big)\big| \\
&\le \sum_{k=1}^{N} \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{\epsilon N}{2}
\end{aligned}$$

이 성립하므로 $-M < f(t) < M$임을 상기하면

$$-M - \frac{\epsilon N}{2} < f(t) - \frac{\epsilon N}{2} < f(t+N) < f(t) + \frac{\epsilon N}{2} < M + \frac{\epsilon N}{2}$$

이다. 따라서 $y = t + N$ 으로 놓았을 때

$$\left|\frac{f(y)}{y}\right| < \frac{M}{t+N} + \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{N}{t+N} < \frac{M}{R+N} + \frac{\epsilon}{2}$$

이 됨을 알 수 있다. 그런데 M과 R은 정해진 수이므로 $\lim_{N\to\infty} \frac{M}{R+N} = 0$이고, 즉 적당한 자연수 N_0을 $N \geq N_0$ 이면 $\frac{M}{R+N} < \frac{\epsilon}{2}$이 되도록 잡을 수 있다. 그러면 그러한 N_0에 대해 실수 s가 $s \geq R+N_0$ 이면 $R \leq t \leq R+1$인 실수 t와 $N \geq N_0$인 자연수 N이 존재하여 $s = t+N$을 만족할 수 있으므로 $\left|\frac{f(s)}{s}\right| < \epsilon$이 성립하는데, 처음에 양수 ϵ을 임의로 잡았으므로

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s} = 0$$

이 된다.

이제 α가 반드시 0은 아닌 어떤 실수인 경우를 생각하자. 함수 $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$을 $g(x) = f(x) - \alpha x$으로 정의하면 $\lim_{x\to\infty} \big(f(x+1) - f(x)\big) = \alpha$이고

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) - \alpha(x+1) - \big(f(x) - \alpha x\big) = f(x+1) - f(x) - \alpha$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} \big(g(x+1) - g(x)\big) = 0$이다. 그렇기 때문에

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - \alpha x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \alpha$$

이므로 $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$임을 알 수 있다.

3.5.9. 어떤 두 실수 $x, y \in [0, 2\pi]$가 주어졌을 때 $\gamma(t) = e^{i(x+t(y-x))}$이라 두면 γ는 연속함수이고 구간 $[0,1]$의 γ에 의한 상이 $\mathbb{T}$ 안에 포함된다. 그런데 $\gamma(0) = e^{ix}$, $\gamma(1) = e^{iy}$이므로 $\mathbb{T}$는 곡선연결집합이고, 따라서 $\mathbb{T}$는 연결집합이다.

주어진 연속함수 f에 대하여 함수 $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$을 $g(x) = f(x) - f(-x)$이라 놓자. 그러면 g 또한 연속함수이고, 복소평면을 좌표평면 $\mathbb{R}^2$와 같은 것으로 보면 정리 3.2.8에 의해 $g(\mathbb{T})$는 $\mathbb{R}$의 부분집합인 연결집합이 되어 어떤 $\mathbb{R}$의 구간이 된다. 그런데 $\pm 1 \in \mathbb{T}$이고

$$-g(1) = -f(1) + f(-1) = f(-1) - f\Big(-(-1)\Big) = g(-1)$$

이므로 구간 $\Big[-|g(1)|, |g(1)|\Big]$이 $g(\mathbb{T})$ 안에 포함된다. 따라서 $0 \in g(\mathbb{T})$이므로 어떤 $x \in \mathbb{T}$에 대해 $g(x) = 0$이다. 이는 곧 그러한 x에 대하여

$$0 = g(x) = f(x) - f(-x)$$

임을 뜻하기 때문에, 어떤 $x \in \mathbb{T}$는 식 $f(x) = f(-x)$을 만족한다는 것을 알 수 있다.

3.5.10. **(가)** 실수 s를 $s = \frac{1+r}{2}$이라 두면 $r < s < 1$이고, 따라서

$$\|f(x) - f(y)\| < s\,\|x - y\|$$

임에 주목하자. 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 $\delta = \frac{\epsilon}{s}$이라 두면 $x, y \in X$에 대해 $\|x - y\| < \delta$이면

$$\|f(x) - f(y)\| < s\,\|x - y\| < s\delta = \epsilon$$

이므로 f는 X에서 고른연속이다. 따라서 f는 연속이기도 하다.

(나) 먼저 임의의 자연수 k에 대해

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - x_k| = & \quad |f(x_k) - f(x_{k-1})| & \leq r\,|x_k - x_{k-1}| \\ = & \; r\,|f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})| & \leq r^2\,|x_{k-1} - x_{k-2}| \\ & \cdots & \\ = & \; r^{k-1}\,|f(x_1) - f(x_0)| & \leq r^k\,|x_1 - x_0| \end{aligned}$$

이 성립함에 주목하자. 이로부터 만약 $x_0 = x_1$이면 모든 자연수 k에 대해 $|x_{k+1} - x_k| = 0$이므로 $x_k = x_{k+1}$이 되어 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 상수수열임을 알 수 있다. 상수수열은 당연히 코시수열이므로 이 경우에는 더 이상 살펴볼 것이 없다.

$x_0 \neq x_1$이라 가정하고 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로 $r^N < \dfrac{\epsilon(1-r)}{|x_1 - x_0|}$을 만족하는 자연수 N을 잡을 수 있다. 그러한 N에 대해 자연수 n, m을 $n > m > N$이 되도록 잡으면

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |x_{k+1} - x_k| \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} r^k\,|x_1 - x_0| \\ &= |x_1 - x_0| \cdot \frac{r^m - r^n}{1-r} \\ &< |x_1 - x_0| \cdot \frac{r^N}{1-r} \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

이 성립하므로, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이다.

(다) 극한점 x가 X의 원이 되는 것은 X가 닫힌집합이므로 정리 2.2.3으로부터 쉽게 알 수 있다. 한편 f가 연속이므로

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$$

이 성립한다. 따라서 x는 함수 f의 고정점이 된다.

3.5.11. **(가)** 만약 x와 y가 둘 다 고정점인데 $x \neq y$이면

$$\|x - y\| > \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

이 되어 모순이 발생한다. 따라서 f의 고정점은 많아야 한 개이다.

(나) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = |x| + e^{-|x|} = \begin{cases} x + e^{-x} & x \geq 0 \\ -x + e^{x} & x < 0 \end{cases}$$

이라 놓고 $f(x) = f(-x)$임에 유의하자. f가 $x \neq 0$일 때 연속임은 당연하고, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 = f(0)$이므로 f는 0에서도 연속이다.

$x \ge 0$, $y \ge 0$이고 $x \ne y$인 경우 일반성을 잃지 않고 $x < y$라 할 수 있는데, 그러면

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|x - y + (e^{-x} - e^{-y})\right| \\ &= |x-y|\left|1 + \frac{e^{-x} - e^{-y}}{x-y}\right| \end{aligned}$$

인데, 여기에 본문 4.2절의 내용이지만 고등학교때 배운 내용인 평균값 정리를 잠시 가져와 사용하면 어떤 $z \in (x, y)$에 대해 $\dfrac{e^{-x} - e^{-y}}{x-y} = -e^{-z}$이고, 이때 $z > x \ge 0$으로부터 $-1 \le -e^{-z} < 0$이 성립하므로 $\left|1 + \dfrac{e^{-x} - e^{-y}}{x-y}\right| < 1$이 된다. 즉 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$이 성립한다. 반대로 $x < 0$, $y < 0$인 경우에도 $f(-x) = f(x)$이고 $|x - y| = |(-x) - (-y)|$임에 유의하면

$$|f(x) - f(y)| = |f(-x) - f(-y)| < |(-x) - (-y)| = |x - y|$$

이 됨을 볼 수 있다.

한편 $x < 0$ 또는 $y < 0$이지만 둘이 동시에 0보다 작지는 않은 경우 일반성을 잃지 않고 $y < 0 \le x$이라 가정할 수 있는데, 그러면 이 경우에도

$$|f(x) - f(y)| = \Big|f\big(|x|\big) - f\big(|y|\big)\Big| < \Big||x| - |y|\Big| \le |x - y|$$

이 성립함을 확인할 수 있다.

위의 결과를 종합하면 f는 연속이면서 조건 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$을 만족함을 알 수 있다. 하지만

$$f(x) = |x| + e^{-|x|} > |x| \ge x$$

이므로 어떠한 실수 x에 대해서도 $f(x) > x$이 되어, f는 고정점을 가지지 않는다.

(다) 연습문제 3.5.10의 **(가)**에서 함수가 연속임을 보일 때 s가 반드시 1보다 작아야 할 필요가 없음에 주목하면, 그 곳에서와 똑같은 방식으로 이 문제에서의 f가 연속임을 보일 수 있다. 함수 $g : X \to \mathbb{R}$을 $g(x) = |x - f(x)|$으로 정의하면 f가 연속이므로 g도 연속이 된다. X가 콤팩트이므로 최대최소정리에 의해 g는 최소값을 가지는데, g가 최소가 되는 그 점을 x라 놓자. 이때 만약 $x \ne f(x)$이라면

$$g(f(x)) = |f(x) - f(f(x))| < |x - f(x)| = g(x)$$

이 되어 g가 x에서 최소임에 모순이다. 따라서 $x = f(x)$이고, 즉 x가 f의 고정점이 된다.

3.5.12. 함수 f가 고른연속이면 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $x, y \in [0, \infty)$이고 $|x - y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$를 만족한다. 이때, $\dfrac{1}{2N} < \delta$을 만족하는 자연수 N을 잡으면 임의로 $x \in [0, 1]$을 잡았을 때 집합 $\left\{\dfrac{1}{2N}, \dfrac{3}{2N}, \cdots, \dfrac{2N-1}{2N}\right\}$의 원소중 하나와의 거리가 δ보다 작게 된다. 가정에 의해 각 $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$에 대해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f\left(n + \frac{2k-1}{N}\right) = 0$이므로, 어떤 자연수 M_k이 존재하여 $n > M_k$이면 $\left|f\left(n + \dfrac{2k-1}{N}\right)\right| < \dfrac{\epsilon}{2}$이다. 즉 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_N\}$이라 두면 모든 $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$에 대해 자연수 n이 $n > M$이면 $\left|f\left(n + \dfrac{2k-1}{N}\right)\right| < \dfrac{\epsilon}{2}$이다. 이제 실수 y가 $y > M + 1$을 만족하면 어떤 자연수 n과 어떤 실수 t를 $n > M$, $t \in [0, 1]$이면서 $y = n + t$가 되게 잡을 수 있고, 이때 자연수 k를 $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$이고 $\left|(n + t) - \left(n + \dfrac{2k-1}{2N}\right)\right| =$

$\left|t - \dfrac{2k-1}{2N}\right| < \delta$가 되도록 잡으면

$$\begin{aligned}|f(y)| = |f(n+t)| &= \left|f(n+t) - f\left(n + \frac{2k-1}{2N}\right) + f\left(n + \frac{2k-1}{2N}\right)\right| \\ &\le \left|f(n+t) - f\left(n + \frac{2k-1}{2N}\right)\right| + \left|f\left(n + \frac{2k-1}{2N}\right)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 다시 말해, 임의의 양수 $\epsilon > 0$을 잡았을 때 $y > M + 1$이면 $|f(y)| < \epsilon$이 성립한다. 따라서 $\lim_{y\to\infty} f(y) = 0$이다.

한편 f가 그냥 연속이면 같은 결론을 내릴 수 없다. 예를 들어, 함수 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$을 $0 \le x < 1$일 때는 $f(x) = 0$으로 놓고, 각 자연수 k에 대해 구간 $[k, k+1)$ 위에서

$$f(x) = \begin{cases} 2^{k+2}\left(x - \left(k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)\right) & k + \dfrac{1}{2^{k+1}} \le x < k + \dfrac{3}{2^{k+2}} \\ -2^{k+2}\left(x - \left(k + \dfrac{1}{2^{k}}\right)\right) & k + \dfrac{3}{2^{k+2}} \le x < k + \dfrac{1}{2^{k}} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

가 되도록 정의하자. 그러면 각 자연수 k에 대해 구간 $[k, k+1)$에서 f는 $k + \dfrac{1}{2^{k+1}}$부터 $k + \dfrac{1}{2^k}$ 사이에 높이가 1인 '톱니'가 하나 있고 나머지에선 값이 0인 꼴을 가짐을 확인할 수 있고, 이로부터 f가 정의역 전체에서 연속임도 어렵지 않게 보일 수 있다. 한편, 임의로 $t \in (0,1)$을 잡았을 때, $t > \dfrac{1}{2^N}$을 만족하는 자연수 N이 존재하고, 그러한 N에 대해 자연수 n이 $n > N$이면 $n + t > n + \dfrac{1}{2^n}$이므로 $f(n+t) = 0$이다. 즉 $\lim_{n\to\infty} f(n+t) = 0$이 된다. 또한, 임의의 자연수 m에 대해 $f(m) = 0$이므로 $t = 0$이거나 $t = 1$일 때도 $\lim_{n\to\infty} f(n+t) = 0$이다. 즉 임의의 $t \in [0,1]$에 대해 $\lim_{n\to\infty} f(n+t) = 0$이므로 f는 주어진 조건을 만족한다. 하지만 각 자연수 k에 대해 $f\left(k + \dfrac{3}{2^{k+2}}\right) = 1$이고 $f(k) = 0$인데, 지름이 $\dfrac{2}{3}$인 $\mathbb{R}$의 구간은 0과 1을 동시에 포함할 수 없으므로 $\epsilon = 1/3$으로 두었을 때 어떠한 실수 L과 양수 R을 잡더라도 R보다 큰 어떤 실수 r이 $|f(r) - L| > \epsilon$을 만족한다. 따라서 $\lim_{x\to\infty} f(x)$은 존재하지 않는다.

3.5.13. f가 고른연속임은 주어진 것으로 본다. 그러면 정리의 역은 "함수 $f : X \to Y$가 고른연속이고 X 안의 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해 그 상 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$이 Y의 코시수열이면 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$도 X의 코시수열이다"가 될 것이다. 이는 X가 유계인지 아닌지에 관계 없이 성립하지 않는다. 먼저 X가 유계인 경우에 정리의 역이 성립하지 않음을 보이기 위해 $X = [-2\pi, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$으로 두고 $f(x) = \sin x$이라 하면 f는 콤팩트집합 X에서 연속인 함수이므로 고른연속이지만, 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 $x_n = (-1)^n\pi$라 두면 모든 자연수 n에 대해 $f(x_n) = 0$이 되어 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이지만 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이 아니다.

X가 유계가 아닌 경우에도 정리의 역이 성립하지 않음을 보이기 위해서 $X = Y = \mathbb{R}$이라 두고 위에서와 같이 $f(x) = \sin x$이라 두자. f가 고른연속임을 보이기 위해 f가 주기가 2π인 주기함수이고, 정의역을 $[-2\pi, 2\pi]$로 제한할 경우 고른연속임에 주목하자. 즉, 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 어떤 $\delta' > 0$이 존재하여 $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$이고 $|x - y| < \delta'$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$을 만족하는데, 이때 $\delta = \min\{\delta', \pi\}$이라 두어도 $x, y \in [-2\pi, 2\pi]$이고 $|x - y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$

을 만족하게 된다. 이제 임의로 $s, t \in \mathbb{R}$을 $|s-t| < \delta < \pi$가 되도록 잡으면 s와 t를 동시에 적당한 2π의 정수배만큼 평행이동하여 얻은 s'와 t'가 $[-2\pi, 2\pi]$ 안에 들어오게 할 수 있으므로 $|f(s) - f(t)| = |f(s') - f(t')| < \epsilon$임을 알 수 있다. 따라서 f는 고른연속이다. 하지만 어떤 실수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해 그 상 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이더라도 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 극한점조차 가지지 않을 수도 있는데, 이는 $x_n = n\pi$라 둠으로써 모든 자연수 n에 대해 $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$임과 함께 확인할 수 있다.

3.5.14. 좌표공간의 부분집합 $X \subset \mathbb{R}^n$ 위에서 정의된 함수 $f : X \to \mathbb{R}^m$이 고른연속이고 X가 유계일 때 f이 유계임을 보일 것이다. 모순을 이끌어내기 위해 f가 유계가 아니라고 가정하자. 임의로 양수 $\epsilon > 0$을 잡고, $f(X)$가 유계가 아님을 이용하여 X 안의 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 귀납적으로 정의함에 있어 임의의 서로 다른 두 자연수 m, n에 대해 $|f(x_m) - f(x_n)| \geq \epsilon$이도록 하고자 한다. 먼저 x_1을 X 안에서 임의로 잡는다. 어떤 자연수 n에 대해 $x_1, x_2, \cdots, x_n$이 정해졌을 때 열린집합 $U_n = \bigcup_{k=1}^{n} N(f(x_k), \epsilon)$을 생각하면 U_n은 유한개의 유계집합의 합집합이므로 유계이다. 이때 $f(X)$가 유계가 아니기 때문에 U_n의 부분집합이 될 수 없음에 유의하여, 비어있지 않은 집합인 $f(X) \setminus U_n$으로부터 점 하나를 잡아 y_n이라 두고 $f^{-1}(y_n)$의 원소 중 하나를 x_{n+1}으로 두자. 그러면 $f(x_{n+1}) = y_n \notin U_n$으로부터 $f(x_{n+1})$은 $f(x_1), \cdots, f(x_n)$으로부터 각각 적어도 ϵ만큼 떨어져있게 되어 조건을 만족하게 된다. 한편 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 정리 2.3.4에 의해 ($\mathbb{R}^n$에서) 수렴하는 부분수열 $\{x_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$를 가지는데, 명제 2.3.6에 의해 $\{x_{n(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$는 ($X$의) 코시수열이 된다. 그러면 정리 3.3.2에 의해 f가 고른연속이기 때문에 $\{f(x_{n(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$는 코시수열이 되어야 하는데, 임의의 두 자연수 k, l에 대해 $k \neq l$이면 $\left|f(x_{n(k)}) - f(x_{n(l)})\right| \geq \epsilon$이므로 $\{f(x_{n(k)})\}_{k\in\mathbb{N}}$는 코시수열이 될 수 없어 모순이 생긴다. 따라서 가정이었던 $f(X)$가 유계가 아님이 거짓이어야 함으로부터 f가 유계임을 알 수 있다.

3.5.15. (가) 임의로 A 안의 두 점 x, y를 잡자. 그러면 정의에 의해 임의로 양수 $\eta > 0$이 주어지면 어떤 $a \in A$가 존재하여 $\|x - a\| < f_A(x) + \eta$을 만족한다. 그러면

$$
\begin{aligned}
f_A(y) &= \inf\{\|y - b\| : b \in A\} \\
&\leq \|y - a\| \\
&\leq \|y - x\| + \|x - a\| \\
&< \|y - x\| + f_A(x) + \eta
\end{aligned}
$$

이 되어, $f_A(y) - f_A(x) < \|y - x\| + \eta$이 성립한다. 그런데 지금까지의 과정을 x와 y의 역할을 바꾸어 그대로 다시 진행하면 $f_A(x) - f_A(y) < \|x - y\| + \eta$ 또한 성립함을 알 수 있다. 즉, 부등식

$$|f_A(x) - f_A(y)| < \|x - y\| + \eta$$

이 성립한다. 그런데 이 부등식이 임의의 $\eta > 0$에 대하여 성립하므로, 결국 $|f_A(x) - f_A(y)| \leq \|x - y\|$이 성립하게 된다.

이제 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어져 $|x - y| < \epsilon/2$이면

$$|f_A(x) - f_A(y)| \leq \|x - y\| < \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이므로, f_A가 고른연속임을 알 수 있다.

(나) 만약 $x \in \overline{A}$이면 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대하여 $N(x,\epsilon) \cap A \neq \varnothing$이므로 어떤 $a \in A$가 존재하여 $\|x-a\| < \epsilon$이다. 따라서

$$f_A(x) = \operatorname{dist}(\{x\}, A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\} < \epsilon$$

이 되는데, 이것이 임의의 양수 $\epsilon > 0$에 대해 성립하므로 $f_A(x) \le 0$이다. 그런데 항상 음이 아닌 값을 가지는 노음들의 집합의 하한은 음이 아닌 실수일 수밖에 없기 때문에 $f_A(x) \ge 0$ 또한 성립하므로, $f_A(x) = 0$이다.

한편 $x \notin \overline{A}$이면 어떤 양수 $\delta > 0$이 존재하여 $N(x,\delta) \cap A = \varnothing$이므로 집합 $\{\|x-a\| : a \in A\}$는 모든 원소가 δ 이상인 집합이다. 즉

$$f_A(x) = \operatorname{dist}(\{x\}, A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\} \ge \delta > 0$$

이 되므로, 다시 말해 $x \notin \overline{A}$이면 $f_A(x) > 0$이다. 그런데 이 명제의 대우가, $f_A \ge 0$임에 유의하면, $f_A(x) = 0$이면 $x \in A$이다는 것이 되기 때문에, $x \in \overline{A}$인 것과 $f_A(x) = 0$인 것은 필요충분조건이다. 따라서 $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_A(x) = 0\}$이다.

(다) 좌표공간의 임의의 부분집합 A에 대해, **(가)**에서 보았듯이 f_A는 고른연속이므로 연속이다. 따라서 $f_A(x) + f_B(x)$가 어떠한 $x \in \mathbb{R}^n$에 대해서도 0이 아니다는 것만 보이면 ρ가 연속임은 당연하다.

따라서 어떠한 $x \in \mathbb{R}^n$에 대해서도 $f_A(x) + f_B(x) \neq 0$임을 보이고자 한다. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 $x \in \mathbb{R}^n$에 대해 $f_A(x) + f_B(x) = 0$이 된다고 가정하자. 그러면 이는, 항상 음이 아닌 값을 가지는 노음들의 집합의 하한은 항상 음이 아닌 실수가 된다는 것에 주목하면, $f_A \ge 0$이고 $f_B \ge 0$임에 유의하면, $f_A(x) = f_B(x) = 0$인 경우가 된다. 그런데 이때 **(나)**에서 보인 것을 생각하면 $x \in \overline{A} = A$인 동시에 $x \in \overline{B} = B$이어야 하므로 $x \in A \cap B \neq \varnothing$이 성립해야 하는데, 이는 A와 B가 서로소라는 가정에 모순이다. 따라서 가정이 거짓이어야 하므로, 모든 $x \in \mathbb{R}^n$에 대해 $f_A(x) + f_B(x) \neq 0$이라는 결론을 얻는다.

(라) 주어진 A, B에 대해 **(다)**에서 정의한 연속함수 $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$을 생각하자. 그러면 $a \in A$에 대해서는 $f_A(a) = 0$이므로 $\rho(a) = 0$이고, $b \in B$에 대해서는 $f_B(b) = 0$인 한편 $b \notin A$이므로 $f_A(b) \neq 0$이 되어

$$\rho(b) = \frac{f_A(b)}{f_A(b) + f_B(b)} = \frac{f_A(b)}{f_A(b)} = 1$$

이다. 따라서 $U = \rho^{-1}\Big((-\infty, 1/3)\Big)$, $V = \rho^{-1}\Big((2/3, 1)\Big)$이라 놓으면 ρ가 연속이므로 정리 3.1.5에 의해 U와 V는 각각 $\mathbb{R}^n$의 열린집합이며, $A \subset U$이고 $B \subset V$인 것은 앞에서 살펴본 각 집합 위에서의 ρ의 함숫값으로부터 쉽게 알 수 있다. 마지막으로,

$$\varnothing = \rho^{-1}(\varnothing) = \rho^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cap \left(\frac{2}{3}, \infty\right)\right) = \rho^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)\right) \cap \rho^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}, \infty\right)\right) = U \cap V$$

또한 성립함을 알 수 있다.

3.5.16. 정의역 안의 점 $c \in X$를 임의로 잡자. 만약 $X = \{c\}$이면 어떠한 $\delta > 0$에 대해서도 $0 < |x - c| < \delta$를 만족하는 $x \in X$가 존재하지 않으므로 f가 연속인 것이 공허한 참이 된다. 따라서 c 이외의 점이 X 안에 존재하는 경우만 살펴보면 된다. 이제, $x \in X$ 중에서 $x < c$인 원소가 존재하는 경우 L을

$$L = \sup\{f(x) : x \in X, x < c\}$$

와 같이 정의하고, $x > c$인 원소가 존재하는 경우 U를

$$U = \inf\{f(x) : x \in X, x > c\}$$

와 같이 정의하자. 만약 U가 정의되었다면, f가 증가함수이기 때문에 U는 모든 원소가 $f(c)$보다 큰 집합의 하한이므로 $U \geq f(c)$이다. 그런데 이때 $U > f(c)$이면, $V = \dfrac{U + f(c)}{2}$으로 놓았을 때, $x > c$인 x에 대해서는 $f(x) \geq U > V$이고 $x \leq c$인 x에 대해서는 f가 증가함수이기 때문에 $f(x) \leq f(c) < V$이므로 $f(X)$이 연결집합일 수 없다. 따라서 $U = f(c)$이다. 이와 비슷한 방식으로 만약 L이 정의되었다면 $L = f(c)$이 되는 것을 보일 수 있다.

이제 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 만약 U가 정의되었다면 $U = f(c)$이므로 $x > c$이면서 $f(x) < f(c) + \epsilon$을 만족하는 x가 존재하게 된다. 또한 만약 L이 정의되었다면 $L = f(c)$이므로 $y < c$이면서 $f(y) > f(c) - \epsilon$을 만족하는 y가 존재하게 된다. 만약 U와 L이 둘 다 정의되었다면 구간 I를 $I = (y, x)$이라 놓고 $c \in I$이므로 적당한 $\delta > 0$을 잡아 $N(c, \delta) \subset I$가 되게 할 수 있는데, 그러면 $z \in X$이 $z \in N(c, \delta)$일 때 $y < z < x$ 또한 성립하므로

$$f(c) - \epsilon < f(y) < f(z) < f(x) < f(c) + \epsilon$$

이 되어 $|f(z) - f(c)| < \epsilon$이다. 즉, f는 c에서 연속이다. 한편, U만 정의되고 L은 정의되지 않은 경우에는 $I = (-\infty, x)$이라고 놓자. 그런데 L이 정의되지 않은 것은 X의 원소 중 c보다 작은 원소가 존재하지 않기 때문임에 유의하면, 적당한 $\delta > 0$을 잡아 $N(c, \delta) \subset I$가 되도록 했을 때 $z \in X$이 $z \in N(c, \delta)$이면 $c < z < x$이므로

$$f(c) < f(z) < f(x) < f(c) + \epsilon$$

이 되어 $|f(z) - f(c)| < \epsilon$이다. 즉, 이 경우에도 f는 c에서 연속이다. L만 정의되고 U는 정의되지 않은 경우에도 비슷한 과정을 통해 f가 c에서 연속임을 보일 수 있다.

따라서 f가 c에서 연속임을 알 수 있다. 그런데 c는 처음에 X에서 임의로 잡은 점이기 때문에, f가 연속함수라는 결론을 얻을 수 있다.

3.5.17. 함수 $x \mapsto e^{-f(x)}$가 단조감소함수이므로, 두 실수 x, y에 대해 $x < y$이면 $e^{-f(x)} \geq e^{-f(y)}$이다. 그런데 $x \mapsto e^{-x}$가 감소함수이므로, $e^{-f(x)} \geq e^{-f(y)}$이면 $f(x) \leq f(y)$이므로, f가 단조증가함수임을 알 수 있다. 그런데 $x \mapsto e^x$가 증가함수이므로 두 실수 x, y에 대해 $x < y$이면

$$e^x f(x) < e^y f(x) \leq e^y f(y)$$

이 되어 $x \mapsto e^x f(x)$는 단조증가함수여야 한다. 그런데 문제에서 주어진 조건으로부터 $x \mapsto e^x f(x)$는 단조감소함수 또한 되어야 하고, 이는 즉 $x < y$일 때 $e^x f(x) \geq e^y f(y)$인 동시에 $e^x f(x) \leq e^y f(y)$이므로 $e^x f(x) = e^y f(y)$이 된다는 뜻이기 때문에 $x \mapsto e^x f(x)$는 상수함수이다. 즉 어떤 상수 C에 대해 $e^x f(x) = C$가 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립하므로, 조건을 만족하는 함수 $f(x)$는 Ce^{-x}의 꼴을 가질 수밖에 없음을 알 수 있다. 따라서 f는 연속이다. 더 나아가, f가 단조증가함수이어야 함으로부터 $C \leq 0$임 또한 알 수 있다.

제 4 장

미분가능함수의 성질

4.4.1. 무리수 점 x를 고정하고 수열 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 $s_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)x$으로 정의하자. 그러면 이때 $\lim_{n\to\infty} s_n = x$임에 유의하자. 각 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 s_n이 무리수이므로 $g(s_n) = 0$이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(s_n) - g(x)}{s_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{s_n - x} = 0$$

이다. 한편 p_n을 n번째로 작은 소수라 하고, r_n을 $\frac{1}{p_n}, \frac{2}{p_n}, \cdots \frac{p_n - 1}{p_n}$ 중 x에 가장 가까운 것으로 하자. 그럼 $|x - r_n| < \frac{1}{p_n}$이고, $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{p_n} \to 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} r_n = x$이다. 한편 p_n이 소수이므로 r_n은 언제나 기약분수가 되기 때문에 $g(r_n) = \frac{1}{p_n}$이다. 따라서

$$\left|\frac{g(r_n) - g(x)}{r_n - x}\right| = \frac{\left|\frac{1}{p_n} - 0\right|}{|r_n - x|} \geq \frac{\frac{1}{p_n}}{\frac{1}{p_n}} = 1$$

이므로 $\liminf_{n\to\infty} \left|\frac{g(r_n) - g(x)}{r_n - x}\right| \geq 1$이다. 이는 x로 수렴하는 서로 다른 두 수열 $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대하여 뉴턴 몫 $\frac{g(r_n) - g(x)}{r_n - x}$과 $\frac{g(s_n) - g(x)}{s_n - x}$의 극한값이 다르다는 것을 의미한다. 즉 극한

$$\lim_{y\to x} \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$$

이 존재하지 않으며, 따라서 g는 x에서 미분가능하지 않다.

4.4.2. 조건에 의해 $x \leq y$이면 $f(x) \leq f(y)$이므로 f는 단조증가함수이다. 따라서 정리 3.4.1에 의해 f의 좌극한과 우극한은 언제나 존재하며, 임의의 점 x에 대해 f의 x로의 좌극한은 $f(x-1)$보다 크거나 같고 x로의 우극한은 $f(x+1)$보다 작거나 같으므로 모든 좌극한과 우극한은 유한하다. 이제 조건으로 주어진 식에 x으로의 우극한을 취해주면

$$f(x) \leq \lim_{y\downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \infty$$

인데, 만약 $\lim_{y\downarrow x} f(y) \neq f(x)$이라면 $\lim_{y\downarrow x}(y - x) = 0$이므로 $\lim_{y\downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$이 유한함에 모순이다. 따라서 $\lim_{y\downarrow x} f(y) = f(x)$이다. 반대로 좌극한에 대해서도

$$-\infty < \lim_{x\uparrow y} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f(y)$$

임을 이용하면 비슷한 논리로 $\lim\limits_{x\downarrow y} f(x) = f(y)$ 임을 보일 수 있다. 따라서 f가 x로 갈 때의 좌극한과 우극한이 모두 $f(x)$로 일치하므로 f는 연속이다.

다시 조건으로 주어진 식에 $y \to x$의 극한을 취해주면 f가 연속임으로부터 샌드위치 정리를 적용하여

$$f(x) \le \lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \lim_{y\to x} f(y) = f(x)$$

임을 알 수 있고, 따라서 f의 뉴턴 몫의 극한이 존재하고 그 값이 x에서 $f(x)$임을 알 수 있다. 즉 f는 미분가능한 함수이며 $f'(x) = f(x)$이다. 미적분학에서 배운 1계 제차 선형 상미분 방정식의 풀이를 사용하면 f로 가능한 함수들은 적당한 상수 C에 대해 $f(x) = Ce^x$ 꼴 뿐임을 알 수 있고, 단조증가임으로부터 $C \ge 0$이어야 함을 알 수 있다. 이제 $f(x) = Ce^x$일 때 주어진 조건을 만족하는지 확인해보자. y 대신 $y - x = h$라 놓고, 음이 아닌 실수 h에 대해

$$Ce^x \le \frac{Ce^{x+h} - Ce^x}{h} \le Ce^{x+h}$$

이 성립하는지를 확인할 것이다. e^x는 실수 전체에서 미분가능하고 $(e^x)' = e^x$이므로, 구간 $(0, h)$에 대해 평균값정리를 적용하면 어떤 $c \in (0, h)$에 대해

$$\frac{e^h - e^0}{h - 0} = \frac{e^h - 1}{h} = e^c \ge 1$$

이 성립함을 알 수 있고, 따라서

$$\frac{Ce^{x+h} - Ce^x}{h} = Ce^x\left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \ge Ce^x$$

이 성립하므로 왼쪽 부등식이 성립한다. 한편 e^x에 구간 $(-h, 0)$에 대하여 평균값 정리를 사용하면 어떤 $d \in (-h, 0)$에 대해

$$\frac{1 - e^{-h}}{h} = \frac{e^{-h} - e^0}{(-h) - 0} = e^d \le 1$$

이 성립하므로

$$\frac{Ce^{x+h} - Ce^x}{h} = Ce^{x+h}\left(\frac{1 - e^{-h}}{h}\right) \le Ce^{x+h}$$

또한 성립하여 오른쪽 부등식이 성립한다. 이로써 $f(x) = Ce^x$이면 주어진 조건을 만족함을 알 수 있다. 따라서 주어진 만족하는 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$은 어떤 상수 $C \ge 0$에 대해 Ce^x 꼴의 함수들 뿐이다.

4.4.3. 먼저 관계식

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\left(\frac{n+1}{k(n-k+1)}\right) \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

이 성립함에 주목하자.

문제에서 주어진 등식이 $n = 1$일 때는 이미 성립함을 알고 있다. 따라서 주어진 등식이 n일때 성립하면 $n+1$일 때도 성립한다는 것만 보이면 되는데, 이를 보이기 위해 n일때의 등식에서 양변을 미분하면

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\
&\quad\quad + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= f^{(n+1)}(x)g(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f(x)g^{(n+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x)
\end{aligned}$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

4.4.4. 먼저 조건

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(c)| < M\,|x-c|^{\alpha}$$

를 만족하는 양수 $\delta, M, \alpha > 0$이 있을 f가 c에서 연속임을 보이자. 임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, $\eta = \min\left\{\sqrt[\alpha]{\dfrac{\epsilon}{M}}, \delta\right\}$으로 잡으면 $\eta \le \delta$이므로 주어진 조건에 의해 $0 < |x-c| < \eta$일 때

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(c)| &< M\,|x-c|^{\alpha} \\
&< M\eta^{\alpha} \\
&\le M\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\epsilon}{M}}\right)^{\alpha} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

이므로 극한의 정의에 의해 f는 c에서 연속이다.

이제 주어진 조건을 만족하는 양수 $\delta, M > 0$과 $\alpha > 1$이 존재할 때 f가 c에서 미분가능함을 보이자. $\beta = \alpha - 1$이라 두면 $\beta > 0$이고

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| < M\,|x-c|^{\beta}$$

이므로 앞부분에서의 결과에 의해

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 0$$

이다. 따라서 f는 c에서 미분가능하고, $f'(c) = 0$이다.

4.4.5. 본문 4.1장의 보기 2에서 함수 $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$이

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x > 0 \end{cases}$$

으로 주어지면 h_1가 C^∞ 함수임을 보았다. 따라서 $h_2(x) = h_1(1-x)$ 또한 C^∞ 함수이며, $h_2(x)$는 $x \ge 1$일 때 0이고 $x < 1$일 때 양의 값을 가진다. 따라서 $f(x) = h_1(x)h_2(x)$라 두면 $f(x)$는 $x \le 0$이거나 $x \ge 1$이면 0의 값을 가지고 열린구간 $(0,1)$에서만 양의 값을 가진다. 이제 f가 C^∞ 함수인지만 보면 되는데, 이는 연습문제 4.4.3의 결과로부터 임의의 자연수 k에 대해 h_1와 h_2가 k번 미분가능하면 두 함수의 곱 또한 k번 미분가능하다는 결론을 얻을 수 있으므로 f가 C^∞ 함수임을 알 수 있다. 따라서 f가 우리가 원하는 함수가 된다.

이제 $M = \int_0^1 f(x)dx$라 하고 $g(x) = \frac{1}{M}\int_0^x f(t)dt$라 하자. 그러면 $x < 0$일 때는 $f(x) = 0$이므로 $g(x) = 0$이고, $x > 1$일 때는 이때도 $f(x) = 0$이므로 $g(x) = \frac{1}{M}\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{M}\int_0^1 f(t)dt = 1$임을 알 수 있다. $g(x)$가 C^∞ 함수임은 미적분학의 기본정리에 의해 $g'(x) = f(x)$이고 $f(x)$가 C^∞ 함수임으로부터 알 수 있다. 미적분학의 기본정리는 이 책 기준 5장에서 다루지만, 미적분학에서 배운 내용이므로 정리의 결과만 이용하기로 한다.

4.4.6. 모순을 이끌어내기 위해 f가 증가함수가 아니라고 해보자. 구간 I의 왼쪽 끝점을 a, 오른쪽 끝점을 b라 하고, 어떤 x, y가 존재하여 $a < x < y < b$이지만 $f(x) \ge f(y)$이라고 가정하자. 그러면 $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le 0$이어야 함에 주목하자. 그런데 평균값 정리에 의해 $x < z < y$인 z가 존재하여

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(z)$$

이어야 하는데, 가정에 의해 $f'(z) > 0$이 되어 모순이 생긴다. 따라서 열린 구간 (x,y)에서 f는 증가함수이다. 이제 정리 3.4.1을 적용하면 I가 끝점 a 또는 y를 포함하는 경우에도 f가 I 위에서 증가함수임을 알 수 있다.

이제 $g = f^{-1}$이라 두면 항등식 $(f \circ g)(x) = x$을 얻을 수 있고, 양변을 미분하면 합성함수의 미분법에 의해

$$g'(x)\ f'\big(g(x)\big) = 1$$

임을 알 수 있다. 반대로 $(g \circ f)(x) = x$도 성립하므로, 양변을 미분하면 합성함수의 미분법에 의해

$$f'(x)\ g'\big(f(x)\big) = 1$$

임 또한 알 수 있다.

4.4.7. 도함수 f'가 유계라 하자. 이는 미분계수가 각 $x \in (0,1)$에 대해 존재한다는 뜻인데, 어떤 점에서 f가 미분가능하면 연속이고, 콤팩트 집합 위에서 연속인 함수는 항상 고른연속이므로, f는 고른연속이다.

한편 그 역은 성립하지 않는다. 이를 확인하기 위해, f를

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

으로 정의하자. f가 $x \neq 0$에서 연속이고 미분가능함은 당연하다. 한편 임의의 $\delta > 0$에 대해

$$0 < |x - 0| < \delta \implies |f(x) - f(0)| = \left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| < 2\,|x - 0|^2$$

가 성립하므로 연습문제 4.4.4의 결과에 의해 f는 0에서 연속이며 미분가능하고, f의 0에서의 뉴턴몫에 대해

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \right| = \left| h \sin\left(\frac{1}{h^2}\right) \right| \leq |h|$$

이 성립하므로 샌드위치 정리에 따라

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = 0$$

이다. 따라서 f를 콤팩트집합 $[0, 1]$에서 정의된 함수로 생각하면 콤팩트집합 위에서 연속인 함수이므로 고른연속이고, 미분가능하다. 그런데 열린 구간 $(0, 1)$에서

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

임에 주목하자. 따라서 양의 정수 k에 대해

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{k\pi}}\right) = 2\sqrt{k\pi}(-1)^k$$

이 되므로, k를 충분히 크게 잡으면 $0 < \dfrac{1}{\sqrt{k\pi}} < 1$이면서도 $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{k\pi}}\right)$이 한없이 커지게 만들 수 있다. 따라서 f'는 유계가 아니다.

4.4.8. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $f(x) \neq f(0)$이라 가정하자. 그러면 어떤 양의 정수 N이 존재하여 $N > \dfrac{x^2}{|f(x) - f(0)|}$을 만족한다. 그러면 $n > N$인 양의 정수 n에 대해, 삼각부등식과 주어진 조건을 이용하면,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(0)| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left| f\left(x \cdot \frac{i}{n}\right) - f\left(x \cdot \frac{i-1}{n}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{n}\right)^2 \\ &= \frac{x^2}{n} \end{aligned}$$

이 성립하여야 하는데, 이는 $n \leq \dfrac{x^2}{|f(x) - f(0)|}$와 동치이므로 가정에 모순이다. 따라서 $f(x) \neq f(0)$이라는 가정이 틀렸어야 하고, 즉 $f(x) = f(0)$이 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립하여야 한다. 다시 말해, f는 상수함수이다.

4.4.9. 편의상 $K = \lim_{x \to c} f'(x)$라 두자. 충분히 작은 양수 $\delta > 0$에 대해, $0 < h \leq \delta$이면 닫힌 구간 $[c - h, c + h]$가 닫힌 구간 $[a.b]$에 포함되게 할 수 있다. 이때, 가정에 의해 $[c, c + h]$에서 f가 연속이고 $(c, c + h)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 어떤 $z \in (c, c + h)$가 존재하여

$$\frac{f(c + h) - f(c)}{h} = f'(z)$$

를 만족한다. 이때 $h \to 0+$일 때의 극한을 생각하면 $z \to c+$이므로,

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} = f'(z) = \lim_{z \to c+} f'(z) = K$$

이다. 한편 $[c-h,c]$에서도 f가 연속이고 $(c-h,c)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의해 어떤 $y \in (c-h,c)$가 존재하여

$$\frac{f(c)-f(c-h)}{h} = f'(y)$$

를 만족한다. 이제 변수 변환 $t=-h$를 이용하여 위의 식을 다시 쓰면

$$f'(y) = \frac{f(c)-f(c+t)}{-t} = \frac{f(c+t)-f(c)}{t}$$

가 되는데, 이렇게 하면 $h \to 0+$일 때 $t \to 0-$이고 이때 $y \to c-$이므로 이때의 극한을 생각하면

$$\lim_{t\to 0-} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} = \lim_{y\to c-} f'(y) = K$$

임을 알 수 있다. 따라서 f의 c에서의 뉴턴몫의 좌극한과 우극한이 같은 값 K로써 존재한다. 이는 뉴턴몫의 c에서의 극한이 존재하며 그 값이 K라는 뜻이므로, 다시 말해 f는 c에서 미분가능하며

$$f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$$

이다.

4.4.10. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$을

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

으로 정의하면 0을 포함하면서 $\{0\}$이 아닌 임의의 구간에 대해 f에 의한 상이 실수 전체임을 알 수 있다. 한편 0을 포함하지 않는 구간에서는 f가 연속이므로 0을 포함하지 않는 구간의 f에 의한 상 또한 구간이다. 이제 f가 원시함수를 가지지 않음을 보이고자 한다. 모순을 이끌어내기 위해 F가 f의 원시함수라 하자. 그러면 $x>0$에서

$$\left(F(x)+\sin\frac{1}{x}\right)' = f(x) - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} = 0$$

이므로 어떤 상수 C에 대해 $x>0$에서 $F(x)+\sin\dfrac{1}{x}=C$가 성립한다. 이때 $F(x)$는 가정에 의해 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속인데, 이는

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} &= \lim_{x\to 0}\,(-F(x)+C) \\ &= -\lim_{x\to 0} F(x) + C \end{aligned}$$

에서 마지막 줄의 극한이 존재하므로 $\sin\dfrac{1}{x}$의 $x\to 0$일 때의 극한이 존재함을 뜻한다. 하지만 실제로는 이 극한이 존재하지 않으므로, f의 원시함수가 존재한다는 가정이 거짓이어야 한다. 따라서 f는 원시함수가 존재하지 않는다.

4.4.11. 모순을 이끌어내기 위하여, 두 점 $a,b\in I$가 존재하여 그 두 점에서 f'의 부호가 다르다고 가정하자. 일반성을 잃지 않고 $a<b$라 가정할 수 있으며, $(-f)' = -(f')$이므로 필요하다면 f 대신 $-f$을 고려함으로써 일반성을 잃지 않고 $f'(a)<0$이고 $f'(b)>0$이라 가정할 수 있다. 그런데 그러면 $f'(a)<0<f'(b)$이므로 정리 4.2.6에 의해 $f'(c)=0$인 $c\in(a,b)$가 존재해야 하는데, 이는 $f'\neq 0$이라는 가정에 모순이다. 따라서 f'의 부호가 다르게 되는 두 점의 존재한다는 것이 거짓이어야 한다. 다시 말해, 구간 안의 어떤 점에서 $f'>0$이면 구간의 모든 미분가능한 점에서 $f'>0$이어야 하며, 반대로 구간 안의 어떤 점에서 $f'<0$이면 구간 안의 모든 미분가능한 점에서 $f'<0$이어야 한다.

4.4.12. 먼저 $f(x), f'(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$ 전부가 $x=0$과 $x=1$에서 근을 가짐을 보이자. 먼저

$$f(x) = \left(x^2 - x\right)^n = x^n(x-1)^n$$

으로 나타내면 적당한 상수 $a_0, a_1, \cdots, a_n$에 대해

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n+1} + \cdots + a_nx^{2n}$$

으로 나타내어지므로 f와 f의 1계, 2계, $\cdots$, $(n-1)$계 도함수의 상수항이 전부 0임을 알 수 있다. 한편, $t = 1-x$으로 치환하면

$$\begin{aligned}(t^2-t)^n = (1-t)^nt^n &= x^n(x-1)^n \\ &= a_0x^n + a_1x^{n+1} + \cdots + a_nx^{2n} \\ &= (-1)^na_0(t-1)^n + (-1)^{n+1}a_1(t-1)^{n+1} + \cdots + (-1)^{2n}a_n(t-1)^{2n}\end{aligned}$$

이 성립하므로 이 꼴에서 양변을 미분함으로써 f와 f의 1계, 2계, $\cdots$, $(n-1)$계 도함수 각각의 항들이 공통인수로 $(t-1)$을 가지므로 각각이 1을 근으로 가짐을 알 수 있다.

$f(0) = f(1) = 0$이므로 롤의 정리에 의해 어떤 $\alpha_{1,1} \in (0,1)$이 존재하여 $f'(\alpha_{1,1}) = 0$을 만족한다. 이제 위의 문단에서의 논의에 의해 $f'(0) = f'(1) = 0$이므로, 롤의 정리에 의해 어떤 $\alpha_{2,1} \in (0, \alpha_{1,1})$, $\alpha_{2,2} \in (\alpha_{1,1}, 1)$이 존재하여 $f''(\alpha_{2,1}) = 0$, $f''(\alpha_{2,2}) = 0$을 만족한다. 다시 위의 문단에서의 논의에 의해 $f''(0) = f''(1) = 0$이므로, 구간 $(0, \alpha_{2,1})$, $(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2})$, $(\alpha_{2,2}, 1)$에 각각 다시 롤의 정리를 적용할 수 있다. 이렇게 $(n-1)$번 반복하면 $f^{(n)}(x) = 0$을 만족하는 $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \cdots, \alpha_{n,n}$을 찾을 수 있으며, 이 n개의 수는 겹치지 않는 n개의 열린 구간에서 각각 하나씩 골라온 것이므로 전부 다 다르다. 다시 말해, $f^{(n)}$은 구간 $[0,1]$에서 서로 다른 n개의 실근을 갖는다.

4.4.13. 테일러의 정리에 의해, 충분히 작은 임의의 $h > 0$에 대해 어떤 z가 c와 $c+h$ 사이에, y가 c와 $c-h$ 사이에 존재하여

$$\begin{aligned}f(c+h) &= f(c) + f'(c)h + \frac{f''(z)}{2}h^2 \\ f(c-h) &= f(c) - f'(c)h + \frac{f''(y)}{2}h^2\end{aligned}$$

를 만족한다. 이제 위의 식들을 변끼리 더하고 적당히 이항하면

$$\frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = \frac{f''(y) + f''(z)}{2}$$

이 되는데, 이때 $c-h < y < c < z < c+h$이므로 $h \to 0$일 때의 극한을 생각하면 $y \to c$, $z \to c$가 되어

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} &= \frac{1}{2}\left(\lim_{h\to0} f''(y) + \lim_{h\to0} f''(z)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2f''(c)\right) \\ &= f''(c)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다.

한편 주어진 명제의 역이 성립하지 않음을 보기 위해서 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

이라 두고 $c = 0$인 경우를 생각하자. 그러면 $f(h) = -f(-h)$이 모든 $h \in \mathbb{R}$에 대해 성립하므로

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

이 되어 극한값은 존재한다. 하지만 f의 도함수를 생각하면 $x \neq 0$일 때는 $f'(x) = 2|x|$이고

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \right| = \frac{|f(h)|}{|h|} = \frac{h^2}{|h|} = |h|$$

으로부터 샌드위치 정리에 의해

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} = 0$$

임을 알 수 있다. 따라서 f의 도함수는 $f'(x) = 2|x|$으로 존재하지만, 절대값 함수가 $x = 0$에서 미분불가능함은 잘 알려져 있는 사실이며 따라서 f는 $x = 0$에서 두 번 미분가능한 함수가 아님을 알 수 있다. 다시 말해, $f''(0)$은 존재하지 않는다.

제 5 장

리만-스틸체스 적분

5.6.1. 임의의 분할 $P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = b\}$가 주어졌다고 하자. $g \le h$이므로 임의의 $i = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대해

$$\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} g(x) \le \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} h(x)$$

이 성립한다. 따라서 상합의 정의에 의해 $U_a^b(g, P) \le U_a^b(h, P)$이 임의의 $P \in \mathcal{P}[a, b]$에 대해 성립한다. 여기에 P에 대한 상한을 취하면

$$\overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} h$$

이 성립함을 알 수 있다. 반대로 $f \le g$에서 임의의 $i = 1, 2, 3, \cdots$ 에 대해

$$\inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} g(x) \ge \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$$

이 성립한다. 따라서 하합의 정의에 의해 임의의 $P \in \mathcal{P}[a, b]$에 대하여 $L_a^b(g, P) \ge L_a^b(f, P)$이 성립한다. 이제 여기에 $P \in \mathcal{P}[a, b]$에 대한 하한을 취해주면

$$\underline{\int_a^b} g \ge \underline{\int_a^b} f$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 이미 우리는 $\int_a^b f = \int_a^b h = A$임을 알고 있으므로

$$A = \underline{\int_a^b} f \le \underline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} g \le \overline{\int_a^b} h = A$$

이 성립한다. 따라서 g는 적분가능하고 그 적분값은 A이다.

5.6.2. 먼저 두 실수 a, b가 주어졌을 때

$$\begin{aligned} \max\{a, b\} + \min\{a, b\} &= a + b \\ \max\{a, b\} - \min\{a, b\} &= |a - b| \end{aligned}$$

이 성립함에 주목하자. 양변을 각각 더함으로써 $\max\{a, b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$ 이 성립함을 알 수 있고, 따라서 $\min\{a, b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$ 임도 알 수 있다. 두 적분가능한 함수의 합과 차는 각각 적분가능한 함수이고, 적분가능한 함수에 절댓값을 취한 함수도 적분가능이며, 적분가능한 함수의 상수배 또한 적분가능하다. 따라서 $\max\{f, g\} = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$와 $\min\{f, g\} = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$는 각각 적분가능하다.

5.6.3. 임의의 $\varepsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 먼저 $f^2 = |f|^2$이고 f가 적분가능하면 $|f|$도 적분가능하기 때문에, 필요하다면 f 대신 $|f|$을 고려함으로써 일반성을 잃지 않고 $f \geq 0$이라 가정할 수 있다. 적분구간을 $[a,b]$라 하고, f가 이 구간 위에서 유계여야 하므로 어떤 $M \in \mathbb{R}$에 대해 $|f| \leq M$이 $[a,b]$에서 성립한다. 이때, f가 적분가능하므로 어떤 $P \in \mathcal{P}[a,b]$가 존재하여

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

을 만족한다. 편의상 $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$이라 두고, 각 $i = 1, 2, \cdots, n$에 대하여

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \\ m_i &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x) \end{aligned}$$

이라 하자. 그러면 $m_i \leq M_i \leq M$이고, $f \geq 0$이므로

$$\begin{aligned} M_i^2 &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (f(x))^2 \\ m_i^2 &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} (f(x))^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 그러면

$$\begin{aligned} U(f^2,P) - L(f^2,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} 2M(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2M(U(f,P) - L(f,P)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 $U(f^2,P) - L(f^2,P) < \varepsilon$을 만족하는 $[a,b]$의 분할이 존재하므로 f^2이 적분가능하다는 것을 알 수 있다.

이제 f와 g가 적분가능하다고 하자. 그러면

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

이고 적분가능한 함수의 제곱이 적분가능함을 위에서 보았으므로 fg도 적분가능함을 알 수 있다.

5.6.4. f가 $[a,b]$ 위에서 적분가능하므로 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $[a,b]$의 분할 P가 $\|P\| < \delta$를 만족하면

$$\left| R(f,P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

을 만족한다. 이 주어진 δ로부터, $\dfrac{b-a}{\delta} < n$를 만족하는 임의의 n에 대해서 $[a,b]$의 분할 P를

$$P = \left\{ x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n}, \cdots, x_n = b \right\}$$

으로 잡고, 각 구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 안의 점 t_i를 $t_i = x_i$로 잡으면 리만합

$$R(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\,\frac{b-a}{n}\right) \frac{b-a}{n}$$

을 얻을 수 있고, 이때 $\|P\| = \dfrac{b-a}{n} < \delta$이므로

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i-1}^{n} f\left(a + i\ \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

이 성립한다. 이는 다시 말해 임의의 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때 $n > \dfrac{b-a}{\delta}$인 모든 n에 대하여

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

이 성립한다는 뜻이므로 극한의 정의에 의해

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)$$

이 성립함을 알 수 있다.

이 결과로부터 문제에서 주어진 극한값을 구해보자. 먼저 첫 번째 극한에 대해서는

$$\frac{n}{k^2+n^2} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{(\frac{k}{n})^2+1}$$

임에 유의하자. 그러면 위에서 보인 결과를 $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$인 경우에 적용한다면 우리가 원하는 극한값을 구할 수 있다는 것을 알 수 있다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \left[\tan^{-1}(x)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

이다. 두 번째 극한에 대해서는

$$\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{\sqrt{(\frac{k}{n})^2+1}}$$

임에 유의하자. 그러면 위에서 보인 결과를 $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$인 경우에 적용한다면 우리가 원하는 극한값을 구할 수 있다는 것을 알 수 있다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right)$$

이 된다.

한편 극한값 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right)$이 존재한다고 해서 f가 $[a,b]$에서 적분가능하지는 않다. 예를 들어, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$를

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

으로 정의하면 임의의 자연수 k와 n에 대하여 $f\left(a + k\ \dfrac{b-a}{n}\right) = 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\ \frac{b-a}{n}\right) = 0$$

이 된다. 한편 f는 적분가능하지 않은데, 이를 보이기 위해 임의의 $P \in \mathcal{P}[0,1]$을 고르자. 분할 P가

$$P = \{x_0 = a, x_1, x_2, \cdots, x_n = 1\}$$

으로 주어졌을 때, 임의의 구간 $[x_{i-1}, x_i]$ 안에는 유리수점과 무리수점이 모두 존재하므로 $[x_{i-1}, x_i]$에서 f의 상한은 1, 하한은 0이다. 따라서

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = x_n - x_0 = 1,$$
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$$

이 되기 때문에

$$\overline{\int_0^1} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} f$$

이다. 따라서 f는 적분가능하지 않다.

5.6.5. 모순을 이끌어내기 위해 $f \neq 0$이라 하자. 그러면 어떤 $x_0 \in [0,1]$에 대해 $f(x_0) = \alpha > 0$이다. f가 연속이므로, 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $|x_0 - x| < \delta$이면 $|f(x) - \alpha| \leq \dfrac{\alpha}{2}$를, 따라서 $f(x) \geq \dfrac{\alpha}{2}$을 만족한다. 적당한 a, b를 $a < b$이면서 $[a,b] \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [0,1]$이 되도록 잡으면 $[a,b]$ 위에서 $f \geq \dfrac{\alpha}{2}$이다. 이제 $g : [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

으로 정의하면 $f \geq g$이고 g는 두 단조함수

$$g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2} & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}, \quad g_2(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{2} & x > b \\ 0 & x \leq b \end{cases}$$

의 합이므로 적분가능하다. 그러므로 $\displaystyle\int_0^1 f \geq \int_0^1 g$이다. 이때 $\left[\dfrac{2a+b}{3}, \dfrac{a+2b}{3}\right] \subset [a,b]$이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g &= \int_0^{\frac{2a+b}{3}} g + \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+2b}{3}} g + \int_{\frac{a+2b}{3}}^{1} g \\
&\geq \int_0^{\frac{2a+b}{3}} 0 + \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+2b}{3}} \frac{\alpha}{2} + \int_{\frac{a+2b}{3}}^{1} 0 \\
&= [0]_0^{\frac{2a+b}{3}} + \left[\frac{\alpha}{2}x\right]_{x=\frac{2a+b}{3}}^{x=\frac{a+2b}{3}} + [0]_{\frac{a+2b}{3}}^{1} \\
&= \frac{\alpha}{2}\left(\frac{a+2b}{3} - \frac{2a+b}{3}\right) \\
&= \frac{\alpha(b-a)}{6}
\end{aligned}$$

이 성립한다. 결과를 종합하면

$$0 = \int_0^1 f \geq \frac{\alpha(b-a)}{6} > 0$$

이 되어 모순이 생김을 알 수 있고, 이로부터 우리의 가정인 $f \neq 0$이 틀렸다는 결론이 나온다. 따라서 $f \geq 0$이면서 $\displaystyle\int_0^1 f = 0$이면 $f = 0$이다.

증명 과정을 잘 살펴보면 적분구간이 꼭 $[0,1]$이어야 할 필요 없이, 임의의 닫힌 구간 $[A,B]$에 대해서도 똑같이 논리를 전개할 수 있음을 알 수 있다. 따라서 두 실수 A와 B에 대해 $A \leq B$일 때 $\displaystyle\int_A^B f = 0$이고 $f \geq 0$이면 $f = 0$이다. 이 결과는 연습문제 5.6.10의 풀이에 사용된다.

5.6.6. $M = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$이라 놓고 $g : [a,b] \to \mathbb{R}$을 $g(x) = \dfrac{|f(x)|}{M}$이라 정의하자. 그러면 f가 연속임에 의해 g도 연속이고, $\max\{g(x) : x \in [a,b]\} = 1$이다. 이때 어떤 $x_0 \in [a,b]$가 존재하여 $g(x_0) = 1$이므로 임의의 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때, 충분히 작은 $\delta > 0$이 존재하여

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a,b)\text{이면서 } \ y \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \Longrightarrow |g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$$

를 만족하게 된다. 이때 g가 x_0에서 최댓값 1을 가지므로 $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$은 $1 - \varepsilon < g(y) \leq 1$과 동치이다. 이로부터

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_a^{x_0-\delta} 0 & \leq & \displaystyle\int_a^{x_0-\delta} g^n & \leq & \displaystyle\int_a^{x_0-\delta} 1 \\
\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} (1-\varepsilon)^n & \leq & \displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g^n & \leq & \displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} 1 \\
\displaystyle\int_{x_0+\delta}^{b} 0 & \leq & \displaystyle\int_{x_0+\delta}^{b} g^n & \leq & \displaystyle\int_{x_0+\delta}^{b} 1
\end{array}$$

을 얻을 수 있고, 좌변과 우변을 계산해준 뒤 변끼리 더하면

$$2\delta(1-\varepsilon)^n \leq \int_a^b g^n \leq (b-a)$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서

$$(1-\varepsilon)(2\delta)^{1/n} \leq \left(\int_a^b (g(x))^n dx\right)^{1/n} \leq (b-a)^{1/n}$$

이 성립하고, $n \to \infty$일 때 연습문제 1.6.12의 (나)의 결과를 이용하면

$$1 - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (g(x))^n dx\right)^{1/n} \leq 1$$

을 얻는다. 그런데 이때 이 부등식이 임의의 $\varepsilon > 0$에 대해 성립하므로 결국

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b (g(x))^n dx\right)^{1/n} = 1$$

임을 알 수 있다. 이제 g의 정의 $g(x) = \dfrac{|f(x)|}{M}$로부터

$$\left(\int_a^b (g(x))^n dx\right)^{1/n} = \left(\int_a^b \frac{|f(x)|^n}{M^n} dx\right)^{1/n} = \frac{1}{M}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n}$$

이고, 따라서

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = M = \max\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

이 성립한다.

5.6.7. 양변에 $\int_0^x f(t)dt$를 더하자. 그러면

$$2\int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$

이고 $\int_0^1 f(t)dt$는 어떤 상수이므로 어떤 상수 C에 대해

$$\int_0^x f(t)dt = C$$

이다. 좌변으로써 정의된 x에 대한 함수는 f가 $[0,1]$에서 연속이므로 $(0,1)$에서 미분가능하다. 더 나아가, 위의 식에서 양변을 미분하면

$$f(x) = 0$$

이 모든 $x \in (0,1)$에 대해 성립해야 한다. 이때 f가 연속이므로 $f(0)$과 $f(1)$ 또한 그 값이 0이다. 따라서 $f = 0$이다.

5.6.8. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 $i(x) = I_a^x(f)$으로 정의하자. i가 미분가능함을 보이기 위해서는 임의의 $x \in (a,b)$에 대해

$$\lim_{h\to 0} \frac{i(x+h) - i(x)}{h}$$

이 존재함을 보이면 된다. $x \in (a,b)$를 고정하자. 임의의 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, f가 연속이므로 적당한 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-y| < \delta$이면 $|f(y) - f(x)| < \epsilon$을 만족한다. 이제 $0 < h < \delta$라 가정하고 $m_h = \min_{y\in[x,x+h]} f(y)$, $M_h = \max_{y\in[x,x+h]} f(y)$이라 하자. 그러면 연습문제 3.5.6에 의해 $h \to 0$일 때 $m_h, M_h \to f(x)$이다. 한편 조건 (i)에 의해

$$hm_h \le I_x^{x+h}(f) \le hM_h$$

이 성립하는데, 조건 (ii)에 의해 $I_x^{x+h}(f) = I_a^{x+h}(f) - I_a^x(f) = i(x+h) - i(x)$이므로

$$m_h \le \frac{i(x+h) - i(x)}{h} \le M_h$$

이다. 이제 $h \to 0$이면 샌드위치 정리에 의해 가운데의 뉴턴 몫 또한 $f(x)$으로 수렴함을 알 수 있다. 따라서 $i(x)$는 미분가능하며, 도함수가 f인것 또한 알아냈다.

이제 대응 $x \mapsto J_\alpha^\beta(f)$ 또한 조건 (i)과 (ii)를 만족한다고 가정하고, $j(x) = J_a^x(f)$으로 정의하자. 그러면 $j(x)$ 또한 (a,b)에서 미분가능하고 그 도함수는 f이다. 따라서

$$\frac{d}{dx}\big(i(x) - j(x)\big) = f(x) - f(x) = 0$$

이므로 $i(x) - j(x)$는 어떤 상수이다. 그런데 $i(a) = I_a^a(f)$를 생각하면, 조건 (i)에 의해 $0 \le I_a^a(f) \le 0$이므로 $i(a) = 0$이고, 마찬가지로 $j(a) = 0$이다. 따라서 $i(x) = j(x)$이며, 이로부터

$$I_a^b(f) = i(b) = j(b) = J_a^b(f)$$

또한 알 수 있다.

마지막으로, 지금까지 알아낸 것들을 이용하여 구간 $[a,b]$ 위에서 정의된 연속함수는 리만적분가능함을 보이자. 연속함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$이 주어졌을 때 $I_\alpha^\beta(f) = \underline{\int_\alpha^\beta} f$, $J_\alpha^\beta(f) = \overline{\int_\alpha^\beta} f$으로 놓자.

그러면 $m(\beta-\alpha)$는 언제나 f의 상합과 하합의 하계가 되고, $M(\beta-\alpha)$는 언제나 f의 상합과 하합의 상계가 되므로 조건 (i)이 성립한다. 조건 (ii)가 성립함은 본문의 정리 5.1.4의 증명에서 보았다. 따라서 위의 결과를 이용하면

$$\underline{\int_a^b} f = I_a^b(f) = J_a^b(f) = \overline{\int_a^b} f$$

이므로 f는 리만적분가능하다.

5.6.9. 임의로 자연수 n을 고정하고 $t \in [-n, n]$에 대해

$$F(t) = \int_{-n}^t f(x)dx$$

를 생각하자. 그러면 가정에 의해 항상 $F(t) = 0$이다. 또한 가정에 의해 f가 $[-n, n]$에서 연속이므로 $F'(t) = f(t)$이어야 되는데 $F'(t)$ 또한 상수함수 0이므로 $f(t) = 0$이다. 따라서 임의의 자연수 n에 대하여 f는 $(-n, n)$에서 상수함수 0이다.

이제 임의로 $x \in \mathbb{R}$을 잡자. 그러면 $x \in (-N, N)$을 만족하는 자연수 N이 존재할텐데, 위의 논의로부터 $f(x) = 0$임을 알 수 있다. 따라서 $\mathbb{R}$ 전체에서 $f = 0$이다.

5.6.10. 만약 $\int_a^b g = 0$이라면 연습문제 5.6.5로부터 $g = 0$임을 알 수 있는데, 그러면 $f(x)g(x) = 0$ 이므로 $\int_a^b f(x)g(x) = 0$이다. 따라서 이 경우에는 $c = a$로 잡아도 주어진 등식이 성립한다.

이제 $g \neq 0$인 경우를 생각하면, 연습문제 5.6.5에서 본 명제의 대우를 생각했을 때 $\int_a^b g(x)dx > 0$ 이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 우리는

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

을 만족하는 $c \in [a, b]$를 찾으면 충분하다. 이제 $m = \min_{[a,b]} f(x)$, $M = \max_{[a,b]} f(x)$으로 놓으면

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$$

이므로

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

이 성립한다. 이제 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$임을 알고 있으므로 양변을 이 값으로 나눠주면

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$$

을 얻는다. 이제 f가 연속임을 이용하여 최대최소정리를 적용하면, 실제로 어떤 $c \in [a, b]$가 존재하여

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

를 만족한다는 결과를 얻는다.

5.6.11. 함수 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$이 유계변동함수라 하자. 그러면 두 단조증가함수 $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$이 존재하여 $f = g - h$을 만족한다. 그런데 정리 3.4.1에 의해 g와 h는 (a, b)에서 좌극한과 우극한을 가지고 a에서는 우극한, b에서는 좌극한을 가진다. 또한 a에서의 우극한은 a에서의 함숫값보다 크거나 같고 b에서의 좌극한은 b에서의 함숫값보다 작거나 같으므로 모든 좌극한과 우극한은 유한한 값을 갖는다. 따라서 $f = g - h$또한 좌극한과 우극한이 항상 존재하는 함수이다.

5.6.12. 수열 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$를 $a_k = \sqrt{\dfrac{2}{(2k-1)\pi}}$으로 정의하고, 이 수열이 $[0, 1]$에서 $\left|\sin\dfrac{1}{x^2}\right| = 1$를 만족하는 점들을 큰 순서대로 나열한 것임에 주목하자. 좀 더 자세히 말하자면 $\sin\dfrac{1}{a_k^2} = (-1)^{k+1}$이므로, k의 홀짝성에 따라 $\sin\dfrac{1}{x^2}$의 부호가 바뀐다. 따라서

$$|f(a_k) - f(a_{k+1})| = \left|a_k^2(-1)^{k+1} - a_{k+1}^2(-1)^{k+2}\right| = \frac{2}{(2k-1)\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi}$$

이 성립함에 유의하자.

이제 $[0, 1]$의 분할 P_n을

$$P_n = \{0, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_2, a_1, 1\}$$

으로 잡자. 그러면 $|f(0) - f(a_n)| = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$이고 $|f(a_1) - f(1)| = \left|\dfrac{2}{\pi} - 1\right| = 1 - \dfrac{2}{\pi}$이므로

$$\begin{aligned} V_0^1(f, P_n) &= |f(0) - f(a_n)| + \sum_{k=1}^{n-1}|f(a_{k+1}) - f(a_k)| + |f(a_1) - f(1)| \\ &= \frac{2}{(2n-1)\pi} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{(2k-1)\pi} + \frac{2}{(2k+1)\pi}\right) + 1 - \frac{2}{\pi} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{4}{(2k-1)\pi} \end{aligned}$$

이 된다. 이때, $\dfrac{4}{(2k-1)} \geq \dfrac{2}{k}$이므로

$$1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{4}{(2k-1)\pi} \quad \geq \quad 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{k\pi}$$

이고, 조화급수가 ∞로 발산한다는 사실로부터 우변이 $k \to \infty$일 때 ∞로 발산한다는 것을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} V_0^1(f, P_n) = \infty$이다. 이는 곧

$$V_0^1(f) = \sup\left\{V_0^1(f, P) \;:\; P \in \mathcal{P}[0, 1]\right\} = \infty$$

임을 의미하므로, f는 유계변동함수가 아니다.

5.6.13. 구간의 양 끝점 a와 b, 그리고 f의 극점들을 전부 모아놓은 집합을 C라 하고 C의 원소들을 작은 순서대로 $c_0 = a$, c_1, $\cdots$, $c_k = b$라 하자. 임의의 $i = 1, 2, \cdots, k$에 대해 f가 $[c_{i-1}, c_i]$에서 단조함수임을 보일 것이다. 모순을 이끌어내기 위해 $c_{i-1} \leq s < t < u \leq c_i$을 만족하는 s, t, u가 존재하여 $f(s) < f(t)$인 동시에 $f(t) > f(u)$라고 가정하자. 그러면 닫힌구간 $[s, u]$로 f의 정의역을 제한했을 때 f가 연속이므로 f가 최대값을 가지는 t^*이 $[s, u]$ 안에 존재해야 한다. 이때 $f(s)$와 $f(u)$는 둘 다 $f(t)$보다 작으므로 $s < t^* < u$이어야 하는데, 그렇다면 충분히 작은 $\varepsilon > 0$에 대해 반지름이 ε인 t^*의 근방이 (s, u)에 포함되게 할 수 있다. 그런데 $f(t^*)$는 $[s, u]$에서 최대이므로

$(t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ 에서도 최대가 되고, 따라서 t^* 는 (정의역을 다시 $[a, b]$ 로 생각하여도) f 의 극대점이 된다. 하지만 $c_{i-1} < t^* < c_i$ 이기 때문에 $t^* \notin C$ 이고, 따라서 t^* 는 f 의 극점이 될 수 없어 모순이 생긴다. 반대로 $f(s) > f(t)$, $f(t) < f(u)$ 를 만족하는 s, t, u 가 존재한다고 가정해도 비슷한 논리 전개를 펼치면 모순이 생긴다는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 임의의 $[c_{i-1}, c_i]$ 안의 두 점 s, t 를 고르면 항상 $f(s) \le f(t)$ 이거나 $f(s) \ge f(t)$ 이어야 한다. 더 나아가서, $[c_{i-1}, c_i]$ 안의 임의의 두 점 s, t 에 대해 일반성을 잃지 않고 $s < t$ 라 가정하면 $f(s) = f(t)$ 일 수 없다는 것 또한 알 수 있는데, 만약 $f(s) = f(t)$ 라면 f 의 단조성에 의해 $s < u < t$ 인 모든 u 에 대해 $f(s) = f(u)$ 가 되어 f 가 $[s, t]$ 에서 상수함수가 되므로 $[s, t]$ 안의 모든 점이 f 의 극점이 되어 f 의 극점이 유한개임에 모순이기 때문이다. 따라서 f 는 각 구간 $[c_{i-1}, c_i]$ 에서 증가함수이거나 감소함수이다.

한편, 구간 $[a, b]$ 의 임의의 분할 $P = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ 이 주어졌다고 하고, 어떤 점 $y \notin P$ 가 $x_j < y < x_{j+1}$ 을 만족한다고 하자. 그러면 삼각부등식에 의해

$$\begin{aligned} V_a^b(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= |f(x_j) - f(x_{j-1})| + \sum_{i \ne j} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &\le |f(x_j) - f(y)| + |f(y) - f(x_{j-1})| + \sum_{i \ne j} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\ &= V_a^b(f, P \cup \{y\}) \end{aligned}$$

이 성립하고, 이로부터 분할에 점을 추가할수록 변동이 작아지지 않음을 알 수 있으므로 $[a, b]$ 의 두 분할 P, Q 가 주어졌을 때 $P \subset Q$ 이면

$$V_a^b(f, P) \le V_a^b(f, Q)$$

임을 알 수 있다.

임의로 $[a, b]$ 의 분할 P 를 잡자. P 에 f 의 극점들을 추가한 새로운 분할 $Q = P \cup C$ 를 생각하고, Q 의 원소들을 작은 순서대로 $c_0, c_{0,1}, c_{0,2}, \cdots, c_{0,i_0}, c_1, c_{1,1}, \cdots, c_{1,i_1}, c_2, \cdots, c_k$ 라 이름붙이고, 편의상 $c_{j,0} = c_j$ 이고 $c_{j,i_j+1} = c_{j+1}$ 이라 하자. 그러면

$$\begin{aligned} V_a^b(f, P) &\le V_a^b(f, Q) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{i_j} |f(c_{j,m+1}) - f(c_{j,m})| \end{aligned}$$

인데, f 가 $[c_j, c_{j+1}]$ 에서 증가함수이거나 감소함수이므로

$$\sum_{m=0}^{i_j} |f(c_{j,m+1}) - f(c_{j,m})| = |f(c_{j+1}) - f(c_j)|$$

이 된다. 따라서

$$V_a^b(f, P) \le \sum_{j=0}^{k-1} |f(c_{j+1}) - f(c_j)|$$

이 임의의 분할 P 에 대해 성립하므로

$$\sup\left\{V_a^b(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\right\} \le \sum_{j=0}^{k-1} |f(c_{j+1}) - f(c_j)|$$

이 된다. 그런데

$$V_a^b(f, C) = \sum_{j=0}^{k-1} |f(c_{j+1}) - f(c_j)|$$

이므로

$$V_a^b(f) = \sup\left\{V_a^b(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\right\} = \sum_{j=0}^{k-1} |f(c_{j+1}) - f(c_j)|$$

가 성립하게 된다. 따라서 전변동 $V_a^b(f)$를 위와 같이 구할 수 있으므로 f는 유계변동함수이다.

5.6.14. 두 함수 f^+와 f^-를

$$f^+ = \max\{f, 0\}, \quad f^- = f^+ - f$$

으로 정의하자. $f \geq 0$일 때와 $f < 0$일 때를 나누어 생각해보면 $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$임을 알 수 있다. 또한 $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$이며, 만약 $f^+ > 0$이면 $f^+ = \max\{f, 0\}$이므로 $f^+ = f$인 경우가 되어 $f^- = 0$이 된다. 따라서 반대로 $f^- \neq 0$이면 $f^+ \not> 0$인데, f^+와 f^-는 음의 값을 가지지 않으므로 이는 $f^- > 0$이면 $f^+ = 0$이라는 것과 동치이다. 따라서 f^+와 f^-는 동시에 양의 값을 가질 수 없다.

연습문제 5.6.2에 의해 f^+, f^-는 각각 리만적분가능하므로, 임의의 양수 $\varepsilon > 0$이 주어졌을 때 δ_1, $\delta_2 > 0$이 존재하여 $P \in \mathcal{P}[a, x]$가 $\|P\| < \delta_1$이면 $L(f^+, P) > \int_a^x f^+(t)dt - \varepsilon$, $\|P\| < \delta_2$이면 $L(f^-, P) > \int_a^x f^-(t)dt - \varepsilon$을 만족한다. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$로 놓고, $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\} \in \mathcal{P}[a, x]$가 $\|P\| < \delta$를 만족한다고 하자. 각 $k = 1, 2, \cdots, n$에 대해 구간 $[t_{k-1}, t_k]$을 생각하면 다음과 같이 세 가지 경우 중 하나에 해당되게 된다.

- $\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^+ > 0$

  이 경우 구간 내 모든 점에서, $f^+ > 0$이므로 $f^- = 0$이다. 따라서 $f = f^+ + f^- \geq 0$이며,

$$\begin{aligned}
|F(t_k) - F(t_{k-1})| &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f^+(t) + f^-(t)\right) dt \\
&= \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^+(t)dt + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^-(t)dt \\
&\geq \left(\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^+(t)\right)(t_k - t_{k-1}) + \left(\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1}) \\
&= \left(\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^+(t) + \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1})
\end{aligned}$$

  이 성립한다.

- $\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^- > 0$

  이 경우 구간 내 모든 점에서, $f^- > 0$이므로 $f^+ = 0$이다. 따라서 $f = -f^- \leq 0$이고 이로부터 $f = -|f| = -(f^+ + f^-)$이므로 앞의 경우와 비슷하게

$$\begin{aligned}
|F(t_k) - F(t_{k-1})| = -\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(f^+(t) + f^-(t)\right) dt \\
&\geq \left(\inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^+(t) + \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1})
\end{aligned}$$

이 성립한다.

- $\inf_{[t_{k-1},t_k]} f^+ = \inf_{[t_{k-1},t_k]} f^- = 0$

  이 경우에는

$$|F(t_k) - F(t_{k-1})| \geq 0 = \left(\inf_{[t_{k-1},t_k]} f^+(t) + \inf_{[t_{k-1},t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1})$$

  이 성립함을 알 수 있다.

따라서 어떠한 구간에 대해서도

$$|F(t_k) - F(t_{k-1})| \geq \left(\inf_{[t_{k-1},t_k]} f^+(t) + \inf_{[t_{k-1},t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1})$$

이 성립하므로,

$$\begin{aligned}
V_a^x(F,P) &= \sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})| \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{[t_{k-1},t_k]} f^+(t) + \inf_{[t_{k-1},t_k]} f^-(t)\right)(t_k - t_{k-1}) \\
&= L(f^+,P) + L(f^-,P) \\
&> \int_a^x f^+(t)dt + \int_a^x f^-(t)dt - 2\varepsilon \\
&= \int_a^x |f(t)|\,dt - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $\|P\| < \delta$ 인 분할들의 집합은 $\mathcal{P}[a,b]$ 의 부분집합이므로

$$\begin{aligned}
\int_a^x |f(t)|\,dt - 2\varepsilon &< V_a^x(F,P) \\
&\leq \sup\{V_a^x(F,P) : P \in \mathcal{P}[a,b], \|P\| < \delta\} \\
&\leq \sup\{V_a^x(F,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \\
&= V_a^x(F)
\end{aligned}$$

임을 얻는다.

한편 임의의 $P \in \mathcal{P}[a,b]$ 에 대해

$$V_a^x(F,P) = \sum_{k=1}^{n} |F(t_k) - F(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)dt\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f(t)|\,dt = \int_a^x |f(t)|\,dt$$

이므로

$$V_a^x(F) = \sup\{V_a^x(F,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$$

또한 성립한다. 따라서 이전 문단의 결과와 함께 종합하면 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대해

$$\int_a^x |f(t)|\,dt - 2\varepsilon < V_a^x(F) \leq \int_a^x |f(t)|\,dt$$

이 성립해야 하므로

$$V_a^x(F) = \int_a^x |f(t)|\,dt$$

이라는 결론을 얻는다.

5.6.15. 정수 $k = 1, \cdots, n$에 대해 $\alpha_k : [0, n] \to \mathbb{R}$을

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 0, & x < k \\ 1, & x \geq k \end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 $[0, n]$에서는 $[x] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)$임에 주목하자. k를 n 미만의 어떤 자연수로 고정하고, $0 < \delta < 1$을 만족하는 δ에 대해 분할 $P_k = \{0, k - \delta, k + \delta, n\}$를 생각하자. 그러면

$$U(f, P_k, \alpha_k) = \sup\{f(x) : k - \delta \leq x \leq k + \delta\}$$
$$L(f, P_k, \alpha_k) = \inf\{f(x) : k - \delta \leq x \leq k + \delta\}$$

인데, f가 연속이므로 $\delta \to 0$일 때 상합과 하합의 차가 0으로 수렴하고, 상합과 하합이 각각 $f(k)$로 수렴하므로 정리 5.5.2에 의해

$$\int_0^n f(x) d\alpha_k(x) = f(k)$$

이다. 한편 $0 < \delta < n$을 만족하는 δ에 대해 분할 $P_n = \{0, n - \delta, n\}$를 생각하면

$$U(f, P_n, \alpha_n) = \sup\{f(x) : n - \delta \leq x \leq n\}$$
$$L(f, P_n, \alpha_n) = \inf\{f(x) : n - \delta \leq x \leq n\}$$

인데, f가 연속이므로 $\delta \to 0$일 때 상합과 하합의 차가 0으로 수렴하고, 상합과 하합이 각각 $f(n)$으로 수렴하므로 정리 5.5.2에 의해

$$\int_0^n f(x) d\alpha_n(x) = f(n)$$

이다.

따라서 정리 5.5.1의 (다)를 적용하면

$$\int_0^n f(x) d[x] = \int_0^n f(x) d\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^n f(x) d\alpha_k(x) = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

임을 알 수 있다.

5.6.16. a와 b가 정수이므로

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f'(x)\left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} f'(x)\left(x - k - \frac{1}{2}\right) dx \end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있다. 부분적분을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f'(x)\left(x - k - \frac{1}{2}\right) dx &= \left[f(x)\left(x - k - \frac{1}{2}\right)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x) dx \end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 이로부터

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx &= \sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1} f'(x)\left(x-k-\frac{1}{2}\right)dx\\ &= \sum_{k=a}^{b-1}\left(\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1} f(x)dx\right)\\ &= \sum_{k=a}^{b-1}\frac{f(k)}{2}+\sum_{k=a}^{b-1}\frac{f(k+1)}{2}-\sum_{k=a}^{b-1}\int_k^{k+1} f(x)dx\\ &= \left(\sum_{k=a}^{b} f(k)\right)-\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

을 얻는다. 적당히 이항하면 우리가 원하던 등식

$$\sum_{k=a}^{b} f(k)=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f'(x)\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx+\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

이 된다.

5.6.17. $s\neq 0$이면

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{j}{x^{s+1}}dx\\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}\int_j^{j+1}\frac{1}{x^{s+1}}dx\end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있고, 여기서 이중급수의 더하는 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{j}\int_j^{j+1}\frac{1}{x^{s+1}}dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=k}^{n-1}\int_j^{j+1}\frac{1}{x^{s+1}}dx\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{n}\frac{1}{x^{s+1}}dx\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[-\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{x^s}\right]_k^n\\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{n^s}\right)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있으므로

$$\begin{aligned}s\int_1^n \frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^s}-\frac{1}{n^s}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^s}-\frac{n-1}{n^s}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}-\frac{1}{n^{s-1}}\end{aligned}$$

을 얻는다. 그런데 $s=0$인 경우에도 위의 등식이 성립함을 쉽게 알 수 있고, 따라서 적당히 이항하면 모든 s에 대해

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{n^{s-1}}+s\int_1^n\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx$$

이 성립함을 볼 수 있다. 이때

$$\int_1^n\frac{x}{x^2}dx=\int_1^n\frac{1}{x}=[\log x]_1^n=\log n$$

이므로 만약 $s=1$이라면

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}&=1+\int_1^n\frac{\lfloor x\rfloor}{x^2}dx\\&=\log n-\int_1^n\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}dx+1\end{aligned}$$

이라고도 쓸 수 있다. 따라서 종합하면 문제에서 주어졌듯이 등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\begin{cases}\dfrac{1}{n^{s-1}}+s\displaystyle\int_1^n\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx, & s\neq 1\\ \log n-\displaystyle\int_1^n\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^2}dx+1, & s=1\end{cases}$$

이 성립한다.

5.6.18. 연속함수 ϕ가 증가함수이므로 단사함수이고, 따라서 전단사함수임에 주목하자. 특히, 각 $[c,d]$의 분할에 대해 ϕ에 의한 상으로써 어떤 $[a,b]$의 분할이 일대일대응된다는 것에 유의하자. $f\in\mathcal{R}(\alpha)$이므로 임의의 양수 $\epsilon>0$에 대해 어떤 $[a,b]$의 분할 P_0가 존재하여 분할 $\widetilde{P}=\{y_0=a,y_1,\cdots,y_m=b\}$가 $\widetilde{P}\supset P_0$이면 각 $i=1,\cdots,n$에 대하여 $y_{i-1}\le z_i\le y_i$일 때

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(z_i)\big(\alpha(y_i)-\alpha(y_{i-1})\big)-\int_a^b fd\alpha\right|=\left|S\left(f,\widetilde{P},\alpha\right)-\int_a^b fd\alpha\right|<\epsilon$$

를 만족한다. $P_0=\{x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b\}$이라 두고, $[c,d]$의 분할 $Q_0=\{t_0=c,t_1,\cdots,t_n=d\}$를 관계식 $t_i=\phi^{-1}(x_i)$을 이용해 두자. 이제 $Q_0\subset Q$인 분할 $Q=\{s_0=c,s_1,\cdots,s_m=d\}\in\mathcal{P}[c,d]$을 생각하고, 각 $j=1,\cdots,m$에 대해 $w_j=\phi(s_j)$라 하여 $P=\{w_0=a,w_1,\cdots,w_m\}$을 생각하면 $Q_0\subset Q$이므로 $P_0\subset P$임을 알 수 있다. 이때 각 $j=1,\cdots,m$에 대하여 $w_{j-1}\le v_j\le w_j$이면 $s_{j-1}=\phi^{-1}(w_{j-1})\le\phi^{-1}(v_j)\le\phi^{-1}(w_j)=s_j$이고, $u_j=\phi^{-1}(v_j)$라 두어 리만-스틸체스 합

$$\begin{aligned}S(f\circ\phi,Q,\alpha\circ\phi)&=\sum_{j=1}^{m}(f\circ\phi)(u_j)\big((\alpha\circ\phi)(s_j)-(\alpha\circ\phi)(s_{j-1})\big)\\&=\sum_{j=1}^{m}f(v_j)\big(\alpha(w_j)-\alpha(w_{j-1})\big)\end{aligned}$$

을 생각하면

$$\begin{aligned}\left|S(f\circ\phi,Q,\alpha\circ\phi)-\int_a^b fd\alpha\right|&=\left|\sum_{j=1}^{m}f(v_j)\big(\alpha(w_j)-\alpha(w_{j-1})\big)-\int_a^b fd\alpha\right|\\&=\left|S(f,P,\alpha)-\int_a^b fd\alpha\right|\\&<\epsilon\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 여기서 ϵ은 처음에 임의로 고른 양수이므로 $f \circ \phi \in \mathcal{R}(\alpha \circ \phi)$임과 $\displaystyle\int_c^d f(\phi(y))d\alpha(\phi(y)) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$임이 동시에 보여졌다.

5.6.19. **(가)** 각 자연수 $k = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 f가 단조감소함수이므로 $x \in \mathbb{R}$, $k \le x \le k+1$이면 $f(k) \ge f(x) \ge f(k+1)$이고, 따라서

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)dt \ge \int_k^{k+1} f(x)dx \ge \int_k^{k+1} f(k+1)dt = f(k+1)$$

이 성립한다. 따라서 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $\displaystyle\int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx$임에 주목하면

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \ge \int_1^{n+1} f(x)dx \ge \sum_{k=1}^{n} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

이 성립한다. 이를 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 이용하여 다시 쓰면

$$s_n \ge t_{n+1} \ge s_{n+1} - f(1)$$

이 된다. 한편 $f > 0$이므로 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조증가수열이 된다. 그렇기 때문에, 만약 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하면 어떤 실수 S에 대해 $S = \lim_{n\to\infty} s_n$인데, 그러면 모든 자연수 n에 대해

$$t_{n+1} \le s_n \le S$$

이 되어 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 위로 유계인 증가수열로써 수렴한다. 반대로, $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하면 어떤 실수 T에 대해 $T = \lim_{n\to\infty} t_n$이고, 그러면 모든 자연수 n에 대해

$$s_n \le t_n + f(1) \le T + f(1)$$

이 되어 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 위로 유계인 증가수열로써 수렴한다. 따라서 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하는 것과 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하는 것은 필요충분조건이다. 그런데 정의 $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$으로부터 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$이므로, 곧 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$이 수렴할 필요충분조건이 수열 $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴함인 것을 알 수 있다.

(나) 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$\begin{aligned} d_n - d_{n+1} &= (s_n - s_{n+1}) + (t_{n+1} - t_n) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n+1} f(k)\right) + \left(\int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^{n} f(x)dx\right) \\ &= -f(n+1) + \int_n^{n+1} f(x)dx \end{aligned}$$

인데, 마지막 줄의 값이 항상 0보다 크거나 같음을 이미 **(가)**에서 보았다. 따라서 $d_n \ge d_{n+1}$이므로 $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조감소수열인데, 앞의 **(가)**에서로부터 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $s_n \ge t_{n+1}$임을 알기 때문에

$$d_n = s_n - t_n \ge t_{n+1} - t_n = \int_n^{n+1} f(x)dx \ge 0$$

이고, 즉 $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 0에 의해 아래로부터 유계이다. 따라서 $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 수렴하는 수열이다.

한편 **(가)**에서로부터 임의의 자연수 k에 대해 $f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)dx$이 성립하는 것을 알기 때문에, 앞의 문단에서의 결과를 함께 고려함으로써 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$0 \leq d_m - d_{m+1} = -f(m+1) + \int_m^{m+1} f(x)dx < f(m) - f(m+1)$$

이 됨을 알 수 있다. 이제 어떤 자연수 k를 고정하고, 임의로 k보다 큰 자연수 n을 골라 위의 식을 변끼리 합함에 있어 m의 범위가 k에서 $n-1$까지 되도록 하면 $f(n) \geq 0$이므로

$$\sum_{m=k}^{n-1} \big(d_m - d_{m+1}\big) = d_k - d_n, \qquad \sum_{m=k}^{n-1} \big(f(m) - f(m+1)\big) = f(k) - f(n) \leq f(k)$$

으로부터

$$0 \leq d_k - d_n \leq f(k)$$

이 성립하게 된다. $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 수렴하는 수열이기 때문에 $n \to \infty$일 때의 극한을 각 변에 취하면 원하는 결과인

$$0 \leq d_k - \lim_{n\to\infty} d_n \leq f(k)$$

를 얻는다.

(다) 함수 f를 $f(x) = \dfrac{1}{x}$으로 놓으면

$$d_n = s_n - t_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{1}{x}dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$$

이고, 따라서 **(나)**에서 보았듯이 수열 $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 은 수렴한다. $n = 1, 2, \cdots, 50$에 대하여 이 수열의 값을 소수점 아래 여섯째자리까지 나타내면 다음 표와 같다.

n	d_n	n	d_n	n	d_n	n	d_n	n	d_n
1	1	11	0.621982	21	0.600836	31	0.593258	41	0.589361
2	0.806853	12	0.618304	22	0.599771	32	0.592759	42	0.589073
3	0.734721	13	0.615184	23	0.598797	33	0.592291	43	0.588799
4	0.697039	14	0.612505	24	0.597904	34	0.591849	44	0.588536
5	0.673895	15	0.610179	25	0.597082	35	0.591433	45	0.588286
6	0.658241	16	0.608140	26	0.596323	36	0.591040	46	0.588046
7	0.646947	17	0.606339	27	0.595620	37	0.590668	47	0.587816
8	0.638416	18	0.604736	28	0.594967	38	0.590316	48	0.587596
9	0.631744	19	0.603301	29	0.594358	39	0.589981	49	0.587385
10	0.626383	20	0.602007	30	0.593790	40	0.589664	50	0.587182

제 6 장

함수열

6.6.1. 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 f, g로 고르게 수렴하므로 임의로 양수 $\epsilon > 0$을 잡았을 때 자연수 N_1, N_2가 존재하여 자연수 n이 $n > N_1$이면 $\|f_n - f\|_\infty < \dfrac{\epsilon}{2}$를, $n > N_2$이면 $\|g_n - g\|_\infty < \dfrac{\epsilon}{2}$를 만족한다. 따라서 $N = \max\{N_1, N_2\}$라 놓았을 때 자연수 n이 $n > N$이면

$$\begin{aligned}\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty &\le \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

을 만족하기 때문에, 함수열 $\{f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 $f + g$로 고르게 수렴한다.

한편 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 f, g로 고르게 수렴하더라도 함수열 $\{f_n g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 fg로 고르게 수렴하는 지는 알 수 없다. 예를 들어, $f_n, g_n : (0,1) \to \mathbb{R}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대해 각각 $f_n(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{n}$, $g_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$이라 놓고 $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$을 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x$이라 하자. 그러면 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대해

$$\|f_n - f\|_\infty = \|g_n - g\|_\infty = \left\|\frac{1}{n}\right\|_\infty = \frac{1}{n}$$

이므로 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$과 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 각각 f, g로 고르게 수렴하는 것을 볼 수 있다. 하지만 $fg = 1$인 반면 각 자연수 n에 대해

$$f_n(x)g_n(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{n}\right)\left(x + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{nx} + \frac{x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

이 성립함으로부터

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \ge \left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) g_n\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right| = \left|1 + \frac{2}{n^2}\right| > 1$$

임을 알 수 있고, 따라서 $\{f_n g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 fg로 고르게 수렴하지 않는다.

6.6.2. 연속함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 0으로 고르게 수렴하기 때문에 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N이 존재하여 $n > N$이면 $\|f_n\|_\infty < \epsilon/3$을 만족한다. 따라서 실수 $x \in \mathbb{R}$이 $x \ge N + 1$이면 x의 정수부분을 n, 소수부분을 $t = x - n$라 했을 때 $n > N$, $t \in [0,1]$이므로

$$|f(x)| = |f_n(x - n)| = |f_n(t)| \le \|f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}$$

이다. 한편, 콤팩트집합 $[0, N+1]$로 정의역을 제한하면 연속함수 f는 고른연속이 되므로, $x, y \in [0, N+1]$일 때 어떤 양수 $\delta > 0$이 존재하여 $|x - y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$을 만족한다.

위에서 잡은 δ에 대해, 이제 $x, y \in [0, \infty)$가 $|x-y| < \delta$를 만족한다고 하자. 만약 $x, y \le N+1$이라면 이미 앞에서 보았듯이 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/3$을 만족한다. 반대로, $x, y > N+1$인 경우

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| < \frac{2\epsilon}{3}$$

을 만족한다. 마지막으로, x와 y중 하나만 $N+1$보다 크다면 일반성을 잃지 않고 $x < y$라 할 수 있는데, 이때 $x \le N+1 < y < x+\delta$임에 유의하자. 그러면

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(N+1)| + |f(N+1) - f(y)| \\ &\le |f(x) - f(N+1)| + |f(N+1)| + |f(y)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

이 되는 것을 볼 수 있다. 따라서 어떠한 경우에도 $|x-y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$이므로, f는 고른연속이다.

한편 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 0으로 고르게 수렴하지 않고 점별수렴하는 경우에는 f가 고른연속인지 알 수 없다. 예를 들어, 연습문제 3.5.12에서 살펴보았던, 각 자연수 $k = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $[k, k+1)$에서

$$f(x) = \begin{cases} 2^{k+2}\left(x - \left(k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right)\right) & k + \dfrac{1}{2^{k+1}} \le x < k + \dfrac{3}{2^{k+2}} \\ -2^{k+2}\left(x - \left(k + \dfrac{1}{2^{k}}\right)\right) & k + \dfrac{3}{2^{k+2}} \le x < k + \dfrac{1}{2^{k}} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

와 같이 정의되고 $x \in [0, 1)$인 경우 $f(x) = 0$인 함수 f를 생각하자. 이때 구간 $[0, 1]$에서 정의된 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $f(x) = f_n(x-n), x \in [n, n+1]$로 정의하면 연습문제 3.5.12에서 살펴보았듯이 각 $x \in [0, 1]$에 대하여

$$0 = \lim_{n\to\infty} f(n+x) = \lim_{n\to\infty} f_n(n+x-n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

이므로 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 0으로 점별수렴한다. 한편, 만약 f가 고른연속이면 역시 연습문제 3.5.12에서 보았듯이 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$이어야 하는데, $\lim_{x\to\infty} f(x)$이 존재하지 않으므로 f는 고른연속이 아니다.

6.6.3. 만약 $x = 0$이거나 $x = 1$이면 n의 값에 관계 없이 $f_n(x) = 0$이다. 따라서 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 점별수렴하는지 확인하려면 $x \in (0, 1)$일 때만 확인하면 된다. 임의로 $x \in (0, 1)$을 잡고 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 임의의 실수 c에 대해 $t \mapsto t^c$가 $t = 1$에서 연속임에 유의하면 연습문제 1.6.12로부터

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x)\right)^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right)^c x^{1/n}(1-x^2) \\ &= (1-x^2)\left(\lim_{n\to\infty} n^{1/n}\right)^c \lim_{n\to\infty} x^{1/n} \\ &= 1 - x^2 < 1\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 근판정법에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$이 수렴하므로, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$이다. 즉, 임의의 실수 c에 대하여 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 상수함수 0으로 점별수렴한다.

c의 값이 $-1/2, 0, 1/3, 1/2, 2/3, 1$일 때 함수열 각각 f_1, f_2, f_3, f_{10}, f_{30}을 그려보면 다음 그림과 같다. 어떤 곡선이 어떤 c와 n값에 해당되는 지는 각 그래프마다 달린 주석과 $c = 1$인 경우의 그래프 오른쪽의 범례를 참고하면 된다. 각 그래프마다 y축의 축척이 다름에 유의해야 하며, c의 값에 관계 없이 f_1은 항상 일정하므로 이를 비교하는 데 기준으로 삼을 수 있을 것이다.

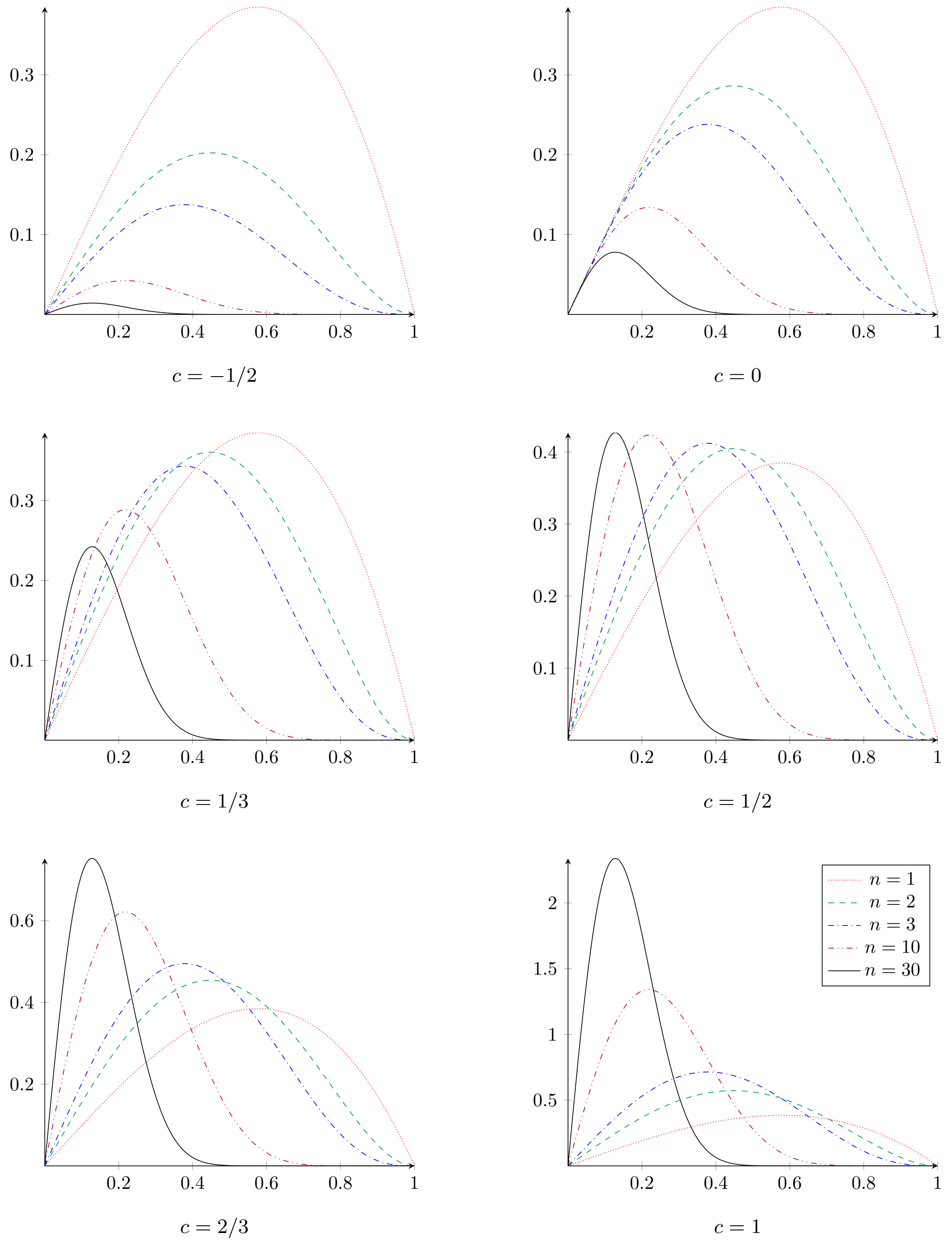


그림 6.1: 연습문제 6.6.3의 함수열의 c의 값에 따른 여러 예

그림에서 볼 수 있듯이, 어떤 c의 값에 대해서는 $\|f_n\|_\infty$이 n이 커질수록 0으로 수렴하는 것처럼 보이고, 어떤 c의 값에 대해서는 $\|f_n\|_\infty$이 n에 따라 커지는 것처럼 보인다. 실제로 c의 값에 따라 $\|f_n\|_\infty$의 값이 어떻게 변화하는 지 알아보자. 모든 자연수 n과 실수 c에 대해 $f_n(x)$는 다항함수로써 미분가능하고, 실제로 미분계수를 구하면

$$f_n'(x) = n^c(1-x^2)^n - 2n^{c+1}x^2(1-x^2)^{n-1} = n^c(1-x^2)^{n-1}\Big(1-(2n+1)x^2\Big), \quad x \in (0,1)$$

이 되는데, $x \in (0,1)$이면 $1-x^2 > 0$이므로 $f_n'(x) = 0$인 점은 $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$ 뿐이다. 그런데 정의상 $x \in (0,1)$이면 $f_n(x) = n^c x(1-x^2)^n > 0$이고 $f(0) = f(1) = 0$이므로, $f_n'(x) = 0$인 점은 최대점이 되고, 즉

$$\|f_n\|_\infty = \max_{0 \le x \le 1} f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right)$$

이 된다. 이때 f_n이 0으로 점별수렴함에 주목하여 $\|f_n - 0\|_\infty = \|f_n\|_\infty$의 극한을 생각하면

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{\sqrt{2n+1}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^c}{\sqrt{n}}\right)\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{c-1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}
\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $c < 1/2$이면 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$이고 $c > 1/2$이면 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \infty$이며 경계값인 $c = 1/2$인 경우 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$이다. 즉 $c < 1/2$일 때 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 고르게 수렴한다.

마지막으로 점별극한함수 $f = 0$에 대해 등식

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = 0$$

이 언제 성립하는지 살펴보자. $u = 1 - x^2$으로 놓는 치환을 생각하면 $\dfrac{du}{dx} = -2x$이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \int_0^1 n^c x(1-x^2)^n dx \\
&= \int_1^0 -\frac{1}{2} n^c u^n du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 n^c u^n du \\
&= \frac{n^c}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $n < 1$이면 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = 0$이고 $n > 1$이면 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \infty$이며 경계값인 $n = 1$일 때는 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = \dfrac{1}{2}$이다. 즉 위에서 주어진 등식이 성립하는 것은 $c < 1$일 때이다.

6.6.4. 연속함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 f로 고르게 수렴하므로 f 또한 연속함수이다. 따라서 f는 유계이므로 어떤 양수 R이 존재하여 $\|f\|_\infty < R/2$을 만족한다. 한편 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 f로 고르게 수렴하므로 어떤 자연수 N_0이 존재하여 자연수 n이 $n > N_0$이면 $\|f_n - f\|_\infty < R/2$을 만족한다. 따라서 그러한 자연수 N_0에 대하여 $n > N_0$이면 모든 $x \in [0,1]$에 대해

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\le |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\
&\le \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \\
&< \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R
\end{aligned}$$

이 성립한다.

이제 임의로 양수 $\epsilon > 0$을 잡고 자연수 N_1을 $N_1 > \dfrac{R}{\epsilon}$을 만족하도록 골라 $N = \max\{N_0, N_1\}$이라 두자. 그러면 자연수 n이 $n > N$이면 $n > \dfrac{R}{\epsilon}$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f_n(x)dx &\le \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} Rdx \\ &= \frac{R}{n} < \epsilon\end{aligned}$$

을 만족하는 것을 볼 수 있다. 즉 $\lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f_n(x)dx = 0$이다. 따라서 명제 6.2.2와 함께 생각하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f_n(x)dx\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx + \lim_{n\to\infty}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} f_n(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)dx\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 문제에서 주어진 등식은 성립한다.

6.6.5. 정리 5.3.1에 의해, 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 f_n은 연속이고, $f_n'(x) = f_{n-1}(x)$이다. 즉 결국

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

이다. 가정에 의해 f_0이 콤팩트집합인 $[0,1]$에서 정의된 연속함수이므로 유계이기 때문에, 어떤 양의 실수 M이 존재하여 모든 $x \in [0,1]$에 대해 $|f_0(x)| \le M$이다. 그러한 M을 잡았을 때, 모든 음이 아닌 자연수 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여 $|f_n(x)| \le \dfrac{M}{n!}x^n$임을 n에 대한 귀납법을 이용하여 보이고자 한다. $n = 0$일 때는 M을 정의한 방식에 의해 당연히 성립한다. 또한 어떤 자연수 k에 대해 $n = k$일 때 보이고자 하는 부등식이 성립한다면

$$|f_{k+1}(x)| = \left|\int_0^x f_k(t)dt\right| \le \int_0^x |f_k(t)|\,dt \le \int_0^x \frac{M}{k!}t^k dt = \frac{M}{(k+1)!}x^{k+1}$$

이 되어 $n = k+1$일 때도 부등식이 성립함을 알 수 있다.

이제 임의로 $x \in [0,1]$을 잡으면 각 자연수 $n = 0, 1, \cdots$에 대해 $|f_n(x)| \le \dfrac{M}{n!}x^n \le \dfrac{M}{n!}$이 성립하는데, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{n!} = Me$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$는 비교판정법에 의해 절대수렴하고, 따라서 수렴한다.

더 나아가, 바이어슈트라스 판정법을 사용하면 앞의 문단에서와 같은 이유로 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$가 고르게 수렴함을 알 수 있다. 그런데 함수열 $\left\{\displaystyle\sum_{n=0}^{k} f_n\right\}_{k\in\mathbb{N}}$을 생각하면 각 f_n들이 연속함수임으로부터 이 함수열이 연속함수열임은 당연하므로, 정리 6.1.1에 의해 이 함수열의 극한 $g = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$은 연속함수이다.

6.6.6. 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 임의로 $x \in K$를 잡았을 때, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 0으로 점별수렴하므로 어떤 자연수 $n(x)$이 존재하여 $\left|f_{n(x)}(x)\right| < \epsilon/6$을 만족한다. 또한 $f_{n(x)}$이 연속이므로, 어떤 양수 δ_x가 존재하여 $y \in K$가 $|x-y| < \delta_x$이면, 즉 $y \in N(x, \delta_x)$이면 $\left|f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(y)\right| < \epsilon/3$을 만족한다. 이때 $\{N(x, \delta_x) : x \in K\}$가 K의 열린덮개가 되는데, K가 콤팩트집합이기 때문에 어떤 유한집합 $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset K$에 대해 $\{N(x_i, \delta_{x_i}) : i = 1, 2, \cdots, k\}$이 K의 열린덮개가 된다.

자연수 N을 $N = \max\{n(x_1), n(x_2), \cdots, n(x_k)\}$이라 두자. 이제 임의로 $y \in K$를 잡았을 때, $\{N(x_i, \delta_{x_i}) : i = 1, 2, \cdots, k\}$가 K의 열린덮개가 되므로 어떤 자연수 j에 대해 $y \in N(x_j, \delta_{x_j})$이 되고, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 단조감소함수열이므로

$$\begin{aligned}|f_N(y)| \le \left|f_{n(x_j)}(y)\right| &\le \left|f_{n(x_j)}(y) - f_{n(x_j)}(x_j)\right| + \left|f_{n(x_j)}(x_j)\right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

이 성립한다. 그런데 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 단조감소함수열이므로 자연수 n이 $n > N$이면 $f_n(y) \le f_N(y) < \dfrac{\epsilon}{2}$이고, 더 나아가 임의의 $y \in K$에 대해 이 부등식이 성립하므로 $n > N$이면 $\|f_n\|_\infty \le \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$이 된다. 이때 ϵ이 처음에 임의로 주어진 양수였기 때문에 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$이 된다. 따라서 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 상수함수 0으로 고르게 수렴함을 알 수 있다.

6.6.7. 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$f_n(x) = \begin{cases} nx - 1 & 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

라 두자. 그러면 각 자연수 n에 대하여 $0 < x < \dfrac{1}{n+1}$이면 $f_{n+1}(x) = (n+1)x - 1 > nx - 1 = f_n(x)$이고, $\dfrac{1}{n+1} \le x < \dfrac{1}{n}$이면 $f_{n+1}(x) = 0 \ge nx - 1 = f_n(x)$이며, 그 외의 경우 $f_{n+1}(x) = 0 = f_n(x)$이므로 모든 $x \in [0, 1]$에 대해 $f_{n+1}(x) \ge f_n(x)$인 것을 알 수 있다. 따라서 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조증가수열이다. 또한, 임의의 $x \in (0, 1]$에 대해 $x > \dfrac{1}{N}$을 만족하는 자연수 N을 찾을 수 있으며 그러한 N에 대해 자연수 n이 $n > N$을 만족하면 $f_n(x) = 0$임을 알 수 있다. 게다가 모든 자연수 n에 대하여 $f_n(0) = 0$이므로, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 점별로 0으로 수렴하는 함수열이며, 따라서 문제에서 주어진 조건을 모두 만족하는 것을 볼 수 있다.

그러나, 임의의 자연수 n에 대해 $f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = -\dfrac{1}{2}$인 것은 f_n의 정의로부터 당연하다. 즉

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} \ge \left|f_n\left(\frac{1}{2n}\right)\right| = \frac{1}{2}$$

가 모든 자연수 n에 대해 성립한다. 따라서 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 0으로 고르게 수렴하지 않는다.

6.6.8. 본문 4.3절의 (12)로부터 $f_0(x) = e^x = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!}$이라 쓸 수 있음을 안다. 이제 수학적 귀납법을 이용하여 각 음이 아닌 정수 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대하여 $f_n(x)$를 거듭제곱급수의 꼴

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^n x^m}{m!}$$

으로 나타낼 수 있으며 이때 우변의 거듭제곱급수가 실수 전체에서 수렴함을 보일 것이다. $n = 0$일 때 $f_0(x)$가 위와 같은 거듭제곱급수의 꼴을 가짐은 이미 알고 있다. 이제 $f_n(x)$가 위와 같은 거듭

제곱급수의 꼴을 가지면, 연습문제 6.6.10의 (나)로부터 그 거듭제곱급수의 수렴반경은 ∞임을 알 수 있다. 따라서 정리 6.4.1에 의해 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n x^m}{m!}$는 실수 전체에서 수렴하며, 더 나아가 실수 전체에서 미분가능하고 그 도함수가

$$f_n'(x) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{n+1}x^{m-1}}{m!}$$

로 주어지게 된다. 그렇기 때문에

$$f_{n+1}(x) = xf_n'(x) = x\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{n+1}x^{m-1}}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^{n+1}x^m}{m!}$$

이 되는데, 마지막 항에서 $m = 0$부터 더하기 시작해도 처음에 0을 더하는 것 뿐이므로 결과는 변하지 않아 상관 없다. 이로부터 수학적 귀납법에 의해 $f_n(x)$가 위와 같이 거듭제곱급수의 꼴로 주어지며 그 거듭제곱급수는 실수 전체에서 수렴함이 증명되었다.

위에서의 결과를 이용하면 구해야 하는 값을

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!n!}$$

와 같이 이중급수의 꼴로 나타낼 수 있다는 것을 알 수 있다. 각 항이 양수인 이중급수이므로 명제 6.3.4를 이용하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!n!} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!n!}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^m}{m!}\\ &= e^e\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(1)}{n!} = e^e$이다.

6.6.9. 먼저 집합 $S = \{a \in A : |f(a)| \neq 0\}$이 셀수있는 집합임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 S가 셀수없는 집합이라고 가정하자. 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대해 S의 부분집합 S_n을

$$S_n = \left\{a \in A : |f(a)| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

이라 두면 $S = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$이 된다. 이때 만약 $S_1, S_2, \cdots$가 전부 셀수있는 집합이면 S는 셀수있는 집합의 셀수있는 합집합으로써 셀수있는 집합이 되어 가정에 모순이다. 따라서 어떤 음이 아닌 정수 k에 대해서는 S_k가 셀수없는 집합이어야 한다. 그런데 임의의 자연수 m이 주어졌을 때 S_k에서 원소의 개수가 m개인 부분집합 F_m을 생각하면 F_m은 당연히 A의 유한부분집합인데, S_k의 정의로부터

$$\sum_{a\in F_m}|f(a)| \geq \sum_{a\in F_m}\frac{1}{k} = \frac{m}{k}$$

이 되는데, S_k가 셀수없는 집합이므로 m을 임의대로 크게 잡을 수 있기 때문에

$$\sup\left\{\sum_{a\in F}|f(a)| : F\text{는 } A\text{의 유한부분집합}\right\} = \infty$$

이어야 되어야 하여 모순이 생긴다. 따라서 S가 셀수없는 집합이라는 가정이 거짓이어야 하므로, S는 셀수있는 집합이다.

이제 문제에서와 같이 셀수있는 집합 S의 원소를 늘어놓는 두 방법 $a_1, a_2, \cdots$ 와 $b_1, b_2, \cdots$ 를 생각하자. 이때, $|f(a_n)|$이 항상 음이 아닌 실수이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|f(a_n)| &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|f(a_n)| \\ &= \sup\left\{\sum_{n\in\{1,2,\cdots,N\}}|f(a_n)| : N\in\mathbb{N}\right\} \\ &\le \sup\left\{\sum_{a\in F}|f(a_n)| : F\text{는 } A\text{의 유한부분집합}\right\} \\ &< \infty\end{aligned}$$

이 되기 때문에 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$이 절대수렴함에 주목하자. 한편, 함수 $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $b_n = a_{p(n)}$이 되도록 정의할 수 있다. 이때 $a_1, a_2, \cdots$ 와 $b_1, b_2, \cdots$ 는 같은 집합의 원소들을 늘어놓는 순서만 바꾼 관계에 있기 때문에 p는 전단사함수이고, 따라서 p의 역함수 p^{-1}이 잘 정의된다. 함수 p에 대해 이중수열 $\{c_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$을

$$c_{mn} = \begin{cases} f(a_n) & m = p^{-1}(n) \\ 0 & \text{이외의 경우}\end{cases}$$

으로 정의하자. 그러면 각 자연수 n에 대하여 $c_{1n}, c_{2n}, \cdots$은 $m = p^{-1}(n)$일 때 $f(a_n)$의 값을 가지고 이외의 모든 항이 0이므로 $\sum_{m=1}^{\infty}|c_{mn}| = |f(a_n)|$이며, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}|f(a_n)|$이 수렴함은 위에서 확인했으므로 명제 6.3.3에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}$$

이 성립한다. 그런데 각 자연수 m에 대하여 $c_{m1}, c_{m2}, \cdots$은 $m = p^{-1}(n)$을 만족하는, 즉 $n = p(m)$을 만족하는 n에 대해서 $f(a_n) = f(a_{p(m)}) = f(b_m)$이 되고 이외의 모든 항은 0이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} = b_m$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} f(b_m)\end{aligned}$$

이 된다. 이때 $a_1, a_2, \cdots$ 와 $b_1, b_2, \cdots$ 가 S의 원소들을 늘어놓는 임의의 두 방법이었기 때문에, 늘어놓는 방법에 무관하게 S의 원소들을 $a_1, a_2, \cdots$ 로 쓰면 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$의 값이 유일하게 결정된다는 것을 알 수 있다.

6.6.10. 다음 보조정리를 먼저 살펴보자.

보조정리. 양의 실수의 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$이 존재하고, 그 값을 L이라 하면

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$$

이 성립한다.

증명) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$이기 때문에 $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$이다. 그런데 명제 2.4.6에 의해

$$L = \liminf_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} \le \limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

이 성립하게 된다. 따라서 $\limsup_{n\to\infty} a_n^{1/n} = L$이다. □

이 보조정리를 사용하여 주어진 거듭제곱급수들의 수렴반경을 구해보자.

(가) 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $a_n = \frac{n^n}{n!}$이라 놓으면 각 항이 양수이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

인 것을 알 수 있다. 따라서 보조정리에 의해 $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = e$이므로, 주어진 거듭제곱급수의 수렴반경은 $\frac{1}{e}$이다.

(나) 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $a_n = \frac{n^c}{n!}$이라 놓으면, 각 항이 양수이고, 함수 $t \mapsto t^c$가 임의의 실수 c에 대하여 $t = 1$에서 연속임에 주목하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^c/(n+1)!}{n^c/n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^c = 0$$

이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 보조정리에 의해 $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 0$이므로, 주어진 거듭제곱급수의 수렴반경은 ∞이다.

(다) 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$이라 놓으면, 각 항이 양수이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4$$

가 되는 것을 알 수 있다. 따라서 보조정리에 의해 $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 4$이므로, 주어진 거듭제곱급수의 수렴반경은 $\frac{1}{4}$이다.

6.6.11. 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 2라는 것은 $\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$라는 것임에 주목하자. 다음 두 보조정리가 주어진 거듭제곱급수들의 수렴반경을 구하는 데 도움이 될 것이다.

보조정리 1. 구간 $I \subset \mathbb{R}$에서 정의된 함수 $F : I \to \mathbb{R}$이 단조증가하는 연속함수이고 I 안의 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대하여 $\limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 두었을 때 $\alpha \in I$이면

$$\limsup_{n\to\infty} F(a_n) = F(\alpha)$$

이 성립한다.

증명) F가 연속이므로 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $y \in I$이 $|y - \alpha| < \delta$를 만족하면 $|F(y) - F(\alpha)| < \epsilon$을 만족한다. 이때 명제 1.4.3에 의해 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 자연수 n이 $n \geq N$이면 $a_n < \alpha + \dfrac{\delta}{2}$인데, F가 단조증가하므로 $F(a_n) \leq F\left(\alpha + \dfrac{\delta}{2}\right) < F(\alpha) + \epsilon$이 모든 $n > N$인 자연수 n에 대해 성립한다. 또한 $\alpha - \dfrac{\delta}{2} < a_n$을 만족하는 자연수 n이 무한히 많이 존재하는데, 그러한 n에 대해서 $F(a_n) \geq F\left(\alpha - \dfrac{\delta}{2}\right) > F(\alpha) - \epsilon$이 성립하므로 $F(a_n) > F(\alpha) - \epsilon$을 만족하는 자연수 n도 무한히 많이 존재한다. 따라서 명제 1.4.3에 의해 $F(\alpha)$는 수열 $\{F(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$의 상극한이다. □

보조정리 2. 음이 아닌 실수의 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대해, 0이 아닌 항만을 골라낸 부분수열 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$를 생각하면

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \limsup_{k\to\infty} a_{n(k)}$$

이 성립한다.

증명) 편의를 위해 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\limsup\limits_{k\to\infty} a_{n(k)} = \beta$라 두자. 그러면 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$의 부분수열은 당연히 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$의 부분수열 또한 되기 때문에 명제 2.3.5에 의해

$$\begin{aligned}\beta &= \max\left\{r \in \mathbb{R} : r\text{로 수렴하는 } \left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}\text{의 부분수열이 존재한다}\right\}\\ &\leq \max\left\{r \in \mathbb{R} : r\text{로 수렴하는 } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\text{의 부분수열이 존재한다}\right\} \quad = \alpha\end{aligned}$$

이 된다는 것을 알 수 있다. 만약 $\alpha = 0$이라면, $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$은 양수의 수열이므로 $0 \leq \beta \leq \alpha = 0$이 되어 $\beta = 0 = \alpha$임을 알 수 있다. 따라서 $\alpha > 0$인 경우만 살펴보면 된다. α로 수렴하는 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$의 부분수열인 수열 $\{\alpha_m\}_{m\in\mathbb{N}}$을 잡자. 그러면 어떤 자연수 M이 존재하여 $m \geq M$이면 $|\alpha_m - \alpha| < \alpha/2$, 즉 $\alpha_m > \alpha/2$이어야 한다. 이때 $\{\alpha_m\}_{m\geq M}$을 생각하면 α로 수렴하는 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$의 부분수열이면서 모든 항이 0보다 크기 때문에 이 수열은 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$의 부분수열이기도 하다. 즉, α로 수렴하는 $\left\{a_{n(k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$의 부분수열이 존재하므로, $\alpha \leq \beta$이다.

따라서 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \beta = \limsup\limits_{k\to\infty} a_{n(k)}$이 항상 성립함을 알 수 있다. □

이제 주어진 거듭제곱급수들의 수렴반경을 구해보자.

(가) 임의의 자연수 k에 대해 $t \geq 0$일 때 $t \mapsto t^k$는 단조증가인 연속함수이므로 보조정리 1에 의해

$$\limsup_{n\to\infty} \left|a_n^k\right|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{1/n}\right)^k = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

이다. 따라서 주어진 거듭제곱급수의 수렴반경은 2^k이다.

(나) 수열 $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$b_m = \begin{cases} a_n & m = nk\text{을 만족하는 자연수 } n\text{이 존재하는 경우} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

라 놓으면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{kn} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$이 되는 것에 주목하자. 따라서 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} b_m x^m$의 수렴반경을 구하면 되는데, 이때 $t \geq 0$일 때 $t \mapsto t^{1/k}$가 단조증가하는 연속함수임에 유의하여 보조정리 1과 2를 사용하면

$$\limsup_{m\to\infty} |b_m|^{1/m} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/(nk)} = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}\right)^{1/k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k}$$

이다. 따라서 주어진 거듭제곱급수의 수렴반경은 $2^{1/k}$ 이다.

(다) 수열 $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 을 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$c_m = \begin{cases} a_n & m = n^2 \text{ 을 만족하는 자연수 } n \text{ 이 존재하는 경우} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

라 놓으면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$ 이 되는 것에 주목하자. 따라서 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m$ 의 수렴반경을 구하면 된다. 보조정리 2에 의해

$$\limsup_{m\to\infty} |c_m|^{1/m} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n^2} = \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{1/n}\right)^{1/n}$$

인데, $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{1}{2}$ 로 수렴하는 어떤 $\left\{|a_n|^{1/n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 의 부분수열 $\left\{\left|a_{n(m)}\right|^{1/n(m)}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 을 잡을 수 있고, 더 나아가 필요하다면 적당히 앞의 유한개의 항을 버림으로써 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $\frac{1}{4} < \left|a_{n(m)}\right|^{1/n(m)} < \frac{3}{4}$ 이라고 할 수 있다. 그러면 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대해

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1/n(m)} < \left|a_{n(m)}\right|^{(1/n(m))^2} < \left(\frac{3}{4}\right)^{1/n(m)}$$

이 되는데, 여기서 $m \to \infty$ 일 때 $n(m) \to \infty$ 이므로 연습문제 1.6.12의 **(나)**에 의해 좌변과 우변이 $m \to \infty$ 일 때 1 로 수렴한다. 따라서 샌드위치 정리에 의해 $m \to \infty$ 이면 $\left|a_{n(m)}\right|^{(1/n(m))^2} \to 1$ 이다. 즉 $\left\{|a_n|^{1/n^2}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 의 부분수열 중 1 로 수렴하는 부분수열이 존재하므로 정리 2.3.5를 생각하면 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n^2} \geq 1$ 이다.

한편 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{2}$ 이므로 어떤 자연수 N 이 존재하여 $n > N$ 이면 $|a_n|^{1/n} < 1$ 을 만족한다. 그러면 그러한 N 에 대하여, $n > N$ 이면 $|a_n|^{1/n^2} = \left(|a_n|^{1/n}\right)^{1/n} < 1^{1/n} = 1$ 이기 때문에 연습문제 1.6.16의 **(가)**로부터 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n^2} \leq 1$ 이 성립함을 알 수 있다.

위의 결과들을 종합하면

$$\limsup_{m\to\infty} |c_m|^{1/m} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n^2} = 1$$

임을 알 수 있다. 따라서 $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} c_m x^m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n^2}$ 의 수렴반경은 1 이다.

6.6.12. 주어진 거듭제곱급수 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 의 수렴반경을 R 이라 놓자. 적당한 양수 $\epsilon > 0$ 을 잡아 $[-(1+\epsilon), 1+\epsilon] \subset (-R, R)$ 이 되게 했을 때, 정리 6.4.1에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 는 $[-(1+\epsilon), 1+\epsilon]$ 에서 고르게 수렴한다. 더 나아가, 함수 $F : [-(1+\epsilon), 1+\epsilon] \to \mathbb{R}$ 을 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ 로 정의하면 명제 6.2.2에 의해

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

이 된다. 그런데 $\dfrac{|a_n|}{n+1} \leq |a_n|$ 으로부터 $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{|a_n|}{n+1}\right)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \frac{1}{1+\epsilon}$ 인 것은 쉽게 알 수 있다. 즉, 거듭제곱급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 은 적어도 $\Big(-(1+\epsilon), 1+\epsilon\Big)$ 에서는 고르게 수렴한다.

이때, 고른수렴은 어떤 특정한 점에서의 성질이 아니라 주어진 정의역 전체가 공유하는 성질이기 때문에 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a_n}{n+1}x^{n+1}$ 이 $\Big(-(1+\epsilon), 1+\epsilon\Big)$ 에서 $-F(-x)$ 로 고르게 수렴하는 것은 당연하다. 여기에 연습문제 6.6.1의 결과를 적용하면 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(1+(-1)^n\big)a_n}{n+1}x^{n+1}$ 이 $\Big(-(1+\epsilon), 1+\epsilon\Big)$ 에서 $F(x)-F(-x)$ 으로 고르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서 $x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} F(1)-F(-1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\big(1+(-1)^n\big)a_n}{n+1} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{2n+1} \\ &= 2\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n}}{2n+1}\right)<0 \end{aligned}$$

이 문제에서 주어진 조건으로부터 성립하게 된다. 이때 $F' = f$ 임에 유의하면 평균값정리에 의해 어떤 $c \in (-1,1)$ 이 존재하여

$$f(c)=\frac{F(1)-F(-1)}{1-(-1)}=\frac{F(1)-F(-1)}{2}<0$$

을 만족한다. 한편, $f(0)=a_0>0$ 이고, f 는 연속이다. 따라서 중간값정리에 의해 0 과 c 사이의 어떤 실수 d 가 존재하여 $f(d)=0$ 이다. 즉, 그러한 d 는 구간 $(-1,1)$ 안에 포함되는 f 의 근이다.

6.6.13. 부분분수공식 $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{A+B}\left(\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}\right)$ 을 상기하자. 음이 아닌 정수 $n=0,1,2,\cdots$ 에 대하여 주어진 급수의 n 번째 항을 a_n 이라 두고 코시곱의 n 번째 항 c_n 을 구해보면

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}\cdot\frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{(-1)^{n+2}}{n+2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n-k+1}\right) \\ &= \frac{2(-1)^{n+2}}{n+2}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 급수 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ 과 자기 자신의 코시곱은

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}c_n &= \sum_{n=1}^{\infty}c_{n-1} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이 급수가 수렴하는 지 판정하기 위해, 교대급수 꼴임에 주목하여 교대급수판정법을 사용하고자 한다. 편의상 $\gamma_n = \dfrac{2}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)$이라 놓자. 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $\gamma_n \geq 0$인 것은 당연하며,

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+\frac{1}{n} \geq \frac{n+1}{n+1} &\Longleftrightarrow (n+2)\left(1+2+\cdots+\frac{1}{n}\right) \geq (n+1)\left(1+2+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{n+1}\left(1+2+\cdots+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{2}{n+2}\left(1+2+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

으로부터 $\gamma_n \geq \gamma_{n+1}$임을 알 수 있다. 즉 $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 각 항이 음이 아닌 단조감소수열이다. 마지막으로, $x \geq 1$이면 $x \geq \sqrt{x}$이고, 임의의 자연수 n과 실수 $t \in [0,1]$에 대해 $\dfrac{2}{n+t} \geq \dfrac{1}{n}$이 성립함에 주목하면

$$4\sqrt{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{2}{\sqrt{x}}dx \geq \int_1^{n+1} \frac{2}{x}dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{2}{x}dx \geq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{k}dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

이 되기 때문에 부등식 $0 \leq \gamma_n \leq \dfrac{4\sqrt{n+1}}{n+1} = \dfrac{4}{\sqrt{n+1}}$이 성립한다. $n \to \infty$일 때 $\dfrac{4}{\sqrt{n+1}} \to 0$이므로, 샌드위치 정리에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$인 것을 알 수 있다. 따라서 교대급수판정법에 의해

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

은 수렴한다. 그런데 6.4절의 보기 3으로부터 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -\log 2$임을 알 수 있으므로, 따름정리 6.4.5에 의해

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right) = \Big(-\log 2\Big)^2 = \Big(\log 2\Big)^2$$

이 된다.

6.6.14. **(가)** 좌극한의 정의로부터, 임의의 $\epsilon > 0$이 주어지면 적당한 $\delta > 0$이 존재하여 $x \in (-1, 1)$이 $1-\delta < x < 1$이면 $|f(x) - L| < \epsilon$을 만족한다. 이때 자연수 N을 $\delta > \dfrac{1}{N}$이 되도록 잡으면 자연수 n이 $n \geq N$일 때 $1-\delta < 1-\dfrac{1}{N} \leq 1-\dfrac{1}{n} < 1$이므로 $\left|f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - L\right| < \epsilon$을 만족한다. 따라서 극한의 정의에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = L$이다.

(나) 주어진 등식이 성립하기 위해서는 거듭제곱급수가 상수항이 없는 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$의 꼴이어야 한다. 따라서 이를 가정하고 주어진 등식을 보인다.

주어진 조건으로부터 $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = 0$임을 알 수 있는데, 그러면 수열 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$b_n = \frac{|a_1| + 2|a_2| + \cdots n|a_n|}{n}$$

이라 두면 연습문제 2.7.12에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$임을 안다. 이와 함께 **(가)**의 결과를 고려하면, 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, 자연수 N을 $n > N$이면 $\left|f\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - L\right| < \dfrac{\epsilon}{3}$, $|b_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$, $n|a_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$을 전부 만족하도록 잡을 수 있다.

이제 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 이라 두자. 그러면 $x \in [0, 1)$ 에 대해

$$\begin{aligned} S_n - L &= \sum_{k=1}^{n} a_k - L \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x^k) - L + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \\ &= f(x) - L + \sum_{k=1}^{n} a_k(1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \end{aligned}$$

이 된다. 그런데 임의의 자연수 k 에 대해 $x \in [0, 1)$ 이면

$$1 - x^k = (1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1 - x)$$

인 것에 주목하자. 또한, $n > N$ 이면 $|a_n| < \frac{\epsilon}{3n}$ 이므로 $x \in [0, 1)$ 일 때

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \, x^k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3n} x^k = \frac{\epsilon}{3n} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x} < \frac{\epsilon}{3n(1 - x)}$$

이다. 따라서 $n > N$ 이면 모든 $x \in [0, 1)$ 에 대해

$$\begin{aligned} |S_n - L| &< |f(x) - L| + \left| \sum_{k=1}^{n} k a_k (1 - x) \right| + \frac{\epsilon}{3N(1 - x)} \\ &\leq |f(x) - L| + (1 - x) \sum_{k=1}^{n} k \, |a_k| + \frac{\epsilon}{3n(1 - x)} \end{aligned}$$

이 성립한다. 이제 $x = 1 - \frac{1}{n}$ 이라 두면

$$\begin{aligned} |S_n - L| &< \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - L \right| + \sum_{k=1}^{n} \frac{k \, |a_k|}{n} + \frac{\epsilon}{3n \cdot \frac{1}{n}} \\ &= \left| f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - L \right| + b_n + \frac{\epsilon}{3} \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서 극한의 정의에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n = L$ 이 되는 것을 알 수 있다.

6.6.15. 만약 x가 어떤 정수 m에 대해 $x = m\pi$ 이거나 $n = 0$ 이라면 $|\sin nx| = 0$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다. 따라서 $x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 이고 $n > 0$ 인 경우만 살펴보면 된다.

실수 t가 $t \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 이면 모든 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 본문의 따름정리 6.5.3 뒤에 나오는 식 (31) 인

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \\ &= \frac{e^{int/2} - e^{-int/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} e^{i(n+1)t/2} = \frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{i(n+1)t/2} \end{aligned}$$

이 성립함을 안다. 이때 $x = t/2$ 라 놓으면, $x \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 일 때

$$\frac{\sin nx}{\sin x} e^{i(n+1)x} = \sum_{k=1}^{n} e^{2ikx}$$

임을 알 수 있다. 그런데 임의의 실수 $r \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\left|e^{ir}\right| = |\cos r + i \sin r| = \cos^2 r + \sin^2 r = 1$$

이므로

$$\frac{|\sin nx|}{|\sin x|} = \left|\frac{\sin nx}{\sin x} e^{i(n+1)x}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{2ikx}\right| \le \sum_{k=1}^{n} \left|e^{2ikx}\right| = n$$

이다. 즉 주어진 부등식인 $|\sin nx| \le n\,|\sin x|$이 성립한다.

이제 $n = \frac{1}{2}$일 때를, 다시 말해 $\left|\sin \frac{x}{2}\right|$와 $\frac{1}{2}\,|\sin x|$의 대소관계를 살펴보자. 편의를 위해 $u = \frac{x}{2}$라 두면 위에서 살펴본 바에 의해

$$\frac{1}{2}\,|\sin x| = \frac{1}{2}\,|\sin 2u| \le \frac{1}{2} \cdot 2\,|\sin u| = \left|\sin \frac{x}{2}\right|$$

이 되는 것을 알 수 있다.

6.6.16. **(가)** 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$는, 연습문제 6.6.10의 **(나)**에서 $c = 0$인 경우임에 주목하면, 구간 $[0,1]$에서 고르게 수렴한다. 또한 임의의 $x \in [0,1]$과 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $e^{-nx} \ge e^{(n+1)x}$이고, $\|e^{-nx}\|_\infty = 1$이므로 $\{e^{-nx}\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조감소하는 고른유계함수열인 것은 쉽게 알 수 있다. 따라서 정리 6.5.6에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-nx}$는 $[0,1]$에서 고르게 수렴한다.

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$이 실수열로써 수렴하는 것은 교대급수판정법을 사용하면 쉽게 알 수 있기 때문에, 이 급수를 함수열의 급수로 보면 $[0,1]$에서 정의된 상수함수로 고르게 수렴한다. 또한 임의의 $x \in [0,1]$과 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $x^n \ge x^{n+1}$이고, $\|x^n\|_\infty = 1$이므로 $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조감소하는 고른유계함수열인 것은 쉽게 알 수 있다. 따라서 정리 6.5.6에 의해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$는 $[0,1]$에서 고르게 수렴한다.

6.6.17. 편의상 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$이라 두자. 연습문제 6.6.13에서 살펴본 바와 같이, $H_n \le 4\sqrt{n+1}$이고 $\left\{\frac{H_n}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조감소수열이다. 따라서 각 자연수 n에 대하여 $0 \le \frac{H_n}{n} \le \frac{4\sqrt{n+1}}{n}$이고, $n \to \infty$일 때 $\frac{4\sqrt{n+1}}{n} \to 0$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{n} = 0$이다. 한편, 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$H_{n+1} \le \frac{n+2}{n+1} H_n \le \frac{n+1}{n} H_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{H_{n+1}}{n+1} \le \frac{H_n}{n}$$

이 성립하므로 $\left\{\frac{H_n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$도 단조감소수열이다. 그렇기 때문에

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n - a_{n-1}| &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} (a_{n-1} - a_n) \\ &= \lim_{N\to\infty} (a_1 - a_N) \\ &= a_1 \end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 따라서 정리 6.5.4에 의해, 임의로 주어진 $\delta \in (0, \pi)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \sin nx$는 $[\delta, 2\pi - \delta]$에서 고르게 수렴한다. 이제, $t \in [0, 2\pi]$를 임의로 골랐을 때, $t = 0$이거나 $t = 2\pi$이면

모든 자연수 n에 대하여 $\sin nt = 0$이고, $t \in (0, 2\pi)$이면 δ를 충분히 작게 잡아서 $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$가 되도록 할 수 있으므로 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \sin nx$은 $x = t$에서 수렴한다. 즉 임의의 $x \in [0, 2\pi]$에 대하여 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \sin nx$이 수렴한다. 그런데 $n \in \mathbb{N}$이면 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\sin\Big(n(x + 2\pi)\Big) = \sin(2n\pi + nx) = \sin nx$$

인 것에 주목하면, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin nx}{n}$이 모든 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 수렴하는 것 또한 알 수 있다.

한편 $n \cdot \dfrac{H_n}{n} = H_n$은 $n \to \infty$일 때 0으로 수렴하지 않기 때문에 정리 6.5.5를 생각하면 주어진 급수가 $\mathbb{R}$에서 점별수렴하지만 고르게 수렴하지는 않는다는 것을 알 수 있다.

제 7 장

여러 가지 함수공간

7.5.1. 먼저, 임의의 다항식 $Q(x)$에 대해 적분의 선형성을 이용하면

$$\int_0^1 f(x)Q(x)dx = 0$$

임을 알 수 있다. 또한 f가 콤팩트집합 위에서 연속이므로 어떤 $M \in \mathbb{R}$이 존재하여 구간 $[0,1]$ 위에서 $|f| < M$을 만족한다.

바이어슈트라스 정리에 의해 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 $\|f(x) - P(x)\|_\infty < \dfrac{\epsilon}{2M}$을 만족하는 다항식 $P(x)$를 찾을 수 있다. 그러면 부등식

$$\left|\int_0^1 \big(f(x) - P(x)\big) f(x) dx\right| \le \int_0^1 |f(x) - P(x)|\,|f(x)|\,dx < \int_0^1 \frac{\epsilon}{2M}\,M dx = \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립하는데, 한편으로

$$\int_0^1 \big(f(x) - P(x)\big) f(x) dx = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx - \int_0^1 f(x)P(x)dx = \int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx$$

이 되기 때문에

$$\left|\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx\right| \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

임을 알 수 있다. 그런데 ϵ은 임의로 주어진 양수였으므로, 위의 부등식이 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 성립하기 위해서는

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^2 dx = 0$$

이어야 한다. 따라서 연습문제 5.6.5에 의해 $\big(f(x)\big)^2 = 0$이므로 $f = 0$이다.

7.5.2. 어떤 $x_0 > 0$에 대해 $f(x_0) \ne f(0)$이라고 가정하자. 그러면 $|f(x_0) - f(0)| > \epsilon > 0$을 만족하는 ϵ을 잡을 수 있다. 이 ϵ에 대해, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $[0,1]$에서 동등연속이므로 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $x, y \in [0,1]$이고 $|x - y| < \delta$이면 $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$이 성립해야 한다.

이제 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 $\dfrac{x_0}{N} < \min\{\delta, 1\}$을 만족시킬 수 있다. 그런데, 그러한 N에 대하여 $\left|\dfrac{x_0}{N} - 0\right| < \delta$이므로

$$|f(x_0) - f(0)| = \left|f_N\left(\frac{x_0}{N}\right) - f_N(0)\right| < \epsilon$$

이 성립해야 하기 때문에 모순이다. 따라서 모든 $x_0 > 0$에 대하여 $f(x_0) = f(0)$이므로 f는 $x \ge 0$에서 상수함수이다.

7.5.3. 아르첼라-아스콜리 정리를 사용하기 위해 $\{F_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$가 점별유계이고 동등연속임을 보이자.

먼저, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 고른유계이므로, 어떤 $M \in \mathbb{R}$이 있어 모든 자연수 n과 모든 $x \in [0,1]$에 대해 $|f(n)| < M$이 성립한다.

점별유계임을 보이기 위해, $x \in [0,1]$을 고정하자. 그럼 임의의 자연수 n에 대해,

$$\int_0^x f_n(t)dt < \int_0^x M dt = Mx \le M$$

이므로 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 점별유계이다.

이제 동등연속임을 보이자. 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta < \dfrac{\epsilon}{M}$으로 두고, $x, y \in [0,1]$이 $|x-y| < \delta$를 만족한다고 하자. 일반성을 잃지 않고 $x \le y$라 할 수 있다. 그러면 임의의 자연수 n에 대해

$$|F_n(x) - F_n(y)| = \left|\int_0^x f_n(t)dt - \int_0^y f_n(t)dt\right| = \left|\int_x^y f_n(t)dt\right| \le \int_x^y |f_n(t)|\, dt < M(y-x) < \epsilon$$

이므로 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 동등연속임을 알 수 있다. 따라서 아르첼라-아스콜리 정리를 사용하면 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 어떤 고르게 수렴하는 부분수열 $\{F_{n_t}\}_{t\in\mathbb{N}}$을 가짐을 알 수 있다.

한편 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 일반적으로 고르게 수렴하지 않는다. $[0,1]$ 위에서 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이

$$f_n(x) = \begin{cases} x^k & \text{어떤 자연수 } k\text{가 존재하여 } n = 2k-1\text{인 경우} \\ 1 + x^k & \text{어떤 자연수 } k\text{가 존재하여 } n = 2k\text{인 경우} \end{cases}$$

으로 정의되었다고 하자. 그러면 임의의 자연수 n과 $x \in [0,1]$에 대하여 $0 \le f_n(x) \le 2$이므로 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$는 고른유계이다. 하지만

$$F_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & \text{어떤 자연수 } k\text{가 존재하여 } n = 2k-1\text{인 경우} \\ x + \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & \text{어떤 자연수 } k\text{가 존재하여 } n = 2k\text{인 경우} \end{cases}$$

인데, 정의역이 $[0,1]$임에서 $k \to \infty$일 때 $\left\|\dfrac{x^{k+1}}{k+1}\right\|_\infty = \dfrac{1}{k+1} \to 0$이므로 함수열 $F_1, F_3, F_5, \cdots$는 0으로 고르게 수렴하고 함수열 $F_2, F_4, F_6, \cdots$는 x으로 고르게 수렴한다는 것을 알 수 있다. 따라서 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 고르게 수렴하지 않는다.

7.5.4. $g(x) = f(x) - x$이라 놓으면, 모든 자연수 n에 대해

$$\int_0^1 g(x)x^n dx = \int_0^1 f(x)x^n dx - \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} = 0$$

이다. 따라서 연습문제 7.5.1에 의해 $g(x) = 0$이므로, $f(x) = x$이다.

7.5.5. 먼저 $\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$임에 주목하자. 그러면 주어진 극한을 구하기 위해서는 극한

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (n+1)x^n f(x)dx$$

를 구하면 충분함을 알 수 있다.

f가 $[0,1]$에서 연속이므로 $\|f\|_\infty < M$을 만족하는 실수 M이 존재한다. 같은 이유로, $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $|1-x| < \delta$이면 $|f(1) - f(x)| < \epsilon$을 만족한다. 그러한 δ에 대해, 적분을

$$\int_0^{1-\delta} (n+1)x^n f(x)dx + \int_{1-\delta}^1 (n+1)x^n f(x)dx$$

와 같이 범위를 나누자. 앞의 항은,

$$\int_0^{1-\delta}(n+1)x^n f(x)dx < \int_0^{1-\delta}(n+1)Mx^n dx = M(1-\delta)^{n+1}$$

이고 $n \to \infty$일 때 $(1-\delta)^{n+1} \to 0$이므로 그 극한값은 0이다. 한편, 뒤의 항에 대해서는 먼저 $1-\delta < x < 1$이면 $|1-x| < \delta$이므로

$$f(1)-\epsilon < f(x) < f(1)+\epsilon$$

이 성립한다. 그렇기 때문에

$$\int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n\big(f(1)-\epsilon\big)dx \quad < \quad \int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n f(x)dx \quad < \quad \int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n\big(f(1)+\epsilon\big)dx$$

이 성립하고 이로부터

$$\big(f(1)-\epsilon\big)\big(1-(1-\delta)^{n+1}\big) \quad < \quad \int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n f(x)dx \quad < \quad \big(f(1)+\epsilon\big)\big(1-(1-\delta)^{n+1}\big)$$

임을 알 수 있는데, $n \to \infty$일 때 $(1-\delta)^{n+1} \to 0$이므로 모든 항에 극한을 취하면 좌변은 $f(1)-\epsilon$이 되고 우변은 $f(1)+\epsilon$이 된다. 그런데 ϵ이 임의의 양수였으므로

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1-\delta}^{1}(n+1)x^n f(x)dx = f(1)$$

이어야 함을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1}(n+1)x^n f(x)dx = f(1)$$

또한 성립함을 알 수 있다.

7.5.6. $f(x)$가 $\sin x$ 또는 e^x이라고 하자. 두 경우 모두 고르게 수렴하는 다항함수열이 존재하지 않음을 보일 것이다. 먼저 두 경우 모두 $x < 0$이면 $|f(x)| < 2$임에 주목하자.

모순을 보이기 위해 어떤 다항함수열 $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$이 $\mathbb{R}$ 위에서 $f(x)$으로 고르게 수렴한다고 가정하자. 그러면 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 어떤 자연수 N에 대해 $n > N$이면 $\|P_n(x) - f(x)\|_\infty < \epsilon$이어야 한다. 이제 $P_{2N}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$라 하면, $2N > N$이므로 $x < 0$일 때

$$|P_{2N}(x)| \le |f(x)| + |P_{2N}(x) - f(x)| < 2+\epsilon$$

을 얻는다. 그런데

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P_{2N}(x)}{x^k} = \lim_{x\to-\infty}\frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{x^k} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_0}{x^k} + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \cdots \frac{a_{k-1}}{x} + a_k\right) = a_k$$

이기 때문에 어떤 실수 M이 존재하여 $x < M$이면 항상

$$\begin{aligned}\left|a_k - \frac{P_{2N}(x)}{x^k}\right| < \frac{|a_k|}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \left||a_k| - \left|\frac{P_{2N}(x)}{x^k}\right|\right| < \left|a_k - \frac{P_{2N}(x)}{x^k}\right| < \frac{|a_k|}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \left|\frac{P_{2N}(x)}{x^k}\right| > \frac{|a_k|}{2} \\ &\Longrightarrow \quad |P_{2N}(x)| > \frac{|a_k|}{2}|x|^k\end{aligned}$$

이 성립해야 하는데, $x \to -\infty$이면 $|x|^k \to \infty$이기 때문에 $|P_{2N}(x)| < 2+\epsilon$일 수 없다. 따라서 $f(x)$로 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 수렴하는 다항함수열은 존재할 수 없다.

7.5.7. (가) 이항정리에 의해

$$\sum_{k=0}^{n} r_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \big(x + (1-x)\big)^n = 1$$

임을 알 수 있다. 또한 이항계수에 대한 항등식

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{k}{n}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}$$

이 성립함에 주목하면

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} r_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= x\big(x + (1-x)\big)^{n-1} \\
&= x
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 한편, 항등식

$$\begin{aligned}
\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} &= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\,\frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{n(n-1)}\,\frac{k(k-1)}{k!}\,\frac{1}{(n-k)!} \\
&= \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \quad = \binom{n-2}{k-2}
\end{aligned}$$

을 이용하면

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)} r_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{n(n-1)}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{(n-2)-k} \\
&= x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^k (1-x)^{(n-1)-k} \\
&= x^2\big(x + (1-x)\big)^{n-2} \\
&= x^2
\end{aligned}$$

을 얻는다. 이렇게 얻은 두 식을 각각 정리하면

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k r_k(x) &= nx \\
\sum_{k=0}^{n} (k^2 - k) r_k(x) &= (n^2 - n)x^2
\end{aligned}$$

이 되는데, 이제 이 두 식을 각 변끼리 더하면

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) = n^2x^2 - nx^2 + nx$$

을 얻는다. 따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 r_k(x) - \sum_{k=0}^{n} 2knx r_k(x) + \sum_{k=0}^{n} n^2x^2 r_k(x) \\ &= n^2x^2 - nx^2 + nx - (2nx)(nx) + n^2x^2 \\ &= nx(1-x)\end{aligned}$$

이 된다.

(나) 먼저 $r_k(x) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ 인데 $0 \le x \le 1$이므로 $r_k(x) \ge 0$이고,

$$\begin{aligned}p_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) - f(x)\sum_{k=0}^{n} r_k(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\end{aligned}$$

임에 유의하자. 연속함수 f가 유계닫힌구간 $[0,1]$ 위에서는 고른연속이면서 유계이므로, 임의의 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $|x-y| < \delta$이면 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$을 만족하고, 어떤 양수 M이 존재하여 $|f| < M$이 성립한다.

임의의 $\epsilon > 0$과 $x \in [0,1]$을 고정하고, 주어진 ϵ에 대한 $\delta > 0$을 잡자. 그러면 각 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$에 대해 $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$일 수도 있고, 그렇지 않을 수도 있다. 각 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 중 $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$인 k들만 더하는 것을 $\sum_{\bigcirc}$으로, 그렇지 않은 k들을 더하는 것을 $\sum_{\triangle}$으로 나타내자. 그러면 $\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta$인 k에 대해서는 $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}$이므로

$$\sum_{\bigcirc}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| < \sum_{\bigcirc}\frac{\epsilon}{2}|r_k(x)| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{2} r_k(x) = \frac{\epsilon}{2}$$

이다. 한편, $\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta$인 k들에 대해서는

$$\begin{aligned}\delta^2\sum_{\triangle}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| &\le \sum_{\triangle}\delta^2(2M) r_k(x) \\ &\le \sum_{\triangle}\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 (2M) r_k(x) \\ &\le \frac{2M}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-nx)^2 r_k(x)\end{aligned}$$

이므로 여기에 **(가)**의 결과를 적용하면 $x(1-x) \le \frac{1}{4}$이므로

$$\sum_{\triangle}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| \le \frac{2M}{\delta^2 n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-nx)^2 r_k(x) = \frac{2Mnx(1-x)}{\delta^2 n^2} = \frac{M}{2\delta^2 n}$$

을 얻는다. $n \to \infty$일 때 $\frac{1}{n} \to 0$이므로 어떤 자연수 N이 존재하여 $n > N$이면 $\frac{M}{2\delta^2 n} < \frac{\epsilon}{2}$을 만족한다. 따라서 $n > N$이면

$$\begin{aligned}
|p_n(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| \\
&= \sum_{\bigcirc}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| + \sum_{\triangle}\left|\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) r_k(x)\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

인데, 임의의 $\epsilon > 0$과 $x \in [0,1]$에 대해 이 부등식이 성립하므로 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 f로 $[0,1]$으로 고르게 수렴함을 알 수 있다.

7.5.8. 유한수열 전체의 집합을 $c_{00}(\mathbb{N})$이라 놓자. 먼저 $c_{00}(\mathbb{N})$이 $c_0(\mathbb{N})$, $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$에서 각각 조밀함을 보이겠다. 이는 수열 b가 각 공간에서 주어졌을 때 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $a \in c_{00}(\mathbb{N})$이 존재하여 $\|a - b\| < \epsilon$을 만족하면 된다. 물론 이때 노름은 각 공간에서 주어진 노름이다.

$\epsilon > 0$이 주어졌다고 하자. 그러면 각 공간의 정의에 의해 수열 b가...

- $c_0(\mathbb{N})$에서 주어졌으면 자연수 N이 존재해서 $n > N$이면 $|b(n)| < \epsilon$
- $\ell^1(\mathbb{N})$에서 주어졌으면 자연수 N이 존재해서 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} |b(n)| < \epsilon$
- $\ell^2(\mathbb{N})$에서 주어졌으면 자연수 N이 존재해서 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} |b(n)|^2 < \epsilon^2$

...을 만족한다. 이제 수열 a를

$$a(i) = \begin{cases} b(i) & \text{if } a \le N \\ 0 & \text{if } a > N \end{cases}$$

이라 정의하면 $a \in c_{00}(\mathbb{N})$이고...

- $b \in c_0(\mathbb{N})$이면 $\|b - a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \{|b(n) - a(n)|\}$인데, $i \le N$이면 $|b(i) - a(i)| = 0$이고 $i > N$이면 $|b(i) - a(i)| = |b(i)| < \epsilon$이므로 $\|b - a\|_\infty < \epsilon$
- $b \in \ell^1(\mathbb{N})$이면 $\|b - a\|_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |b(n) - a(n)| = \sum_{n=N+1}^{\infty} |b(i)| < \epsilon$
- $b \in \ell^2(\mathbb{N})$이면 $\|b - a\|_2 = \displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} |b(n) - a(n)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} |b(i)|^2\right)^{1/2} < \epsilon$

...이다. 따라서 $c_{00}(\mathbb{N})$은 각 수열공간에서 조밀하다.

이제 $c_0(\mathbb{N})$이 완비공간임을 보이기 위해, $c_0(\mathbb{N})$ 안의 임의의 코시수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하고 이 수열이 $c_0(\mathbb{N})$ 안의 어떤 수열로 수렴한다는 것을 보이겠다. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이기 때문에 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 어떤 N이 존재하여 $n, m \ge N$이면 $\|a_n - a_m\|_\infty < \epsilon$이다. 즉 모든 $i \in \mathbb{N}$에 대해 $|a_n(i) - a_m(i)| < \epsilon$인데, $\mathbb{R}$이 완비공간이므로 각 i에 대해 $\{a_n(i)\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이 되고 따라서 수렴한다. 여기서 수열 a를 각 $i \in \mathbb{N}$에 대해 $a(i) = \lim_{n\to\infty} a_n(i)$이 되도록 잡자.

모든 $i \in \mathbb{N}$에 대하여 $n, m \geq N$이면 $|a_n(i) - a_m(i)| < \epsilon$이고, 절대값 함수는 연속이므로

$$\lim_{m\to\infty} |a_n(i) - a_m(i)| = \left|\lim_{m\to\infty} (a_n(i) - a_m(i))\right| = |a_n(i) - a(i)| \leq \epsilon$$

이 성립한다. 여기서 $n = N$으로 고정하면 $a_N \in c_0(\mathbb{N})$이므로 자연수 M이 존재해서 $m > M$이면 $|a_n(m)| < \epsilon$을 만족한다. 그러한 m에 대해,

$$|a(m)| \leq |a(m) - a_N(m)| + |a_N(m)| < 2\epsilon$$

이므로 $\lim_{m\to\infty} a(m) = 0$이다. 따라서 $a \in c_0(\mathbb{N})$임을 알 수 있다. 이제 $\lim_{n\to\infty} \|a_n - a\|_\infty = 0$만 보이면 된다. 그런데 이미 모든 $i \in \mathbb{N}$에 대해 $|a_n(i) - a(i)| \leq \epsilon$이므로

$$\|a_n - a\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_n(i) - a(i)| \leq \epsilon$$

이 된다. ϵ이 임의의 양수였기 때문에, a_n이 $c_0(\mathbb{N})$에 주어진 노름에 대해 a로 수렴한다는 결론을 얻는다.

7.5.9. K가 콤팩트임을 보이려면 $\ell^2(\mathbb{N})$이 노름공간이므로 K 안에서의 임의의 수열이 수렴하는 부분수열을 가진다는 것을 보이면 충분하다. 이를 위해 K 안의 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$를 생각하자. 임의의 자연수 k에 대해 $|x_n(k)| \leq \dfrac{1}{k}$이므로 $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$은 점별유계이다. 따라서 볼차노-바이어슈트라스 정리에 의해 $x_n(1)$은 수렴하는 부분수열을 갖는데, 이를 $\{x_{1n}(1)\}_{n\in\mathbb{N}}$이라고 하자. 그러면 $x_{1n}(2)$ 또한 같은 이유로 수렴하는 부분수열을 갖는데, 이를 $x_{2n}(2)$라 하자. 이를 반복하면 부분수열들

$$\begin{aligned} s_1 &= \{x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1n}, \cdots\} \\ s_2 &= \{x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}, \cdots\} \\ &\vdots \\ s_n &= \{x_{n1}, x_{n2}, \cdots, x_{nn}, \cdots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

을 얻는다. 이제 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$를 $y_k = x_{kk}$이 되도록 잡자. 그러면 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$는 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$의 부분수열이기 때문에 모든 자연수 m에 대하여 $y_k(m) \leq \dfrac{1}{m}$이다. 또한 s_m은 첫 번째, 두 번째, $\cdots$, m번째 성분이 수렴한다는 성질에 의해, 모든 자연수 m에 대해 $\{y_k(m)\}_{k\in\mathbb{N}}$이 수렴한다. 이를 이용하여 $y(m) = \lim_{k\to\infty} y_k(m)$이 되도록 수열 y를 잡자. 그러면 $y \in K$인 것은 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\|_2 = 0$임을 보이면 우리가 원하는 결론을 얻는다. 이를 보이기 위해 임의의 $\epsilon > 0$을 잡자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} < \infty$이므로 어떤 자연수 N이 존재하여 $\displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4}{k^2} < \frac{\epsilon}{2}$를 만족한다. 그러면 각 $1 \leq k \leq N$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} y_n(k) = y(k)$이므로 자연수 M_1, M_2, $\cdots$, M_N가 존재하여 $m_k > M_k$이면 $|y_{m_k}(k) - y(k)| < \sqrt{\dfrac{\epsilon}{2N}}$을 만족한다. 이제 $M = \max\{M_1, M_2, \cdots, M_N\}$으로 놓자. 그러면 $m > M$인 m에 대해

$$\begin{aligned} \|y_m - y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_m(k) - y(k)|^2 &= \sum_{k=1}^{N} |y_m(k) - y(k)|^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_m(k) - y(k)|^2 \\ &< \sum_{k=1}^{N} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{2N}}\right)^2 + \sum_{k=N+1}^{\infty} \big(|y_m(k)| - |y(k)|\big)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= N \cdot \frac{\epsilon}{2N} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

를 만족하므로 $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$가 y로 수렴한다는 결론을 얻는다.

반면 L은 콤팩트집합이 아니다. 이를 보이기 위해서 L 위의 수열 중 어떤 부분수열도 L의 원소로 수렴하지 않는 수열의 존재를 보일 것이다. 예를 들어, L 위의 수열 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을

$$x_n(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \text{if } i \le n \\ \dfrac{1}{n} & \text{if } i > n \end{cases}$$

이라 놓자. 이 수열이 L 안에서 수렴하는 부분수열을 갖지 않는다는 것을 보이고자 한다. 모순을 이끌어내기 위해, 어떤 부분수열 $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$가 존재해서 어떤 $x \in L$로 수렴한다고 가정하자. 보이고자 하는 것은 $x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$이 되어야 한다는 것이다. 이를 보임에 있어 모순을 이끌어내기 위해 어떤 자연수 k에 대해 $x(k) \neq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$라 해보자. 그러면 충분히 작은 양수 ϵ에 대하여 $\left|x(k) - \dfrac{1}{\sqrt{k}}\right| > \epsilon$이 성립한다. 그런데 $n(k) \le k$이므로 $j > k$에 대해서 $n(j) > k$인데, 그러면

$$\left\|x_{n(j)} - x\right\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|x_{n(j)}(i) - x(i)\right|^2\right)^{1/2} \ge \left(\left|x_{n(j)}(k) - x(k)\right|^2\right)^{1/2} = \left|\frac{1}{\sqrt{k}} - x(k)\right| > \epsilon$$

이 되기 때문에 $\{x_{n(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$가 x로 수렴한다는 것에 모순이다. 따라서 모든 자연수 $k = 1, 2, \cdots$에 대하여 $x(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$이다. 그런데 그렇다면

$$\|x\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 = \infty$$

이 되어 $x \in L \subset \ell^2(\mathbb{N})$에 모순이다. 즉 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 L 안에서 수렴하는 부분수열을 가진다는 가정이 거짓임을 알 수 있다. 따라서 L은 콤팩트집합이 아니다.

7.5.10. **(가)** 먼저 $q \ge 0$인 경우를 생각하자. 만약 $p > -1$이면 $x \in (0,1]$일 때 $\dfrac{x^p}{\sqrt{1+x^q}} \le x^p$이고 $\displaystyle\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p}$이므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다. 반대로 $p \le -1$이면 $\dfrac{x^p}{\sqrt{1+x^q}} \ge \dfrac{x^p}{\sqrt{2}}$인데 $\displaystyle\int_0^1 x^p dx = \infty$이므로 주어진 특이적분 또한 수렴하지 않는다.

이제 $q < 0$인 경우를 생각하자. 그런데 이때 $b = -q$라 두면 $b > 0$이므로

$$\frac{x^p}{\sqrt{1+x^q}} = \frac{x^p}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^b}}} = \frac{x^{p+\frac{b}{2}}}{\sqrt{1+x^b}}$$

이 성립한다. 따라서 위에서의 결과를 적용하면 $p - \dfrac{q}{2} = p + \dfrac{b}{2} > -1$일 때 주어진 특이적분이 수렴하고, 그렇지 않으면 주어진 특이적분이 발산함을 알 수 있다.

결과를 종합하면, $p > -1$이고 $q \ge 0$이거나, $q < 0$이고 $p - \dfrac{q}{2} > -1$이면 주어진 특이적분이 수렴하고, 이외의 경우 특이적분이 발산한다.

(나) 다음 두 보조정리를 살펴보자.

보조정리 1. 임의의 실수 $\alpha \in \mathbb{R}$과 양수 $\beta > 0$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

이 성립한다.

증명) 만약 $\alpha \le 0$이면 $x > e$일 때 $\log x \ge 1$이기 때문에 $(\log x)^\alpha \le 1$이다. 따라서 $0 \le \dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \le \dfrac{1}{x^\beta}$가 되는데, 이때 $x \to \infty$일 때의 극한을 생각하면 우변이 0에 수렴하기 때문에 샌드위치 정리에 따라서 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$이다.

반대로 $\alpha > 0$이라고 하자. 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하고, $\gamma = \beta/\alpha$라 두면 $\gamma > 0$이고 $(\epsilon/2)^{1/\alpha} > 0$임에 유의하자. $t \in \mathbb{R}$이 $t > 1$이면 $t^{-1} < t^{\frac{\gamma}{2}-1}$이므로 임의의 1보다 큰 실수 x에 대하여

$$\log x = \int_1^x t^{-1}dt \le \int_1^x t^{\frac{\gamma}{2}-1}dt = \frac{1}{\gamma/2}(x^{\gamma/2} - 1)$$

이므로 부등식

$$0 \le \frac{\log x}{x^\gamma} \le \frac{2}{\gamma}\frac{x^{\gamma/2}-1}{x^\gamma}$$

이 성립한다. 이때 $x \to \infty$일 때의 극한을 생각하면 우변이 0에 수렴하므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^\gamma} = 0$이다. 그러면 어떤 실수 M을 $x > M$이면 $\dfrac{\log x}{x^\gamma} < \left(\dfrac{\epsilon}{2}\right)^{1/\alpha}$이 되도록 잡을 수 있고, 그러면 $x > M$인 모든 실수 x에 대해 $\dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\dfrac{\log x}{x^\gamma}\right)^\alpha \le \dfrac{\epsilon}{2}$이 된다. 즉, 그러한 실수 M에 대하여, 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면 $x > M$일 때

$$0 \le \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

이 되므로, 극한의 정의에 의해 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$이다. □

보조정리 2. 어떤 $a \in \mathbb{R}$와, a보다 크거나 ∞인 b에 대해 구간 $I = [a, b)$를 생각하자. 연속함수 $f : I \to \mathbb{R}$이 어떤 실수 L에 대하여

$$\lim_{x\to b} f(x) = L$$

을 만족하면 f는 I에서 유계이다.

증명) 극한의 정의에 의해 어떤 실수 $M \in [a, b)$이 존재하여, $x \in [a, b)$이 $x \ge M$이면 $|f(x) - L| < 1$이 성립하게 할 수 있다. 그러면 $[M, b)$에서 $L - 1 < |f| < L + 1$이므로 f는 유계이다. 한편, f가 연속이므로 콤팩트집합 $[a, M]$에서도 유계이다. 따라서 f는 $[a, M] \cup [M, b) = [a, b) = I$에서 유계이다. □

보조정리 1은 미적분학에서 자주 등장하므로 익숙한 정리일 것이다. 이 두 보조정리가 주어진 특이적분이 수렴하는지 판단하는데 유용하게 쓰일 것이다.

먼저 $p > 1$인 경우를 생각하자. 보조정리 1에 의해 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\log x)^{-q}}{x^{(p-1)/2}} = 0$이므로 보조정리 2에 의해 $\dfrac{(\log x)^{-q}}{x^{(p-1)/2}}$는 유계이다. 따라서 어떤 양수 $M > 0$에 대하여 부등식

$$\frac{1}{x^p(\log x)^q} = \frac{(\log x)^{-q}}{x^p} = \frac{(\log x)^{-q}}{x^{(p-1)/2}} \cdot \frac{1}{x^{(p+1)/2}} \le \frac{M}{x^{(p+1)/2}}$$

이 성립한다. 그런데 특이적분 $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{(p+1)/2}}dx$가 수렴하므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분도 수렴하는 것을 알 수 있다.

반대로 $p<1$인 경우를 생각하자. 그러면 보조정리 1에 의해 $\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)^q}{x^{1-p}}=0$이므로 보조정리 2에 의해 어떤 양수 M에 대해

$$\frac{(\log x)^q}{x^{1-p}}<M \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{Mx}<\frac{1}{x^p(\log x)^q}$$

이 된다. 그런데 $\int_2^\infty \frac{1}{x}dx=\infty$이므로 주어진 특이적분도 수렴하지 않는 것을 알 수 있다.

마지막으로 $p=1$인 경우를 생각하자. 그러면 임의의 $b\in\mathbb{R}, b>2$에 대하여, $\log x=t$라 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int_2^b \frac{1}{x(\log x)^q}dx=\int_{\log 2}^{\log b}\frac{1}{t^q}dt$$

인데, $b\to\infty$이면 $\log b\to\infty$이므로 $b\to\infty$일 때 우변의 특이적분이 수렴할 조건은 $q>1$이다. 따라서 주어진 특이적분이 수렴할 조건 또한 $q>1$이다.

결과를 종합하면, $p>1$이거나, $p=1$이고 $q>1$이면 주어진 특이적분이 수렴하고, 이외의 경우 특이적분은 발산한다.

(다) 주어진 적분은 $x\to 0$일 때 피적분함수가 유계가 아닐 가능성이 있고, 적분구간 또한 유계가 아니다. 이 두 가지 상황을 동시에 다루기보다는, 적분구간을 쪼개

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx=\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx+\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$$

라 놓고, 우변의 두 특이적분이 모두 수렴하는 p,q의 범위를 찾도록 하자.

먼저 $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$가 수렴하는 p,q의 값을 찾기 위해 일단 $q\geq 0$인 경우를 생각하자. 만약 $p>0$이면 $\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\leq x^{p-1}$이고, $\int_0^1 x^{p-1}dx=\frac{1}{p}$이므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다. 반대로 $p\leq 0$이면 $\frac{1}{x^{1-p}(1+x^q)}\geq\frac{1}{2x^{1-p}}$인데, 이때 $1-p\geq 1$이므로 $\int_0^1\frac{1}{x^{1-p}}=\infty$이다. 따라서 이때는 주어진 특이적분이 수렴하지 않는다.

반대로 $q<0$인 경우를 생각하자. $b=-q$라 두면 $b>0$이고, 피적분함수를

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\frac{x^{p-1}}{1+\frac{1}{x^b}}=\frac{x^{p+b-1}}{1+x^b}$$

와 같이 쓸 수 있으므로 위에서의 결과를 적용하면 $p-q=p+b>0$일 때 주어진 특이적분이 수렴하는 것을 알 수 있다.

결과를 정리하면, 특이적분 $\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$은 $q\geq 0$이고 $p>0$이거나, $q<0$이고 $p>q$일 때 수렴하고, 이외의 경우 발산한다.

이제 $\int_1^\infty\frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$가 수렴하는 p,q의 값을 구해보자. 먼저 $q>0$인 경우를 생각하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\cdot\frac{1}{x^{-(1-p+q)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^q}{1+x^q}=1$$

이 되는 것에 주목하자. 즉, 어떤 실수 R이 존재하여 $x>R$이면 부등식

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1-p+q}}\leq\frac{x^{p-1}}{1+x^q}\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{1-p+q}}$$

이 성립한다. 따라서, $1-p+q>1$이면 $\int_1^\infty\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^{1-p+q}}dx=\frac{3}{2(q-p)}$이므로 주어진 특이적분이 수렴하고, $1-p+q\leq 1$이면 $\int_1^\infty\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{1-p+q}}dx=\infty$이므로 주어진 특이적분은 발산한다.

한편 $q=0$인 경우 피적분함수가 $\dfrac{x^{p-1}}{2}$이므로 주어진 특이적분은 $p-1<-1$이면 수렴하고 $p-1\geq -1$이면 발산한다.

마지막으로 $q<0$인 경우를 생각하자. 이때도 역시 $b=-q$라 놓으면 $b>0$이고, 피적분함수를

$$\frac{x^{p-1}}{1+x^q}=\frac{x^{p+b-1}}{1+x^b}$$

와 같이 쓸 수 있기 때문에 위에서의 결과로부터 $1-p=1-(p+b)+b>1$이면 주어진 특이적분이 수렴하고 이외의 경우 발산함을 알 수 있다.

결과를 정리하면, 특이적분 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$은 $q>0$이고 $p<q$이거나, $q=0$이고 $p<0$이거나, $q<0$이고 $p<0$일 때 수렴하고, 이외의 경우 발산한다.

따라서 특이적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$과 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$가 둘 다 수렴하게 되는 p,q의 범위는 $q>p>0$이거나 $q<p<0$일 때이다. 즉, 주어진 특이적분은 $q>p>0$이거나 $q<p<0$일 때 수렴한다.

(라) 이 경우에도 **(다)**에서와 비슷하게 주어진 적분을

$$\int_0^1 x^p(1-x^2)^q dx=\int_0^{1/2} x^p(1-x^2)^q dx+\int_{1/2}^1 x^p(1-x^2)^q dx$$

로 적분구간을 쪼개어 생각하자.

구간 $[0,1/2]$ 위에서 함수 $x\mapsto 1-x^2$는 최솟값 $3/4$와 최댓값 1을 가진다. 따라서 임의로 주어진 q에 대해 $x\in[0,1/2]$이면 어떤 양수 m, M이 존재하여 $0<m\leq(1-x^2)^q\leq M$이다. 따라서 $p>-1$이면 $x^p(1-x^2)^q\leq Mx^p$이고 $\displaystyle\int_0^{1/2}x^p dx=\frac{1}{(p+1)2^p}$이므로 명제 7.3.1에 의해 $\displaystyle\int_0^{1/2}x^p(1-x^2)^q dx$이 수렴한다. 반대로 $p\leq -1$이면 $x^p(1-x^2)^q\geq mx^p$인데 $\displaystyle\int_0^{1/2}x^p dx=\infty$이므로 이때는 $\displaystyle\int_0^{1/2}x^p(1-x^2)^q dx$이 수렴하지 않는다.

한편 $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^p(1-x^2)^q dx$이 언제 수렴하는지를 알아보기 위해 특이적분 $\displaystyle\int_{1/2}^1 x(1-x^2)^q dx$이 언제 수렴하는지를 먼저 생각해보자. 이 특이적분을 $\displaystyle\lim_{\beta\to1-}\int_{1/2}^\beta x(1-x^2)^q dx$이라 놓고 $t=1-x^2$라 두면 $\dfrac{dt}{dx}=-2x$이므로

$$\lim_{\beta\to1-}\int_{1/2}^\beta x(1-x^2)^q dx=\lim_{\beta\to1-}\int_{3/4}^{1-\beta^2}-\frac{1}{2}t^q dt=\lim_{\beta\to1-}\frac{1}{2}\int_{1-\beta^2}^{3/4}t^q dt$$

이 되는데, 이때 $\beta\to1-$이면 $1-\beta^2\to0+$이므로 우변의 특이적분은 $q>-1$일 때 수렴하고 $q\leq-1$이면 발산한다. 즉, $\displaystyle\int_{1/2}^1 x(1-x^2)^q dx$ 또한 $q>-1$일 때 수렴하고 그 외의 경우 발산한다. 이제 구간 $[1/2,1]$에서 함수 $x\mapsto x^{p-1}$이 유계이면서 항상 양의 값을 가지기 때문에 어떤 두 양수 r,R에 대해 $0<r\leq x^{p-1}\leq R$이 되는 것에 주목하면, 피적분함수가 $rx(1-x^2)^q\leq x^p(1-x^2)^q\leq Rx(1-x^2)^q$를 만족하기 때문에 구간 $[0,1/2]$에서 특이적분의 수렴성을 판단할때와 같은 논리에 따르면 특이적분 $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^p(1-x^2)^q dx$은 $q>-1$일 때 수렴하고 $q\leq-1$일 때 발산함을 알 수 있다.

따라서 특이적분 $\displaystyle\int_0^{1/2}x^p(1-x^2)^q dx$과 $\displaystyle\int_{1/2}^1 x^p(1-x^2)^q dx$이 둘 다 수렴하게 되는 p,q의 범위는 $p>-1$이고 $q>-1$일 때이다. 즉, 주어진 특이적분은 $p,q>-1$일 때 수렴한다.

(마) 이 경우에도 위의 두 경우와 비슷하게 주어진 적분을

$$\int_0^\infty x^p e^{-x^q} dx = \int_0^1 x^p e^{-x^q} dx + \int_1^\infty x^p e^{-x^q} dx$$

로 적분구간을 쪼개어 생각하자.

먼저 $\int_1^\infty x^p e^{-x^q} dx$가 수렴하는 p, q의 값을 구하기 위해, 일단 $q > 0$인 경우를 생각해보자. **(나)**에서 살펴본 보조정리 1에 의해, $t = e^{x^q}$라 놓으면 $x = (\log t)^{1/q}$이고, $x \to \infty$이면 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty} x^{p+2} e^{-x^q} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+2}}{e^{x^q}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^{(p+2)/q}}{t} = 0$$

이 된다. 따라서 **(나)**에서 살펴본 보조정리 2에 의해 어떤 양수 M에 대하여 $x > 1$이면 $x^{p+2}e^{-x^q} \le M$, 즉 $x^p e^{-x^q} \le \dfrac{M}{x^2}$이 성립한다. 이때 $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x^2} = 1$이므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다.

한편 $q < 0$인 경우 $\lim_{x\to\infty} e^{-x^q} = 1$이다. 따라서 어떤 $R \in \mathbb{R}, R \ge 1$이 존재하여 $x \ge R$이면 $1/2 \le e^{-x^q} \le 3/2$를 만족한다. 그런데 구간 $[1, R]$에서 함수 $x \mapsto x^p e^{-x^q}$는 연속이므로 구간 $[1, R]$에서 리만적분가능함에 유의하면, 주어진 특이적분이 수렴하는 지를 판단하려면 $\int_R^\infty x^p e^{-x^q} dx$가 수렴하는 지를 확인하면 된다는 것을 알 수 있다. 만약 $p < -1$이면 $[R, \infty)$에서 $x^p e^{-x^q} \le \dfrac{3}{2} x^p$인데 $\int_R^\infty x^p dx = \dfrac{R^{p+1}}{p+1}$이므로 명제 7.3.1에 의해 $\int_R^\infty x^p e^{-x^q} dx$가 수렴한다. 반대로 $p \ge -1$이면 $x^p e^{-x^q} \ge \dfrac{1}{2} x^p$인데 $\int_R^\infty x^p dx = \infty$이므로 $\int_R^\infty x^p e^{-x^q} dx$는 발산한다. 이로부터 $\int_1^\infty x^p e^{-x^q} dx$ 또한 $p < -1$이면 수렴하고 $p \ge -1$이면 발산한다는 것을 알 수 있다.

마지막으로 $q = 0$이면 피적분함수가 $x^p e^{-1}$이 되므로, $p < -1$이면 주어진 특이적분이 수렴하고, $p \ge -1$이면 발산한다.

결과를 정리하면, 특이적분 $\int_1^\infty x^p e^{-x^q} dx$은 $q > 0$이거나, $q \le 0$이고 $p \le -1$인 경우 수렴하고, 이외의 경우 발산한다.

이제 $\int_0^1 x^p e^{-x^q} dx$가 수렴하는 p, q의 값을 찾자. 만약 $p > -1$이면, q의 값에 관계없이 $x^q \ge 0$이므로 $e^{-x^q} \le 1$이 되어 $x^p e^{-x^q} \le x^p$가 된다. 그런데 $\int_0^1 x^p dx = \dfrac{1}{p+1}$이므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다.

반대로 $p \le -1$일 때를 생각해보자. 이때 $q > 0$이면 e^{-x^q}는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이면서 항상 양의 값을 가지므로 어떤 양수 $m > 0$이 존재하여 $x \in [0, 1]$이면 $e^{-x^q} \ge m$이다. 즉 $x \in [0, 1]$이면 $x^p e^{-x^q} \ge m x^p$인데, 이때 $\int_0^1 x^p = \infty$이므로 주어진 특이적분이 발산한다. 비슷한 이유로, $q = 0$이면 피적분함수가 $x^p e^{-1}$이 되므로 이 경우에도 주어진 특이적분이 발산한다. 마지막으로 $q < 0$인 경우를 생각하자. 편의상 $a = -p, b = -q$라 놓으면 $a, b > 0$이 되고, 이때 $u = x^{-1}$, $v = e^{u^b}$라 놓으면 $x \to 0+$일 때 $u \to \infty$이므로 $v \to \infty$이고, $u = (\log v)^{1/b}$임에 유의하면 **(나)**에서 살펴본 보조정리 1에 의해

$$\lim_{x\to 0+} x^p e^{-x^q} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{-a}}{e^{x^{-b}}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u^a}{e^{u^b}} = \lim_{v\to\infty} \frac{(\log v)^{a/b}}{v} = 0$$

이 된다. 따라서 적당한 $0 < \epsilon \le 1$에 대해 $x \in [0, \epsilon]$이면 $\left|x^p e^{-x^q}\right| \le 1$이다. 한편 닫힌구간 $[\epsilon, 1]$ 위에서는 $x \mapsto x^p e^{-x^q}$이 연속이므로 유계이다. 즉 어떤 양수 K에 대해, $x \in (0, 1]$이면 $\left|x^p e^{-x^q}\right| \le K$이다. 그런데 $\int_0^1 K dx = K$이므로, 명제 7.3.2에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다.

결과를 정리하면, 특이적분 $\int_0^1 x^p e^{-x^q}dx$은 $p > -1$이거나, $p \le -1$이고 $q < 0$인 경우 수렴하고, 이외의 경우 발산한다.

따라서 특이적분 $\int_0^1 x^p e^{-x^q}dx$과 $\int_1^\infty x^p e^{-x^q}dx$이 둘 다 수렴하게 되는 p, q의 범위는 $p < -1$이고 $q < 0$이거나, $p > -1$이고 $q > 0$인 경우이다. 즉, 문제에서 주어진 특이적분은 $p < -1$이고 $q < 0$이거나, $p > -1$이고 $q > 0$일 때 수렴한다.

(바) 먼저 $p > 0$인 경우를 생각하자. 만약 $q < 1$이면 $\left|\frac{\sin(x^p)}{x^q}\right| \le \frac{1}{x^q}$인데 $\int_0^1 \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{1-q}$이므로 명제 7.3.2에 의해 주어진 특이적분이 수렴한다. 반대로 $q \ge 1$을 가정하자. 등식 $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$이 성립하는 것은 잘 알려져 있는 사실이며, 로피탈의 정리를 사용하는 등의 방법으로 보일 수 있다. 그렇기 때문에 $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x^p)}{x^p} = 1$또한 성립하게 되어, 적당한 $0 < \epsilon \le 1$에 대해 $x \in (0,\epsilon]$이면 $\frac{1}{2} \le \frac{\sin(x^p)}{x^p} \le \frac{3}{2}$을 만족한다. 게다가 함수 $x \mapsto \frac{\sin(x^p)}{x^p}$은 $[\epsilon, 1]$에서 연속이므로 $[\epsilon, 1]$ 안에서 최솟값과 최댓값을 갖는데, 이때 $p > 0$이라서 $0 < x^p \le 1 < \pi$이므로 그 최솟값은 0보다 크다. 따라서 어떤 두 양수 $m, M \ge 0$에 대하여 $x \in (0,1]$이면 $0 < m \le \frac{\sin(x^p)}{x^p} \le M$이다. 즉 구간 $(0,1]$에서

$$\frac{m}{x^{q-p}} \le \frac{\sin(x^p)}{x^q} = \frac{\sin(x^p)}{x^p}\frac{1}{x^{q-p}} \le \frac{M}{x^{q-p}}$$

이 성립한다. 그렇기 때문에 $q - p < 1$이면 $\int_0^1 \frac{dx}{x^{q-p}} = \frac{1}{1-q+p}$이므로 명제 7.3.1에 의해 주어진 특이적분이 수렴하고, $q - p \ge 1$이면 특이적분 $\int_0^1 \frac{m}{x^{q-p}}dx$이 발산하므로 주어진 특이적분도 발산한다.

한편 $p = 0$이면 피적분함수가 $\frac{\sin 1}{x^q}$가 되므로, $q < 1$이면 주어진 특이적분이 수렴하고, $q \ge 1$이면 주어진 특이적분은 발산한다.

마지막으로 $p < 0$일 때를 생각하자. 편의상 $a = -p$라 하고, $u = x^{-a}$라 놓으면 $x = u^{-1/a}$이고, $\frac{du}{dx} = -ax^{-(a+1)} = -\frac{au}{x}$이기 때문에 주어진 특이적분을

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x^q}dx &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{\sin(x^{-a})}{x^{q-1}}\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon^{-a}}^1 \frac{\sin(u)}{u^{-\frac{q-1}{a}}}\cdot\frac{1}{-au}du \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_1^{\epsilon^{-a}} \frac{\sin(u)}{au^{1-\frac{q-1}{a}}}du\end{aligned}$$

와 같이 쓸 수 있다. 편의상 $\beta = 1 - \frac{q-1}{a}$라 두자. 이때, $p < 0$임을 가정했으므로 $a > 0$이 되어 $\epsilon \to 0$일 때 $\epsilon^{-a} \to \infty$임에 주목하자. 즉,

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x^q}dx = \frac{1}{a}\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^\beta}du$$

이므로 주어진 특이적분이 수렴하는 것과 $\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^\beta}du$이 수렴하는 것은 동치이다.

이러한 까닭에 이제는 특이적분 $\int_1^\infty \frac{\sin u}{u^\beta}du$이 β가 어떤 값을 가질 때 수렴하는 지를 알아볼 것이다. 먼저 $\beta > 0$인 경우를 살펴보자. 임의의 $x \in [1,\infty)$와 자연수 $k = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$\frac{\sin(x+k\pi)}{(x+k\pi)^\beta} = \frac{(-1)^k \sin x}{(x+k\pi)^\beta}$$

이 성립한다. 이로부터

$$\int_{2\pi+k\pi}^{2\pi+(k+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x^\beta}dx = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin(x+k\pi)}{(x+k\pi)^\beta}dx = (-1)^k \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{(x+k\pi)^\beta}dx$$

이 되는 것을 알 수 있다. 이때, $\beta > 0$을 가정했으므로 $\dfrac{|\sin x|}{(x+(k+1)\pi)^\beta} < \dfrac{|\sin x|}{(x+k\pi)^\beta}$ 이고

$$\int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{(x+k\pi)^\beta}dx \le \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{((k+2)\pi)^\beta}dx = \frac{1}{((k+2)\pi)^\beta}$$

이 성립한다. 따라서 각 자연수 $k = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$\alpha_k = \left| \int_{2\pi+k\pi}^{2\pi+(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx \right|$$

라 놓으면 $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$는 양수들의 감소수열이고, $0 \le \alpha_k \le \dfrac{1}{((k+2)\pi)^\beta}$ 인데 $k \to \infty$이면 우변이 0에 수렴하므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$임을 알 수 있다. 이제 $m \in \mathbb{N}$에 대해

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \int_1^{m\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx &= \int_1^{3\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \int_{2\pi+k\pi}^{2\pi+(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx \\ &= \int_1^{3\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k\end{aligned}$$

임에 주목하면 교대급수판정법에 의해 위의 둘째 줄의 급수가 수렴하므로, 어떤 실수 L이 존재하여

$$\lim_{m\to\infty} \int_1^{m\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx = L$$

이 된다. 즉, 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N_0이 존재하여 자연수 n이 $n \ge N_0$이면

$$\left| \int_1^{n\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx - L \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

을 만족한다. 한편, 임의의 $x \in [1, \infty)$에 대해 $\left|\dfrac{\sin x}{x^\beta}\right| \le \dfrac{1}{x^\beta}$ 인데 $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^\beta} = 0$이므로 어떤 실수 R_0이 존재하여 $x \ge R_0$이면 $\left|\dfrac{\sin x}{x^\beta}\right| < \dfrac{\epsilon}{2\pi}$ 을 만족한다. 따라서 임의로 실수 A를 $A > \max\{N_0\pi, R_0 + \pi\}$ 이 되도록 잡으면 $A = b\pi + c$이면서 $b \in \mathbb{N}$, $c \in [0, \pi)$를 만족하는 b와 c가 유일하게 결정되는데, 이때 $b \ge N_0$이고 $b\pi \ge R_0$이므로

$$\begin{aligned}\left| \int_1^{A} \frac{\sin x}{x^\beta}dx - L \right| &\le \left| \int_1^{A} \frac{\sin x}{x^\beta}dx - \int_1^{b\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx \right| + \left| \int_1^{b\pi} \frac{\sin x}{x^\beta}dx - L \right| \\ &< \left| \int_{b\pi}^{A} \frac{\sin x}{x^\beta}dx \right| + \frac{\epsilon}{2} \\ &\le \int_{b\pi}^{A} \left| \frac{\sin x}{x^\beta} \right| dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \int_{b\pi}^{A} \frac{\epsilon}{2\pi}dx + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \frac{\epsilon(A - b\pi)}{2\pi} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\beta}dx = \lim_{A\to\infty} \int_1^{A} \frac{\sin x}{x^\beta}dx = L$$

이다. 즉, 주어진 특이적분은 수렴한다.

반대로 $\beta \le 0$인 경우를 생각하자. 편의상 $\gamma = -\beta$라 두면 $\gamma \ge 0$이고, 주어진 특이적분은 $\displaystyle\int_1^\infty x^\gamma \sin x dx$이 된다. 그런데 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대하여, 구간 $[m\pi, (m+1)\pi]$에서 $x \mapsto \sin x$는 항상 음이 아니거나 항상 양이 아니므로

$$\begin{aligned}\left|\int_1^{(m+1)\pi} x^\gamma \sin x dx - \int_1^{m\pi} x^\gamma \sin x dx\right| &= \left|\int_{m\pi}^{(m+1)\pi} x^\gamma \sin x dx\right| \\ &= \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} x^\gamma \left|\sin x\right| dx \\ &\ge \int_{m\pi}^{(m+1)\pi} \left|\sin x\right| dx = 1\end{aligned}$$

이다. 즉, 이 경우에는 m이 자연수일 때의 극한

$$\lim_{m\to\infty} \int_1^{m\pi} x^\gamma \sin x dx$$

조차 존재하지 않으므로 $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_1^A x^\gamma \sin x dx = \int_1^\infty x^\gamma \sin x dx = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\beta} dx$는 수렴하지 않는다.

마지막으로,

$$\begin{aligned}\beta > 0 &\iff 1 - \frac{q-1}{a} > 0 \\ &\iff q - 1 < a = -p \\ &\iff p + q < 1\end{aligned}$$

이 되는 것에 주목하자.

따라서, 결과를 정리하면, 주어진 특이적분 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x^q} dx = \frac{1}{a}$는 $p \ge 0$이고 $q - p < 1$이거나, $p < 0$이고 $p + q < 1$일 때 수렴하고, 이외의 경우 발산한다.

7.5.11. **(가)** 임의로 $b \in (0, \infty)$를 고정하고, 함수 $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$을

$$f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$$

라 정의하자. 그러면 f는 미분가능하고

$$f'(a) = a^{p-1} - b$$

이므로 $f'(a^*) = 0$을 만족하는 a^*는 유일하며 그 값은 $a^* = b^{\frac{1}{p-1}}$이다. 이때

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \iff \frac{1}{p-1} = \frac{q}{p}$$

임에 주목하면 $a^* = b^{q/p}$이라 쓸 수 있다. 한편, $x < a^*$이면 $f'(x) < 0$이고 $x > a^*$이면 $f'(x) > 0$이므로 a^*는 f가 최소가 되는 점이며, 이로부터 f의 최솟값은

$$\begin{aligned}f(a^*) &= \frac{\left(b^{q/p}\right)^p}{p} + \frac{b^q}{q} - b^{q/p+1} \\ &= b^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - b^{q(1/p+1/q)} \\ &= b^q - b^q = 0\end{aligned}$$

이라는 것을 알 수 있다. 따라서 임의의 $a > 0$에 대하여

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab = f(a) \geq 0 \iff \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

이 성립한다. 그런데 처음에 b 또한 임의로 고른 실수였으므로, 임의의 양수 a, b에 대해 부등식

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

가 성립하게 된다.

(나) 다음 보조정리가 도움이 될 것이다.

보조정리. 유계닫힌구간 $[a, b] \subset \mathbb{R}$에서 정의된 유계인 양함수 $f : [a, b] \to [0, \infty)$가 리만적분가능하고 어떤 1보다 큰 양수 p에 대하여 $\int_a^b f^p = 0$이면 $\int_a^b f = 0$이다.

증명) 만약 $a = b$이면 이 명제는 당연히 성립하므로, $a < b$라 가정한다. f가 유계이기 때문에 어떤 양수 M에 대하여 $0 \leq f < M$을 만족한다. 이때 $\hat{f} = \dfrac{f}{M}$으로 놓으면 $\hat{f}$의 함숫값이 항상 $[0, 1]$ 안에 포함된다. 또한 가정으로부터

$$0 = \frac{1}{M^p}\int_a^b f^p = \int_a^b \hat{f}^p$$

이 된다. 이제 자연수 k를 $p < 2^k$가 되도록 잡으면 $0 \leq \hat{f} \leq 1$이므로 $\hat{f}^p \geq \hat{f}^{2^k}$이 성립하기 때문에

$$0 = \int_a^b \hat{f}^p \geq \int_a^b \hat{f}^{2^k} \geq 0$$

으로부터 $\int_a^b \hat{f}^{2^k} = 0$ 또한 성립하는 것을 볼 수 있다. 그런데 코시-슈바르츠 부등식에 의해 $[a, b]$에서 리만적분가능한 임의의 양함수 g에 대하여

$$\int_a^b g^2 = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b 1^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \geq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b g\right)^2$$

이고, 이를 반복적으로 적용하면

$$\begin{aligned}
0 = \int_a^b \hat{f}^{2^k} = \int_a^b \left(\hat{f}^{2^{k-1}}\right)^2 &\geq \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \hat{f}^{2^{k-1}}\right)^2 \\
&\geq \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \hat{f}^{2^{k-2}}\right)^2\right)^2 = \frac{1}{(b-a)^3}\left(\int_a^b \hat{f}^{2^{k-2}}\right)^4 \\
&\geq \frac{1}{(b-a)^3}\left(\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b \hat{f}^{2^{k-3}}\right)^2\right)^4 = \frac{1}{(b-a)^7}\left(\int_a^b \hat{f}^{2^{k-3}}\right)^8 \\
&\cdots \\
&\geq \frac{1}{(b-a)^{2^k-1}}\left(\int_a^b \hat{f}\right)^{2^k} \geq 0
\end{aligned}$$

이 성립하는데 $b - a > 0$이므로 $\left(\int_a^b \hat{f}\right)^{2^k} = 0$이다. 이로부터

$$0 = \int_a^b \hat{f} = \frac{1}{M}\int_a^b f$$

이 되는 것 또한 알 수 있으므로 $\int_a^b f = 0$이 된다. □

이제 특이적분이 아닌 일반적인 리만적분에 대해 부등식이 성립함을 먼저 보일 것이다. 즉, I가 유계닫힌구간이고 f와 g가 각각 I 위에서 유계라고 가정하자. 만약 $\int_I f^p = 0$이면 위의 보조정리에 의해 $\int_I f = 0$인데, g가 유계이므로 $0 \le g \le M$인 양수 M을 생각했을 때

$$0 \le \int_I fg \le \int_I Mf = M \int_I f = 0$$

이 성립함으로부터 $\int_I fg = 0$임을 알 수 있다. 따라서 이 경우에는 부등식이 성립한다. 마찬가지 이유로, f와 g의 역할을 바꿈으로써 $\int_I g^q = 0$인 경우에도 주어진 부등식이 성립하는 것을 알 수 있다.

위에서의 논의로부터 $\int_I f \neq 0$이고 $\int_I g^q \neq 0$인 경우만 살펴보면 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 둘을 가정하고, 새로이 함수 $\hat{f}$와 $\hat{g}$를

$$\hat{f} = \frac{f}{\left(\int_I f^p\right)^{1/p}}, \quad \hat{g} = \frac{g}{\left(\int_I g^q\right)^{1/q}}$$

이라 정의하자. 그러면

$$\int_I \hat{f}^p = \left(\frac{1}{\left(\int_I f^p\right)^{1/p}}\right)^p \int_I f^p = 1$$

이고, 비슷하게 $\int_I \hat{g}^q = 1$인 것 또한 알 수 있다. 그런데 각 $x \in I$에 대하여, **(가)**에서 보았듯이

$$\hat{f}\hat{g} \le \frac{\hat{f}^p}{p} + \frac{\hat{g}^q}{q}$$

이므로 양변을 I 위에서 적분하면

$$\int_I \hat{f}\hat{g} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

이 된다. 따라서 $\hat{f}$와 $\hat{g}$의 정의를 생각하면

$$\int_I fg \le \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$

또한 성립한다는 것을 안다.

이제 다시 원래대로 돌아와서 I가 유계일 필요가 없고, f와 g도 꼭 유계이지는 않은 경우를 생각하자. 유계닫힌구간 $J \subset I$를 잡았을 때 f와 g가 J 위에서는 유계라 하자. 그러면 위에서 본 바에 의해

$$\int_J fg \le \left(\int_J f^p\right)^{1/p} \left(\int_J g^q\right)^{1/q}$$

이 성립한다. 양변에 $\sup\{\ \cdot\ : J \subset I$는 유계닫힌구간이고 f와 g가 J 위에서 유계$\}$를 취해주면, 임의의 두 양수 x와 y에 대해 $x < y \iff x^{1/p} < y^{1/p}$이므로 최소상계의 정의를 떠올려보면 임의의 음이 아닌 실수들의 집합 $A \subset [0, \infty)$에 대하여 $\left(\sup\{a : a \in A\}\right)^{1/p} = \sup\left\{a^{1/p} : a \in A\right\}$이 성립한다는 것을 알 수 있고, 이를 명제 1.2.8와 함께 고려하면 우변의 최소상계는 $\left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}$이 된다는 것도 알 수 있다. 한편 좌변의 최소상계는 $\int_I fg$이므로, 결국 부등식

$$\int_I fg \le \left(\int_I f^p\right)^{1/p} \left(\int_I g^q\right)^{1/q}$$

이 특이적분의 경우에도 성립하게 된다.

(다) 만약 $\int_I f^p = \infty$이면 주어진 부등식은 당연히 성립한다. 마찬가지로 $\int_I g^p = \infty$인 경우에도 주어진 부등식이 당연히 성립한다. 따라서 우변이 유한한 값인 경우만 고려하면 충분하다. 또한 $\int_I (f+g) = 0$인 경우에도 부등식은 당연히 성립하기 때문에, $\int_I (f+g) > 0$이라고 가정할 것이다.

먼저 $\int_I f^p < \infty$이고 $\int_I g^p < \infty$이면 $\int_I (f+g)^p < \infty$임을 보일 것이다. f와 g가 항상 음이 아닌 값을 가지기 때문에 임의의 $x \in I$에 대해

$$\begin{aligned}\Big(f(x)+g(x)\Big)^p &\le \Big(2\max\{f(x),g(x)\}\Big)^p \\ &= 2^p\big(\max\{f(x),g(x)\}\big)^p \\ &\le 2^p\Big(\big(f(x)\big)^p + \big(g(x)\big)^p\Big)\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\int_I (f+g)^p \le 2^p\left(\int_I f^p + \int_I g^p\right) < \infty$$

이 되는 것을 알 수 있다.

이제 주어진 부등식이 성립하는 것을 보이자. 양수 q를 처음에 주어진 것처럼 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$을 만족하도록 잡으면 $(p-1)q = p$이 성립함에 주의하자. 임의의 $x \in I$에 대해

$$\Big(f(x)+g(x)\Big)^p = f(x)\Big(f(x)+g(x)\Big)^{p-1} + g(x)\Big(f(x)+g(x)\Big)^{p-1}$$

이 성립하는데, 이때

$$\int_I \Big((f+g)^{p-1}\Big)^q = \int_I (f+g)^p < \infty$$

임에 유의하여 **(나)**에서 보인 횔더 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_I (f+g)^p &= \int_I f(f+g)^{p-1} + \int_I g(f+g)^{p-1} \\ &\le \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I \Big((f+g)^{p-1}\Big)^q\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int_I g^p\right)^{1/p} + \left(\int_I \Big((f+g)^{p-1}\Big)^q\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/q}\left(\left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}\right)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$이기 때문에

$$\left(\int_I (f+g)^p\right)^{1/p} = \left(\int_I (f+g)^p\right)^{1-1/q} \le \left(\int_I f^p\right)^{1/p} + \left(\int_I g^p\right)^{1/p}$$

이 된다. 따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(라) 공간 $\mathcal{R}^p(I)$가 벡터공간임을 보이기 위해 2장에 나온 (벡1) (벡7)이 성립하는지 확인하자. 임의의 $f, g \in \mathcal{R}^p(I)$에 대하여 $f+g \in \mathcal{R}^p(I)$인 것은 **(다)**에서 본 민코프스키 부등식으로부터 알 수 있다. 한편 $f, g, h \in \mathcal{R}^p(I)$에 대하여 $f+(g+h) = (f+g)+h$이고 $f+g = g+f$인 것은 복소수의 성질로부터 당연하기 때문에 (벡1)과 (벡4)가 성립한다. 또한 상수함수 0은 당연히 $\mathcal{R}^p(I)$의 원소이며, $f+0 = 0+f = f$이므로 (벡2)가 성립한다. 한편 $f \in \mathcal{R}^p(I)$이면 $|f| = |-f|$이므로 $-f$ 또한 $\mathcal{R}^p(I)$의 원소이며, $f+(-f) = (-f)+f = 0$이므로 (벡3)이 성립한다.

임의의 복소수 $a \in \mathbb{C}$과 $f \in \mathcal{R}^p(I)$에 대해

$$\int_I |af|^p = |a|^p \int_I |f|^p < \infty$$

이므로 $af \in \mathcal{R}^p(I)$이다. 그런데 임의의 복소수 a, b와 $f, g \in \mathcal{R}^p(I)$에 대해 $a(bf) = (ab)f = b(af)$이고 $a(f+g) = af + ag$와 $(a+b)f = af + bf$가 성립하는 것은 복소수의 성질로부터 당연하기 때문에 (벡5)와 (벡6) 또한 성립한다. 마지막으로, $1f = f$인 것은 비단 $\mathcal{R}^p(I)$의 원소 뿐 아니라 f가 복소함수이기만 하면 성립하는 것이므로 (벡7)이 성립하는 것은 당연하다. 따라서 $\mathcal{R}^p(I)$는 벡터공간이다.

이제 $f \in \mathcal{R}^p(I)$에 대하여 $f \mapsto \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$가 $\mathcal{R}^p(I)$의 노음이 되는지 확인하기 위해 2장에 나온 (노1), (노2), (노3)이 모두 성립하는지 알아보자. (노1)이 성립하는 것은

$$\left(\int_I |af|^p\right)^{1/p} = \left(|a|^p \int_I |f|^p\right)^{1/p} = |a| \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$$

으로부터 쉽게 확인할 수 있다. (노2)가 성립함은 **(다)**에서 본 민코프스키 부등식으로부터 당연하다. (노3)의 조건 중 $\left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \geq 0$인 것 또한 당연하며, f가 상수함수 0이면 $\left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} = 0$이 되는 것 또한 쉽게 알 수 있다. 하지만 $\left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} = 0$이라고 해서 반드시 $f = 0$인 것은 아닌데, 예를 들어 임의로 $x \in I$를 잡아서 한원소 집합 $\{x\}$의 특성함수 $\chi_{\{x\}}$를 생각하면 $\int_I \left|\chi_{\{x\}}\right|^p = 0$이지만 $\chi_{\{x\}} \neq 0$인 것을 알 수 있다.

그러나, 만약 $f, g \in \mathcal{R}^p(I)$이 주어졌을 때 $\int_I |f - g| = 0$이면 f와 g를 '같은' 함수로 취급한다고 하면 $\left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} = 0$인 경우 f는 0과 '같다'고 말할 수 있는데, 이는 **(나)**에서 본 보조정리를 적용하면 $\int_I |f - 0| = \int_I |f| = 0$이 성립한다는 사실을 알 수 있기 때문이다. 따라서 이렇게 차의 절댓값의 적분이 0이 될 때 두 함수가 같다고 본다면 $f \mapsto \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}$은 조건 (노3) 또한 만족하므로, 벡터공간 $\mathcal{R}^p(I)$의 노음이 된다.

제 8 장

적분으로 정의된 함수

8.4.1. 먼저 f의 도함수는, 합성함수의 미분법과 미적분학의 기본정리에 의해

$$\frac{d}{dx}f(x) = 2\left(\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}dt\right)\int_0^x e^{-t^2}dt = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

이 되는 것을 알 수 있다. 한편, 임의로 $x \in \mathbb{R}$과 x를 내점으로 갖는 유계닫힌구간 $[a,b] \subset \mathbb{R}$을 생각하고, 함수 ㄱ $: [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$을

$$ㄱ(x,t) = \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}$$

이라 정의하면 ㄱ이 연속임은 당연하고, ㄱ의 편도함수

$$D_1ㄱ(x,t) = -\frac{2x(t^2+1)e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} = -2xe^{-x^2(t^2+1)}$$

또한 $(a,b) \times [0,1]$에서 연속임을 알 수 있다. 따라서 명제 8.1.1에 의해 $g(x) = \displaystyle\int_0^1 ㄱ(x,t)dt$는 (a,b)에서 미분가능하고

$$\frac{d}{dx}g(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(t^2+1)}dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-x^2t^2}dt$$

이 되며, x가 임의의 실수였으므로 위의 식은 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립한다. 그런데 이때 $u = xt$라 놓으면 $\dfrac{du}{dt} = x$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x^2t^2}dt = \int_0^x e^{-u^2}du$$

이 된다는 것에 주목하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(f(x)+g(x)\Big) &= \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)\\ &= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-x^2t^2}dt\\ &= 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du\\ &= 0\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 $f+g$는 상수함수이며, 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대해

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= f(0)+g(0) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt \\ &= \Big[\tan^{-1}(t)\Big]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

이 된다.

한편, 임의의 실수 $A \in \mathbb{R}$과 $t \in [0,1]$에 대하여 부등식

$$0 \le \frac{e^{-A^2(t^2+1)}}{t^2+1} \le e^{-A^2}$$

이 성립하기 때문에, 각 변을 0에서 1까지 t에 대해 적분하면

$$0 \le \int_0^1 \frac{e^{-A^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt \le e^{-A^2}$$

이 되는 것 또한 알 수 있다. 그런데 $A \to \infty$일 때 위 식의 우변 e^{-A^2}은 0에 수렴하므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{A\to\infty} g(A) = \lim_{A\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-A^2(t^2+1)}}{t^2+1}dt = 0$$

임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{A\to\infty}\left(\int_0^A e^{-t^2}dt\right)^2 = \lim_{A\to\infty} f(A) = \lim_{A\to\infty}\Big(\frac{\pi}{4}-g(A)\Big) = \frac{\pi}{4}$$

이다. 그런데, 임의의 $A \in \mathbb{R}$에 대해 $\displaystyle\int_0^A e^{-t^2}dt \ge 0$이기 때문에

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

이 된다.

8.4.2. 임의로 $x \in \mathbb{R}$을 고정하고, x를 내점으로 갖는 어떤 유계닫힌구간 $[a,b] \subset \mathbb{R}$을 생각하자. 함수 $g : [a,b]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$을

$$g(x,t) = e^{-t^2}\cos(2tx)$$

이라 놓으면 g는 연속이며, 편도함수 $D_1 g(x,t) = -2te^{-t^2}\sin(2tx)$ 또한 $(a,b)\times[0,\infty)$ 위에서 연속이다. 또한, 임의의 $x_0 \in [a,b]$에 대하여 $|g(x_0,t)| = \left|e^{-t^2}\cos(2tx)\right| \le e^{-t^2}$이고 연습문제 8.4.1에서 $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$임을 확인했으므로, 명제 7.3.2에 의해 $\displaystyle\int_0^\infty g(x_0,t)dt$이 수렴한다. 게다가 $t \ge 0$이면 부등식 $|D_1 g(x,t)| = \left|-2te^{-t^2}\sin(2tx)\right| \le 2te^{-t^2}$이 성립하고

$$\int_0^\infty 2te^{-t^2} = \Big[-e^{-t^2}\Big]_0^\infty = 1$$

이므로 g에 정리 8.1.3을 적용할 수 있다. 즉, g의 특이적분으로써 주어진 f는 미분가능함수이며

$$\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^\infty -2te^{-t^2}\sin(2tx)dt$$

으로 주어지는데, 여기에서 x를 처음에 임의의 실수로 잡았기 때문에 위 식은 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립한다. 이때 $-2te^{-t^2}$를 적분하고 $\sin(2tx)$를 미분하여 부분적분하면

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}f(x) &= \int_0^\infty -2te^{-t^2}\sin(2tx)dt \\ &= \left[e^{-t^2}\sin(2tx)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2xe^{-t^2}\cos(2tx)dt \\ &= 0 - 2x\int_0^\infty e^{-t^2}\cos(2tx)dt \\ &= -2xf(x)\end{aligned}$$

임을 볼 수 있다. 따라서 관계식 $f'(x) + 2xf(x) = 0$이 각 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립한다.

위에서 얻은 관계식으로부터 f를 알아내기 위해

$$\begin{aligned}0 &= e^{x^2}\left(f'(x) + 2xf(x)\right) \\ &= \frac{d}{dx}e^{x^2}f(x)\end{aligned}$$

임에 주목하자. 이로부터 어떤 상수 $C \in \mathbb{R}$에 대해 $f(x) = Ce^{-x^2}$임을 알 수 있는데, $x = 0$일 때를 살펴보면

$$C = f(0) = \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

인 것을 알 수 있다. 따라서 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}e^{-x^2}$이다.

8.4.3. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{-itx}dt$$

으로 정의하자. 그러면 $u = -t$라 두었을 때 $\frac{du}{dt} = -1$이므로

$$\begin{aligned}f(-x) &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{itx}dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2/2}e^{-iux}du = f(x)\end{aligned}$$

이 성립하게 된다. 따라서 위에서와 같이 u를 두면

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{-itx}dt + \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{itx}dt\right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}\,\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2}dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}\cos(tx)dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-t^2/2}\cos(tx)dt + \int_0^\infty e^{-t^2/2}\cos(tx)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-u^2/2}\cos(-ux)du + \int_0^\infty e^{-t^2/2}\cos(tx)dt \\ &= 2\int_0^\infty e^{-t^2/2}\cos(tx)dt\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이때 $v = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ 라 두면 $\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로 연습문제 8.4.2의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned} f\left(\sqrt{2}x\right) &= 2\int_0^\infty e^{-(t/\sqrt{2})^2}\cos\left(2\cdot\frac{t}{\sqrt{2}}\cdot x\right)dt \\ &= 2\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-v^2}\cos(2vx)\,dv \\ &= \sqrt{2\pi}e^{-x^2} \end{aligned}$$

이고, 여기에서 x 대신 $x/\sqrt{2}$를 대입하면 $f(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$ 임을 알 수 있다. 따라서 등식

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2}e^{-itx}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x) = e^{-x^2/2}$$

이 성립함을 알 수 있다.

8.4.4. (가) 실수 $x \in \mathbb{R}$을 고정하고, x를 내점으로 갖는 어떤 유계닫힌집합 $[a,b]$를 생각하자. 함수 $ㄱ_1 : [a,b]\times[1,\infty) \to \mathbb{R}$를

$$ㄱ_1(x,t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$$

라 정의하면 ㄱ 는 연속임이 당연하다. 또한 편도함수 $D_1ㄱ_1$은

$$D_1ㄱ_1(x,t) = \frac{t\cos(tx)}{t(1+t^2)} = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

이 됨을 쉽게 알 수 있다. 한편, 임의의 0이 아닌 실수 $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$에 대하여, 평균값 정리에 의해 0과 y 사이에 또다른 실수 $c \in \mathbb{R}$이 존재하여

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| = \left|\frac{\sin y - \sin 0}{y-0}\right| = |\cos c| \le 1$$

이 되는 것에 주목하면, 임의의 $t \in [1,\infty)$에 대해 $x \neq 0$이면

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| = \left|\frac{\sin(tx)}{tx}\right|\cdot\left|\frac{x}{1+t^2}\right| \le \frac{|x|}{1+t^2}$$

이 성립하는 것을 알 수 있다. 따라서 어떤 0이 아닌 실수 $x_0 \in [a,b]$를 임의로 잡았을 때

$$\int_1^\infty \frac{|x_0|}{1+t^2}dt = \Big[|x_0|\tan^{-1}t\Big]_{t=1}^{t=\infty} = |x_0|\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) < \infty$$

이므로, 명제 7.3.2에 의해 특이적분 $\displaystyle\int_1^\infty ㄱ_1(x_0,t)dt$이 수렴한다. 마지막으로, 각 $(x,t) \in (a,b)\times[1,\infty)$에 대하여 $|D_1ㄱ_1(x,t)| = \left|\dfrac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \le \dfrac{1}{1+t^2}$이고 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} < \infty$이기 때문에 $ㄱ_1$에 정리 8.1.3을 적용할 수 있다. 즉, $g_1(x) = \displaystyle\int_1^\infty ㄱ_1(x,t)dt$이라 두었을 때 g_1은 미분가능하며

$$\frac{d}{dx}g_1(x) = \int_1^\infty D_1ㄱ_1(x,t)dt = \int_1^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$$

으로 주어진다. 그런데 함수 $ㄱ_2 : [a,b]\times(0,1] \to \mathbb{R}$을

$$ㄱ_2(x,t) = \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$$

로 정의하면, 지금까지의 논의를 정의역만 적절히 바꾸어 $ㄱ_2$에도 그대로 적용할 수 있다. 다시 말해, $g_2(x) = \int_0^1 ㄱ_2(x,t)dt$이라 두었을 때 g_2는 미분가능하며

$$\frac{d}{dx}g_2(x) = \int_0^1 D_1 ㄱ_2(x,t)dt = \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$$

으로 주어진다. 그런데

$$g(x) = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt = \int_0^1 \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} + \int_1^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} = g_1(x) + g_2(x)$$

이므로

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}g(x) &= \frac{d}{dx}g_1(x) + \frac{d}{dx}g_2(x)\\ &= \int_0^1 \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt + \int_1^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt\\ &= \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt\\ &= f(x)\end{aligned}$$

이 성립한다.

(나) 임의로 유계닫힌구간 $[a,b] \subset \mathbb{R}$을 생각하자. 연속함수 $ㄴ : [a,b] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$를

$$ㄴ(x,t) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

라 정의하자. 그러면 각 $(x,t) \in [a,b] \times [0,\infty)$에 대하여 $\left|\frac{\cos(tx)}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2}$이고 $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$이므로 정리 8.1.2에 의해

$$f(x) = \int_0^\infty ㄴ(x,t)dt = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$$

는 $[a,b]$에서 연속이다. 그런데 $[a,b]$는 $\mathbb{R}$에서 임의로 잡은 유계닫힌구간이었기 때문에, f는 $\mathbb{R}$ 전체에서 연속이다.

(다) 임의로 $x \in (0,\infty)$를 잡고, x를 내점으로 가지면서 $(0,\infty)$ 안에 포함되는 유계닫힌구간 $[a,b]$를 생각하자. 함수 f가

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$$

으로 정의되는 것을 상기하자. 위의 적분에 $\cos(tx)$를 적분하고 $\frac{1}{1+t^2}$를 미분하는 부분적분을 하면

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt\\ &= \left[\frac{\sin(tx)}{x(1+t^2)}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \int_0^\infty \frac{2t\sin(tx)}{x(1+t^2)^2}dt\\ &= \int_0^\infty \frac{2t\sin(tx)}{x(1+t^2)^2}dt\end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있다. 이제 함수 $ㄷ : [a,b] \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$를

$$ㄷ(x,t) = \frac{2t\sin(tx)}{x(1+t^2)^2}$$

이라 정의하면 ㄷ가 연속이면서 그 편도함수

$$D_1ㄷ(x,t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left(\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}\right)$$

이 $(a,b)\times[0,\infty)$에서 연속인 것을 쉽게 알 수 있다. 한편, 임의로 $x_0\in[a,b]$를 잡았을 때

$$|ㄷ(x_0,t)| = \left|\frac{2t\sin(tx_0)}{x_0(1+t^2)^2}\right| \le \frac{2t}{a(1+t^2)^2}$$

인데 a는 어떤 상수이고 $\int_0^\infty \frac{2t}{(1+t^2)^2} = \left[-\frac{1}{1+t^2}\right]_0^\infty = 1$이므로 명제 7.3.2에 의해 특이적분 $\int_0^\infty ㄷ(x_0,t)dt$이 수렴한다. 또한 각 $(x,t)\in(a,b)\times[0,\infty)$에 대해

$$\begin{aligned}
|D_1ㄷ(x,t)| &= \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left|\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}\right| \\
&\le \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left(\left|\frac{t\cos(tx)}{x}\right|+\left|\frac{\sin(tx)}{x^2}\right|\right) \\
&\le \frac{2t}{(1+t^2)^2}\left(\frac{t}{a}+\frac{1}{a^2}\right) \\
&< \frac{2}{a(1+t^2)}+\frac{2t}{a^2(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

인데 $\int_0^\infty \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt$이 수렴하는 것은 이미 앞에서 보았고, $\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} < \infty$이므로 ㄷ에 정리 8.1.3을 적용할 수 있다. 즉, $f(x) = \int_0^\infty ㄷ(x,t)dt$이므로

$$\frac{d}{dx}f(x) = \int_0^\infty D_1ㄷ(x,t)dt = \int_0^\infty \frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}dt$$

이 성립한다. 이제 위의 적분에 $\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}$를 미분하고 $\frac{2t}{(1+t^2)^2}$를 적분하는 부분적분을 하면, $\int \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{1}{1+t^2}$이고

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}\right) = \frac{x\cos(tx)-tx^2\sin(tx)-x\cos(tx)}{x^2} = t\sin(tx)$$

이 되는 것에 주목하면

$$\int_0^\infty \frac{2t}{(1+t^2)^2}\cdot\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2}dt = \left[-\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2(1+t^2)}\right]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}dt$$

이다. 그런데 $\left|-\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{(1+t^2)}\right| \le \left|\frac{tx\cos(tx)}{(1+t^2)}\right| + \left|\frac{\sin(tx)}{(1+t^2)}\right| \le |x|\left|\frac{t}{1+t^2}\right| + \left|\frac{1}{1+t^2}\right|$이 성립하고 $t\to\infty$일 때 $\frac{t}{1+t^2}\to 0$, $\frac{1}{1+t^2}\to 0$이므로 $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{tx\cos(tx)-\sin(tx)}{x^2(1+t^2)}\right) = 0$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= -\int_0^\infty \frac{t\sin(tx)}{1+t^2}dt \\
&= -\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt - \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}dt \\
&= g(x) - \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}dt
\end{aligned}$$

이 된다. 이때 $s = tx$이라 놓으면 $\dfrac{ds}{dt} = x$이므로

$$\int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(tx)}{tx}\cdot xdt = \int_0^\infty \frac{\sin s}{s}ds = \frac{\pi}{2}$$

이 되는 것에 주목하자. 이제 **(가)**에서 본 관계식 $f = g'$을 이용하면 등식

$$g''(x) = \frac{d}{dx}f(x) = g(x) - \frac{\pi}{2}$$

을 얻는다. 그런데 처음에 x를 임의의 양의 실수로 잡았기 때문에, f는 $(0,\infty)$에서 미분가능하고 위의 등식은 $x > 0$이면 성립한다.

(라) 먼저

$$f(-x) = \int_0^\infty \frac{\cos(-tx)}{(t^2+1)}dt = \int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(t^2+1)}dt = f(x)$$

이고 $f(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$이므로 $x > 0$일 때 $f(x)$의 값만 알면 f를 알아낼 수 있다는 것에 주목하자. 편의상 $y(x) = g(x) - \dfrac{\pi}{2}$라 두면 $y - g$이 상수이므로 $y'(x) = g'(x) = f$이고 $x > 0$일 때 $y''(x) = g''(x)$이므로 등식 $y''(x) = u(x)$이 성립함을 **(가)**와 **(다)**로부터 알 수 있다.

이제 $x \in (0,\infty)$일 때 등식 $y''(x) = y(x)$이 성립함으로부터 $x > 0$의 범위에서 $y(x)$을 구해보자. 함수 $u(x)$를 $u(x) = y(x) + y'(x)$이라 두면 $u'(x) = y'(x) + y''(x)$이기 때문에

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{-x}u(x)\Big) = e^{-x}\Big(u'(x) - u(x)\Big) = e^{-x}\Big(y''(x) - y(x)\Big) = 0$$

이다. 이로부터 어떤 상수 C_1에 대해 $e^{-x}u(x) = C_1$, 즉 $u(x) = C_1e^x$임을 알 수 있다. 그런데 이는 곧

$$\left(y(x) - \frac{C_1}{2}e^x\right) + \left(y'(x) - \frac{C_1}{2}e^x\right) = 0$$

임을 뜻한다. 따라서 함수 $z(x)$를 $z(x) = y(x) - \dfrac{C_1}{2}e^x$이라 두면 $z(x) + z'(x) = 0$이므로,

$$\frac{d}{dx}\Big(e^xz(x)\Big) = e^x\Big(z'(x) + z(x)\Big) = 0$$

이 성립함으로부터 어떤 상수 C_2에 대하여 $e^xz(x) = C_2$임을 알 수 있고, 더 나아가

$$y(x) = z(x) + \frac{C_1}{2}e^x = C_2e^{-x} + \frac{C_1}{2}e^x$$

이 되는 것을 알 수 있다. 그런데 $y(x)$를 $y(x) = g(x) - \dfrac{\pi}{2}$으로 정의했음을 상기하면, $g(x)$는 $x > 0$의 범위에서 어떤 두 상수 C_1, C_2에 대하여 $g(x) = \dfrac{C_1}{2}e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{\pi}{2}$이라 쓸 수 있음을 알 수 있다. 이때, $x > 0$으로 x의 범위를 제한하면

$$f(x) = g'(x) = \frac{C_1}{2}e^x - C_2e^{-x}$$

이 성립함에 주목하자.

앞의 **(가)**와 **(나)**에서 g와 그 도함수 f가 $\mathbb{R}$에서 연속임을 보았다. 따라서 두 등식

$$0 = g(0) = \lim_{x\to 0+} g(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{C_1}{2}e^x + C_2e^{-x} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{C_1}{2} + C_2 + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = f(0) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{C_1}{2}e^x - C_2e^{-x}\right) = \frac{C_1}{2} - C_2$$

이 성립한다. 두 등식을 연립하여 C_1과 C_2에 대해 풀면 $C_1 = 0, C_2 = -\frac{\pi}{2}$을 얻는다. 따라서 $x > 0$일 때 $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-x}$이다. 그런데 $f(-x) = f(x)$이고 $f(0) = \frac{\pi}{2}$임을 앞에서 보았기 때문에, 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $f(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}$이 된다.

8.4.5. 다음 보조정리가 이 문제를 푸는 데 도움이 될 것이다.

보조정리. 임의의 양수 $\alpha > 0$와 음이 아닌 정수 β에 대하여 $\lim_{t\to 0+} t^\alpha (\log t)^\beta = 0$이다.

증명) $x = -\log t$라 두면 $t = e^{-x}$이고, $t \to 0+$일 때 $x \to \infty$이므로 주어진 극한은

$$\lim_{t\to 0+} t^\alpha \log t = \lim_{x\to\infty} (-x)^\beta (e^{-x})^\alpha = \lim_{x\to\infty} (-1)^\beta \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}}$$

이 된다. 그런데 임의의 $y \in \mathbb{R}$에 대해

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$$

이고, $y > 0$이면 우변의 급수는 모든 항이 양인 급수가 되므로 e^y는 우변의 급수에서 $k = \beta+1$일 때의 항보다 크다. 다시 말해, $y > 0$이면 $e^y \geq \frac{y^{\beta+1}}{(\beta+1)!}$이므로 부등식 $0 \leq \frac{x}{e^{\alpha x}} \leq \frac{x^\beta(\beta+1)!}{(\alpha x)^{\beta+1}} = \frac{(\beta+1)!}{\alpha^{\beta+1}x}$이 성립한다. 그런데 $\lim_{x\to\infty} \frac{(\beta+1)!}{\alpha^{\beta+1}x} = 0$이기 때문에 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to\infty} \frac{x^\beta}{e^{\alpha x}} = 0$이다. 이로부터 $\lim_{t\to 0+} t^\alpha (\log t)^\beta = 0$인 것 또한 알 수 있다. □

문제에서 주어진 함수에서 일반화된 경우를 살펴보자. 어떤 주어진 음이 아닌 정수 m에 대하여, $\phi(x) = \int_0^1 t^x (\log t)^m dt$라 하고 $\phi'(x)$를 구할 것이다. 그러면 문제에서 주어진 함수는 $m = 0$인 경우인 것에 유의하자. 만약 $x \leq -1$이라면 $0 < t \leq 1/e$일 때 $|t^x(\log t)^m| \geq t^x$인데 특이적분 $\int_0^{1/e} t^x dt$이 수렴하지 않기 때문에 특이적분 $\int_0^1 t^x (\log t)^m dt$ 또한 수렴하지 않는 것을 쉽게 알 수 있다. 따라서 적분으로 정의된 함수 $\phi(x)$는 그 정의에 사용된 특이적분이 수렴할 수 있도록 정의역이 $(-1, \infty)$인 것으로 본다.

임의로 $x \in (-1, \infty)$를 잡고, 유계닫힌구간 $[a, b]$를 $(-1, \infty)$에 포함되면서 내점으로 x를 갖도록 잡자. 함수 $f : [a, b] \times (0, 1]$을

$$f(x, t) = t^x (\log t)^m = e^{x \log t} (\log t)^m$$

으로 정의하면 f는 연속이고 편도함수 $D_1 f(x, t) = t^x (\log t)^{m+1}$가 $(a, b) \times (0, 1]$에서 연속임을 알 수 있다. 한편 임의로 $x_0 \in (a, b)$를 잡았을 때 $x_0 > -1$이므로 $\frac{x_0+1}{2} > 0$이다. 따라서 앞의 보조정리에 의해 $\lim_{x\to 0} \frac{(\log t)^m}{t^{(x_0+1)/2}} = 0$인데, 연습문제 7.5.10의 (나)에서 살펴본 보조정리 2에서와 같은 방식으로 $t \mapsto \frac{(\log t)^m}{t^{(x_0+1)/2}}$이 $(0, 1]$에서 유계임을 보일 수 있다. 즉 어떤 양수 M이 존재하여

$$|t^{x_0}(\log t)^m| = \left|t^{(x_0+1)/2}(\log t)^m\right| t^{(x_0-1)/2} \leq M t^{(x_0-1)/2}$$

을 만족하는데, 이때 $\frac{x_0-1}{2} > -1$이므로 $\int_0^1 t^{(x_0-1)/2} dt$가 수렴한다. 따라서 명제 7.3.2에 의해 적분 $\int_0^1 t^{x_0}(\log t)^m dt$도 수렴한다. 그런데 지금까지의 논의를 그대로 사용하여 $\int_0^1 t^a (\log t)^{m+1} dt$ 또한 수렴함을 보일 수 있는데, 각 $(x, t) \in (a, b) \times (0, 1]$에 대하여 $|D_1 f(x, t)| = \left|t^x (\log t)^{m+1}\right| \leq -t^a (\log t)^{m+1}$임에 주목하면 f에 정리 8.1.3을 적용할 수 있음을 알게 된다. 즉 ϕ는 미분가능하고

$$\phi'(x) = \int_0^1 D_1 f(x, t) dt = \int_0^1 t^x (\log t)^{m+1} dt$$

가 된다. 그런데 $[a,b]$가 $(-1,\infty)$에서 잡은 임의의 유계닫힌구간이었기 때문에, ϕ의 정의역을 $(-1,\infty)$이라고 하여도 ϕ는 미분가능하고 그 도함수가 위와 같이 주어진다. 특히, 문제에서 주어진 함수는 $m=0$인 경우의 함수이므로 그 도함수는 $\int_0^1 t^x \log t dt$가 된다.

그런데 각 $x > -1$에 대하여 $\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$인 것은 쉽게 알 수 있다. 이제 각 자연수 $m = 1,2,\cdots$에 대하여 $\int_0^1 t^x(\log t)^m dt = (-1)^m \frac{m!}{(x+1)^{m+1}}$임을 m에 대한 수학적 귀납법으로 보이자. $m=1$인 경우는, 위에서 살펴본 바에 의해

$$-\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^1 t^x dt\right) = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}t^x\right) dt = \int_0^1 t^x \log t dt$$

임을 알 수 있다. 이제, 어떤 자연수 k에 대해 $m=k$일 때 주어진 식이 성립한다고 가정하자. 그러면 역시 위에서 살펴본 바에 의해

$$\begin{aligned}
(-1)^{m+1}\frac{(m+1)!}{(x+1)^{m+2}} &= \frac{d}{dx}\left((-1)^m \frac{m!}{(x+1)^{m+1}}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\int_0^1 t^x (\log t)^m dt\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\Big(t^x(\log t)^m\Big) dt \\
&= \int_0^1 t^x (\log t)^{m+1} dt
\end{aligned}$$

이므로 $m = k+1$일 때도 주어진 식이 성립한다. 따라서 수학적 귀납법에 의해 주어진 식이 모든 $m \in \mathbb{N}$에 대해 성립한다. 이제 x의 자리에 각 자연수 $n = 1,2,\cdots$를 대입하면 등식

$$\int_0^1 t^n (\log t)^m dt = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}$$

이 각 $n, m = 1,2,\cdots$에 대해 성립하는 것을 알 수 있다.

8.4.6. 먼저 $n=0$인 경우 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$이고 우변에 $n=0$을 대입하면 $\sqrt{\pi}$가 나오므로 성립한다. 따라서 n이 자연수인 경우만 생각하면 된다. 8.2장의 수식 (18)에 $x = 2n$을 대입하면

$$\Gamma(2n) = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

을 얻는데, 자연수 m에 대해 $\Gamma(m) = (m-1)!$임을 이용하면 위의 식은

$$(2n-1)! = \frac{4^n (n-1)!}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

이라고 쓸 수 있다. 양변에 $2n$을 곱해주고 정리하면

$$(2n)! = \frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

이 되므로

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = (2n)!\frac{\sqrt{\pi}}{n!4^n}$$

임을 알 수 있다.

8.4.7. 감마함수의 정의를 상기하면 다음 등식

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

을 얻는다. 위의 식의 우변에서 첫 번째 항을

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k}{k!}dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}dt$$

와 같이 나타낼 수 있는데, 이때 $[0,1]$에서 정의된 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 음이 아닌 정수 $n = 0,1,2,\cdots$에 대해

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}$$

이라 놓자. 그러면 각 음이 아닌 정수 $k = 0,1,2,\cdots$와 $t \in [0,1]$에 대해 $\left|(-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}\right| \le \frac{1}{k!}$이고 $\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} = e < \infty$이므로 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$는 $[0,1]$ 위에서 $f(t) = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}$으로 정의된 함수 f로 점별수렴한다. 그런데 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N을 $\sum_{k=N}^\infty \frac{1}{k!} < \epsilon$가 되도록 잡을 수 있는데, 그러면 N보다 큰 두 자연수 n, m을 임의로 잡았을 때 일반성을 잃지 않고 $n < m$이라 하면

$$\begin{aligned}
\|f_m - f_n\|_\infty &= \left\| \sum_{k=n+1}^m (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!} \right\|_\infty \\
&\le \sum_{k=n+1}^m \left\| (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!} \right\|_\infty \\
&= \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \\
&\le \sum_{k=N}^\infty \frac{1}{k!} < \epsilon
\end{aligned}$$

이므로 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 고른코시수열이다. 따라서 정리 6.1.2에 의해 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 f로 고르게 수렴한다. 이제 명제 6.2.2를 적용하면

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k \frac{t^{x+k-1}}{k!}dt \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{x+k} \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{x+k}
\end{aligned}$$

이 성립하는 것을 알 수 있다.

한편, 연습문제 7.5.10의 **(마)**의 풀이과정 도중 특이적분 $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$이 모든 실수 x에 대해 수렴하는 것을 보았다. 따라서 함수 $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 각 $x \in \mathbb{R}$에 대해 $\Delta(x) = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$이라 정의할 수 있다. 이제 임의로 $x \in \mathbb{R}$을 잡고, x를 내점으로 갖는 유계닫힌구간 $[a,b]$를 생각하자. 각 음이 아닌 정수 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대하여 함수 $\delta_n : [a,b] \times [1,\infty) \to \mathbb{R}$를

$$\delta_n(x,t) = t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n$$

으로 정의하면 δ_n은 연속이면서 그 편도함수 $D_1\delta_n(x,t) = t^{x-1}e^{-t}(\log t)^{n+1}$ 또한 $(a,b) \times [1,\infty)$에서 연속임을 알 수 있다. 그런데 연습문제 7.5.10의 **(나)**에서 살펴본 보조정리 1에 의해 임의의 $\alpha \in \mathbb{R}$과 $\beta > 0$에 대하여 $\lim_{t\to\infty} \frac{(\log t)^\alpha}{t^\beta} = 0$이고, $t \mapsto e^t$의 치환을 하면 $\lim_{t\to\infty} \frac{t^\alpha}{e^{\beta t}} = 0$ 또한 되는 것을 알 수 있다. 이와 함께 연습문제 7.5.10의 **(나)**에서 살펴본 보조정리 2를 이용하면 어떤 두 양수 M_1과 M_2에 대하여

$$\left|t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n\right| \le \left|t^{b-1}e^{-t}(\log t)^n\right| = e^{-t/2} \left|\frac{t^b}{e^{t/2}}\right| \left|\frac{(\log t)^n}{t}\right| \le e^{-t/2}M_1M_2$$

임을 알 수 있다. 이때 M_1과 M_2를 x의 값에 관계 없이 일정한 상수로 잡을 수 있음에 유의하자. 그런데 $\int_1^\infty e^{-t/2}dt = 2e^{-1/2} < \infty$이므로 명제 7.3.2에 의해 특이적분 $\int_1^\infty \left|t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n\right| dt$이 수렴하고, 이로부터 δ_n에 정리 8.1.3을 적용할 수 있다는 것을 알 수 있다. 즉

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt &= \frac{d}{dx}\int_1^\infty \delta_n(x,t)dt \\ &= \int_1^\infty D_1\delta_n(x,t)dt \\ &= \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^{n+1}dt\end{aligned}$$

인데, $[a,b]$가 임의로 잡은 $\mathbb{R}$의 유계닫힌구간이었기 때문에 위의 관계식은 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립한다. 따라서 $\Delta(x) = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$는 C^∞-함수이고 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$\Delta^{(n)}(x) = \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt$$

이 된다. 이제 임의로 $x \in \mathbb{R}$을 잡고, 0과 x 사이의 구간을 J라 하자. 그러면 위에서 살펴본 바에 의해 어떤 양수 M이 존재하여 임의의 자연수 n에 대해

$$\left|\Delta^{(n)}(x)\right| = \left|\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n dt\right| \le \int_1^\infty \left|t^{x-1}e^{-t}(\log t)^n\right| dt \le \int_1^\infty Me^{-t/2}dt = 2Me^{-1/2}$$

이므로, 명제 4.3.3에 의해 테일러급수 $\sum_{n=0}^\infty \frac{\Delta^{(n)}(0)}{n!}x^n$는 $\Delta(x)$로 수렴한다. 그런데 x를 임의로 $\mathbb{R}$에서 고정했기 때문에, 각 $x \in \mathbb{R}$에 대해

$$\begin{aligned}\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \Delta(x) &= \sum_{n=0}^\infty \frac{\Delta^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n!}\int_1^\infty t^{-1}e^{-t}(\log t)^n\right)x^n\end{aligned}$$

이 성립한다.

따라서 결과를 종합하면

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x} + \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{1}{n!}\int_1^\infty t^{-1}e^{-t}(\log t)^n\right)x^n\end{aligned}$$

이 각 $x \in \mathbb{R}$에 대해 성립함을 알 수 있다.

8.4.8. 정의에 의하여 $(f * k_r)(x) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$이 됨을 상기하면 임의의 $h \neq 0$에 대해

$$\begin{aligned}(f*k_r)(x+h) - (f*k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x-r+h}^{x+r+h} f(t)dt - \int_{x-r}^{x+r} f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x+r}^{x+r+h} f(t)dt - \int_{x-r}^{x-r+h} f(t)dt\right)\end{aligned}$$

이 성립한다. 그런데 f가 C^k-함수이므로 연속이고, 적분의 평균값정리(따름정리 5.3.2)를 사용하면 어떤 $x+r$와 $x+r+h$ 사이의 y, $x-r$와 $x-r+h$ 사이의 z가 존재하여 $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x+r}^{x+r+h} f(t)dt = f(y)$ 와 $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x-r}^{x-r+h} f(t)dt = f(z)$를 만족한다. 그런데 $h \to 0$이면 $y \to x+r$이고 $z \to x-r$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{(f*k_r)(x+h)-(f*k_r)(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2r}\left(\frac{1}{h}\int_{x+r}^{x+r+h} f(t)dt - \frac{1}{h}\int_{x-r}^{x-r+h} f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2r}\lim_{h\to 0}\Big(f(y)-f(z)\Big) \\ &= \frac{1}{2r}\Big(f(x+r)-f(x-r)\Big)\end{aligned}$$

이 된다. 이때, f가 C^k-함수이기 때문에 $f*k_r$은 미분하여 C^k-함수가 되는 함수인 것을 알 수 있다. 따라서 $f*k_r$은 C^{k+1}-함수이다.

8.4.9. 주어진 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{이외의 경우}\end{cases}$$

와 같이 나타낼 수 있음에 유의하자. 정의에 의해 $(f*k_r)(x) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$이 되는 것에 주의하며, 구간을 나누어 x의 값에 따라 $(f*k_r)(x)$의 값이 어떻게 되는지 살펴보자.

만약 $x < -1-r$이거나 $x > 1+r$이면 구간 $[x-r, x+r]$에서 f의 값이 항상 0이기 때문에 $(f*k_r)(x) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = 0$이다. 반대로 $-1+r \le x \le 1-r$이면 구간 $[x-r, x+r]$에서 f의 값이 항상 1이기 때문에 $(f*k_r)(x) = \dfrac{1}{2r}\displaystyle\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = \dfrac{1}{2r}\cdot 2r = 1$이다.

한편 $1-r < x \le 1+r$인 경우, 문제에서 주어진 것처럼 $r \le 1$이면 $-1 < x-r \le 1 < x+r$이므로

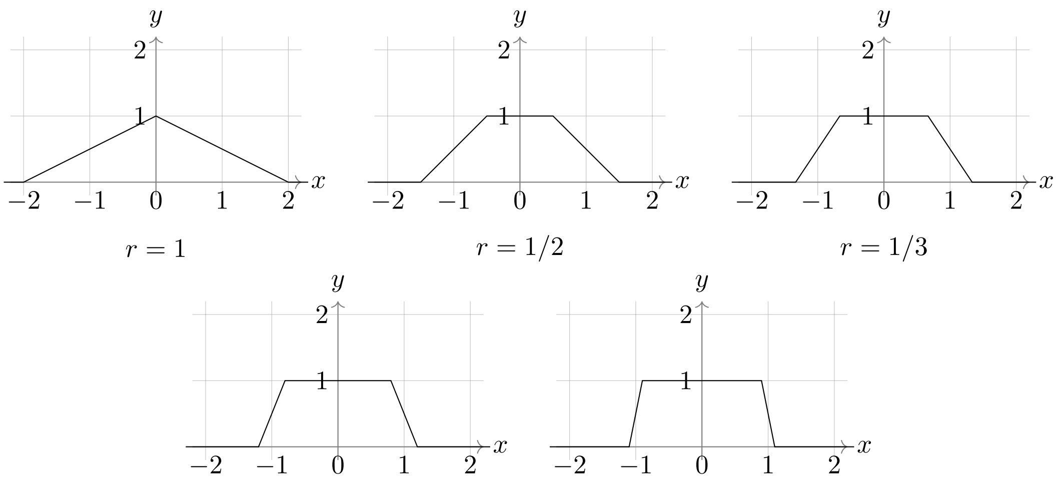
$$\begin{aligned}(f*k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x-r}^{1} 1\,dt + \int_1^{x+r} 0\,dt\right) \\ &= \frac{1}{2r}(1-x+r)\end{aligned}$$

이 된다. 반대로 $-1-r \le x < -1+r$인 경우, 역시 $r \le 1$이라면 $x-r < -1 \le x+r < 1$이므로

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x-r}^{-1} 0\ dt + \int_{-1}^{x+r} 1\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2r}(1+x+r)\end{aligned}$$

이 된다.

따라서 지금까지의 논의를 이용하여 $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$에 대하여 $x \mapsto (f * k_r)(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같이 된다.



$r = 1$ $r = 1/2$ $r = 1/3$

$r = 1/5$ $r = 1/10$

8.4.10. 주어진 함수 f를

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \le x \le 1 \\ 1+x & -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

와 같이 나타낼 수 있음에 유의하자. 정의에 의해 $(f*k_r)(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt$이 되는 것에 주의하며, 구간을 나누어 x의 값에 따라 $(f * k_r)(x)$의 값이 어떻게 되는지 살펴보자.

문제에서 주어진 것처럼 $0 \le r \le 1$이라 하고, 먼저 $x > 0$인 경우를 생각하자. 만약 $x > 1+r$이면 구간 $[x-r, x+r]$에서 f의 값이 항상 0이기 때문에 $(f * k_r)(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt = 0$이다.

$r = 1$이라면 $1 < x \le 2$일 때 $0 < x-1 \le 1 < x+1$이기 때문에 이 경우에는

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{x-1}^{1} (1-t)dt + \int_{1}^{x+1} 0\ dt\right) \\ &= \frac{1}{4}(2-x)^2\end{aligned}$$

이 된다. 한편 $0 \le x \le 1$이면 $x-1 \le 0 < 1 \le x+1$이기 때문에 이 경우에는

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{x-1}^{0}(1+t)dt + \int_0^1 (1-t)dt + \int_1^{x+1} 0\ dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

이제 $r \le \frac{1}{2}$인 경우들을 생각하자. 이때 $r \le 1-r$이 됨에 주목하자. 만약 $1-r < x \le 1+r$이면 $0 < x-r \le 1 < x+r$이므로 이 경우에는

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x-r}^{1}(1-t)dt + \int_1^{x+r} 0\ dt\right) \\ &= \frac{1}{4r}(1-x+r)^2\end{aligned}$$

이 된다. 한편 $r \le x \le 1-r$인 경우 $0 \le x-r < x+r \le 1$이므로

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r}(1-t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\cdot 2r(1-x) = 1-x\end{aligned}$$

이다. 마지막으로 $0 \le x < r$이면 $-1 < x-r < 0 < x+r < 1$이기 때문에

$$\begin{aligned}(f * k_r)(x) &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\left(\int_{x-r}^{0}(1+t)dt + \int_0^{x+r}(1-t)dt\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(\left(r-x-\frac{1}{2}(r-x)^2\right) + \left(r+x-\frac{1}{2}(r+x)^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2r}\left(-r^2+2r-x^2\right)\end{aligned}$$

가 되는 것을 알 수 있다.

이제 $x < 0$인 경우를 고려해야 하는데, 임의의 $t \in \mathbb{R}$에 대해 $f(t) = f(-t)$임에 주목하면, $u = -t$라 두었을 때 $\frac{du}{dt} = -1$이므로

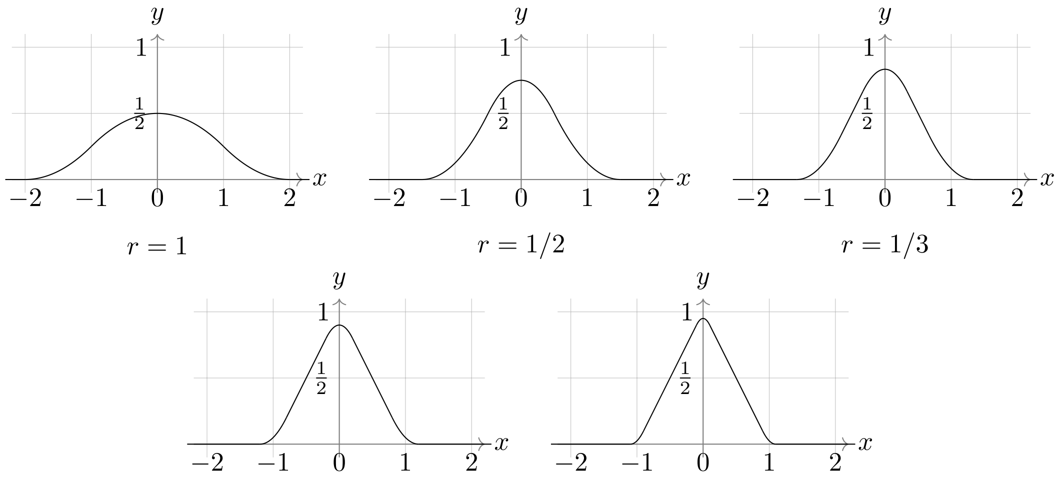
$$\begin{aligned}(f * k_r)(-x) &= \frac{1}{2r}\int_{-x-r}^{-x+r} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\int_{-x-r}^{-x+r} f(-t)dt \\ &= \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(u)du \\ &= (f * k_r)(x)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 즉, $f * k_r$는 짝함수[1]로, $[0,\infty)$에서의 함숫값을 알면 $\mathbb{R}$ 전체에서의 함숫값을

[1] 고등학교 때 어쩌면 짝함수라는 용어 대신 우함수라는 이름으로 들어보았을 것이다. 본문에서는 9.1절에 나온다.

알 수 있으며, 그 그래프는 y축에 대해 대칭이다.

지금까지의 결과를 종합하여 $f * k_r$ 의 그래프를 $r = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ 에 대해 그려보면 다음과 같다.



$r = 1$ $r = 1/2$ $r = 1/3$

$r = 1/5$ $r = 1/10$

8.4.11. 정의에 따라 계산하면

$$f_{n+1}(x) = (f_n * f_0)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\chi_{[-1,1]}(x-t)dt = \int_{x-1}^{x+1} f_n(t)dt$$

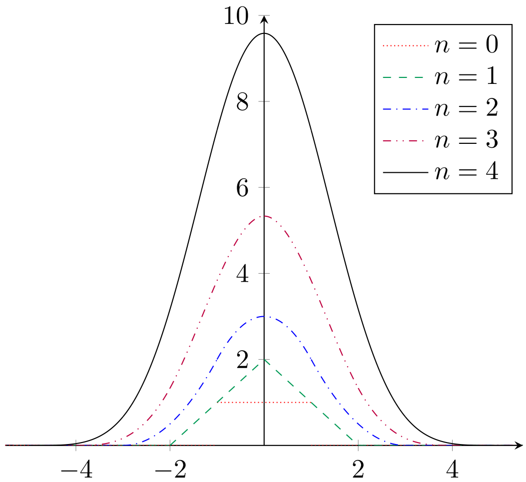
으로 함수열이 정의되는 것을 알 수 있다. 즉 f_n 을 알아내기 위해서는 f_{n-1} 을 알아낸 다음 적당히 구간을 나누어 가며 위의 적분을 계산하면 된다. 예를 들어 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 일 때 f_n 을 구해보면 다음과 같다.

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases} \qquad f_1(x) = \begin{cases} 2+x & -2 \le x < 0 \\ 2-x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(3+x)^2 & -3 \le x < -1 \\ 3-x^2 & -1 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2}(3-x)^2 & 1 \le x \le 3 \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{6}(64+48x+12x^2+x^3) & -4 \le x < -2 \\ \dfrac{1}{6}(32-12x^2-3x^3) & -2 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{6}(32-12x^2+3x^3) & 0 \le x < 2 \\ \dfrac{1}{6}(64-48x+12x^2-x^3) & 2 \le x \le 4 \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

$$
f_4(x) = \begin{cases}
\dfrac{1}{24}(625 + 500x + 150x^2 + 20x^3 + x^4) & -5 \le x < -3 \\
\dfrac{1}{6}(55 - 10x - 30x^2 - 10x^3 - x^4) & -3 \le x < -1 \\
\dfrac{1}{12}(115 - 30x^2 + 3x^4) & -1 \le x < 1 \\
\dfrac{1}{6}(55 + 10x - 30x^2 + 10x^3 - x^4) & 1 \le x \le 3 \\
\dfrac{1}{24}(625 - 500x + 150x^2 - 20x^3 + x^4) & 3 \le x \le 5 \\
0 & \text{이외의 경우}
\end{cases}
$$

따라서 $n = 0, 1, 2, 3, 4$일 때 그래프를 그려보면 다음 그림과 같이 된다.



제 9 장

푸리에급수

9.5.1. 다음 보조정리는 선형대수학의 기본적인 내용으로, 이 문제를 해결하는 데 도움이 될 것이다.

보조정리. 두 자연수 n, m에 대하여 $n > m$일 때, n개의 미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$를 가지는 식이 m개인 일차연립방정식

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{cases} \qquad (\text{단}, a_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i, j)$$

은 적어도 하나의 x_i는 0이 아닌 해를 갖는다. 다시 말해, 미지수의 개수가 식의 개수보다 많은 일차연립방정식은 '자명하지 않은' 해를 갖는다.

증명) m에 대한 수학적 귀납법을 이용하자. $m = 1$인 경우, 만약 $a_{11} = 0$이라면 $x_1 = 1, x_2 = 0$이 해가 되고, $a_{12} = 0$이라면 $x_1 = 0, x_2 = 1$이 해가 된다. 반대로 $a_{11} \neq 0$이고 $a_{12} \neq 0$이면 $x_1 = -a_{12}$, $x_2 = a_{11}$이 해가 된다.

이제 $m > 1$이라 가정하자. 만약 모든 i, j에 대하여 $a_{ij} = 0$이면 $x_1 = 1, x_2 = \cdots = x_n = 0$이 해가 된다. 따라서 어떤 i, j에 대하여 $a_{ij} \neq 0$인 경우만 생각하면 된다. 그런데 이 경우, 적당히 첨자를 재배열하면 $a_{11} \neq 0$이라 가정할 수 있다. 그러면 첫 번째 식으로부터

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

임을 알 수 있고, 이를 나머지 식에 각각 대입하면

$$a_{i1}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right) + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \qquad 2 \leq i \leq m$$

을 얻는다. 그런데 이렇게 x_1을 소거하여 얻은 일차연립방정식은 식이 $m-1$개이고 미지수가 $n-1$개이므로, 귀납 가정에 의해 어떤 해 $x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$이 존재하여 어떤 j에 대해서는 $c_j \neq 0$이 된다. 이제

$$c_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}c_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}c_n$$

이라 두면 $x_1 = c_1, x_2 = c_2, \cdots, x_n = c_n$은 원래 연립방정식의 해가 되며, 어떤 j에 대해서 $c_j \neq 0$이다. □

먼저 $m \le n$임을 보이자. 모순을 이끌어내기 위해 $m > n$이고 $\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$이 정규직교집합이라 가정하고, 각 $i = 1, 2, \cdots, m$에 대하여 $e_i = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$이라 놓자. 이때 만약 모든 $j = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 $a_{ij} = 0$이면 $e_i = \mathbf{0}$이므로 $\langle e_i, e_i \rangle \ne 1$이 되어 $\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$이 정규직교집합임에 모순이라는 것에 주의하자. 어떤 $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{C}$에 대하여 $c_1 e_1 + \cdots c_m e_m = \mathbf{0}$이라 하면, 벡터의 각 성분을 생각함으로써 식

$$c_1 a_{1j} + c_2 a_{2j} + \cdots + c_m a_{mj} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

을 얻는다. 여기에 앞서 살펴본 보조정리를 이용하면 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 중 적어도 하나는 0이 아니도록 할 수 있고, 적당히 첨자를 재배열함으로써 일반성을 잃지 않고 $c_1 \ne 0$이라 할 수 있다. 그런데 이때 $\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$이 정규직교집합임을 상기하면

$$\begin{aligned} 0 \ne c_1 &= \langle e_1, c_1 e_1 \rangle \\ &= \langle e_1, -c_2 e_2 - \cdots - c_m e_m \rangle \\ &= -c_2 \langle e_1, e_2 \rangle - \cdots - c_m \langle e_1, e_m \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

이 되어 모순이 발생한다. 따라서 $m > n$이라는 가정이 거짓이어야 하므로, $\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$이 정규직교집합이면 $m \le n$이어야 한다는 것을 알 수 있다.

이제 각 $x \in \mathbb{C}^n$에 대하여 주어진 부등식이 성립함을 보이기 위해 $\beta \in \mathbb{C}^n$을

$$\beta = x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$$

이라 두자. 그러면 각 $j = 1, 2, \cdots, m$에 대하여

$$\begin{aligned} \langle \beta, e_j \rangle &= \left\langle \left(x - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right), e_j \right\rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_j \rangle \\ &= \langle x, e_j \rangle - \langle x, e_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

이므로 β는 각 e_j와 수직이다. 또한 $\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$의 원소들끼리도 수직이므로

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \beta + \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \|\beta\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k \right\|^2 \\ &= \|\beta\|^2 + \sum_{k=1}^{m} \|\langle x, e_k \rangle e_k\|^2 \\ &= \|\beta\|^2 + \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 이때 $\|\beta\|^2 \ge 0$이므로 부등식

$$\|x\|^2 \ge \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$$

을 얻는다.

위의 부등식을 얻은 과정에 주목하면, $\beta = 0$인 것과 부등식의 등호조건, 즉 $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2$인 것이 필요충분조건이 된다는 것을 알 수 있다. 이는 다시 말해, 부등식의 등호조건이 성립하는 것은 $x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$이 성립하는 것과 동치라는 것이다.

위의 관찰을 염두에 두고 부등식에서 임의의 $x \in \mathbb{C}^n$에 대해 등식이 성립할 필요충분조건이 $m = n$을 보이기 위해, 임의의 $x \in \mathbb{C}^n$에 대하여 $x = \sum_{k=1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k$이면 $m = n$이어야 함을 먼저 보이자. $m \le n$임은 이미 살펴보았으므로, 모순을 이끌어내기 위해 $m < n$이라 가정하자. 각 $j = 1, 2, \cdots, n$에 대하여 ε_j를 j번째 성분이 1이고 나머지 모든 성분이 0인 $\mathbb{C}^n$의 벡터라 할 때, 가정에 의해

$$\varepsilon_j = \sum_{k=1}^{m} \langle \varepsilon_j, e_k \rangle e_k$$

이 된다. 이제 어떤 $d_1, d_2, \cdots, d_n \in \mathbb{C}$를 골랐을 때 $d_1\varepsilon_1 + \cdots + d_n\varepsilon_n = \mathbf{0}$이 된다고 하자. 그러면 각 $i = 1, 2, \cdots, m$에 대해

$$0 = \langle \mathbf{0}, e_i \rangle = \Big\langle \Big(d_1\varepsilon_1 + \cdots + d_n\varepsilon_n \Big), e_i \Big\rangle = \sum_{j=1}^{n} d_j \langle \varepsilon_j, e_i \rangle$$

이 되어야 하는데, ε_j와 e_i가 주어진 벡터이므로 각 $\langle \varepsilon_j, e_i \rangle$는 어떤 상수이다. 따라서 각 $i = 1, 2, \cdots, m$에 대해 $\sum_{j=1}^{n} d_j \langle \varepsilon_j, e_i \rangle = 0$인 것을 $d_1, \cdots, d_n$에 대한 일차연립방정식으로 보면 앞서 살펴본 보조정리에 의해 $d_1, \cdots, d_n$ 중 적어도 하나는 0이 아니도록 할 수 있다. 그런데 $d_1\varepsilon_1 + \cdots + d_n\varepsilon_n = \mathbf{0}$은 벡터의 성분들을 각각 보았을 때 $d_1 = \cdots = d_n = 0$일 때만 가능함을 쉽게 알 수 있는데, 이는 지금껏 살펴본 것에 모순이다. 그렇기 때문에 가정인 $m < n$이 거짓이어야 하고, 따라서 $m = n$이다.

이제 반대로, 어떤 $x_0 \in \mathbb{C}^n$에 대하여 $\|x_0\|^2 > \sum_{k=1}^{m} |\langle x_0, e_k \rangle|^2$이라고 가정해보자. 그러한 x_0에 대하여 $\beta_0 \in \mathbb{C}^n$을

$$\beta_0 = x_0 - \sum_{k=1}^{m} \langle x_0, e_k \rangle e_k$$

이라 하면 앞에서 보았듯이 $\beta_0 \neq \mathbf{0}$이고, β_0은 $e_1, e_2, \cdots, e_m$과 각각 전부 수직이다. 따라서 $b \in \mathbb{C}^n$을 $b = \dfrac{\beta_0}{\|\beta_0\|}$이라 두면 $\langle b, b \rangle = \dfrac{1}{\|\beta_0\|^2} \langle \beta_0, \beta_0 \rangle = 1$이므로 집합 $\{e_1, e_2, \cdots, e_m, b\}$이 정규직교집합이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 앞서 살펴본 바에 의하면 $m+1 \le n$이어야 하므로, $m < n$이다. 그런데 이는 즉 $\|x_0\|^2 \neq \sum_{k=1}^{m} |\langle x_0, e_k \rangle|^2$이면 $m \neq n$인 것을 보인 것이므로, 대우를 생각하면 $m = n$이면 $\|x_0\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |\langle x_0, e_k \rangle|^2$이어야 함을 보인 것이 된다.

이와 같이 부등식 $\|x_0\|^2 \ge \sum_{k=1}^{m} |\langle x_0, e_k \rangle|^2$에서 등호가 성립할 필요충분조건이 $m = n$인 것을 보일 수 있다.

9.5.2. 계산의 편의를 위해 다항식 p_n들을 실계수 다항식의 범위에서 찾도록 하자. 그러면 내적을 계산할 때 켤레복소수를 생각할 필요 없이 각 m, n에 대하여

$$\langle p_m, p_n \rangle = \int_0^1 p_m(t)\overline{p_n(t)}dt = \int_0^1 p_m(t)p_n(t)dt$$

이 된다.

계산의 편의를 위해 $p_1(t)$을 어떤 실수 α에 대하여 αt로 잡자. 조건 (나)에 의해

$$1 = \langle p_1, p_1 \rangle = \int_0^1 \alpha^2 t^2 dt = \frac{\alpha^2}{3}$$

이므로, 편의상 $\alpha = \sqrt{3}$으로 두면 될 것이다. 다시 말해, $p_1(t) = \sqrt{3}t$라 놓자.

이제 $n \geq 2$에 대해 $p_1, \cdots, p_{n-1}$이 주어졌을 때 조건 (가)와 (나)를 만족하는 n차 다항식 p_n을 구하는 방법을 생각해보자. 가장 간단한 t에 대한 n차 다항식인 t^n에서 시작점으로 잡고, 다항식 $q_n(t)$를

$$q_n(t) = t^n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle t^n, p_i(t) \rangle \, p_i(t)$$

이라 정의하자. 그러면 $q_n(t)$는 n차 다항식인 t^n에서 그보다 차수가 낮은 다항식들의 합을 뺀 다항식이므로 n차 다항식임은 당연하다. 한편, 각 $j = 1, \cdots, n-1$에 대하여

$$\begin{aligned}\langle q_n(t), p_j(t) \rangle &= \langle t^n, p_j(t) \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle t^n, p_i(t) \rangle \langle p_i(t), p_j(t) \rangle \\ &= \langle t^n, p_j(t) \rangle - \langle t^n, p_j(t) \rangle = 0\end{aligned}$$

이므로, 임의의 실수 $\alpha_n \in \mathbb{R}$에 대하여 $\alpha_n q_n$은 $p_1, \cdots, p_n$ 각각과 전부 수직이다. 따라서 $p_n = \dfrac{1}{\|q_n\|} q_n$이라 놓으면 각 $j = 1, \cdots, n-1$에 대하여 $\langle p_n, p_j \rangle = 0$이며,

$$\langle p_n, p_n \rangle = \frac{1}{\|q_n\|^2} \langle q_n, q_n \rangle = 1$$

이므로, 이렇게 정의된 p_n이 조건 (가)와 (나)를 만족하는 것을 알 수 있다.

앞에서 살펴본 p_n을 구하는 방법에 따라 $p_2, \cdots, p_5$를 구해보자. 먼저 q_2를 구해보면

$$\begin{aligned}q_2(t) &= t^2 - \sqrt{3}t \int_0^1 \left(x^2\right)\left(\sqrt{3}x\right) dx \\ &= t^2 - \frac{3}{4}t\end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있고, 이때 $\|q_2\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t^2 - \frac{3}{4}t\right)^2 dt} = \dfrac{1}{4\sqrt{5}}$이므로

$$p_2(t) = 4\sqrt{5} q_2(t) = \sqrt{5}(4t^2 - 3t)$$

가 된다. 이제 q_3는

$$\begin{aligned}q_3(t) &= t^3 - \sqrt{3}t \int_0^1 \left(x^3\right)\left(\sqrt{3}x\right) dx - \sqrt{5}(4t^2 - 3t) \int_0^1 \left(x^3\right)\left(\sqrt{5}(4x^2 - 3x)\right) dx \\ &= t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{2}{5}t\end{aligned}$$

이 되며, 이때 $\|q_3\| = \sqrt{\int_0^1 \left(t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{2}{5}t\right)^2 dt} = \dfrac{1}{15\sqrt{7}}$이므로

$$p_3(t) = 15\sqrt{7} q_3(t) = \sqrt{7}(15t^3 - 20t^2 + 6t)$$

가 된다. 같은 방식으로

$$\begin{aligned} q_4(t) &= t^4 - \frac{15}{8}t^3 + \frac{15}{14}t^2 - \frac{5}{28}t, \\ p_4(t) &= 168t^4 - 315t^3 + 180t^2 - 30t, \\ q_5(t) &= t^5 - \frac{12}{5}t^4 + 2t^3 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{14}t, \\ p_5(t) &= \sqrt{11}\left(210t^5 - 504t^4 + 420t^3 - 140t^2 + 15t\right) \end{aligned}$$

이 된다는 것도 알 수 있다.

9.5.3. 각 실수 $t \in \mathbb{R}$에 대하여 $1 - \cos t \geq 0$이므로, $x \geq 0$이면 부등식

$$x - \sin x \geq \int_0^x (1 - \cos t)dt \geq 0$$

이 성립한다. 즉 $x > 0$이면 $\sin \frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}$이므로

$$|D_n(x)| = \left| \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}} \right| \geq 2\frac{\left|\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right|}{x}$$

임을 알 수 있다. 이때 $t = \left(n + \frac{1}{2}\right)x$이라 두면

$$\begin{aligned} 2\pi \|D_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx &\geq \int_{\frac{1}{n+1/2}\pi}^{\frac{n}{n+1/2}\pi} |D_n(x)|\, dx \\ &\geq \int_{\frac{1}{n+1/2}\pi}^{\frac{n}{n+1/2}\pi} \frac{2\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right|}{x} dx \\ &= \int_{\pi}^{n\pi} \frac{2\,|\sin t|}{t} dt \\ &= \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{2\,|\sin t|}{t} dt \\ &\geq \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{2}{(k+1)\pi}\, |\sin t|\, dt \\ &= \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{(k+1)\pi} \end{aligned}$$

인데, 조화급수 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$가 발산함은 이미 잘 알고 있는 사실이다. 예를 들어, 연습문제 5.6.19에서 보인 부등식 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \log n$으로부터 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$이다.

9.5.4. 두 복소수 $z, w \in \mathbb{C}$에 대하여

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})$$

이 성립함에 주목하자. 그러면

$$\begin{aligned} |u_m(x) - u_n(x)|^2 = \left|e^{imx} - e^{inx}\right|^2 &= \left|e^{imx}\right|^2 + \left|e^{inx}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i(m-n)x}\right) \\ &= 2 + 2\cos\Big((m-n)x\Big) \end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있다. 그런데 코사인의 배각공식 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 생각하면

$$\begin{aligned}|u_m(x) - u_n(x)| &= \sqrt{2 + 2\cos\Big((m-n)x\Big)} \\ &= \sqrt{4\cos^2\left(\frac{m-n}{2}x\right)} \\ &= 2\left|\cos\left(\frac{m-n}{2}x\right)\right|\end{aligned}$$

을 얻는다. 따라서, 일반성을 잃지 않고 $m > n$이라 가정하고 편의상 $\frac{m-n}{2} = k$라 놓은 뒤 $t = kx$라 하면 $\frac{dt}{dx} = k$이므로

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\left|\cos\left(\frac{m-n}{2}x\right)\right| dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\cos kx|\, dx \\ &= \frac{1}{k\pi}\int_{-k\pi}^{k\pi} |\cos t|\, dt \\ &= \frac{1}{k\pi}\sum_{j=1}^{2k}\int_{-k\pi+(j-1)\pi}^{-k\pi+j\pi} |\cos t|\, dt\end{aligned}$$

이 된다. 그런데 길이가 π인 구간 위에서 $t \mapsto |\cos t|$를 적분하면 2가 되기 때문에

$$\|u_m - u_n\|_1 = \frac{1}{k\pi}\left(\sum_{j=1}^{2k} 2\right) = \frac{4}{\pi}$$

임을 얻는다.

9.5.5. (가) 구간 $[-\pi, \pi]$에서 $f(x) = x$의 푸리에급수를 구해보자. $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$를 f의 푸리에계수라 하면 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$에 대하여

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-in}xe^{-inx} + \frac{1}{n^2}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} i\end{aligned}$$

이고 $c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = 0$임을 알 수 있다. 따라서 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $c_n + c_{-n} = 0$, $c_n - c_{-n} = \frac{2(-1)^n}{n} i$임에 유의하면

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

을 얻는다. 그런데 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{2}$에서 미분가능하므로 따름정리 9.2.6에 의해

$$\frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\frac{n\pi}{2}$$

이 되는데, n이 짝수이면 $\sin\frac{n\pi}{2} = 0$이고, n이 홀수이면 $n = 2k-1$이라 두었을 때 $(-1)^{n+1} = 1$이고 $\sin\frac{n\pi}{2} = (-1)^{k+1}$이므로 위의 식을

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

이라 쓸 수 있다. 다시 말해, 문제에서 주어진 급수는 수렴하며 그 값은 $\frac{\pi}{4}$이다.

(나) 편의상 수열 $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$를 각 $k = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1 & k\text{를 } 4\text{로 나눈 나머지가 } 1 \text{ 또는 } 2 \\ -1 & k\text{를 } 4\text{로 나눈 나머지가 } 3 \text{ 또는 } 0 \end{cases}$$

이라 두면 문제에서 주어진 급수는 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{2k-1}$이라 쓸 수 있다.

함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$을

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & 0 \le x \le \pi \\ -\frac{\pi}{4} & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

이라 두고 f의 푸리에급수를 구해보자. $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$를 f의 푸리에계수라 하고 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$임에 주목하면 $c_0 = 0$임을 알 수 있다. 한편, 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} s(x)e^{-inx}dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}dx + \int_{0}^{\pi} e^{-inx}dx\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(-\left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\frac{1}{in}e^{-inx}\right]_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{8ni}\left(2 - e^{in\pi} - e^{-in\pi} - 2\right) \\
&= \frac{1}{4ni}\left(1 - \cos n\pi\right)
\end{aligned}$$

이 된다. 그런데 cos 함수는 짝함수이므로 $c_n = -c_{-n}$ 임에 주목하면 f의 푸리에급수는

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n i \sin nx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{2n}\sin nx
\end{aligned}$$

와 같이 되는데, n이 정수이면 $\cos n\pi = (-1)^n$이므로 n이 짝수이면 $\frac{1-\cos n\pi}{2n} = 0$이고 n이 홀수이면 $\frac{1-\cos n\pi}{2n} = \frac{1}{n}$이다. 따라서 f의 푸리에급수는

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}\sin\big((2k-1)x\big)$$

와 같이 쓸 수 있다.

이제 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{4}$에서 미분가능하기 때문에 따름정리 9.2.6에 의해

$$\frac{\pi}{4} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{4}\right)$$

이 성립하게 된다. 이때, $\sin\frac{(2k-1)\pi}{4} = \frac{\varepsilon_k}{\sqrt{2}}$ 임에 유의하면 $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{2k-1}$ 을 얻는다. 즉, 문제에서 주어진 급수는 수렴하며, 그 값은 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 이다.

9.5.6. 먼저 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}$ 의 값을 구하기 위해, 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 정의된 함수 $f(x) = x^4 - 2\pi^2x^2$ 의 푸리에급수를 구해보자. f의 푸리에계수를 $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$라 하면

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^4 - 2\pi^2x^2\right)dx = -\frac{7}{15}\pi^4$$

이고, 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $e^{-in\pi} = (-1)^n$ 임에 유의하여 $n \neq 0$인 경우 e^{-inx}를 적분하고 그 앞에 곱해져있는 다항함수를 미분하는 부분적분을 반복함으로써

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^4 - 2\pi^2x^2\right)e^{-inx}dx = \frac{24(-1)^{n+1}}{n^4}$$

임을 알 수 있다. 이제 빠세발 등식을 f에 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{107}{315}\pi^8 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^4 - 2\pi^2x^2\right)^2dx &= \left(-\frac{7}{15}\pi^4\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{24(-1)^{n+1}}{n^4}\right)^2 \\ &= \frac{49}{225}\pi^8 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1152}{n^8}\end{aligned}$$

을 얻고, 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8} = \frac{1}{1152}\left(\frac{107}{315}\pi^8 - \frac{49}{225}\pi^8\right) = \frac{\pi^8}{9450}$$

이 된다.

이제 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}$ 의 값을 구하기 위해, 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 정의된 함수 $g(x) = x^5 - \frac{10}{3}\pi^2x^3 + \frac{7}{3}\pi^4x$ 의 푸리에급수를 구해보자. g의 푸리에계수를 $\{d_n : n \in \mathbb{Z}\}$라 하면

$$d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^5 - \frac{10}{3}\pi^2x^3 + \frac{7}{3}\pi^4x\right)dx = 0$$

이고, 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $e^{-in\pi} = (-1)^n$ 임에 유의하여 $n \neq 0$인 경우 e^{-inx}를 적분하고 그 앞에 곱해져있는 다항함수를 미분하는 부분적분을 반복함으로써

$$d_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^5 - \frac{10}{3}\pi^2x^3 + \frac{7}{3}\pi^4x\right)e^{-inx}dx = \frac{120(-1)^{n+1}}{n^5}i$$

임을 알 수 있다. 이제 빠세발 등식을 g에 적용하면

$$\begin{aligned}\frac{640}{2079}\pi^{10} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(x^5 - \frac{10}{3}\pi^2x^3 + \frac{7}{3}\pi^4x\right)^2dx &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{120(-1)^{n+1}}{n^5}i\right|^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{28800}{n^{10}}\end{aligned}$$

을 얻고, 따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{10}}=\frac{1}{28800}\left(\frac{640}{2079}\pi^{10}\right)=\frac{\pi^{10}}{93555}$$

이 된다.

9.5.7. 먼저 (가)와 (나)가 동치임을 보이자. 집합 $\{\xi_n : x\in\mathbb{Z}\}$가 정규직교집합이므로 쌍끼리 서로 수직인 벡터들임에 유의하면

$$\begin{aligned}\left\|\xi-\sum_{k=-n}^{n}\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k\right\|^2&=\|\xi\|^2+\left\|\sum_{k=-n}^{n}\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k\right\|^2-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n}\Big\langle\xi,\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k\Big\rangle\\&=\|\xi\|^2+\sum_{k=-n}^{n}\|\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k\|^2-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=-n}^{n}\langle\xi,\xi_k\rangle\,\overline{\langle\xi,\xi_k\rangle}\\&=\|\xi\|^2+\sum_{k=-n}^{n}|\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k|^2-2\sum_{k=-n}^{n}|\langle\xi,\xi_k\rangle|^2\\&=\|\xi\|^2-\sum_{k=-n}^{n}|\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k|^2\end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\xi-\sum_{k=-n}^{n}\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k\right\|=0\quad\Longleftrightarrow\quad\|\xi\|^2-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|\langle\xi,\xi_k\rangle\,\xi_k|^2=0$$

임을 알 수 있고, 이는 즉 (가)와 (나)가 동치임을 의미한다.

이제 (다)를 가정하면 (나)가 성립함을 보일 것이다. 조건 (다)를 가정했을 때, $\eta=\xi$인 경우를 생각하면

$$\langle\xi,\xi\rangle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\langle\xi,\xi_k\rangle\,\overline{\langle\xi,\xi_k\rangle}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}|\langle\xi,\xi_k\rangle|^2$$

이 성립하는데, 이때 $\|\xi\|^2=\langle\xi,\xi\rangle$이므로 (나)가 성립함을 알 수 있다.

마지막으로 (나)를 가정하면 (다)가 성립함을 보이자. 본문 9.3절의 보기 1 이후의 식 (39)로서 복소내적공간의 임의의 두 원소 x와 y에 대해 성립하는 극화 항등식

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\,\|x+iy\|^2-i\,\|x-iy\|^2\Big)$$

을 보았다. 이 극화 항등식과 조건 (나)를 이용하면

$$\begin{aligned}\langle\xi,\eta\rangle&=\frac{1}{4}\Big(\|\xi+\eta\|^2-\|\xi-\eta\|^2+i\,\|\xi+i\eta\|^2-i\,\|\xi-i\eta\|^2\Big)\\&=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\Big(|\langle\xi+\eta,\xi_k\rangle|^2-|\langle\xi-\eta,\xi_k\rangle|^2+i\,|\langle\xi+i\eta,\xi_k\rangle|^2-i\,|\langle\xi-i\eta,\xi_k\rangle|^2\Big)\end{aligned}$$

이 된다. 그런데 이때 항등식 $|\langle x,y\rangle|=\langle x,y\rangle\,\overline{\langle x,y\rangle}=\langle x,y\rangle\,\langle y,x\rangle$을 이용하면

$$\begin{aligned}&|\langle\xi+\eta,\xi_k\rangle|^2-|\langle\xi-\eta,\xi_k\rangle|^2\\=&\ \langle\xi+\eta,\xi_k\rangle\,\langle\xi_k,\xi+\eta\rangle-\langle\xi_k,\xi-\eta\rangle\\=&\Big(\langle\xi,\xi_k\rangle+\langle\eta,\xi_k\rangle\Big)\Big(\langle\xi_k,\xi\rangle+\langle\xi_k,\eta\rangle\Big)-\Big(\langle\xi,\xi_k\rangle-\langle\eta,\xi_k\rangle\Big)\Big(\langle\xi_k,\xi\rangle-\langle\xi_k,\eta\rangle\Big)\\=&\,2\Big(\langle\xi,\xi_k\rangle\,\langle\xi_k,\eta\rangle+\langle\eta,\xi_k\rangle\,\langle\xi_k,\xi\rangle\Big)\\=&\,2\Big(\langle\xi,\xi_k\rangle\,\overline{\langle\eta,\xi_k\rangle}+\langle\eta,\xi_k\rangle\,\overline{\langle\xi,\xi_k\rangle}\Big)\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 같은 방식으로

$$\begin{aligned}|\langle \xi + i\eta, \xi_k\rangle|^2 - |\langle \xi - i\eta, \xi_k\rangle|^2 &= 2\Big(\langle \xi, \xi_k\rangle \overline{\langle i\eta, \xi_k\rangle} + \langle i\eta, \xi_k\rangle \overline{\langle \xi, \xi_k\rangle}\Big)\\ &= 2\Big(-i\langle \xi, \xi_k\rangle \overline{\langle \eta, \xi_k\rangle} + i\langle \eta, \xi_k\rangle \overline{\langle \xi, \xi_k\rangle}\Big)\end{aligned}$$

이 성립하는 것 또한 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\langle \xi, \eta\rangle &= \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\Big(|\langle \xi+\eta, \xi_k\rangle|^2 - |\langle \xi-\eta, \xi_k\rangle|^2 + i\big(|\langle \xi+i\eta, \xi_k\rangle|^2 - |\langle \xi-i\eta, \xi_k\rangle|^2\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\Big(\langle \xi, \xi_k\rangle \overline{\langle \eta, \xi_k\rangle} + \langle \eta, \xi_k\rangle \overline{\langle \xi, \xi_k\rangle} + \big(\langle \xi, \xi_k\rangle \overline{\langle \eta, \xi_k\rangle} - \langle \eta, \xi_k\rangle \overline{\langle \xi, \xi_k\rangle}\big)\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\langle \xi, \xi_k\rangle \overline{\langle \eta, \xi_k\rangle}\end{aligned}$$

이 되어 (다)가 성립한다. 따라서 (나)와 (다) 또한 동치이므로, 문제에서 주어진 세 조건은 모두 동치이다.

9.5.8. 먼저 (나)를 가정하면 (가)가 성립함을 보이기 위해, $s = 0$인 경우부터 생각하자. 그러면 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때, 어떤 자연수 N이 존재하여 $n > N$이면 $|s_n| < \dfrac{\epsilon}{2}$을 만족한다. 이때, $S = \max\{1, |s_1|, \cdots, |s_N|\}$이라 두자. 그러면 각 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0$이므로 어떤 자연수 M이 존재하여 $m > M$이면 각 $n = 1, \cdots, N$에 대하여 $|a_{mn}| < \dfrac{\epsilon}{2SN}$을 만족한다.

이제 자연수 m이 $m > \max\{M, N\}$이면 부등식

$$\begin{aligned}|t_m| &= \left|\sum_{n=1}^{m} a_{mn}s_n\right|\\ &\le \sum_{n=1}^{N} a_{mn}|s_n| + \sum_{n=N+1}^{m} a_{mn}|s_n|\\ &< \sum_{n=1}^{N}\frac{\epsilon}{2SN}|s_n| + \sum_{n=N+1}^{m} a_{mn}\cdot\frac{\epsilon}{2}\\ &\le \sum_{n=1}^{N}\frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{m} a_{mn}\end{aligned}$$

이 성립하는데, 이때 가정에 의해 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{m} a_{mn} \le \sum_{n=1}^{m} a_{mn} = 1$이기 때문에

$$|t_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

이 된다. 따라서 $\lim_{m\to\infty} t_m = 0$임을 알 수 있고, 이는 즉 $s = 0$이면 (가)가 성립함을 뜻한다.

이제 일반적인 경우를 보기 위해 $s \ne 0$이라 하면, $\lim_{n\to\infty}(s - s_n) = 0$이기 때문에 앞서 살펴본 바에 의해 변수가 m이고 일반항이

$$\sum_{n=1}^{m} a_{mn}(s - s_n) = \sum_{n=1}^{m} a_{mn}s - \sum_{n=1}^{m} a_{mn}s_n = s - \sum_{n=1}^{m} a_{mn}s_n = s - t_m$$

인 수열은 0으로 수렴하게 된다. 따라서 $\lim_{m\to\infty} t_m = s$이므로, (가)가 일반적인 경우에도 성립함을 알 수 있다.

반대로 (가)를 가정하면 (나)가 성립함을 보임에 있어, 모순을 이끌어내기 위해 임의의 수렴하는 수열 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 주어졌을 때 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$이면 $\lim_{m\to\infty} t_m = s$이 성립함에도 불구하고 어떤 $n_0 \in \mathbb{N}$에 대하여 $\lim_{m\to\infty} a_{mn_0} \neq 0$이라고 가정하자. 그러면 어떤 $\delta > 0$에 대해서는, 임의로 $N \in \mathbb{N}$을 잡아도 그보다 큰 자연수 m이 존재하여 $|a_{mn_0}| > \delta$를 만족하게 된다. 이때, 수열 $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$s_n = \begin{cases} 1 & n = n_0 \\ 0 & n \neq n_0 \end{cases}$$

으로 정의하면 $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$이므로 가정에 의해 $\lim_{m\to\infty} t_m = 0$이어야 한다. 그런데 $m > n_0$이기만 하면

$$|t_m| = \left|\sum_{n=1}^{m} a_{mn} s_n\right| = |a_{mn_0}|$$

이 되는 것에 주목하면, 임의로 $N \in \mathbb{N}$을 잡아도 그보다 큰 자연수 m이 존재하여 $|t_m| > \delta$이 성립해야 함을 알 수 있다. 그런데 이는 $\lim_{m\to\infty} t_m \neq 0$임을 의미하므로, 모순이 발생한다. 따라서 가정이 거짓이어야 하므로, 모든 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $\lim_{m\to\infty} a_{mn_0} = 0$이어야 한다. 다시 말해, 조건 (나)가 성립한다.

지금까지 살펴본 바에 의해 (가)와 (나)가 동치임을 알 수 있다.

9.5.9. 주어진 두 함수 f와 g는 2π-주기함수인 것으로 본다.

(가) $x - t = s$로 놓는 치환을 하면, $\dfrac{ds}{dt} = -1$이므로

$$\begin{aligned}(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(s)g(x-s)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(x-s)ds = (g * f)(x)\end{aligned}$$

이 되는 것을 볼 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} f * u_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)u_n(x-s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{in(x-s)}ds \\ &= e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds \quad = \widehat{f}(n)u_n \end{aligned}$$

이 성립하는 것을 알 수 있다.

(나) 먼저 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$이고 $\xi \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$이면 $f * \xi \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$임을 보이고자 한다. 각 $x \in [-\pi,\pi]$에 대하여

$$\begin{aligned} |(f * \xi)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\xi(x-t)dt\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\left|\xi(x-t)\right|dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left|\xi(x-t)\right|^2 |f(t)|\right)^{1/2} |f(t)|^{1/2}\,dt \end{aligned}$$

이므로 마지막 줄에 코시-슈바르츠 부등식을 적용하면

$$|(f * \xi)(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\xi(x-t)\right|^2 |f(t)|\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt\right)^{1/2}$$

이 되고, 따라서 양변을 제곱하면

$$\Big((f*\xi)(x)\Big)^2 \le \frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\xi(x-t)\Big|^2 |f(t)|\,dt\right)\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt\right)$$

을 얻는다. 그런데 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,dt$는 $f\in\mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$이기 때문에 어떤 유한한 상수가 되는 것에 주목하자. 그러면 $f*\xi\in\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$인지를 확인하기 위해서는 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\xi(x-t)\Big|^2|f(t)|\,dt\right)dx$가 유한한 값을 가지는 지 알아보면 된다는 것을 알 수 있다. 편의상 각 x,t에 대하여 $\Big|\xi(x-t)\Big|^2=\eta(x-t)$, $|f(t)|=g(t)$라 두면 g와 η는 2π-주기함수이고, 양함수이며, $\mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$의 원소임에 주목하자. 즉, 어떤 두 실수 A와 B에 대해 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}g=A$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\eta=B$가 된다. 특이적분의 정의에 의해, $[-\pi,\pi]$에 포함되는 적당한 유계닫힌구간 I, J를 잡으면 g,η는 각각 I, J에서 유계이고 리만적분가능하며, 임의의 그러한 I와 J에 대해 $\displaystyle\int_I g\le A$, $\displaystyle\int_J\eta\le B$이다. 이제 함수 $(x,t)\mapsto\eta(x-t)g(t)$에 미적분학2에서 공부한 푸비니 정리를 적용하면

$$\begin{aligned}\int_J\left(\int_I\eta(x-t)g(t)dt\right)dx &= \int_I\left(\int_J\eta(x-t)g(t)dx\right)dt\\ &= \int_I g(t)\left(\int_J\eta(x-t)dx\right)dt\\ &\le \int_I g(t)\cdot Bdt\\ &\le AB\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 그런데 위 식의 첫 번째 줄의 좌변에 앞서 언급한 조건을 만족하는 I,J들에 대한 상한을 취하면 특이적분

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\eta(x-t)g(t)dt\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\Big|\xi(x-t)\Big|^2|f(t)|\,dt\right)dx$$

이 되고, 이 값이 AB보다 작거나 같기 때문에 유한한 값임을 알 수 있다. 즉 $f*\xi\in\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$이다.

이제 $\lambda_f:\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]\to\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$이 선형사상임을 보이자. 임의의 $\xi,\eta\in\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$에 대하여 적분의 선형성에 의해

$$\begin{aligned}\lambda_f(\xi+\eta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\Big(\xi(t)+\eta(t)\Big)dt\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\xi(t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\eta(t)dt\\ &= \lambda_f(\xi)+\lambda_f(\eta)\end{aligned}$$

이 성립하고, 또한 임의의 $\alpha\in\mathbb{C}$에 대하여

$$\begin{aligned}\lambda_f(\alpha\xi) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\Big(\alpha\xi(t)\Big)dt\\ &= \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-t)\xi(t)dt\\ &= \alpha\lambda_f(\xi)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 λ_f는 선형사상이다.

그런데 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$의 정규직교기저를 $\{u_{-2},u_{-1},u_0,u_1,u_2,\cdots\}$로 고정하면, 각 정수 $n\in\mathbb{Z}$에 대하여 **(가)**의 결과에 의해

$$\lambda_f(u_n)=(f*u_n)=\widehat{f}(n)u_n$$

이 되기 때문에 λ_f는 (n,n)-성분이 $\widehat{f}(n)$인 대각행렬

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & \vdots & & & \iddots \\ & \widehat{f}(-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & 0 & \widehat{f}(-1) & 0 & 0 & 0 & \\ \cdots & 0 & 0 & \widehat{f}(0) & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & \widehat{f}(1) & 0 & \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \widehat{f}(2) & \\ \iddots & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

으로 표시할 수 있다.

9.5.10. 편의상 $g=-f$라 두면 g는 연속이고 단조증가함수가 되며, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로 유계변동함수이다. 임의로 $A>0$을 잡았을 때, $x\mapsto-\cos(x)$는 $[0,A]$에서 유계변동이고 g는 연속함수이므로 명제 5.5.3에 의해 $g\in\mathcal{R}(-\cos)$인데, $-\cos$의 도함수는 $\sin$으로 연속이므로 정리 5.5.5에 의해

$$\int_0^A g(x)\sin(x)dx=\int_0^A g(x)d(-\cos x)$$

이 된다. 이제 리만-스틸체스 적분의 부분적분 공식(정리 5.5.6)을 이용하면

$$\int_0^A g(x)d(-\cos x)=-g(A)\cos A+g(0)\cos 0+\int_0^A \cos x dg(x)$$

임을 얻는다. 그런데 임의의 $x\in\mathbb{R}$에 대하여 $|\cos x|\le 1$인데 g가 단조증가함수임에 유의하면

$$\int_0^A 1dg(x)=g(A)-g(0)$$

임은 당연하다. 이때

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A 1dg(x)=\lim_{A\to\infty}\Big(g(A)-g(0)\Big)=-g(0)$$

이고, 본문 7.3절에서와 같이 $\cos_+$, $\cos_-$를 정의하면

$$0\le\cos_+\le 1,\qquad 0\le\cos_-\le 1$$

이므로 명제 7.3.1에서와 같이 생각하면 $\lim_{A\to\infty}\int_0^A\cos_+(x)dg(x)$과 $\lim_{A\to\infty}\int_0^A\cos_-(x)dg(x)$이 각각 수렴하는 것을 알 수 있다. 이로부터

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A\cos xdg(x)=\lim_{A\to\infty}\int_0^A\cos_+(x)dg(x)-\lim_{A\to\infty}\int_0^A\cos_-(x)dg(x)$$

또한 수렴하는 것을 알 수 있다.

지금까지의 결과를 종합하면, 임의의 $A>0$에 대해

$$\int_0^A g(x)\sin(x)dx=-g(A)\cos A+g(0)\cos 0+\int_0^A\cos xdg(x)$$

인데, $-|g(A)| \le -g(A)\cos A \le |g(A)|$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{A\to\infty} g(A)\cos A = 0$인 것은 쉽게 알 수 있기 때문에 위 식의 우변은 $A \to \infty$일 때 수렴한다. 이는 즉

$$\int_0^\infty g(x)\sin(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A g(x)\sin(x)dx$$

가 수렴함을 의미한다. 따라서 $\int_0^\infty f(x)\sin(x)dx = -\int_0^\infty g(x)\sin(x)dx$은 항상 존재한다.

9.5.11. (가) $u = 2t$라 놓으면 $\dfrac{du}{dt} = 2$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt &= \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(2t)}{\sin t}\right| dt \\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\frac{f(u)}{\sin\frac{u}{2}}\right| du\end{aligned}$$

가 된다. 그런데 $u \mapsto \left|\sin\dfrac{u}{2}\right|$는 2π-주기함수이므로

$$\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\,dt = \int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}\left|\frac{f(u)}{\sin\frac{u}{2}}\right| du = \int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(u)}{\sin\frac{u}{2}}\right| du$$

이 된다. 이때, $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여 부등식

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| \ge \left|\frac{t}{\pi}\right|$$

이 성립하기 때문에

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(u)}{\sin\frac{u}{2}}\right| du \le \int_{-\pi}^{\pi}\pi\left|\frac{f(u)}{u}\right| du < \infty$$

이다. 즉 $\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|\,dt < \infty$이다.

위에서 살펴본 바에 의해 g에 리만-르벡 정리(정리 9.2.1)를 적용할 수 있고, 그러면

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int}dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos(nt)dt - i\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin\left(nt+\frac{\pi}{2}\right)dt - i\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt \;= 0\end{aligned}$$

을 얻는다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\widehat{g}(n) = 0$이다. 또한, $n \to -\infty$인 경우에도 $e^{-i(-n)x} = \cos(nx) + i\sin(nx)$임을 이용하면 비슷한 방식으로 $\lim_{n\to-\infty}\widehat{g}(n) = 0$을 보일 수 있다.

한편, 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 성립하는 항등식 $\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \sin x$에 유의하면, 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 다시 $u = 2t$라 놓으면

$$\begin{aligned}\widehat{g}(2n-1) - \widehat{g}(2n+1) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(2t)}{\sin t}\left(e^{-i(2n-1)x} - e^{-i(2n+1)x}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(2t)}{\sin t}\cdot e^{-2inx}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right) \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} f(u)e^{-inu}du \\ &= \frac{2i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)e^{-inu}du \\ &= 2i\widehat{f}(n)\end{aligned}$$

인 것을 알 수 있다. 이때 네 번째 줄을 얻을 때 위에서와 비슷하게 $u \mapsto f(u)e^{-inu}$가 2π-주기함수임을 이용하였다.

따라서 임의의 자연수 M, N에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^{N} \Big(\widehat{g}(2n-1) - \widehat{g}(2n+1) \Big) \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big(\widehat{g}(-2M-1) - \widehat{g}(2N+1) \Big)\end{aligned}$$

이 되는 것을, 첫째 줄의 우변에 주어진 급수가 망원급수 꼴임에 주목하면 알 수 있다. 그런데 앞에서 이미 $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{g}(n) = 0$임을 보았다. 따라서

$$\lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \left(\lim_{M\to\infty} \widehat{g}(-2M-1) - \lim_{N\to\infty} \widehat{g}(2N+1) \right) = 0$$

이 성립함을 알 수 있다.

(나) 함수 f의 푸리에계수가 존재하기 위해서 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$인 것은, 즉 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$인 것은 이미 주어진 것으로 본다. f가 0에서 립쉬츠조건을 만족하고 $f(0)=0$이므로 적당한 양수 $M,\delta,p>0$에 대하여

$$|t|<\delta \implies |f(t)| = |f(t)-f(0)| \le M\,|t|^p$$

을 만족하기 때문에 $0<|t|<\delta$이면 $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \le M\,|t|^{p-1}$이 된다. 이때 일반성을 잃지 않고 $\delta<\pi$라 가정할 수 있는데, 그러면 $p-1>-1$이므로

$$\int_0^{\delta} |t|^{p-1}\,dt = \int_0^{\delta} t^{p-1} dt = \lim_{\epsilon\to 0+} \left[\frac{1}{p}t^p\right]_{\epsilon}^{\delta} = \frac{\delta^p}{p} < \infty$$

이 성립하는데, $t\mapsto |t|^{p-1}$이 짝함수이므로 $\int_{-\delta}^{\delta} |t|^{p-1}\,dt = 2\int_0^{\delta} |t|^{p-1}\,dt < \infty$이다. 따라서 명제 7.3.1에 의해 $\int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$이 된다. 한편, $\delta \le |t| \le \pi$이면 $\left|\frac{f(t)}{t}\right| \le \frac{|f(t)|}{\delta}$이므로 $\int_{\delta}^{\pi} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$이고 $\int_{-\pi}^{-\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$임은 쉽게 알 수 있다.

지금까지의 관찰을 종합하면, 함수 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$가 0에서 립쉬츠조건을 만족하면서 $f(0)=0$이면

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt = \int_{-\pi}^{-\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt + \int_{-\delta}^{\delta} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt + \int_{\delta}^{\pi} \left|\frac{f(t)}{t}\right| dt < \infty$$

이 성립한다. 따라서 f에 **(가)**에서 얻은 결과를 적용할 수 있는데, 이때 각 정수 $n\in\mathbb{Z}$에 대하여 $u_n(0) = e^{in\cdot 0} = 1$이므로

$$\begin{aligned} f(0) = 0 &= \lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n) \\ &= \lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n) u_n(0)\end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있다.

(다) 함수 h를 각 x에 대하여 $h(x) = f(x+t_0) - f(t_0)$이라 정의하자. 그러면 f가 가지는 성질들에 의해, h는 주기함수이고, $h\in\mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$이며 $h(0)=0$이다. 또한, f가 t_0에서 립쉬츠조건을

만족하므로 어떤 양수 $M, \delta, p > 0$에 대하여

$$|x| < \delta \implies |f(x+t_0) - f(t_0)| \le M\,|x|^p$$

이 성립하기 때문에, 그러한 M, δ, t에 대하여 $|x| < \delta$이면

$$|h(x) - h(0)| = |f(x+t_0) - f(t_0) - 0| \le M\,|x|^p$$

이므로 h는 0에서 립쉬츠 조건을 만족한다. 따라서 (나)에서 살펴본 것과 (가)의 결과에 의해

$$0 = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \widehat{h}(n)$$

이 성립한다.

이제 $\widehat{h}(n)$을 구해보자. 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(f(x+t_0) - f(t_0)\Big)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t_0)e^{-inx}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0)e^{-inx}dx
\end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때, $y = x + t_0$이라 놓으면 $\dfrac{dy}{dx} = 1$이므로

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t_0)e^{-inx}dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+t_0}^{\pi+t_0} f(y)e^{-in(y-t_0)}dy \\
&= \frac{e^{int_0}}{2\pi}\int_{-\pi+t_0}^{\pi+t_0} f(y)e^{-iny}dy \\
&= \widehat{f}(n)u_n(t_0)
\end{aligned}$$

이고, u_0이 상수함수 1과 같으며 $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$가 정규직교집합임을 상기하면

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0)e^{-inx}dx = \frac{f(t_0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x)\overline{u_n(x)}dx = \begin{cases} f(t_0), & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

임을 알 수 있다. 즉, 임의의 자연수 M, N에 대하여

$$\sum_{n=-M}^{N} \widehat{h}(n) = -f(t_0) + \sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n)u_n(t_0)$$

이 되기 때문에, $M, N \to \infty$일 때를 생각하면

$$f(t_0) = \lim_{M,N\to\infty} \sum_{n=-M}^{N} \widehat{f}(n)u_n(t_0)$$

이 성립한다. 따라서 f가 t_0에서 립쉬츠조건을 만족하면 f의 푸리에급수가 $t = t_0$에서 $f(t_0)$으로 수렴한다.

9.5.12. **(가)** 임의로 $k \in \mathbb{N}$을 고정하고, 지수함수의 정의를 생각하면 임의의 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$u_k(t) = e^{ikt} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!}$$

임을 알 수 있다. 이때, 각 $M, N \in \mathbb{N}$에 대하여 $M + 1 < N$이면

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\ell=M+1}^{N} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right| &\le \sum_{\ell=M+1}^{N} \left| \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right| \\ &\le \sum_{\ell=M+1}^{N} \frac{k^\ell \pi^\ell}{\ell!} \end{aligned}$$

이므로 $N \to \infty$인 경우를 생각하면 $\left| \sum_{\ell=M+1}^{\infty} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right| \le \sum_{\ell=M+1}^{\infty} \frac{k^\ell \pi^\ell}{\ell!}$이 된다. 그런데 급수 $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{k^\ell \pi^\ell}{\ell!}$은 유한한 값 $e^{k\pi}$로 수렴하므로, 어떤 $M(k) \in \mathbb{N}$이 존재하여 $\sum_{\ell=M(k)+1}^{\infty} \frac{k^\ell \pi^\ell}{\ell!} < \frac{\epsilon}{(2n+1)|a_k| + 1}$을 만족한다. 따라서 그러한 $M(k)$에 대하여, 부등식

$$\left| \sum_{\ell=0}^{M(k)} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} - u_k(t) \right| = \left| \sum_{\ell=M(k)+1}^{\infty} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right| < \frac{\epsilon}{(2n+1)|a_k| + 1}$$

이 성립한다.

(나) 위의 **(가)**에서 살펴본 내용을 k가 양이 아닌 정수의 경우로 확장해보자. 만약 $k = 0$이면 임의의 자연수 M에 대하여 급수 $\sum_{\ell=0}^{M} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} = 1$이고 u_0은 상수함수 1이므로, 어떠한 자연수를 $M(0)$으로 잡아도 **(가)**에서의 부등식을 만족한다. 또한, 만약 k가 음의 정수이면 각 $\ell \in \mathbb{N}$과 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여 $\left| \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right| = \frac{(-k)^\ell \pi^\ell}{\ell!}$이고 $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-k)^\ell \pi^\ell}{\ell!} = e^{-k\pi} < \infty$임에 주목하면 **(가)**에서의 논의를 그대로 적용하여 **(가)**에서 주어진 부등식을 만족하는 $M(k)$가 존재함을 알 수 있다.

따라서 $P(t)$를 주어진 것처럼 놓으면 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$\begin{aligned} |f(t) - P(t)| &\le \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} a_k u_k(t) \right| + \left| \sum_{k=-n}^{n} a_k \left(u_k(t) - \sum_{\ell=0}^{M(k)} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right) \right| \\ &< \epsilon + \sum_{k=-n}^{n} |a_k| \left| \left(u_k(t) - \sum_{\ell=0}^{M(k)} \frac{(ikt)^\ell}{\ell!} \right) \right| \\ &\le \epsilon + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|a_k| \epsilon}{(2n+1)|a_k| + 1} \\ &< \epsilon + \sum_{k=-n}^{n} \frac{\epsilon}{2n+1} \\ &= 2\epsilon \end{aligned}$$

이 성립한다.

(다) 유계닫힌구간 $[a, b] \subset \mathbb{R}$에 대하여, 임의로 연속함수 $g : [a, b] \to \mathbb{C}$이 주어졌다고 하자. 만약 $a = b$이면 a에서 $g(a)$의 값을 가지는 다항함수를 잡으면 충분하므로, 더 이상 보일 것이 없다. 따라서 $a < b$라 가정하고, 이때 함수 $\widetilde{g} : [a, b] \to \mathbb{C}$를 각 $t \in [a, b]$에 대하여

$$\widetilde{g}(x) = g(x) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a)$$

라 두면 $\widetilde{g}$는 연속함수이고 $\widetilde{g}(a) = \widetilde{g}(b) = g(a)$이다. 이제 함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$를 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$f(t) = \widetilde{g}\left(\frac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a\right)$$

로 정의하면 f 또한 연속이고, $f(-\pi) = f(\pi) = \widetilde{g}(a)$이므로 f를 2π-주기함수로 볼 수 있다.

따라서 페제르 정리를 적용하여 f로 고르게 수렴하는 삼각다항식의 함수열을 잡을 수 있기 때문에, 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 $n \geq N$이면 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여 부등식

$$\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} a_k u_k(t) \right| < \epsilon$$

을 만족하는 $\{a_k \in \mathbb{C} : k = 0, \pm 1, \cdots, \pm n\}$을 잡을 수 있다. 이제 **(가)**와 **(나)**의 과정을 거쳐 **(나)**에서와 같이 다항식 $P(t)$를 정의하면 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여 $|f(t) - P(t)| < 2\epsilon$이 된다. 이때, 함수 $t \mapsto \dfrac{b-a}{2\pi}(t+\pi) + a$의 역함수가 $x \mapsto \dfrac{2\pi(x-a)}{b-a} - \pi$임에 주목하여 함수 $\widetilde{Q} : [a, b] \to \mathbb{C}$를 각 $x \in [a, b]$에 대하여

$$\widetilde{Q}(x) = P\left(\frac{2\pi(x-a)}{b-a} - \pi\right)$$

라 두면 $\widetilde{Q}$는 다항함수 P와 일차함수의 합성함수이므로 다항함수이다. 더 나아가, 임의로 $x_0 \in [a, b]$를 잡으면 $x_0 = \dfrac{b-a}{2\pi}(t_0 + \pi) + a$을 만족하는 $t_0 \in [-\pi, \pi]$가 존재하는데, 이로부터

$$\left| \widetilde{Q}(x_0) - \widetilde{g}(x_0) \right| = |P(t_0) - f(t_0)| < 2\epsilon$$

이 되는 것을 알 수 있다. 마지막으로 함수 $Q : [a, b] \to \mathbb{C}$를

$$Q(x) = \widetilde{Q}(x) + \frac{g(b) - g(a)}{b-a}(x-a)$$

라 정의하면 Q는 두 다항함수의 합으로써 다항함수이고, 임의의 $x \in [a, b]$에 대해

$$|g(x) - Q(x)| = \left| \widetilde{g}(x) - \widetilde{Q}(x) \right| < 2\epsilon$$

가 되는 것을 알 수 있다. 이는 즉 g로 고르게 수렴하는 다항함수열을 잡을 수 있다는 뜻이므로, 바이어슈트라스 정리가 증명되었다.

다만 이렇게 잡은 다항함수열은 복소계수 다항함수열으로, 만약 g가 실함수로 주어져 있어 g로 고르게 수렴하는 실계수 다항함수열을 잡고 싶다면 다음과 같이 하면 된다. 먼저 임의의 복소수 $z \in \mathbb{C}$에 대하여, 실수 a와 b에 대해 $z = a + bi$라 놓으면

$$|\mathrm{Re}\, z| = |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

임에 주목하자. 이제, 위에서와 같이 f로 고르게 수렴하는 복소계수 다항함수열 $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 잡고, 실계수 다항함수열 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 잡는데 있어 각 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 Q_n이 어떤 음이 아닌 정수 k와 복소수 $z_0, z_1, \cdots, z_k$에 대하여

$$Q_n(t) = z_0 + z_1 t + \cdots + z_k t^k$$

으로 주어진다고 할 때 R_n을

$$R_n(t) = (\mathrm{Re}\, z_0) + (\mathrm{Re}\, z_1)\, t + \cdots + (\mathrm{Re}\, z_k)\, t^k$$

이라 놓자. 이때, $t \in \mathbb{R}$인 경우 $\mathrm{Re}\Big(Q_n(t)\Big) = R_n(t)$이 되는 것에 주목하자. 따라서, g가 실함수로써 임의의 $t \in [a,b]$에 대해 $g(t) \in \mathbb{R}$이고, 어떤 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 적당한 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $\|g - Q_n\|_\infty < \epsilon$이면

$$\begin{aligned}
\|g - R_n\|_\infty &= \sup\{|g(t) - R_n(t)| : t \in [a,b]\} \\
&= \sup\left\{\left|\mathrm{Re}\Big(g(t) - Q_n(t)\Big)\right| : t \in [a,b]\right\} \\
&\le \sup\{|g(t) - Q_n(t)| : t \in [a,b]\} \\
&= \|g - Q_n\|_\infty < \epsilon
\end{aligned}$$

이 성립한다. 이는 즉 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 또한 g로 고르게 수렴하는 것을 뜻하므로, g로 고르게 수렴하는 실계수 다항함수열은 이와 같이 잡을 수 있다.

9.5.13. (가) 유계변동함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$가 주어졌다고 하자. 이때, 함수 $f_r, f_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$을 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$f_r(t) = \mathrm{Re}\, f(t), \quad f_i(t) = \mathrm{Im}\, f(t)$$

이 되도록 정의하자.

임의의 복소수 $z \in \mathbb{C}$에 대하여, 실수 $a, b \in \mathbb{R}$에 대하여 $z = a + bi$라 하면

$$|\mathrm{Re}\, z| = |a| \le \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

이 된다. 따라서 임의의 $[-\pi, \pi]$의 분할 $P = \{x_0 = -\pi, x_1, \cdots, x_n = \pi\} \in \mathcal{P}[a,b]$에 대하여

$$\begin{aligned}
V_{-\pi}^{\pi}(f_r, P) = \sum_{k=1}^{n} |f_r(x_{k+1}) - f_r(x_k)| &= \sum_{k=1}^{n} \left|\mathrm{Re}\Big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\Big)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = V_{-\pi}^{\pi}(f, P)
\end{aligned}$$

인데, f가 유계변동이므로 $V_{-\pi}^{\pi}(f) = \sup\left\{V_{-\pi}^{\pi}(f, P) : P \in \mathcal{P}[-\pi, \pi]\right\} < \infty$이 되어

$$\sup\left\{V_{-\pi}^{\pi}(f_r, P) : P \in \mathcal{P}[-\pi, \pi]\right\} < \infty$$

또한 성립한다. 따라서 f_r 또한 유계변동함수이다. 그런데

$$|\mathrm{Im}\, z| = |b| \le \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$$

또한 성립하므로 같은 이유로 f_i 또한 유계변동함수이다. 이제 정리 5.4.3에 의해 단조증가함수 g_r, h_r, g_i, $h_i : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$이 존재하여 $f_r = g_r - h_r$,$f_i = g_i - h_i$이 성립하므로,

$$f = f_r + if_i = g_r - h_r + ig_i - ih_i$$

이 되어, 유계변동함수 f를 변역을 실수로 가지는 단조증가함수들의 선형결합으로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

(나) 단조증가함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$이 주어졌다고 하자. 먼저, 임의로 구간 $[a, b) \subset [-\pi, \pi]$에

대하여 특성함수 $\chi_{[a,b]}$ 의 푸리에계수를 구해보면, 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[a,b]}(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b} e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{in}e^{-int}\right]_a^b \\
&= \frac{i}{2\pi n}\left(e^{-inb} - e^{-ina}\right)
\end{aligned}$$

이 된다. 이제 임의로 $[-\pi,\pi]$의 어떤 분할 $P = \{-\pi = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = \pi\} \in \mathcal{P}[-\pi,\pi]$을 잡고, 실수 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ 이 $f(-\pi) \le \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_N \le f(\pi)$를 만족하는 계단함수

$$s = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \chi_{[a_k, a_{k+1})}$$

의 푸리에계수를 구해보면, 특성함수의 푸리에 계수를 구한 것으로부터 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$에 대하여

$$\begin{aligned}
\widehat{s}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s(t)e^{-int} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\chi_{[a_k,a_{k+1})}(t)e^{-int} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[a_k,a_{k+1})}(t)e^{-int} \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\alpha_k i}{n}\left(e^{-ina_{k+1}} - e^{-ina_k}\right) \\
&= \frac{i}{2\pi n}\left(\alpha_N e^{-in\pi} - \alpha_1 e^{in\pi} + \sum_{k=2}^{N}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)e^{-ina_k}\right)
\end{aligned}$$

이 된다. 그런데 임의의 실수 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\left|e^{ix}\right| = 1$이고, 특히 $n \in \mathbb{Z}$이면 $e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n$이기 때문에

$$\begin{aligned}
|\widehat{s}(n)| &= \left|\frac{i}{2\pi n}\left(\alpha_N e^{-in\pi} - \alpha_1 e^{in\pi} + \sum_{k=2}^{N}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)e^{-ina_k}\right)\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi|n|}\left(\left|(-1)^n(\alpha_N - \alpha_1)\right| + \sum_{k=2}^{N}\left|(\alpha_{k-1} - \alpha_k)e^{-ina_k}\right|\right) \\
&= \frac{1}{2\pi|n|}\left(\alpha_N - \alpha_1 + \sum_{k=2}^{N}(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right) \\
&= \frac{\alpha_N - \alpha_1}{\pi|n|}
\end{aligned}$$

임을 얻는다. 이때, $\alpha_N - \alpha_1 \le f(\pi) - f(-\pi)$인데 f가 단조증가함수이므로 $f(\pi) - f(-\pi) = V_{-\pi}^{\pi}(f)$인 것에 주목하면, 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$에 대하여 부등식

$$|\widehat{s}(n)| \le \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{\pi|n|}$$

이 성립함을 알 수 있다.

이제 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 적당한 자연수 $N \in \mathbb{N}$을 골라 $\dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{N} < \epsilon$이 되도록 할 수 있고, 이때 각 $k = 1, 2, \cdots, N$에 대하여

$$\alpha_k = f(-\pi) + (k-1)\frac{f(\pi) - f(-\pi)}{N}$$

이라 놓으면 실제로 $f(-\pi) = \alpha_1 \le \alpha_2 \le \cdots \le \alpha_N \le f(\pi)$이 된다. 그러한 α_k들에 대하여 계단함수 $\sigma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$을 정의함에 있어, 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대해 $\alpha_k \le f(t) < \alpha_{k+1}$을 만족하는 $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$가 존재하면 $\sigma(t) = \alpha_k$라 하고, 그렇지 않고 $f(t) \ge \alpha_N$이면 $\sigma(t) = \alpha_N$이라 두자. 그러면 각 $k = 1, \cdots, N-1$에 대해

$$0 \le \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{N} < \epsilon$$

이고, 또한 $0 \le f(\pi) - \alpha_N = \dfrac{f(\pi) - f(-\pi)}{N} < \epsilon$이므로 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대해 $\sigma(t) \le f(t) < \sigma(t) + \epsilon$이 된다. 즉, 각 $t \in [-\pi, \pi]$에 대해 $|f(t) - \sigma(t)| < \epsilon$이다. 이에 주목하면 각 0이 아닌 정수 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$에 대해

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n) - \widehat{\sigma}(n)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(f(t) - \sigma(t)\Big)e^{-int}dt\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\Big(f(t) - \sigma(t)\Big)e^{-int}\right|dt \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\epsilon\, dt \;=\; \epsilon
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 따라서 각 0이 아닌 정수 n에 대해

$$\widehat{f}(n) \;\le\; \widehat{\sigma}(n) + \epsilon \;\le\; \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{\pi\,|n|} + \epsilon$$

이 성립한다. 그런데 위 부등식이 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 성립해야 하기 때문에,

$$\widehat{f}(n) \le \frac{V_{-\pi}^{\pi}(f)}{\pi\,|n|}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

이어야 하는 것을 알 수 있다.

(다) 유계변동함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$가 주어지면 **(가)**에서와 같이 변역을 실수로 가지는 어떤 단조증가함수들 g_r, g_i, h_r, h_i에 대하여

$$f = g_r - h_r + ig_i - ih_i$$

와 같이 나타낼 수 있다. 즉 f의 푸리에계수는 각 $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$에 대하여

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(g_r(t) - h_r(t) + ig_i(t) - ih_i(t))e^{-int}dt \\
&= \widehat{g_r}(n) - \widehat{h_r}(n) + i\widehat{g_i}(n) - i\widehat{h_i}(n)
\end{aligned}$$

이 된다. 이제 **(나)**의 결과를 이용하면

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(n)\right| &\le |\widehat{g_r}(n)| + \left|-\widehat{h_r}(n)\right| + |i\widehat{g_i}(n)| + \left|-i\widehat{h_i}(n)\right| \\
&\le \frac{1}{\pi\,|n|}\Big(V_{-\pi}^{\pi}(g_r) + V_{-\pi}^{\pi}(h_r) + V_{-\pi}^{\pi}(g_i) + V_{-\pi}^{\pi}(h_i)\Big)
\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 따라서 $C = \dfrac{V_{-\pi}^{\pi}(g_r) + V_{-\pi}^{\pi}(h_r) + V_{-\pi}^{\pi}(g_i) + V_{-\pi}^{\pi}(h_i)}{\pi}$ 라 두면 각 $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ 에 대하여 $\left|\widehat{f}(n)\right| \leq \dfrac{C}{n}$ 이 성립한다.

9.5.14. 풀이를 시작하기 전에 먼저 다음 보조정리를 살펴보자.

보조정리. 음이 아닌 실수들의 단조감소수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 에 대하여, 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 이다.

증명) 급수의 n 번째 부분합 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ 을 S_n 이라 놓자. 그러면

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

이 된다. 그런데 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 이 단조감소수열임을 이용하면

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = na_{2n}$$

임을 알 수 있다. 즉 부등식

$$0 \leq 2n\, a_{2n} \leq 2(S_{2n} - S_n) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

이 성립하는데, 이때 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n = 0$ 인 것에 주목하자. 그러면 샌드위치 정리에 의해 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2n\, a_{2n} = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 한편, 부등식

$$0 \leq (2n+1)a_{2n+1} = 2n\, a_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2n\, a_{2n} + a_{2n+1}$$

에 주목하면, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2n\, a_{2n} = 0$ 이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하기 때문에 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 임과 함께 샌드위치 정리를 이용하면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0$ 또한 되는 것을 알 수 있다.

이제 임의로 $\epsilon > 0$ 이 주어졌다고 하자. 그러면 두 자연수 N_1, N_2 가 존재하여 $n \geq N_1$ 이면 $|2n\, a_{2n}| < \epsilon$ 이, $n \geq N_2$ 이면 $|(2n+1)a_{2n+1}| < \epsilon$ 이 성립한다. 따라서 $N = \max\{2N_1, 2N_2+1\}$ 이라 두면 $n \geq N$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $|na_n| < \epsilon$ 이 성립하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ 이다. □

이 보조정리가 문제를 해결하는 데 도움이 될 것이다.

(가) 임의의 자연수 $N \in \mathbb{N}$에 대하여

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} n\Big(a(n-1)+a(n+1)-2a(n)\Big) &= \sum_{n=1}^{N} n\Big(\Big(a(n-1)-a(n)\Big)-\Big(a(n)-a(n+1)\Big)\Big) \\
&= \Big(a(0)-a(1)\Big) - \ \Big(a(1)-a(2)\Big) \\
&\quad + 2\Big(a(1)-a(2)\Big) - 2\Big(a(2)-a(3)\Big) \\
&\qquad + 3\Big(a(2)-a(3)\Big) - 3\Big(a(3)-a(4)\Big) \\
&\qquad\quad \ddots \\
&\qquad\qquad + N\Big(a(N-1)-a(N)\Big) - N\Big(a(N)-a(N+1)\Big) \\
&= \Big(a(0)-a(1)\Big) + \cdots + \Big(a(N-1)-a(N)\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad - N\Big(a(N)-a(N+1)\Big) \\
&= a(0) - a(N) - N\Big(a(N)-a(N+1)\Big)
\end{aligned}$$

이 성립한다. 그런데 $a \in c_0(\mathbb{Z})$이므로 $\lim_{N\to\infty} a(N) = 0$이고, 앞서 본 보조정리에 의해 $\lim_{N\to\infty} Na(N) = 0$이며 따라서 또한 $\lim_{N\to\infty} Na(N+1) = 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a(n-1)+a(n+1)-2a(n)\Big) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} n\Big(a(n-1)+a(n+1)-2a(n)\Big) = a(0)$$

이 된다. 이제 $a(0) = c_0$이므로 주어진 등식이 성립한다.

(나) 주어진 조건대로 $\widehat{f} = a$이기 위해서는 함수 f가

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a(n-1)+a(n+1)-2a(n)\Big)K_n(x)$$

와 같이 되어야 한다. f가 $\mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$의 원소임을 보이기 위해서는 $\int_{-\pi}^{\pi} |f| < \infty$이 성립함을 보여야 한다. 그런데 f는 0에서 함수값이 잘 정의되지 않을 가능성이 있다. 예를 들어, $a(n) = \dfrac{1}{n+1}$인 경우 문제에서 주어진 급수가 $x = 0$일 때 수렴하지 않음은 각 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $K_n(0) = n$임에 유의하면 어렵지 않게 확인할 수 있다. 즉, 적분 $\int_{-\pi}^{\pi} |f|$은 적분 구간에서 0을 제외하는 특이적분으로 보아야 할 것이다. 이제 f가 2π-주기함수임에 주목하면 특이적분 $\int_{0}^{2\pi} |f|$이 수렴하는 것을 보이면 충분함을 알 수 있다. 이 특이적분이 수렴함을 보임에 있어 좀 더 일반화된 특이적분

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx, \quad m \in \mathbb{Z}$$

을 생각하자. 그런데 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대해 $K_n \geq 0$이고, 가정에 의해 $a(n-1)-2a(n)+a(n+1) \geq 0$이므로 f는 양함수들의 합으로 정의되어 양함수가 된다. 따라서 7.3절에서와 같이 $\cos_+$와 $\cos_-$를 정의하면 $0 \leq \cos_+ \leq 1$, $0 \leq \cos_- \leq 1$이고

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx = \int_0^{2\pi} f(x)\cos_+(mx)dx - \int_0^{2\pi} f(x)\cos_-(mx)dx$$

이 성립한다. 이제 임의로 $\delta, \epsilon \in (0,\pi]$를 잡고, $\eta = \min\{\delta,\epsilon\}$이라 놓자. 그러면 임의의 $x \in [\delta, 2\pi-\epsilon]$에 대해 $\sin^2 \dfrac{x}{2} \geq \sin^2 \dfrac{\eta}{2}$이 성립하므로

$$0 \leq nK_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\eta}{2}}$$

이 된다. 또한 임의로 $\zeta > 0$이 주어졌다고 하고, 자연수 N_0을 $n \geq N_0$이면 $|a_n| < \frac{\zeta \sin^2 \frac{\eta}{2}}{4}$이 성립하도록 잡자. 각 자연수 $N = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) nK_n(x) \cos_+(mx)$$

이라 했을 때, $N > M \geq N_0$이면 임의의 $x \in [\delta, 2\pi - \epsilon]$에 대하여

$$\begin{aligned}
|S_N(x) - S_M(x)| &= \sum_{k=M+1}^{N} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) nK_n(x) \cos_+(mx) \\
&\leq \sum_{k=M+1}^{N} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) \frac{\cos_+(mx)}{\sin^2 \frac{\eta}{2}} \\
&= \frac{\cos_+(mx)}{\sin^2 \frac{\eta}{2}} \sum_{k=M+1}^{N} \Big(\Big(a(n-1) - a(n)\Big) - \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big) \\
&= \frac{\cos_+(mx)}{\sin^2 \frac{\eta}{2}} \Big(\Big(a_M - a_{M+1}\Big) - \Big(a_N - a_{N+1}\Big)\Big) \\
&\leq \frac{1}{\sin^2 \frac{\eta}{2}} \Big(\, |a_M| + |a_{M+1}| + |a_N| + |a_{N+1}| \,\Big) \quad < \zeta
\end{aligned}$$

이 성립하므로 함수열 $\{S_N\}_{N\in\mathbb{N}}$은 고른코시수열이고, 따라서 $f(x)\cos_+(mx)$로 고르게 수렴한다. 이로부터

$$\begin{aligned}
&\int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} f(x) \cos_+(mx) dx \\
&= \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} \lim_{N\to\infty} S_N(x) dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} \sum_{n=1}^{N} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) nK_n(x) \cos_+(mx) dx \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) nK_n(x) \cos_+(mx) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) n \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} K_n(x) \cos_+(mx) dx
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 이제 위 식에 δ, ϵ이 $(0, \pi]$의 범위 내에 있을 때의 상한을 취해주고자 하는데, 마지막 줄의 급수의 각 항은 음이 아니고, 각 항에서 $x \mapsto K_n(x)\cos_+(mx)$의 적분은 양함수의 적분이므로 $\delta, \epsilon \to 0$일 때 최대값에 수렴한다. 다시 말해,

$$\sup \left\{ \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} K_n(x) \cos_+(mx) dx : \delta, \epsilon \in (0, \pi] \right\} = \int_0^{2\pi} K_n(x) \cos_+(mx) dx$$

이고, $\Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) n \geq 0$임에 유의하면 마지막 줄의 상한은

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) n \int_0^{2\pi} K_n(x) \cos_+(mx) dx$$

가 된다. 반면 $x \mapsto f(x)\cos_+(mx)$는 양함수이므로 첫째 줄의 상한은

$$\sup \left\{ \int_{\delta}^{2\pi-\epsilon} f(x) \cos_+(mx) dx : \delta, \epsilon \in (0, \pi] \right\} = \int_0^{2\pi} f(x) \cos_+(mx) dx$$

이 된다. 따라서 결과를 종합하면, 임의의 $m \in \mathbb{Z}$와 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 등식

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos_+(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos_+(mx)dx$$

이 성립함을 알 수 있다. 그리고 사실 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$임을 보이기 위해서는 이 등식만으로도 충분하다. 실제로, $m = \alpha = 0$인 경우를 생각하면 $x \mapsto \cos(mx)$는 상수함수 1이 되어 $x \mapsto \cos_+(mx)$ 또한 상수함수 1이 되고, 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = 1$이므로 **(가)**에서 얻은 결과를 떠올리면

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n = a(0) < \infty$$

인 것을 알 수 있다. 따라서 이와 같이 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$인 것을 보일 수 있다.

이제 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi,\pi]$임을 알게 되었으므로, f의 푸리에계수를 구해보자. 그러기 위해서, 앞 문단에서 $\cos_+$의 성질 중 우리가 사용한 성질은 $0 \le \cos_+ \le 1$이라는 것 뿐이었음에 주목하자. 그런데 이는 $\cos_-$도 마찬가지로 가지는 성질이기 때문에 등식

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos_-(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos_-(mx)dx$$

또한 같은 방식으로 성립한다는 것을 보일 수 있다. 더 나아가, $\sin_+$와 $\sin_-$도 7.3절에서와 같이 정의하면 임의의 $m \in \mathbb{Z}$에 대해 $0 \le \sin_+ \le 1$, $0 \le \sin_- \le 1$이므로 두 등식

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin_+(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n\int_0^{2\pi} K_n(x)\sin_+(mx)dx$$
$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin_-(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n\int_0^{2\pi} K_n(x)\sin_-(mx)dx$$

또한 같은 방식으로 성립함을 보일 수 있다. 편의상 $\beta_n = \Big(a(n-1)-2a(n)+a(n+1)\Big)n$이라 두면 이제

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx &= \int_0^{2\pi} f(x)\cos_+(mx)dx - \int_0^{2\pi} f(x)\cos_-(mx)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos_+(mx)dx - \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos_-(mx)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\Big(\cos_+(mx)-\cos_-(mx)\Big)dx\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos(mx)dx\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 꼭 같은 방식으로 등식

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\sin(mx)dx$$

또한 얻게 된다. 마지막으로 각 정수 $m \in \mathbb{Z}$에 대하여 $e^{-imx} = \cos mx - i\sin mx$임을 떠올리면

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-imx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx dx - \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\cos(mx)dx - \frac{i}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\int_0^{2\pi} K_n(x)\sin(mx)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)\Big(\cos(mx) - i\sin(mx)\Big)dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\widehat{K_n}(m)
\end{aligned}$$

을 얻는다.

이제 각 $n \in \mathbb{N}$과 $m \in \mathbb{Z}$에 대해 $\widehat{K_n}(m)$을 구할 것이다. 먼저 디리클렛핵을 생각해보면, 각 $n = 0, 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

인데 집합 $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$가 정규직교집합이므로

$$\widehat{D_n}(m) = \begin{cases} 1, & -n \le m \le n \\ 0, & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

임은 쉽게 알 수 있다. 한편 페제르핵은 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$K_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots D_{n-1}(t)}{n}$$

와 같이 주어지므로 $K_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}K_n + \dfrac{1}{n+1}D_n$이 된다. 이를 염두에 두고,

$$\widehat{K_n}(m) = \begin{cases} \dfrac{n-|m|}{n}, & -n \le m \le n \\ 0, & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

임을 n에 대한 수학적 귀납법을 이용해 보이자. 만약 $n = 1$이면 $K_1 = D_0$이므로 앞서 살펴본 디리클렛핵의 푸리에계수에 의해 당연하다. 이제 어떤 자연수 n에 대해 K_n의 푸리에계수가 위와 같이 주어진다고 가정하고 K_{n+1}의 푸리에계수를 살펴보자. 사상 $g \mapsto \widehat{g}$가 선형사상이므로 각 정수 $m \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$\widehat{K_{n+1}}(m) = \frac{n}{n+1}\widehat{K_n}(m) + \frac{1}{n+1}\widehat{D_n}(m)$$

이다. 그런데 $-n \le m \le n$이면 귀납가정으로부터

$$\widehat{K_{n+1}}(m) = \frac{n}{n+1}\frac{n-|m|}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-|m|}{n+1}$$

임을 알 수 있다. 반대로, $|m| > n$이면 $\widehat{K_n}(m) = 0$이고 $\widehat{D_n}(m) = 0$이므로 $\widehat{K_{n+1}}(m) = 0$이다. 그런데 $m = \pm(n+1)$이면 $\dfrac{n-|m|}{n} = 0$이므로 결국

$$\widehat{K_{n+1}}(m) = \begin{cases} \dfrac{n-|m|}{n}, & -(n+1) \le m \le n+1 \\ 0, & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

이 된다. 이로써 K_n의 푸리에계수가 위에서 본 것과 같이 주어짐을 수학적 귀납법으로 보였다.

다시 f의 푸리에계수를 구하는 과정으로 돌아가서, m을 어떤 0이 아닌 정수로 고정하면 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $n \geq |m|$인 경우에만 $\widehat{K_n}(m) \neq 0$이므로

$$\begin{aligned}\widehat{f}(m) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \widehat{K_n}(m) \\ &= \sum_{n=|m|}^{\infty} \beta_n \widehat{K_n}(m)\end{aligned}$$

이다. 이제 β_n과 $\widehat{K_n}(m)$을 각각 풀어 써 계산하면

$$\begin{aligned}\widehat{f}(m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \beta_n \widehat{K_n}(m) \\ &= \sum_{n=|m|}^{\infty} \Big(a(n-1) - 2a(n) + a(n+1)\Big) n \, \frac{n-|m|}{n} \\ &= \sum_{n=|m|}^{\infty} \Big(\Big(a(n-1) - a(n)\Big) - \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big)\Big(n - |m|\Big)\end{aligned}$$

이 된다. 이제 N을 $|m|$보다 큰 자연수라고 하면

$$\begin{aligned}&\sum_{n=|m|}^{N} \Big(\Big(a(n-1) - a(n)\Big) - \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big)\Big(n - |m|\Big) \\ &= \sum_{n=|m|-1}^{N-1} \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big(n + 1 - |m|\Big) - \sum_{n=|m|}^{N} \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big(n - |m|\Big) \\ &= -\Big(a(N) - a(N+1)\Big)\Big(N - |m|\Big) + \sum_{n=|m|}^{N-1} \Big(a(n) - a(n+1)\Big) \\ &= |m| \Big(a(N) - a(N+1)\Big) - Na(N) + Na(N+1) + a(|m|) - a(N)\end{aligned}$$

이 성립하고, $N \to \infty$일 때 $a(N) \to 0$, $Na(N) \to 0$임은 $a \in c_0(\mathbb{Z})$와 앞서 살펴본 보조정리에 의해 알 수 있으므로

$$\begin{aligned}\widehat{f}(m) &= \sum_{n=|m|}^{\infty} \Big(\Big(a(n-1) - a(n)\Big) - \Big(a(n) - a(n+1)\Big)\Big)\Big(n - |m|\Big) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(|m| \Big(a(N) - a(N+1)\Big) - Na(N) + Na(N+1) + a(|m|) - a(N)\Big) \\ &= a(|m|)\end{aligned}$$

이 된다. 따라서, $m \geq 0$이면 $\widehat{f}(m) = a(m)$이고, $m \leq 0$이면 $\widehat{f}(m) = a(|m|) = a(-m) = a(m)$이므로 $\widehat{f} = a$이다.

(다) 임의로 $a \in c_0(\mathbb{Z})$가 주어졌다고 하자. 먼저 어떤 0으로 수렴하는 감소수열 $\alpha = \{\alpha(n)\}_{n\geq 0}$이 존재하여 각 음이 아닌 정수 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대해 $\alpha(n) \geq \max\{|a(n)|, |a(-n)|\}$을 만족함을 보일 것이다. 편의를 위해 각 $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대해 $\widetilde{a}(n) = \max\{|a(n)|, |a(-n)|\}$라 하면 $\widetilde{a}$은 음이 아닌 실수의 수열이고, $\lim_{n\to\pm\infty} a(n) = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} \widetilde{a}(n) = 0$이다.

이제 α를 정의하기 위해 정수열 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$를 귀납적으로 다음과 같이 잡자. 먼저, $\widetilde{a}$는 0으로 수렴하는 수열이므로 유계이다. 따라서 $\sup\{\widetilde{a}(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$는 유한한 값으로 주어진다. 이

상한값을 β_1이라 놓자. 만약 $\beta_1 = 0$이면 $\widetilde{a}$는 모든 항이 0인 수열이고, 이 경우에는 $n_1 = 0$로 둔다. 그렇지 않은 경우 $\widetilde{a}(N_1) > 0$을 만족하는 어떤 $N_1 \in \mathbb{N}$이 존재하게 된다. 그런데 $\widetilde{a}$가 0으로 수렴하기 때문에, 어떤 자연수 $M_1 \in \mathbb{N}$이 존재하여 $n > M_1$이면 $\widetilde{a}(n) < \dfrac{\beta_1}{2}$를 만족하게 되므로

$$\beta_1 = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\} = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = 0, 1, 2, \cdots, M_1\}$$

이 되는 것에 주목하자. 이때, 위 식에서 마지막 항은 유한집합에서 상한을 취한 것이므로 실제로 어떤 0 이상 M_1 이하의 정수 k가 존재하여 $\widetilde{a}(k) = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = 0, 1, 2, \cdots, M_1\} = \beta_1$을 만족한다. 이러한 성질을 만족하는 정수들 중, 가장 작은 것을 n_1으로 둔다. 그러면 $\beta_1 = 0$인 경우에도 n_1은

$$\widetilde{a}(n_1) = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$$

를 만족하는 가장 작은 음이 아닌 정수로 정의되었음에 유의하자. 이제 어떤 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $n_1, n_2, \cdots, n_k$가 정의되었다고 하자. 그러면 다시 위의 과정을 반복하여 n_{k+1}을 성질

$$\widetilde{a}(n_{k+1}) = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = n_k + 1, n_k + 2, \cdots\}$$

을 만족하는 음이 아닌 정수들 중 가장 작은 것으로 정의할 수 있다.

이렇게 정의된 정수열 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$이 가지는 몇 가지 성질들을 알아보자. 먼저, 귀납적으로 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$을 정의한 과정에 의해 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $n_{k+1} > n_k$인 것을, 즉 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$이 증가수열임을 알 수 있다. 또한 편의상 $n_0 = -1$이라 했을 때 각 $k = 1, 2, \cdots$에 대하여

$$\begin{aligned}\widetilde{a}(n_{k+1}) &= \sup\{\widetilde{a}(n) : n = n_k + 1, n_k + 2, \cdots\} \\ &\le \sup\{\widetilde{a}(n) : n = n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \cdots\} = \widetilde{a}(n_k)\end{aligned}$$

이므로 $\{\widetilde{a}(n_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$는 단조감소수열이 된다. 마지막으로, $n_{k-1} < m \le n_k$을 만족하는 모든 자연수 m에 대하여, n_k의 정의에 의해 $\widetilde{a}(m) \le \widetilde{a}(n_k)$이다.

이제 수열 $\widetilde{\alpha} = \{\widetilde{\alpha}(m)\}_{m\ge 0}$을, 각 0 이상의 정수 $m = 0, 1, \cdots$에 대하여 $n_{k-1} < m \le n_k$을 만족하는 자연수 k를 잡아 $\widetilde{\alpha}(m) = \widetilde{a}(n_k)$이라 하자. 그러면 앞 문단에서 살펴본 것들에 의해, $\widetilde{\alpha}$는 $\widetilde{\alpha}(m) = \widetilde{a}(n_k) \ge \widetilde{a}(m) \ge 0$를 만족하는 단조감소수열임을 알 수 있다. 따라서 $\widetilde{\alpha}$는 어떤 값으로 수렴하는 것도 알 수 있는데, 그 수렴값을 λ라 놓자. 만약 $\lambda > 0$이라면 임의의 자연수 m에 대하여 $\widetilde{\alpha}(m) \ge \lambda$을 만족할 것이다. 한편 $\lim_{m\to\infty} \widetilde{a}(m) = 0$이므로 어떤 자연수 M이 존재하여 $m > M$이면 $\widetilde{a}(m) < \dfrac{\lambda}{2}$이 성립하고, 이때 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$가 자연수의 증가수열이므로 어떤 자연수 K가 존재하여 $n_K \ge M$을 만족한다. 그런데 그렇다면

$$\lambda \le \widetilde{\alpha}(n_{K+1}) = \widetilde{a}(n_{K+1}) = \sup\{\widetilde{a}(n) : n = n_k + 1, n_k + 2, \cdots\} \le \frac{\lambda}{2}$$

이 되기 때문에 모순이 발생한다. 따라서 $\lambda = 0$임을 알 수 있다. 이와 같이 정의한 수열 $\widetilde{\alpha}$에 대하여, 수열 α를 각 $m = 0, 1, \cdots$에 대하여 $\alpha(m) = \widetilde{\alpha}(m) + \dfrac{1}{m+1}$이라고 하면 α는 $\alpha(m) \ge \widetilde{a}(m)$를 만족하는 감소수열이 되고, 또한 $\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = 0$이 된다.

이렇게 얻은 감소수열 α를 이용하여 또다른 수열 $a' = \{a'(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$를 정의할 것인데, n이 음이 아닌 정수일 때의 $a'(n)$부터 정의하자. 먼저 $a'(0) = \alpha(0)$, $a'(1) = \alpha(1)$이라 두고, 귀납적으로

$$a'(n+2) = \max\{\alpha(n+2), 2a'(n+1) - a'(n)\}, \quad n \ge 0$$

이라 두자. 이제 이와 같이 정의한 수열 $\{a'(n)\}_{n\geq 0}$이 가지는 성질들을 살펴보기 위해, 임의로 0 이상의 정수 n이 주어졌을 때 $a'(n) > a'(n+1)$이 성립한다고 가정하자. 그러면

$$a'(n+1) > a'(n+1) - \Big(a'(n) - a'(n+1)\Big) = 2a'(n+1) - a'(n)$$

이고 $a'(n+1) \geq \alpha(n+1) > \alpha(n+2)$이므로

$$a'(n+1) > \max\{\alpha(n+2), 2a'(n+1) - a'(n)\} = a'(n+2)$$

또한 성립한다. 그런데 $a'(0) > a'(1)$이므로, 귀납적으로 $\{a'(n)\}_{n\geq 0}$이 감소수열임을 알 수 있다. 한편, 각 음이 아닌 정수 n에 대하여 $a'(n) \geq \alpha(n) > 0$이므로 $\{a'(n)\}_{n\geq 0}$은 각 항이 양수인 감소수열이므로 수렴하는 수열이다. 이때 $\lim_{n\to\infty} a'(n) = L$이라 두고, $L = 0$임을 보이기 위해 $L > 0$이라 가정하고 모순을 이끌어내자. 만약 $L > 0$이라면, $\lim_{m\to\infty} \alpha(m) = 0$인 것과 함께 생각했을 때, 어떤 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$이면 $a'(n) \geq L$인 것과 $\alpha(n) < L$인 것을 동시에 만족할 수 있다. 그런데 그렇다면, 정의상 모든 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $a'(n)$은 $\alpha(n)$이거나 $2a'(n-1) - a'(n+2)$이므로, $n \geq N$이면 항상 $a'(n) = 2a'(n-1) - a'(n+2)$일 수밖에 없다. 이는 즉 N보다 크거나 같은 모든 자연수 n에 대하여

$$a'(n) - a'(n-1) = a'(n-1) - a'(n-2)$$

가 성립한다는 것이고, 다시 말해 $n \geq N$이면 $a'(n) - a'(n-1)$은 어떤 일정한 값이라는 것이다. 따라서 수열 $a'(N), a'(N+1), a'(N+2), \cdots$는 등차수열이면서 감소수열이 되어야 하는데, 이는 $\{a'(n)\}_{n\geq 0}$이 수렴한다는 것에 모순이 된다. 따라서 $L = 0$임을 알 수 있다.

지금까지 $\{a'(n)\}_{n\geq 0}$에 대하여 살펴본 것을 종합하면, 이 수열은 0으로 수렴하는 양수의 수열임을 알 수 있다. 그런데 정의에 의해

$$a'(n+1) \geq 2a'(n) - a'(n-1) \iff a'(n) \leq \frac{1}{2}\Big(a'(n-1) + a'(n+1)\Big)$$

임은 당연하다. 이제 각 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 $a'(-n) = a'(n)$이라 두면 $a' \in c_0(\mathbb{Z})$가 되고, 함수 $\mathfrak{f}$를

$$\mathfrak{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a'(n-1) + a'(n+1) - 2a'(n)\Big)K_n(x)$$

이라 정의하면 **(나)**에서 살펴본 바에 의해 $\widehat{\mathfrak{f}} = a'$이 된다. 마지막으로, 임의의 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 부등식

$$a'(n) = a'(|n|) \geq \alpha(|n|) \geq \widetilde{a}(|n|) \geq |a(n)|$$

이 성립하는 것에 주목하자. 따라서, 임의로 $a \in c_0(\mathbb{Z})$가 주어졌을 때 a'를 지금까지의 과정대로 정의하면 a'는 성질

$$a'(n) \geq |a(n)|, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

을 만족하는 동시에 본문에서 식 (46)으로 주어진 사상 $f \mapsto \widehat{f}$의 치역 안에 존재한다.

이제 이 결과를 명제 9.4.7과 비교해보자. 명제 9.4.7에 의하면, 함수 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$가 홀함수이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\widehat{f}(n)$의 부분합수열은 유계여야 한다. 반면 $f \in \mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$가 짝함수라면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\widehat{f}(n)$의 부분합수열이 유계가 아닐 수도 있음을 이 연습문제에서 살펴본 것을 통해 보일 수 있다. 예를 들어, 수열 $a \in c_0(\mathbb{Z})$을

$$a(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\log|n|}, & |n| \geq 2 \\ 10, & n = \pm 1 \\ 100, & n = 0 \end{cases}$$

이라 두자. 그러면 $\log 2$가 약 1.4427이므로 부등식

$$a(0) - a(1) \geq a(1) - a(2) \geq a(2) \geq a(2) - a(3)$$

이 성립하고, $n \geq 2$이면

$$a(n) - a(n+1) = \frac{1}{\log(n)} - \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{\log(n+1) - \log(n)}{(\log n)\log(n+1)} = \frac{1}{(\log n)\log(n+1)} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

임으로부터 $n \mapsto a(n) - a(n+1)$이 감소함수임을 알 수 있으므로 $a(n) - a(n+1) \geq a(n+1) - a(n+2)$ 이 성립하는 것도 알 수 있다. 따라서 임의의 $n \in \mathbb{N}$에 대하여

$$a(n-1) - a(n) \geq a(n) - a(n+1) \iff a(n) \leq \frac{1}{2}\Big(a(n-1) + a(n+1)\Big)$$

이 성립하므로, 함수 f를 **(나)**에서와 같이

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(a(n-1) + a(n+1) - 2a(n)\Big)K_n(x)$$

이라 놓으면 f는 $\mathcal{R}^1[-\pi, \pi]$의 원소이면서 짝함수이고 각 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 에 대하여 $\widehat{f}(n) = a(n)$ 이 된다. 그러나 각 $N = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\widehat{f}(n) = 10 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\log(n+1)}{n+1}$$

인데, $n \geq 2$이면 $\dfrac{\log(n+1)}{n+1} \geq \dfrac{1}{n+1}$이고 급수 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$는 ∞로 발산하므로 수열 $\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\widehat{f}(n)\right\}_{N\in\mathbb{N}}$ 은 유계가 아님을 알 수 있다.

9.5.15. 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$가 미분가능한 C^1-주기함수이므로 각 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$$

이 성립한다. 그런데 f가 홀함수이므로 $u = -t$라 하면 $\dfrac{du}{dt} = -1$이므로

$$\begin{aligned} 2\pi\widehat{f}(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} -f(-t)dt + \int_{0}^{\pi} f(t)dt \\ &= -\int_{0}^{\pi} f(u)du + \int_{0}^{\pi} f(t)dt = 0 \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 임의의 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $\left|\widehat{f'}(n)\right| = n\left|\widehat{f}(n)\right| \geq \left|\widehat{f}(n)\right|$이 성립함에 주목하자.

한편 f가 미분가능한 홀함수이면

$$\begin{aligned} f'(-t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-t+h) - f(-t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\Big(f(t-h) - f(t)\Big)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t-h) - f(t)}{-h} = f'(t) \end{aligned}$$

이므로 그 도함수 f'는 짝함수가 된다. 또한 임의의 짝함수 $h : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$이 주어지면, 앞에서와 같이 $u = -t$라 했을 때

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)dt &= \int_{-\pi}^{0} h(t)dt + \int_{0}^{\pi} h(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{0} h(-t)dt + \int_{0}^{\pi} h(t)dt \\ &= \int_{0}^{\pi} h(u)du + \int_{0}^{\pi} h(t)dt \\ &= 2\int_{0}^{\pi} h(t)dt\end{aligned}$$

가 성립한다. 그런데 f'는 짝함수이므로 $|f'|^2$도 당연히 짝함수이고, f는 홀함수이므로

$$|f(-t)|^2 = |-f(-t)|^2 = |f(t)|^2$$

이므로 $|f|^2$도 짝함수가 된다. 이제 f와 그 도함수 f'가 둘 다 $[-\pi, \pi]$에서 연속이므로 $\mathcal{R}^2[-\pi, \pi]$의 원소가 되어 빠세발 등식을 적용할 수 있으며, 그러면

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f}(n)\right| \\ &\le \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{f'}(n)\right| = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\, dt = \int_{0}^{\pi} |f'(t)|^2\, dt\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 즉 주어진 첫 번째 부등식이 성립한다.

이제 임의로 함수 $g \in C^1[a, b]$가 주어져 조건 $g(a) = g(b) = 0$을 만족한다고 하고, g로부터 새로운 함수 $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$를 정의할 것이다. 먼저 $t \in [0, \pi]$이면 $h(t) = g\left(\frac{b-a}{\pi}t + a\right)$라 두고, $h(-t) = -h(t)$이 되도록 구간 $[-\pi, 0]$에서 h를 정의한다. 이때 $h(0) = g(a) = 0$이므로 0에서 h의 정의가 문제되지 않는다. 이제 구간 $[-\pi, \pi]$에서 h가 정의되었고 $h(\pi) = g(b) = 0$이므로 $h(-\pi) = -h(\pi) = h(\pi)$임에 유의하면, h가 2π-주기함수가 되도록 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의할 수 있다.

위에서와 같이 h를 정의하면, 임의의 $n \in \mathbb{Z}$와 $\alpha \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$h(2n\pi + \alpha) = h(\alpha) = -h(-\alpha) = -h(-2n\pi - \alpha)$$

이므로 h는 홀함수이다. 또한 h가 $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$에서 미분가능함은 $g \in C^1[a, b]$이기 때문에 당연하다. 그런데 다시 $u = -t$라 두면

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0+} \frac{h(t) - h(0)}{t} &= \lim_{t \to 0+} \frac{-\Big(h(-t) - h(0)\Big)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0+} \frac{h(-t) - h(0)}{-t} \\ &= \lim_{u \to 0-} \frac{h(u) - h(0)}{u}\end{aligned}$$

이므로 0에서 h의 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 알 수 있고 따라서 h는 0에서도 미분가능하다.

또한 $s = 2\pi - t$라 놓으면

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\pi-} \frac{h(t)-h(\pi)}{t-\pi} &= \lim_{t\to\pi-} \frac{-\Big(h(-t)-h(-\pi)\Big)}{t-\pi} \\
&= \lim_{t\to\pi-} \frac{h(-t)-h(-\pi)}{-t+\pi} \\
&= \lim_{t\to\pi-} \frac{h(2\pi-t)-h(2\pi-\pi)}{(2\pi-t)-(2\pi-\pi)} \\
&= \lim_{s\to\pi+} \frac{h(s)-h(\pi)}{s-\pi}
\end{aligned}$$

이므로 π에서도 h의 좌미분계수와 우미분계수가 같음을 알 수 있다. 즉 h는 π에서도 미분가능한데, h가 2π-주기함수이므로 h가 $\mathbb{R}$ 전체에서 미분가능함을 알 수 있다. 그런데 h와 g의 관계로부터 h의 정의역을 $[0,\pi]$로 제한할 경우 $h \in C^1[0,\pi]$이므로, h는 실수 전체에서 미분가능할 뿐 아니라 C^1-함수이다. 따라서 앞서 성립함을 보인 부등식으로부터

$$\int_0^\pi |h(t)|^2\,dt \le \int_0^\pi |h'(t)|^2\,dt$$

임을 알 수 있다. 그런데

$$h'(t) = \frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}g\left(\frac{b-a}{\pi}t+a\right) = \frac{b-a}{\pi}g'\left(\frac{b-a}{\pi}t+a\right)$$

임에 유의하여, $x = \dfrac{b-a}{\pi}t + a$라 두면 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{b-a}{\pi}$이므로 부등식

$$\begin{aligned}
\int_a^b |g(x)|^2\,dx &= \int_0^\pi \frac{b-a}{\pi}\left|g\left(\frac{b-a}{\pi}t+a\right)\right|^2 dt \\
&= \frac{b-a}{\pi}\int_0^\pi |h(t)|^2\,dt \\
&\le \frac{b-a}{\pi}\int_0^\pi |h'(t)|^2\,dt \\
&= \frac{b-a}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{b-a}{\pi}g'\left(\frac{b-a}{\pi}t+a\right)\right|^2 dt \\
&= \int_a^b \left|\frac{b-a}{\pi}g'(x)\right|^2 dx \\
&= \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int_a^b |g'(x)|^2\,dx
\end{aligned}$$

을 얻는다. 즉 주어진 두 번째 부등식도 성립한다.

주어진 두 번째 부등식에서 등호조건이 성립하는 함수 g의 예로 $g(x) = \sin\left(\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}\right)$를 들 수 있다. 실제로, 앞 문단에서 부등식이 성립함을 보인 과정을 생각하면, 등호조건이 성립하는 지를 보이려면 앞에서와 같이 $h(t) = g\left(\dfrac{b-a}{\pi}t+a\right)$라 두었을 때 등식

$$\int_0^\pi |h(t)|^2\,dt = \int_0^\pi |h'(t)|^2\,dt$$

이 성립하는 지만 확인하면 된다는 것을 알 수 있는데, g가 위와 같이 주어지면 $h(t) = \sin t$이 되고, 그러면 $h'(t) = \cos t$이기 때문에

$$\int_0^\pi |h(t)|^2\,dt = \int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \cos^2 t dt = \int_0^\pi |h'(t)|^2\,dt$$

이 되는 것은 쉽게 확인할 수 있다.

9.5.16. 편의를 위해 복소평면과 좌표평면을 $z \in \mathbb{C} \leftrightarrow (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$의 대응관계를 통해 동일시하자. 또한 f의 정의역을 $(-\pi, \pi]$로 보았을 때 f가 나타내는 평면상의 폐곡선을 C라 하고, C와 그에 둘러싸인 영역을 D라 하자.

(가) 편의상 f의 실수부와 허수부를 각각 u, v라 두자. 즉 두 실함수 $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$를, 임의의 $t \in \mathbb{R}$에 대하여 $f(t) = u(t) + iv(t)$를 만족하는 함수라 두자. 그러면 u와 v는 둘 다 C^1-주기함수가 된다. 또한 $f' = u' + iv'$이므로

$$|f'|^2 = |u' + iv'|^2 = (u')^2 + (v')^2$$

이 되는데, $|f'| = 1$이라는 가정에 의해

$$\sqrt{(u')^2 + (v')^2} = |f'| = |f'|^2 = (u')^2 + (v')^2$$

이 성립한다. 이 관계식과 평면상의 곡선의 길이를 나타내는 공식으로부터, C의 길이는

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\big(u'(t)\big)^2 + \big(v'(t)\big)^2} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(u'(t)\big)^2 + \big(v'(t)\big)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt$$

임을 알 수 있다. 그런데 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대해 $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$이므로 빠세발 등식에 의해

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| in\widehat{f}(n) \right|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| \widehat{f}(n) \right|^2$$

이 성립한다. 따라서 C의 길이는 $2\pi \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left| \widehat{f}(n) \right|^2$ 이 된다.

(나) 넓이는 항상 음이 아닌 실수여야 하기 때문에, 사실 D의 넓이는

$$\left| \frac{1}{4i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f'(t)\overline{f(t)} - f(t)\overline{f'(t)} \right) dt \right|$$

이 된다. 실제로, $f(t) = e^{-it}$인 경우 문제에 주어진 식대로 절댓값을 취하지 않고 D의 '넓이'를 계산하면 $-\pi$가 나온다.

주어진 함수 f가 단사함수이므로 C는 단순폐곡선이 된다. 한편, 그린 정리는 D를 포함하는 어떤 열린집합 $U \in \mathbb{R}^2$ 위에서 연속인 편도함수를 가지는 (x, y)에 대한 두 함수 $M, N : U \to \mathbb{R}$에 대하여

$$\oint_C M dx + N dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy$$

이 성립함을 알려준다. 이때 $M(x, y) = -\dfrac{1}{2} y$, $N(x, y) = \dfrac{1}{2} x$라 두면 $\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}$는 상수함수 1이 되기 때문에

$$\oint_C \frac{1}{2} x dy - \frac{1}{2} y dx = \iint_D 1 \, dx dy = \operatorname{Area}(D)$$

가 된다. 여기서 물론 $\operatorname{Area}(D)$는 D의 넓이를 뜻한다. 이제 C의 매개화인 $\big(u(t), v(t)\big)$를 이용하여 위 식의 좌변을 나타낼 것인데, 이 매개화가 C의 양의 방향을 나태내는지 음의 방향을 나타내는 지 모르기 때문에 절댓값을 씌워주면

$$\operatorname{Area}(D) = \left| \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(u(t)v'(t) - v(t)u'(t) \Big) dt \right|$$

이 되는 것을 볼 수 있다.

한편 문제에서 주어진 피적분함수를 살펴보면, $\overline{f(t)} = u(t) - iv(t)$ 이고 $\overline{f'(t)} = u'(t) - iv'(t)$ 이기 때문에

$$\begin{aligned} f'(t)\overline{f(t)} - f(t)\overline{f'(t)} &= \Big(u'(t) + iv'(t)\Big)\Big(u(t) - iv(t)\Big) - \Big(u(t) + iv(t)\Big)\Big(u'(t) - iv'(t)\Big) \\ &= 2i\Big(v'(t)u(t) - u'(t)v(t)\Big) \end{aligned}$$

인 것을 첫 번째 줄의 우변을 전개하여 계산해보면 알 수 있다. 따라서 D 의 넓이는

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(D) &= \left|\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(u(t)v'(t) - v(t)u'(t)\Big)dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{4i}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\overline{f(t)} - f(t)\overline{f'(t)}dt\right| \end{aligned}$$

와 같이 된다.

(다) 이 경우에도 마찬가지로 D 의 넓이는

$$\left|\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right|$$

이 된다. 실제로 이때도 $f(t) = e^{-it}$ 를 생각하면 $\widehat{f}(n)$ 은 $n = -1$ 일 때만 1 이고 나머지 경우에는 0 이 되므로, 주어진 식 그대로 '넓이'를 계산하면 $-\pi$ 가 나온다.

주어진 함수 f 와 그 도함수 f' 가 연속이므로 이 둘은 내적공간 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 의 원소가 된다. 그렇기 때문에 **(나)**에서 얻은 넓이를 나타내는 식을 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 에 주어진 내적의 꼴로

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(D) &= \left|\frac{\pi}{2i}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\overline{f(t)} - f(t)\overline{f'(t)}dt\right| \\ &= \left|\frac{\pi}{2i}\Big(\langle f', f\rangle - \langle f, f'\rangle\Big)\right| \end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 그런데 연습문제 9.5.7에서 보인 것을 생각해보면, 빠세발 등식이 성립하는 것은 내적공간 $\mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 의 정규직교집합 $\left\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ 에 대하여 연습문제 9.5.7의 (나)가 성립하는 것이다. 즉 연습문제 9.5.7의 (다)에 해당하는 명제인, 임의의 $\xi, \eta \in \mathcal{R}^2[-\pi,\pi]$ 에 대하여

$$\langle \xi, \eta\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left\langle \xi, e^{ink}\right\rangle\overline{\left\langle \eta, e^{ink}\right\rangle} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\widehat{\xi}(k)\overline{\widehat{\eta}(k)}$$

인 것 또한 성립한다. 그런데 $\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$ 이므로 $\overline{\widehat{f'}(k)} = -ik\overline{\widehat{f}(k)}$ 이 되어

$$\begin{aligned} \langle f', f\rangle - \langle f, f'\rangle &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n}\Big(\widehat{f'}(k)\overline{\widehat{f}(k)} - \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f'}(k)}\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} 2ik\widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k)} \\ &= 2i\sum_{k=-\infty}^{\infty} k\left|\widehat{f}(k)\right|^2 \end{aligned}$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(D) &= \left|\frac{\pi}{2i}\Big(\langle f', f\rangle - \langle f, f'\rangle\Big)\right| \\ &= \left|\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left|\widehat{f}(n)\right|^2\right| \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

(라) 주어진 함수 f가 구간 $(-\pi, \pi]$ 위에서 $|f'| = 1$을 만족하는 함수이기 때문에, **(가)**에서 살펴본 것을 생각하면

$$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|\widehat{f}(n)\right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\ dt = 2\pi$$

가 된다. 즉, C의 길이는 2π이다. 한편 임의의 정수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 부등식 $|n| \le n^2$이 성립하므로 **(다)**에서 살펴본 부등식과 함께 생각하면

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(D) &= \left|\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left|\widehat{f}(n)\right|^2\right| \\ &\le \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \\ &\le \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \left|\widehat{f}(n)\right|^2 \quad \le \pi\end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있다. 따라서 D의 넓이의 최댓값은 π이다. 그런데 실제로 f가 나타내는 곡선이 중심이 원점인 단위원이라면, 즉 $f(t) = e^{it}$라면 C의 길이는 2π이고 D의 넓이는 π가 된다.

이제 임의의 평면상의 폐곡선을 생각하자. 일반적으로 곡선이라 할 때는 그 매개화가 $\mathbb{R}$에서 좌표공간으로 가는 C^1-함수인 경우를 생각한다. 이에 따라, 주어진 곡선의 어떤 매개화이자 C^1-함수인 f를 생각하자. 주어진 곡선과 어떤 양수 $\alpha > 0$에 대하여 αf가 나타내는 폐곡선을 생각했을 때, 길이를 나타내는 식과 그린정리를 이용하여 넓이를 구한 방법을 생각해보면 αf가 나타내는 곡선의 길이는 α배가 되고 그 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 α^2배가 되는 것을 알 수 있다. 특히, f가 나타내는 곡선의 길이를 l, 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 A라 했을 때, $\frac{2\pi}{l}f$가 나타내는 곡선은 길이가 2π이고 그 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는 $\frac{4\pi^2 A}{l^2}$가 된다. 따라서 l이 어떤 주어진 상수인 경우, $\frac{4\pi^2 A}{l^2}$이 최대일 때 A 또한 최대가 되므로, 길이가 l인 곡선 중 그 곡선이 둘러싼 영역의 넓이가 가장 큰 경우는 길이가 2π인 곡선 중 그 곡선이 둘러싼 영역의 넓이가 가장 큰 것을 $\frac{l}{2\pi}$배 축소한 경우가 되는 것을 알 수 있다. 이는 다시 말해, 길이가 2π인 곡선만 생각하면 주어진 길이를 가지는 곡선 중 넓이가 가장 큰 경우가 언제인지 알 수 있다는 것이다. 또한 매개화 f가 주어지면 호의 길이에 의한 재매개화를 생각함으로써 일반성을 잃지 않고 $|f'| = 1$이라 가정할 수 있다. 그런데 앞서 보았듯이 매개화 f를 가지는 곡선이 $|f'| = 1$이면서 길이가 2π이면 그 곡선이 반지름이 1인 원인 경우에 넓이가 가장 크기 때문에, 어떤 주어진 길이를 가지는 곡선 중에서는 그 길이를 둘레로 가지는 원이 가장 넓이가 큰 경우임을 알 수 있다.

9.5.17. **(가)** 주기함수 f_1을

$$f_1(t) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ikt} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos kt}{k^2}$$

라 나타낼 수 있다. 이제 임의로 $x \in (0, 2\pi)$를 잡고, 함수열 $\{f_{1n}\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 $f_{1n}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2\cos kt}{k^2}$이라 두면 각 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대하여 f_{1n}이 미분가능함은 유한개의 미분가능한 함수들의 합이므로 당연하다. 또한 임의의 자연수 $k \in \mathbb{N}$에 대하여 $|\cos k\pi| = 1$이므로 급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cos kt}{k^2}$는 절대수렴하고, 따라서 수렴한다. 마지막으로, $\left\{\frac{2}{k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$는 0으로 수렴하는 단조

감소수열이므로 양수 $\delta > 0$를 구간 $[\delta, 2\pi - \delta]$가 x를 포함하도록 잡으면 정리 6.5.4에 의해 함수열

$$\{f'_{1n}(t)\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{-\sum_{k=1}^{n} \frac{2\sin kt}{k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

은 구간 $[\delta, 2\pi-\delta]$에서 고르게 수렴한다. 따라서 정리 6.2.1에 의해 f_1은 $[\delta, 2\pi-\delta]$에서 미분가능하고, 더욱이

$$f'_1(x) = \lim_{n\to\infty} f'_{1n}(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin kt}{k}$$

이 성립한다. 그런데 위 식에서 x는 구간 $(0, 2\pi)$에서 임의로 고른 실수였고, 등식 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ 이 $x \in (0, 2\pi)$이면 성립한다는 것을 본문 9.2절에서 보았기 때문에

$$f'_1(x) = x - \pi, \quad x \in (0, 2\pi)$$

이다. 따라서 f_1은 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 어떤 상수 C에 대하여 $f_1(t) = \dfrac{t^2}{2} - \pi t + C$가 된다. 그런데 바이어슈트라스 판정법(따름정리 6.1.3)을 생각하면, $\dfrac{\cos kt}{k^2} \le \dfrac{1}{k^2}$이고 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}^2$ 이므로 함수열 $\{f_{1n}\}_{n\in\mathbb{N}}$은 구간 $[0, 2\pi]$ 위에서 f_1으로 고르게 수렴하고, 따라서 정리 6.1.1에 의해 f_1은 구간 $[0, 2\pi]$ 위에서 연속이다. 그렇기 때문에 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 위에서도 $f_1(t) = \dfrac{t^2}{2} - \pi t + C$와 같이 나타낼 수 있다. 이제 $t = 0$인 경우를 보면

$$C = f_1(0) = \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} e^{ik\cdot 0} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

인 것을 알 수 있다. 따라서 각 $t \in [0, 2\pi]$에 대하여

$$f_1(t) = \frac{t^2}{2} - \pi t + \frac{\pi^2}{3}$$

이 된다.

(나) 임의로 n을 어떤 2이상의 자연수로 고정하자. 그러면

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j f_1\left(t - \frac{2\pi}{n} j\right) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} e^{2\pi j i/n} e^{ik(t-2\pi j/n)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2} \left(e^{2\pi i/n}\right)^{j(1-k)} e^{ikt} \\ &= \sum_{k\neq 0} \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^j \frac{e^{ikt}}{k^2}\end{aligned}$$

이 성립한다. 위 식에서 마지막 줄을 얻을 때 합의 순서를 바꾼 것은 j에 대한 합이 범위가 0부터 $n-1$까지인 유한합이기 때문에 문제가 되지 않는다. 이때 만약 $e^{2\pi i(1-k)/n} \neq 1$이면 급수 $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^j$ 는 등비급수이므로

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^j = \frac{1 - \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^n}{1 - e^{2\pi i(1-k)/n}} = \frac{1 - e^{2\pi i(1-k)}}{1 - e^{2\pi i(1-k)/n}} = 0$$

이 되고, 반대로 $e^{2\pi i(1-k)/n} = 1$이면 $\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^j = \sum_{j=0}^{n-1} 1^j = n$이다. 그런데 $e^{2\pi i(1-k)/n} = 1$ 이기 위해서는 지수인 $\dfrac{2\pi i(1-k)}{n}$이 $2\pi i$의 어떤 정수배여야 하므로, $k-1$이 n으로 나누어 떨어져야 한다. 따라서

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j f_1\left(t - \frac{2\pi}{n}j\right) &= \sum_{k\neq 0}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i(1-k)/n}\right)^j \frac{e^{ikt}}{k^2} \\
&= \sum_{k\equiv 1\ (n)} n\,\frac{e^{ikt}}{k^2} \\
&= nf_n(t)
\end{aligned}$$

이 되는 것을 알 수 있다.

앞서 2π-주기함수 f_1에 대하여 **(가)**에서 본 것을 떠올리면 f_1은 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 미분가능한 함수이므로, $\mathbb{R}\setminus\{2n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$에서 미분가능한 함수임은 바로 알 수 있다. 한편 구간 $(0, 2\pi)$ 위에서 $f_1'(t) = t - \pi$이므로 0에서의 우미분계수와 2π에서의 좌미분계수가 다르며, 2π에서의 좌미분계수와 0에서의 좌미분계수는 같을 것이므로 f_1이 0에서 미분불가능함을 알 수 있다. 이는 즉 f_1이 2π-주기함수이므로 $\{2n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$이 정확히 f_1이 미분불가능한 점들의 집합임을 알려준다.

이제 f_n을 앞서 보인 것처럼 f_1의 평행이동들의 선형결합

$$f_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j f_1\left(t - \frac{2\pi}{n}j\right), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

와 같이 나타내었을 때, 어떤 $j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$에 대하여 $x = \dfrac{2\pi j}{n}$이면 위 식의 우변의 급수에서 $f\left(t - \dfrac{2\pi}{n}j\right)$를 포함하는 항만 x에서 미분불가능하고 나머지 항들은 x에서 미분가능하다. 따라서 $f_n(t)$는 x에서는 미분불가능한 함수가 된다. 마찬가지 이유로 2π에서도 f_n은 미분불가능하지만 살펴보고자 하는 구간인 $[0, 2\pi]$의 끝점이므로 생각하지 않기로 한다. 반대로 어떠한 $j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$에 대해서도 $x \neq \dfrac{2\pi j}{n}$이면, 모든 $j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$에 대하여 $f\left(t - \dfrac{2\pi}{n}j\right)$이 x에서 미분가능하므로 f_n 또한 x에서 미분가능하다. 즉 f_n은 구간 $(0, 2\pi)$ 위에서 $\left\{\dfrac{2\pi}{n}j : j = 1, 2, \cdots, n-1\right\}$을 제외한 모든 점에서 미분가능하고, 제외한 점들에서는 미분불가능하다.

임의로 $j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$을 골라서 열린구간 $\left(\dfrac{2\pi j}{n}, \dfrac{2\pi(j+1)}{n}\right)$을 생각하면 f_n은 그 위에서 미분가능하다. 실제로, **(가)**에서 보인 것을 생각하면 f_1과 f_1을 $\dfrac{2\pi}{n}$의 정수배만큼 평행이동한 함수는 $\left(\dfrac{2\pi j}{n}, \dfrac{2\pi(j+1)}{n}\right)$ 위에서 최고차항이 $1/2$인 이차함수가 되어 두 번 미분가능하고 이계도함수가 1이므로 그러한 함수들의 선형결합으로 나타내어지는 f_n 또한 두 번 미분가능하다. 따라서

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}f_n(t) &= \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j f_1\left(t - \frac{2\pi}{n}j\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j \frac{d^2}{dt^2}f_1\left(t - \frac{2\pi}{n}j\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2\pi i/n}\right)^j
\end{aligned}$$

인데 $e^{2\pi i/n} \neq 1$이기 때문에 앞에서 본 바에 의해 $\dfrac{d^2}{dt^2}f_n(t) = 0$임을 얻는다. 이는 즉 f_n'은 어떤 상수가 된다는 뜻이다. 즉 각 구간 $\left(\dfrac{2\pi j}{n}, \dfrac{2\pi(j+1)}{n}\right)$ 위에서 f_n은 미분가능하고, 그 미분계수가 일정하다.

(다) 앞의 **(나)**에서 성립함을 보인 식에 t 대신 $t+\dfrac{2\pi}{n}$을 대입하면

$$\begin{aligned} f_n\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{2\pi i/n}\right)^j f_1\left(t+\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}j\right) \\ &= \frac{e^{2\pi i/n}}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{2\pi i/n}\right)^{j-1} f_1\left(t-\frac{2\pi}{n}(j-1)\right) \\ &= \frac{e^{2\pi i/n}}{n}\sum_{j=-1}^{n-2}\left(e^{2\pi i/n}\right)^{j} f_1\left(t-\frac{2\pi}{n}j\right) \end{aligned}$$

이 되는 것을 볼 수 있다. 그런데 위 식의 마지막 줄의 급수에서 $j=-1$인 경우를 보면, f_1이 2π-주기함수이고 $e^{2\pi i}=1$이므로

$$\begin{aligned} \left(e^{2\pi i/n}\right)^{-1} f_1\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) &= e^{2\pi i}\left(e^{2\pi i/n}\right)^{-1} f_1\left(t+\frac{2\pi}{n}-2\pi\right) \\ &= \left(e^{2\pi i/n}\right)^{n-1} f_1\left(t-\frac{2\pi}{n}(n-1)\right) \end{aligned}$$

이 되기 때문에

$$f_n\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{e^{2\pi i/n}}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(e^{2\pi i/n}\right)^{j} f_1\left(t-\frac{2\pi}{n}j\right)$$

이라고도 쓸 수 있다. 이때 위 식의 우변이 정확히 $e^{2\pi i/n}f_n(t)$이기 때문에 문제에서 주어진 등식

$$f_n\left(t+\frac{2\pi}{n}\right) = e^{2\pi i/n}f_n(t)$$

이 성립함을 이와 같이 보일 수 있다.

(라) 어떤 구간에서 미분계수가 일정한 함수는 선형함수이다. 그런데 **(나)**에서 각 $j=0,1,\cdots,n-1$에 대하여 f_n의 미분계수가 구간 $\left(\dfrac{2\pi j}{n}, \dfrac{2\pi(j+1)}{n}\right)$ 위에서 일정함을 보였기 때문에, 그러한 구간마다 f_n은 선형함수가 된다. 다시 말해, f_n은 조각마다 선형함수이다. 한편 **(나)**에서 f_n이 f_1의 평행이동으로서 연속인 함수들의 선형결합임을 보았고, 따라서 f_n이 연속인 것도 알 수 있다. 따라서 f_n은 복소평면 위에서 n개의 점 $\left\{f_n(0), f_n\left(\dfrac{2\pi}{n}\right), f_n\left(\dfrac{4\pi}{n}\right), \cdots, f_n\left(\dfrac{2\pi(n-1)}{n}\right)\right\}$을 순서대로 선분으로 잇고 다시 $f_n(0)$으로 돌아오는 곡선을 상으로 가진다.

한편 **(다)**에서 보인 등식에서, 각 $j=1,2,\cdots,n-1$에 대하여

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right) &= e^{2\pi i/n}f_n\left(\frac{2\pi(j-1)}{n}\right) \\ &= e^{4\pi i/n}f_n\left(\frac{2\pi(j-2)}{n}\right) \\ &= \cdots \\ &= e^{2\pi ji/n}f_n(0) \end{aligned}$$

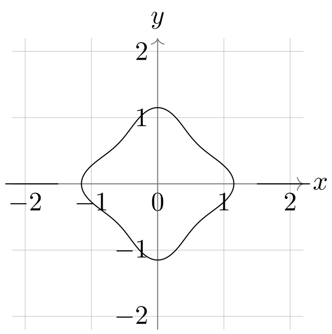
임을 알 수 있는데, $e^{2\pi ji/n}$의 절댓값은 1이고 편각이 $2\pi j/n$이므로 복소수의 곱셈이 복소평면상에서 어떻게 나타나는 지를 떠올려보면 $f\left(\dfrac{2\pi j}{n}\right)$은 $f_n(0)$에 해당하는 점을 원점을 중심으로 반시계방향으로 $2\pi j/n$만큼 회전시킨 점에 해당하는 것을 알 수 있다.

따라서 $n \geq 3$ 인 경우, n 개의 점 $\left\{ f_n(0), f_n\left(\frac{2\pi}{n}\right), f_n\left(\frac{4\pi}{n}\right), \cdots, f_n\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right) \right\}$ 을 순서대로 잇고 $f_n(0)$ 으로 돌아오는 $t \mapsto f_n(t)$ 의 상인 곡선은 원점을 중심으로 하는 어떤 정n각형이 되고, $n = 2$ 인 경우 $t \mapsto f_2(t)$ 의 상은 $f_2(0)$ 과 $f_2(\pi)$ 를 잇는 선분을 따라 왕복하게 된다.

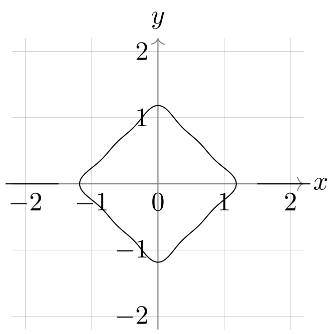
이제 함수 f_4 에 의하여 생기는 곡선의 모습이 각 부분합에 의해 어떻게 변해 가는지 곡선을 그려 알아보기 위해 각 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여

$$f_{4,n} = \sum_{k \equiv 1 \ (4), |k| \leq 4n+1} \frac{1}{k^2} e^{ikt}$$

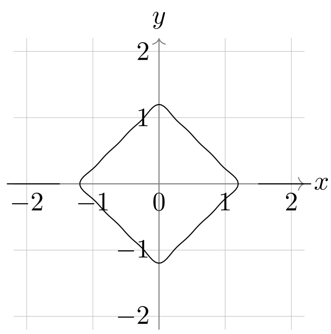
으로 정의된 f_4 의 부분합수열 $\{f_{4,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ 을 생각하고 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때 $f_{4,n}$ 의 그래프를 그려보면 다음 그림과 같이 된다.



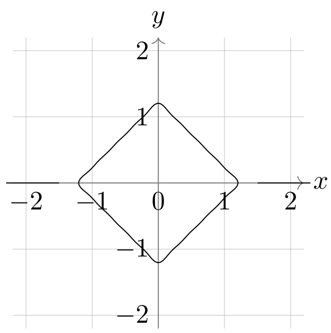
$n = 1$



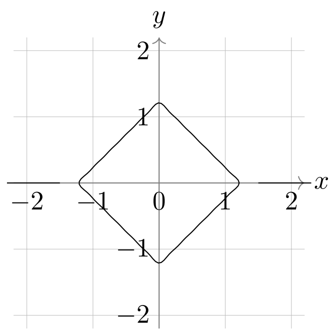
$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$



$n = 5$

(마) 앞서 **(다)**에서 성립함을 보인 식을 이용하면

$$e^{2\pi i/n} f_n'(t) = \frac{d}{dt} f_n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = f_n'\left(t + \frac{2\pi}{n}\right)$$

이 성립하게 되고, 특히 이로부터

$$|f_n'(t)| = \left| e^{2\pi i/n} f_n'(t) \right| = \left| f_n'\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) \right|$$

임을 알 수 있다. 따라서 f_n 은 미분계수의 절댓값이 미분가능한 모든 점에서 일정한 함수이고, 어떤 음이 아닌 실수 v_n 에 대하여 $|f_n'| = v_n$ 이라 놓을 수 있다.

이제 f_n 의 푸리에계수를 구해보자. 각 정수 $m \in \mathbb{Z}$ 에 대하여

$$f_n(t) e^{-imt} = \sum_{k \equiv 1 \ (n)} \frac{1}{k^2} e^{ikt} e^{-imt}$$

이라 쓸 수 있다. 그런데 이때 $\left|e^{ikt}\right| \le 1$, $\left|e^{-imt}\right| \le 1$ 이므로

$$\sum_{k\equiv 1\ (n)} \left|\frac{1}{k^2}e^{ikt}e^{-imt}\right| \le \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}$$

이 성립함에 주목하면, 바이어슈트라스 판정법(따름정리 6.1.3)에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{k\equiv 1\ (n)} \frac{1}{k^2}e^{ikt}e^{-imt}$ 이 $f_n(t)e^{-imt}$ 로 고르게 수렴하는 것을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned}\widehat{f_n}(m) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_n(t)e^{-imt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\equiv 1\ (n)}\frac{1}{k^2}e^{ikt}e^{-imt}dt \\ &= \sum_{k\equiv 1\ (n)}\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-imt}dt\end{aligned}$$

이 되는데, 이때 $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikt}e^{-imt}dt$ 은 $k=m$ 일 때만 1 이고 $k\neq m$ 이면 0 이므로

$$\widehat{f_n}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{m^2}, & m\equiv 1\ (n) \\ 0, & \text{이외의 경우}\end{cases}$$

임을 알 수 있다. 이를 이용하여 f_n' 의 푸리에계수를 구할 수 있는데, 각 정수 $m\in\mathbb{Z}$ 에 대하여 부분적분을 통해

$$\begin{aligned}\widehat{f_n'}(m) &= \int_0^{2\pi} f_n'(t)e^{-imt}dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{2\pi j/n}^{2\pi(j+1)/n} f_n'(t)e^{-imt}dt \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\left[f_n(t)e^{-imt}\right]_{2\pi j/n}^{2\pi(j+1)/n} + \int_{2\pi j/n}^{2\pi(j+1)/n} imf_n(t)e^{-imt}dt\right) \\ &= \left[f_n(t)e^{-imt}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} imf_n(t)e^{-imt}dt \\ &= \left[f_n(t)e^{-imt}\right]_0^{2\pi} + im\widehat{f_n}(m)\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있고, 이때 $t\mapsto f_n(t)e^{-imt}$ 는 2π-주기함수이므로

$$\widehat{f_n'}(m) = im\widehat{f_n}(m) = \begin{cases} \dfrac{i}{m}, & m\equiv 1\ (n) \\ 0, & \text{이외의 경우}\end{cases}$$

이 된다. 한편 **(나)**에서 보았듯이 f_n' 은 계단함수이므로 $f_n'\in\mathcal{R}^2[0,\pi]$ 이다. 따라서 $|f_n'|$ 이 항상 v_n 임에 주목하면 빠세발 등식에 의해

$$v_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f_n'(x)\right|^2dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f_n'}(m)\right|^2 = \sum_{m\equiv 1\ (n)}\frac{1}{m^2} = f_n(0)$$

이 성립함을 알 수 있다. 이와 같이 $f_n(0) = v_n^2$ 임을 보일 수 있다.

(바) 지금까지 f_n 에 대하여 알아본 것들을 종합하면 각 $j = 0,1,2,\cdots,n-1$ 에 대하여

$$f_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = e^{2\pi ij/n}f_n(0) = e^{2\pi ij/n}v_n^2$$

이므로 복소평면상의 두 점 $f_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$과 $f_n\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)$을 잇는 선분의 길이는

$$\begin{aligned}\left|f_n\left(\frac{2\pi(j+1)}{n}\right)-f_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right| &= \left|e^{2\pi i(j+1)/n}v_n^2 - e^{2\pi ij/n}v_n^2\right| \\ &= \left|e^{2\pi ij/n}v_n^2\right|\cdot\left|e^{2\pi i/n}-1\right| \\ &= v_n^2\left|\frac{e^{\pi i/n}-e^{-\pi i/n}}{2i}\right|\cdot\left|2ie^{\pi i/n}\right| \\ &= 2v_n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

이 된다. 따라서 n개의 이러한 선분으로 이루어진 f_n이 나타내는 곡선의 길이는 $2nv_n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$이다. 그런데 연습문제 9.5.16의 **(가)**에서 살펴본 곡선의 길이를 구하는 공식으로도 f_n이 나타내는 곡선의 길이를 구할 수 있으며, 이와 같이 구하는 경우 그 길이는

$$\int_0^{2\pi}|f_n'(t)|\,dt = 2\pi v_n$$

이 된다. 두 방식으로 구한 곡선의 길이는 같아야 하므로

$$2\pi v_n = 2nv_n^2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \Longrightarrow v_n = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

임을 알 수 있다. 따라서 **(마)**에서의 결과를 이용하면 등식

$$\left(\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}\right)^2 = v_n^2 = f_n(0) = \sum_{k\equiv 1\ (n)}\frac{1}{k^2} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\ell n)^2}$$

이 성립함을 보일 수 있다.

(사) 먼저 f_n이 나타내는 곡선이, 그 곡선이 둘러싸고 있는 영역을 기준으로 양의 방향을 가지는 것에 주목하자. 따라서 연습문제 9.5.16의 **(나)**와 **(다)**에서처럼 그린 정리와 연습문제 9.5.7에서 보인 내용을 이용하면 f_n이 나타내는 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이가, 이 경우에는 연습문제 9.5.16에서와는 다르게 절댓값을 씌울 필요 없이, $\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}m\left|\widehat{f_n}(m)\right|^2$임을 알 수 있다. 여기에 **(마)**에서 구한 f_n의 푸리에계수를 이용하면, f_n이 나타내는 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이는

$$\pi\sum_{m\equiv 1\ (n)}m\left(\frac{1}{m^2}\right)^2 = \pi\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+\ell n)^3}$$

이 된다. 이 값이 문제에서 주어진 등식의 좌변의 π배인 것에 주목하자.

이제, 만약 $n=2$이면 f_2가 나타내는 곡선이 둘러싸는 영역의 넓이는 0인데, $\cos\frac{\pi}{2}=0$이므로 주어진 등식이 성립하는 것을 알 수 있다. 따라서 $n\geq 3$인 경우에만 등식이 성립하는 지 확인하면 된다. 그런데 $n\geq 3$이면 f_n이 나타내는 곡선은 중심이 원점인 정n각형이 되고, 이 정n각형의 중심과 각 꼭짓점 사이의 거리는 $|f_n(0)-0| = v_n^2$이다. 이제 이 정n각형의 중심을 각 꼭짓점과 연결하면 주어진 정n각형을 n개의 합동인 이등변삼각형으로 나눌 수 있는데, 각각의 이등변삼각형은 등변의 길이가 v_n^2이고 꼭지각이 $\frac{2\pi}{n}$이 된다. 즉 이 이등변삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}v_n^4\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$이 되고, 여기에 삼각함수의 배각공식과 **(바)**에서 얻는 v_n의 값을 이용하면 이등변삼각형의 넓이를

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}v_n^4\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) &= \left(\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}\right)^4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\left(\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}\right)^3\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

과 같이 나타낼 수 있다. 따라서 f_n 이 나타내는 곡선으로 둘러싸인 영역인 정n각형의 넓이는 이등변삼각형의 넓이의 n 배인 $\pi\left(\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ 이 된다.

이와 같이 서로 다른 두 방식으로 구한 정n각형의 넓이는 같아야 하고, 따라서 넓이를 나타내는 두 식을 각각 $\frac{1}{\pi}$ 배한 것끼리도 서로 같을 것이므로 등식

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\ell n)^3} = \left(\frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}\right)^3 \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

이 성립하는 것을 알 수 있다.

제 10 장

르벡적분

10.6.1. 집합열 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 각 $i = 1, 2, 3, \cdots$에 대해 $F_i = E_i \setminus E_{i+1}$이라 하자. 그러면 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 감소수열이므로 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 쌍끼리 서로소이면서 잴 수 있는 집합열이다.

집합열 $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 감소수열임으로부터 2 이상의 자연수 j에 대해

$$E_1 \setminus E_j = \bigsqcup_{i=1}^{j-1} F_i$$

이 성립함을 알 수 있다. 따라서

$$m(E_1) - m(E_j) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{j-1} F_i\right) = \sum_{i=1}^{j-1} m(F_i)$$

을 얻는다. 여기에 $j \to \infty$일 때의 극한을 취해주면

$$m(E_1) - \lim_{j\to\infty} m(E_j) = \sum_{i=1}^{\infty} m(F_i) = m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)$$

이다. 이제 적절히 이항한 뒤 드모르간의 법칙을 사용하면

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} m(E_j) &= m(E_1) - m\left(\bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \\
&= m\left(E_1 \setminus \bigsqcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \\
&= m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} (E_1 \setminus F_i)\right) \\
&= m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{i+1}\right) \\
&= m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)
\end{aligned}$$

이 성립한다. 마지막 줄의 등식은 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 감소수열이기 때문에 성립한다.

반면 $m(E_1) \le \infty$ 조건이 없는 경우에는 주어진 식이 성립하지 않는데, 이를 보이기 위해 $E_j = (j, \infty)$으로 구성된 집합열 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 그러면 임의의 자연수 j에 대해 $m(E_j) = \infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} m(E_n) = \infty$인 반면 $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \varnothing$이므로 $m\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = 0$이다.

10.6.2. **(가)** 좌표공간에서 어떤 집합이 콤팩트집합임은 그 집합이 닫힌 집합이면서 유계인 것과 동치이다. 따라서 우리는 D가 닫힌 집합이고 유계인 것을 보일 것이다. D가 유계인 것은 $D \subset [0,1]$임으로부터 당연하다. D가 닫힌 집합임을 보이는 것은 $\mathbb{R} \setminus D$가 열린 집합임을 보이는 것으로 충분하다. n번째 단계에서 구간들을 들어낸 결과로 얻는 집합을 D_n이라 하면 $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_n$이고, 따라서

$$\mathbb{R} \setminus D = (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \cup ([0,1] \setminus D) = (\mathbb{R} \setminus [0,1]) \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} ([0,1] \setminus D_n)$$

이다. 이때 $[0,1] \setminus D_n$은 우리가 n번째 단계에서 들어낸 2^n개의 열린 구간들의 합집합이므로 열린 집합이고, $\mathbb{R} \setminus [0,1] = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$이므로 열린 집합이다. 따라서 $\mathbb{R} \setminus D$가 닫힌 집합임을 알 수 있고, 이로부터 D가 콤팩트집합임도 알 수 있다.

(나) D의 측도를 구하기 위해서 $[0,1] \setminus D$의 측도를 구할 것이다. 먼저

$$[0,1] \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus D_n)$$

임에 유의하자. 이때 D의 구성 과정을 상기해보면 $([0,1] \setminus D_n)$이 n번째 단계에서 들어낸 2^{n-1}개의 열린 구간들의 합집합이므로 $\{[0,1] \setminus D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$은 서로소인 집합의 열이고, 역시 구성 과정에 의해 $m\left([0,1] \setminus D_n\right) = 2^{n-1} \dfrac{\alpha}{3^n} = \dfrac{\alpha}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$임을 알 수 있다. 따라서

$$\begin{aligned} m\left([0,1] \setminus D\right) &= m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} ([0,1] \setminus D_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m\left([0,1] \setminus D_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\alpha/3}{1-(2/3)} \quad = \alpha \end{aligned}$$

이기 때문에 $m(D) = 1 - \alpha$이다.

(다) 임의의 $x \in D$에 대해 x가 고립점이 아님을 보이기 위해 x가 D의 극한점임을 보이자. 각 D_n을 구성하는 닫힌 구간들의 끝점들은 각각, D의 구성 과정을 생각해보면, $m > n$인 자연수 m에 대해 D_m을 구성하는 닫힌 구간들 중 하나의 끝점이 되므로 $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$의 원소가 된다. 또한

$$m(D_k) = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1} = 1 - \alpha + \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^k$$

인데 D_k는 길이가 같은 2^k개의 서로소인 닫힌 구간들의 합집합이므로 D_k를 구성하는 한 닫힌집합의 길이는 $\dfrac{m(D_k)}{2^k} = \dfrac{1-\alpha}{2^k} + \dfrac{\alpha}{3^k}$이 되어 $k \to \infty$일 때 0에 수렴한다. 따라서 임의로 양수 ε이 주어지면 충분히 큰 n에 대하여 $N(x, \varepsilon)$에 포함되는 D_n의 한 구간을 잡을 수 있다. 그러면 그 구간의 양 끝점 중 적어도 하나는 집합 $N(x, \varepsilon) \cap (D \setminus \{x\})$의 원소가 되어 이 집합은 공집합이 아니게 된다. 따라서 정의에 의해 x는 D의 극한점이다. 이로부터 D는 고립점을 가질 수 없음을 알 수 있다.

(라) 모순을 이끌어내기 위해 어떤 구간 I가 D에 포함된다고 하자. 이때 I는 원소의 갯수가 하나가 아닌 구간이라고 가정한다. 그러면 $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$이므로 모든 $k \in \mathbb{N}$에 대해 $I \subset D_k$이어야 한다.

그런데 **(다)**에서 보았듯이 D_k는 길이가 $\dfrac{1-\alpha}{2^k}+\dfrac{\alpha}{3^k}$이면서 서로소인 닫힌 구간들의 합집합이다. 이때 이 식은 $k\to\infty$일 때 0으로 수렴하므로 충분히 큰 k에 대해서는 $m(I)>\dfrac{1-\alpha}{2^k}+\dfrac{\alpha}{3^k}$이어야 한다. 한 편 I는 구간이므로 $I\subset D_k$이려면 I는 D_k를 구성하는 닫힌 구간들 중 하나에 포함되어야 하므로 $m(I)\le\dfrac{1-\alpha}{2^k}+\dfrac{\alpha}{3^k}$ 또한 성립해야 한다. 이로부터 모순이 발생하므로 우리의 가정인 I가 D에 포함되어야 한다는 것이 거짓이어야 함을 알 수 있다. 따라서 D를 포함할 수 없다.

10.6.3. 편의상 $\alpha=1/2$로 고정하고 이 α에 대해 연습문제 10.6.2.에서 정의한 D를 생각하자. 이때 $[0,1]\setminus D$는 D의 각 구성 단계에서 '들어낸' 열린 구간들의 합집합으로 나타낼 수 있고, 이 열린 구간들을 길이 순으로, 길이가 같은 경우 왼쪽 끝점이 작은 순서대로 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$으로 이름붙이자. 예를 들어, $U_1=\left(\dfrac{5}{12},\dfrac{7}{12}\right)$, $U_2=\left(\dfrac{13}{72},\dfrac{17}{72}\right)$, $U_3=\left(\dfrac{55}{72},\dfrac{59}{72}\right)$, $U_4=\left(\dfrac{41}{432},\dfrac{49}{432}\right)$, $\cdots$ 등이다. 이제 $E_n=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n}U_i$, $E=\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$라 하고 $f_n=\chi_{E_n}$이라 하자. 그러면 각 f_n은 유한개의 점에서 불연속이므로 리만적분가능하다. 한편 $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 단조증가하는 집합열이므로 $m<n$이면 $f_m<f_n$이다. 이때 $2^l\le m$을 만족하는 가장 큰 음이 아닌 정수 l에 대하여 $f_n-f_m=\chi_{E_n\setminus E_m}$이므로

$$\begin{aligned}\|f_n-f_m\|_1=\int_0^1(f_n-f_m)&=\sum_{i=m+1}^{n}m(U_i)\\&\le\sum_{i=2^l}^{\infty}m(U_i)\\&=\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1}m(E_i)\\&=\sum_{j=l}^{\infty}2^j\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^l\end{aligned}$$

이고 $m\to\infty$일 때 $l\to\infty$이므로 임의의 양수 $\varepsilon>0$이 주어졌을 때 충분히 큰 m,n을 잡으면 $\|f_n-f_m\|_1<\epsilon$을 만족시킬 수 있다. 따라서 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$은 코시수열이다.

$f=\chi_E$라 하자. 그러면 $E_n\subset E$이므로 $f_n\le f$이고 $n\ge 2^l$을 만족하는 가장 큰 음이 아닌 자연수 l에 대하여 위에서의 전개와 비슷하게 진행하면

$$\begin{aligned}\|f-f_n\|_1&=\sum_{i=n+1}^{\infty}m(E_i)\\&\le\sum_{j=l}2^j\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{j+1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^l\end{aligned}$$

이고 $n\to\infty$일 때 $l\to\infty$이므로

$$0\le\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_1\le\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^l=0$$

이기 때문에 $\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|_1=0$이 된다. 따라서 만약 f_n이 $\mathcal{R}^1$ 위의 함수열로서 어떤 함수를 극한함수로 가진다면 그 함수는 f_n이 L^1 위의 함수열로서 극한함수로 가지는 f이어야 한다.

이제 $f\notin\mathcal{R}^1$임을 보이자. f는 $[0,1]\setminus E$ 위에서만 함수값 0을 가지고 그 외의 점에서는 함수값 1을 가지는데, 연습문제 10.6.2의 **(라)**에서 보았듯이 $[0,1]\setminus E$는 어떠한 구간도 포함하지 않는다.

따라서 $[0,1]\setminus E$의 모든 점은 f의 불연속점이 된다. 그런데 연습문제 10.6.2의 (나)에서 보았듯이 $m([0,1]\setminus E)=\dfrac{1}{2}$이므로 f의 불연속점의 집합의 측도는 0이 아니다. 따라서 f는 리만적분가능하지 않다.

10.6.4. 집합 A는 $A=\left\{x=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{10^n}\in[0,1]\ :\ a_n\in\{1,5\},\ n=1,2,\cdots\right\}$와 같이 나타낼 수 있다. 이제 집합열 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을

$$B_n=\{x\in[0,1]:x\text{의 소수점 아래 }n\text{번째 자리에서 처음으로 }1\text{이나 }5\text{가 아닌 숫자가 등장}\}$$

이라 두면 $[0,1]=A\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$이고 A와 각 B_n은 쌍끼리 서로소인 집합들이다. 따라서

$$1=m([0,1])=m(A)+\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)$$

이 성립한다. 이때

$$\begin{aligned}
B_1 &= [0,1)\ \cup\ [0.2,0.5)\ \cup\ [0.6,1]\\
B_2 &= [0.1,0.11)\ \cup\ [0.12,0.15)\ \cup\ [0.16,0.2)\cup\ [0.5,0.51)\ \cup\ [0.52,0.55)\ \cup\ [0.56,0.6)\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

에서 볼 수 있듯이 B_{n+1}은 $[0,1]\setminus B_n$의 $\dfrac{4}{5}$만큼을 차지하며, $m(B_n)=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$임을 알 수 있다. 따라서

$$m(A)=1-\sum_{n=1}^{\infty}m(B_n)=1-\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}}=0$$

임을 알 수 있다.

10.6.5. χ_A와 χ_B가 가지는 값에 따라 경우를 나누어 모든 경우에 대해서 주어진 등식들이 성립하는지 확인하면 된다. 먼저 처음 두 등식에 대해서는 다음 표를 보자.

	χ_A	χ_B	$\chi_A\cdot\chi_B$	$\chi_{A\cap B}$	$\chi_A+\chi_B-\chi_A\cdot\chi_B$	$\chi_{A\cup B}$
$A\cap B$	1	1	1	1	1	1
$A\setminus B$	1	0	0	0	1	1
$B\setminus A$	0	1	0	0	1	1
$(A\cup B)^{\mathsf{c}}$	0	0	0	0	0	0

표에서 χ_A의 열와 $A\cap B$의 행이 만나는 칸의 값이 1인 것은 $x\in A\cap B$이면 $\chi_A(x)=1$이라는 뜻이다. 주어진 등식들 중 첫 번째 등식이 성립하는 지는 세 번째 열과 네 번째 열의 값이 항상 같음을, 두 번째 등식이 성립하는 지는 다섯 번째 열과 여섯 번째 열의 값이 항상 같음을 확인함으로써 보일 수 있으며, 실제로 각각의 값이 같음을 볼 수 있다.

마지막 등식에 대해서는 다음의 표를 보자. 각 칸의 숫자가 의미하는 것은 위의 표와 같다. 세 번째 등식이 성립하는 지는 두 번째 열과 세 번째 열의 값이 항상 같음을 확인함으로써 보일 수 있으며, 실제로 각각의 값이 같음을 볼 수 있다.

	χ_A	$\chi_{A^{\mathsf{c}}}$	$1-\chi_A$
A	1	0	0
A^{c}	0	1	1

10.6.6. 수렴정리라 함은 적분과 극한의 순서를 바꿀 수 있다는 정리를 말한다. 따라서 우리는

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n$$

임을 보여야 한다. 각 자연수 n에 대해 $g_n = f_1 - f_n$으로 놓자. 그러면 각 f_n이 잴 수 있는 함수이고 $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots$ 이므로 $g_n = f_1 - f_n \geq 0$이고, 각 g_n은 잴 수 있는 함수이다. 또한 $f_n \geq f_{n+1}$으로부터 $g_n \leq g_{n+1}$ 또한 성립하므로 단조수렴정리에 의해

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(n) = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n$$

이 성립한다. 이때

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(n) = \lim_{n\to\infty}\int_E (f_1 - f_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_1 - \int_E f_n\right) = \int_E f_1 - \lim_{n\to\infty}\int_E f_n$$

이고 마지막 등식은 $f_1 \in L^1(E)$이고 $f_1 \geq f_n$이기 때문에 각 적분값이 유한하므로 성립한다. 한편

$$\int_E \lim_{n\to\infty} g_n = \int_E \left(f_1 - \lim_{n\to\infty} f_n\right) = \int_E f_1 - \int_E \lim_{n\to\infty} f_n$$

또한 같은 이유로 $f_1 \in L^1(E)$이기 때문에 성립함을 알 수 있다. 따라서 우리가 원하는 식인

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n$$

이 성립한다.

이제 $f_1 \in L^1(E)$라는 조건이 없으면 수렴정리가 성립하지 않는 예를 들 것이다. $E = (0,\infty)$라 하고, $f_n = \chi_{(n,\infty)}$으로 두자. 그러면 함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$는 단조감소하고 $f_n \geq 0$이다. 그런데 임의의 $x \in E$에 대해 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$인데 비해 임의의 자연수 n에 대해 $\displaystyle\int_E f_n = \infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n = \infty \neq 0 = \int_E 0 = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n$$

이 되어 등식이 성립하지 않는다.

10.6.7. 먼저 임의의 음이 아닌 실수 a에 대해 $0 \leq a\mu(E_a) < \infty$임을 보이자. 0보다 크거나 같음은 $a \geq 0$이고 $\mu(E_a) \geq 0$이므로 자명하다. 또한 $a = 0$이면 $0 \cdot \mu(E_a) = 0$이므로, $a > 0$일 때 $a\mu(E_a) < \infty$임만 보이면 된다. 모순을 이끌어내기 위해 어떤 양수 a가 존재하여 $a\mu(E_a) = \infty$이라 가정하자. 그러면 $a < \infty$이므로 $\mu(E_a) = \infty$이어야 한다. 그런데 이때 E_a의 정의에 의해 $x \in E_a$이면 $a < |f(x)|$이고, $x \notin E_a$이면 $0 \leq |f(x)|$이므로 $a\chi_{E_a} \leq |f|$이 성립한다. 한편 $f \in L^1(\mathbb{R})$이므로 $|f| \in L^1(\mathbb{R})$이고, 따라서

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_a} \leq \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} |f| < \infty$$

이어야 하는데

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{E_a} = \mu(E_a) = \infty$$

또한 성립해야 하므로 모순이다. 따라서 $a\mu(E_a) < \infty$이 임의의 음이 아닌 실수에 대해 성립한다.

이제 0으로 수렴하면서 각 항이 음이 아닌 실수열 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$을 임의로 하나 잡고, 각 자연수 k에 대해 $f_k = a_k\chi_{E_{a_k}}$으로 정의된 함수열 $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 그러면 각 자연수 k에 대해 $f_k \le |f|$이고, f_k는 함수값으로 0과 a_k만을 갖는데 $k\to\infty$일 때 $a_k\to 0$이므로 f_k는 점별로 0에 수렴한다. 따라서 르벡 수렴정리에 의해

$$\lim_{k\to\infty} a_k\mu(E_{a_k}) = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k = \int_{\mathbb{R}}\lim_{k\to\infty} f_k = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$$

이 성립함을 얻는다.

함수 $g:\{x : x\ge 0\}\to\mathbb{R}$을 $g(a) = a\mu(E_a)$로 정의하면 $g(0) = 0$이고, $\{x : x\ge 0\}$ 위의 임의의 수열 $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$에 대해 $\lim_{k\to\infty} g(a_k) = 0$임을 알게 되었다. 따라서 명제 3.1.3에 의하여

$$\lim_{a\to 0} a\mu(E_a) = \lim_{a\to 0} g(a) = 0$$

이 성립한다.

10.6.8. 표기의 편의상 $E = E_0$이라 하자. 각 자연수 n에 대해 $g_n = \sum_{i=1}^{n}\chi_{E_i}$으로 정의된 함수열 $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 이 함수열은 점별로 단조증가하므로 $g = \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}$가 점별 극한이 되고, 따라서 단조수렴정리에 의해

$$\int_E g = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$$

이 됨을 알 수 있다. 한편 각 $x\in E$에 대해 $k\le |f(x)| < k+1$을 만족하는 음이 아닌 정수 k를 생각하면 $j\le k$인 음이 아닌 정수 j에 대해서는 $x\in E_j$이고 $j>k$인 정수 j에 대해서는 $x\notin E_j$이므로 $g(x) = k$가 된다. 따라서

$$g\le |f|\le g+\chi_E$$

가 성립한다. 이 부등식의 왼쪽 부등식으로부터, f이 적분가능하면 $|f|$ 또한 적분가능하므로

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k) = \int_E g \le \int_E |f| < \infty$$

이 성립함을 알 수 있다. 반대로 오른쪽 부등식으로부터 $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k) < \infty$이면 E가 유한측도집합이므로

$$\int_E |f| \le \int_E (g+\chi_E) = \int_E g + \int_E \chi_E = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)\right) + \mu(E) < \infty$$

이므로 $|f|$이 적분가능함을 알 수 있으며, 이로부터 f이 적분가능함 또한 알 수 있다.

10.6.9. 이 문제의 경우 (나)의 조건에서 α와 β가 동시에 0일 수 없다는 조건이 필요한데, 그렇지 않으면 예를 들어 $\alpha = \beta = a = 0$, $b = 1$, $f = \chi_{[0,1/2]}$, $g = \chi_{[1/2,1]}$인 경우에는 (나)를 만족하지만 (가)를 만족하지 않기 때문이다.

α와 β가 동시에 0일 수 없다는 조건을 추가하여, 먼저 (나)를 가정하고 (가)가 성립함을 보이자. 만약 $\beta = 0$이면 $\alpha\ne 0$이어야 하는데, $\beta g = 0$이므로 $f = 0$이어야 한다. 이 경우 $\|f\|_2 = 0$, $\langle f, g\rangle = 0$

이므로 (가)가 성립함을 쉽게 알 수 있다. 따라서 $\beta \neq 0$일 때만 살펴보면 충분하므로 $\gamma = \alpha/\beta$으로 놓아, 거의 모든 점에서 $g = \gamma f$인 상수 γ가 존재한다고 가정해도 된다. 그러면

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 \|g\|_2 &= \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2} \\
&= \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} \gamma^2 f^2} \\
&= |\gamma| \int_{[a,b]} f^2 \\
&= \left| \int_{[a,b]} (f \cdot (\gamma f)) \right| \\
&= \left| \int_{[a,b]} (fg) \right| \\
&= |\langle f, g \rangle|
\end{aligned}$$

이므로 (가)가 성립하게 된다.

반대로 (가)를 가정하고 (나)가 성립함을 보이자. 만약 $\|f\|_2 = 0$, 즉 $\int_{[a,b]} f^2 = 0$이면 $f^2 \geq 0$이므로 명제 10.2.8에 의하여 거의 모든 점에서 $f^2 = 0$, 즉 거의 모든 점에서 $f = 0$이다. 이 경우 α와 g에 관계 없이 $\beta = 0$이면 거의 모든 점에서 $\alpha f = \beta g$가 되고, 따라서 (나)를 만족하게 된다. 같은 이유로 $\|g\|_2 = 0$인 경우에도 (가)가 주어지면 (나)를 만족하게 된다. 그렇기 때문에 $\|f\|_2 \neq 0$이고 $\|g\|_2 \neq 0$인 경우만 살펴보면 된다. (가)를 가정하고, $\alpha \langle f, g \rangle = |\langle f, g \rangle|$를 만족하는 α에 대해 $\hat{\lambda} = \alpha \dfrac{\|g\|_2}{\|f\|_2}$로 놓고 $\alpha^2 = 1$임에 주의하면

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle g - \hat{\lambda} f, g - \hat{\lambda} f \right\rangle \\
&= \langle g, g \rangle - 2\hat{\lambda} \langle f, g \rangle + \hat{\lambda}^2 \langle f, f \rangle \\
&= \|g\|_2^2 - 2\hat{\lambda} \langle f, g \rangle + \hat{\lambda}^2 \|f\|_2^2 \\
&= \|g\|_2^2 - 2 |\langle f, g \rangle| \frac{\|g\|_2}{\|f\|_2} + \frac{\|g\|_2^2}{\|f\|_2^2} \|f\|_2^2 \\
&= 2\|g\|_2^2 - 2 |\langle f, g \rangle| \frac{\|g\|_2}{\|f\|_2} \\
&= 2\|g\|_2^2 - 2 \|f\|_2 \|g\|_2 \frac{\|g\|_2}{\|f\|_2} \\
&= 2\|g\|_2^2 - 2\|g\|_2^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

으로부터 첫번째 줄의 부등식에서 등호 조건이 성립해야 함을 알 수 있다. 즉

$$0 = \left\langle g - \hat{\lambda} f, g - \hat{\lambda} f \right\rangle = \left\| g - \hat{\lambda} f \right\|_2^2 \iff \text{거의 모든 점에서 } g = \hat{\lambda} f$$

이 성립하므로, $\alpha = \hat{\lambda}$, $\beta = 1$으로 두면 (나)가 성립함을 알 수 있다.

10.6.10. 등식 $\|f\|_2 + \|g\|_2 = \|f + g\|_2$가 성립한다고 가정하자. 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}
\langle f, f \rangle + 2\|f\|_2 \|g\|_2 + \langle g, g \rangle &= \langle f + g, f + g \rangle \\
&= \langle f, f \rangle + 2 \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle
\end{aligned}$$

이 되므로 $\|f\|_2\|g\|_2 = \langle f, g\rangle$이 성립하고, 이 식에서 좌변은 항상 음이 아니므로 양변에 절댓값을 취하면 $\|f\|_2\|g\|_2 = |\langle f, g\rangle|$이 성립해야 한다. 그러면 연습문제 10.6.9에 의해 동시에 0이 아닌 두 실수 α, β가 존재하여 거의 모든 점에서 $\alpha f = \beta g$이 성립하게 된다. 단, 이때 필요하다면 α와 β 대신 $-\alpha$와 $-\beta$를 고려함으로써 일반성을 잃지 않고 $\alpha \geq 0$이라 가정할 수 있는데, $\langle f, g\rangle \geq 0$이어야 하므로 $\alpha > 0$인데 $\beta < 0$일 수는 없다. 따라서 $\alpha\beta \geq 0$이라는 조건이 추가된다.

한편 반대로, 거의 모든 점에서 $\alpha f = \beta g$을 만족하는 동시에 0이 아닌 두 실수 α와 β가 존재하여 $\alpha\beta \geq 0$이라 하자. 만약 $\beta = 0$이면 가정에 의해 $\alpha \neq 0$이므로 거의 모든 점에서 $f = 0$이고, 그러면 $\|f+g\|_2 = \|g\|_2$이므로 $\|f\|_2 + \|g\|_2 = \|f+g\|_2$이 성립한다. 한편 $\beta \neq 0$이라면 $\gamma = \alpha/\beta$로 놓아, 거의 모든 점에서 $g = \gamma f$이라 하자. 그러면 $\gamma \geq 0$이므로

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2 &= \|f+\gamma f\|_2\\ &= (1+\gamma)\|f\|_2\\ &= \|f\|_2 + \gamma\|f\|_2\\ &= \|f\|_2 + \|g\|_2\end{aligned}$$

가 성립하게 된다. 따라서 $\|f\|_2 + \|g\|_2 = \|f+g\|_2$가 성립할 필요충분조건은 동시에 0이 아닌 두 실수 α, β가 존재하여 $\alpha\beta \geq 0$이고 거의 모든 점에서 $\alpha f = \beta g$인 것이다.

이제 등식 $\|f\|_1 + \|g\|_1 = \|f+g\|_1$가 성립한다고 가정하자. 함수 h를 $h = |f| + |g| - |f+g|$으로 정의하면 삼각부등식에 의해 $h \geq 0$이다. 그런데

$$\int_E h = \int_E |f| + \int_E |g| - \int_E |f+g| = \|f\|_1 + \|g\|_1 - \|f+g\| = 0$$

이므로 거의 모든 점에서 $h = 0$이어야 하고, 따라서 거의 모든 점에서 $|f|+|g| = |f+g|$이어야 한다. 그런데 임의의 두 실수 a, b에 대해 $|a| + |b| = |a+b|$인 것은 $ab \geq 0$인 것과 동치이므로, 종합하면 $\|f\|_1 + \|g\|_1 = \|f+g\|_1$이 성립하면 거의 모든 점에서 $fg \geq 0$인 것이 성립한다.

반대로 거의 모든 점에서 $fg \geq 0$이라 가정하자. 그러면 거의 모든 점에서 $|f| + |g| = |f+g|$이므로

$$\|f\|_1 + \|g\|_1 = \int_E |f| + \int_E |g| = \int_E |f+g| = \|f+g\|_1$$

이 성립하게 된다. 따라서 $\|f\|_1 + \|g\|_1 = \|f+g\|_1$일 필요충분조건은 거의 모든 점에서 $fg \geq 0$인 것이다.

10.6.11. 먼저 다음 보조정리를 살펴보자. 연습문제 6.6.11의 보조정리 1과 매우 유사하며, 증명 또한 비슷하게 할 수 있다.

보조정리. 구간 $I \subset \mathbb{R}$에서 정의된 함수 $F : I \to \mathbb{R}$이 단조증가하는 연속함수이고 I 안의 수열 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 대하여 $\liminf_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 두었을 때 $\alpha \in I$이면

$$\liminf_{n\to\infty} F(a_n) = F(\alpha)$$

이 성립한다.

증명) F가 연속이므로 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 $\delta > 0$이 존재하여 $y \in I$이 $|y-\alpha| < \delta$를 만족하면 $|F(y) - F(\alpha)| < \epsilon$을 만족한다. 이때 명제 1.4.4에 의해 어떤 $N \in \mathbb{N}$이 존재하여 자연수 n이 $n > N$이면 $\alpha - \dfrac{\delta}{2} < a_n$인데, F가 단조증가하므로 $F(\alpha) - \epsilon < F\left(\alpha - \dfrac{\delta}{2}\right) \leq F(a_n)$이

모든 $n > N$인 자연수 n에 대해 성립한다. 또한 $a_n < \alpha + \dfrac{\delta}{2}$를 만족하는 자연수 n이 무한히 많이 존재하는데, 그러한 n에 대해서 $F(a_n) \leq F\left(\alpha + \dfrac{\delta}{2}\right) < F(\alpha) + \epsilon$이 성립하므로 $F(a_n) < F(\alpha) + \epsilon$을 만족하는 자연수 n도 무한히 많이 존재한다. 따라서 명제 1.4.4에 의해 $F(\alpha)$는 수열 $\{F(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$의 하극한이다. □

결론부터 말하자면, 사용하는 노음이 $\|\cdot\|_2$인지 $\|\cdot\|_1$인지에 관계 없이 거의 모든 점에서 $f = g$이다. 두 경우에의 증명이 매우 유사하기 때문에, 한번에 증명하기 위해 변수 p가 1 또는 2의 값을 가진다고 하자. 예컨대 $\|\cdot\|_p$는 $p = 2$라면 $\|\cdot\|_2$을, $p = 1$이라면 $\|\cdot\|_1$을 나타낸다.

함수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$의 정의역이 잴수있는 집합 E라 하자. 가정에 의해 $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$이므로 임의로 양수 $\epsilon > 0$이 주어졌을 때 어떤 자연수 N이 존재하여 $n \geq N$이면 $\|f_n - f\|_p < \epsilon/4$을 만족한다. 이때 자연수 j, k가 $j, k \geq N$이면

$$\|f_j - f_k\|_p \leq \|f_j - f\|_p + \|f - f_k\| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}$$

이 성립함으로부터 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열임을 알 수 있다. 그러한 N에 대해 $k \geq N$인 자연수 k를 고정하면

$$\begin{aligned}
\|f_k - g\|_p = \left(\int |f_k - g|^p\right)^{1/p} &= \left(\int \liminf_{j\to\infty} |f_k - f_j|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\liminf_{j\to\infty} \int |f_k - f_j|^p\right)^{1/p} \\
&= \liminf_{j\to\infty} \left(\int |f_k - f_j|^p\right)^{1/p} \\
&= \liminf_{j\to\infty} \|f_k - f_j\|_p \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 첫 번째 줄의 두 번째 등호에서 g가 f의 점별극한임을, 두 번째 줄로 넘어갈 때 파투의 보조정리(정리 10.3.5)를, 세 번째 줄로 넘어갈 때 실수 $t \geq 0$에 대해 함수 $t \mapsto |t|^{1/p}$가 단조증가이면서 연속임과 위에서 살펴본 보조정리를, 마지막 줄을 얻을 때 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열임과 연습문제 1.6.16의 **(가)**를 이용했다. 그런데 위의 결과는 $k \geq N$이기만 하면 성립하므로, $\lim\limits_{k\to\infty} \|f_k - g\|_p = 0$이 된다.

한편 각 자연수 $k = 1, 2, \cdots$에 대해

$$0 \leq \|f - g\|_p \leq \|f - f_k\|_p + \|f_k - g\|_p$$

가 성립한다. 이때 $k \to \infty$일 때의 극한을 생각하면 우변이 0으로 수렴하므로 샌드위치 정리에 의해 $\|f - g\|_p = 0$이 된다. 따라서

$$0 = \|f - g\|_p^p = \int |f - g|^p$$

이므로 명제 10.2.8에 의해 거의 모든 점에서 $|f - g|^p = 0 \iff |f - g| = 0$이다. 즉 거의 모든 점에서 $f = g$이다.

10.6.12. 각 음이 아닌 정수 $n = 0, 1, 2, \cdots$과 자연수 $k = 1, 2, \cdots, 2^n$에 대해 연속함수 $g_{n,k}$:

$[0,1] \to [0,1]$을

$$g_{n,k}(x) = \begin{cases} 1 & \frac{k-1}{2^n} < x < \frac{k}{2^n} \\ 2^n\left(x - \frac{k-2}{2^n}\right) & \max\left\{0, \frac{k-2}{2^n}\right\} \le x \le \frac{k-1}{2^n} \\ -2^n\left(x - \frac{k+1}{2^n}\right) & \frac{k}{2^n} < x < \min\left\{1, \frac{k+1}{2^n}\right\} \\ 0 & \text{이외의 경우} \end{cases}$$

와 같이 정의하자. 실제로 그래프를 그려보면, $g_{n,k}$의 그래프는 아랫변이 구간 $\left[\frac{k-2}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$이고 윗변이 구간 $\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]$에 해당되며 높이가 1인 등변사다리꼴이 x축 위에 놓여있는 형태의 그래프를 정의역인 $[0,1]$ 부분만 잘라낸 꼴을 하고 있다. 또한 $g_{n,k} \ge 0$이면서, 연속이므로 리만적분가능하다. 그런데 $\int_0^1 g_{n,k}(x)dx$는 앞에서 언급한 등변사다리꼴의 넓이보다 작거나 같을 것이므로

$$\|g_{n,k}\|_1 = \int_0^1 g_{n,k}(x)dx \le \left(\left(\frac{k+1}{2^n} - \frac{k-2}{2^n}\right) + \left(\frac{k}{2^n} - \frac{k-1}{2^n}\right)\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

이 된다.

이제 $g_{n,k}$들을

$$g_{0,1}\ ,\ g_{1,1}\ ,\ g_{1,2}\ ,\ g_{2,1}\ ,\ g_{2,2}\ ,\ g_{2,3}\ ,\cdots\ ,\ g_{n,1}\ ,\cdots\ ,\ g_{n,2^n}\ ,\ g_{n+1,1}\ ,\cdots$$

으로 늘어놓아 순서대로 $f_1, f_2, f_3, \cdots$으로 다시 이름붙이자. 즉, 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대하여 $l = \lfloor \log_2 n \rfloor$으로 놓았을 때 $f_n = g_{l,n-2^l+1}$으로 놓는다는 것이다. 그러면 임의의 자연수 n에 대해, $m = n - \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$이라 하면

$$0 \le \|f_n\|_1 = \left\|g_{\lfloor \log_2 n \rfloor, m}\right\|_1 \le \frac{1}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}} \le \frac{1}{2^{\log_2 n - 1}} = \frac{2}{n}$$

이 된다. 이때 $n \to \infty$일 때의 극한을 생각하면 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$이다.

한편, 임의로 $x \in [0,1]$을 잡았을 때, 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$에 대해 $\frac{k-1}{2^n} \le x \le \frac{k}{2^n}$을 만족하는 k를 찾을 수 있는데, 그러면

$$1 = g_{n,k}(x) = f_{2^n+k-1}(x)$$

이므로 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$은 1로 수렴하는 부분수열을 가진다. 따라서 어떤 $x \in [0,1]$에 대해서도 $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$은 0으로 수렴하지 않는다.

10.6.13. 만약 $a = b$이면 $m([a,b]) = 0$이므로 당연히 거의 모든 점에서 $f = 0$이다. 따라서 $a < b$인 경우만 생각한다. 주어진 조건으로부터 임의로 $c, d \in [a,b]$가 주어졌을 때,

$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f = 0$$

이므로, 주어진 조건은 임의의 구간 위에서 f의 적분값이 0이라는 것과 동치임에 주목하자.

모순을 이끌어내기 위해 거의 모든 점에서 $f = 0$인 것은 아니라고 가정하자. 이는 곧 등식

$$\{x : f(x) \ne 0\} = \{x : f(x) > 0\} \sqcup \{x : f(x) < 0\}$$

에서 좌변의 집합이 영집합[1)]이 아니므로 우변의 두 집합 중 하나는 영집합이 아니다. 필요하다면 f 대신 $-f$를 생각함으로써, 일반성을 잃지 않고 $m(\{x : f(x) > 0\}) > 0$이라 가정할 수 있다. 그런데 이때

$$\{x : f(x) > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}$$

이므로 명제 10.1.2의 (라)에 의해

$$0 < m(\{x : f(x) \neq 0\}) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} m\left(\left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}\right)$$

이 된다. 따라서 모든 자연수 $k = 1, 2, \cdots$ 에 대해서 $m\left(\left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}\right) = 0$일 수 없고, 어떤 자연수 k가 존재하여 $m\left(\left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}\right) > 0$이다. 이때 $F = \left\{x : f(x) \le \frac{1}{k}\right\}$라 두자.

집합 G를 $[a, b] \setminus F$라 두면 G도 잴수있는 집합이다. 또한 $m(G) = \mu(G)$이므로, $\mu(\cdot)$의 정의에 의해 어떤 열린집합 U가 존재하여 $U \supseteq G$이고 $\lambda(U) < \mu(G) + \frac{1}{2}m(F) = m(G) + \frac{1}{2}m(F)$을 만족한다. 이때 $V = U \cup (-\infty, a) \cup (b, \infty)$를 생각하면 V는 $\mathbb{R}$의 열린집합이므로 명제 10.1.1을 이용하여 서로소인 셀 수 있는 열린구간의 합집합 $V = \bigsqcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$으로 나타낼 수 있다. 각 자연수 $n = 1, 2, \cdots$ 에 대하여 $I_n = (a_n, b_n) \cap [a, b]$라 하면, 두 구간의 교집합은 구간이므로 각 I_n은 구간이며, 서로소이고, $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} I_n = V \cap [a, b] = U$임에 주의하자. 편의상 $I_0 = [a, b] \setminus U$라 두면 따름정리 10.2.6과 임의의 구간 위에서 f의 적분은 0임에 의해

$$0 = \int_a^b f = \int_{I_0} f + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f = \int_{I_0} f$$

임을 알 수 있다. 한편 명제 10.1.2의 (나)와 본문의 식 (3)에 의해 $\lambda(U) = \mu(U) = m(U)$임에 유의하면

$$m(I_0) = m([a, b] \setminus U) = m([a, b]) - m(U) = m(F) + m(G) - \lambda(U) > \frac{1}{2}m(F) > 0$$

임을 알 수 있다. 그런데 이때

$$I_0 = \big([a, b] \setminus U\big) \subset \big([a, b] \setminus G\big) = F$$

이므로 $x \in I_0$이면 $x \in F$가 되어 그러한 x에 대해서는 $f(x) \ge \frac{1}{k}$이고, 이는 즉

$$0 = \int_{I_0} f \ge \int_{I_0} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} m(I_0) > 0$$

이 성립한다는 뜻이 되어 모순이 발생한다. 따라서 처음 가정했던 것이 거짓이어야 하므로, 문제에서 주어진 조건이 만족되면 거의 모든 점에서 $f = 0$이다.

10.6.14. $L^1(E)$나 $L^2(E)$와 마찬가지로, 거의 모든 점에서 $f = g$이면 f와 g는 같은 것으로 보면 연습문제 7.5.11에서 $\|\cdot\|_p$가 $L^p(E)$의 노음이 되는 것을 보았다. 따라서 $L^p(E)$에 노음 $\|\cdot\|_p$이 주어졌을 때 완비공간이 되는 지만 확인하면 충분하다.

[1)] 잴수있는 집합 E가 $m(E) = 0$이면 E를 영집합이라고 한다.

$L^p(E)$ 안의 코시수열 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을 생각하자. 그러면 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 적당한 $N \in \mathbb{N}$을 잡아 자연수 n, m이 N보다 크면 $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$을 만족하도록 할 수 있다. 특히, 이 성질에 의해 증가수열 $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$를, 각 자연수 $k = 1, 2, \cdots$ 에 대해 $\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\| \le 2^{-k}$가 성립하도록 잡을 수 있다. 이제 함수 g를 각 $x \in E$에 대해

$$g(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

이 되도록 정의하고, 함수열 $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$을 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대해

$$g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{m} \left|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right|$$

이라 놓자. 그러면 $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$이 증가함수열임은 당연하다. 그런데 각 자연수 $m = 1, 2, \cdots$ 에 대해

$$\begin{aligned}\|g_m\|_p &\le \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{m} \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \\ &\le \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\end{aligned}$$

이고, $\{g_m\}_{m\in\mathbb{N}}$이 점별로 g에 수렴하므로 단조수렴정리에 의해

$$\int_E g^p = \lim_{m\to\infty} \int_E g_m^p = \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_p^p \le \lim_{m\to\infty} \left(\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}\right)^p < \infty$$

이 성립하므로 거의 모든 점에서 $g < \infty$이다. 그런데 절대수렴하는 급수는 수렴하므로, 함수 f를 각 $x \in E$에 대하여

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

라 놓으면 거의 모든 점 $x \in E$에 대하여 $f(x)$가 수렴한다. 따라서 위의 급수가 수렴하지 않는 점들에 대하여는 f의 함수값을 0이라 두어 f가 E 위의 모든 점에서 잘 정의되도록 하여도 상관없다. 더 나아가, f의 정의로부터 각 $x \in E$에 대해 $|f(x)| \le g(x)$인데 $\int_E g^p < \infty$이므로

$$\int_E f^p \le \int_E |f|^p \le \int_E g^p < \infty$$

으로부터 $f \in L^p(E)$임을 알 수 있다.

한편, f의 정의가 망원급수꼴임에 유의하면 각 $x \in E$에 대하여

$$f_{n_{K+1}}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K} \left(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\right)$$

이므로 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$는 f로 거의 모든 점에서 점별수렴함을 알 수 있다. 특히 거의 모든 점 $x \in E$에서 $\liminf_{j\to\infty} f_{n_j}(x) = f(x)$임에 유의하자. 이제 임의로 $\epsilon > 0$이 주어졌다고 하고, 임의의 두 자연수 j, k에 대해 $j < k$이라 하면

$$\left\|f_{n_j} - f_{n_k}\right\|_p \le \sum_{i=j}^{k-1} \left\|f_{n_i} - f_{n_{i+1}}\right\|_p \le \sum_{i=j}^{k-1} 2^{-i} < 2^{-j+1}$$

이 성립한다. 따라서 자연수 N을 두 자연수 j, k이 N보다 크면 $\|f_{n_j} - f_{n_k}\|_p < \epsilon/2$를 만족하도록 잡을 수 있다. 그러면 $K > N$인 자연수 K에 대하여,

$$\begin{aligned}
\|f - f_{n_K}\|_p &= \left(\int_E |f - f_{n_K}|^p\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_E \liminf_{j\to\infty} |f_{n_j} - f_{n_K}|^p\right)^{1/p} \\
&\le \liminf_{j\to\infty}\left(\int_E |f_{n_j} - f_{n_K}|^p\right)^{1/p} \\
&= \liminf_{j\to\infty} \|f_{n_j} - f_{n_k}\|_p \le \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

임을 알 수 있다. 위에서 세 번째 줄의 부등호를 얻을 때 $t \mapsto t^{1/p}$이 $[0,\infty)$에서 단조증가한다는 사실을 이용하여 연습문제 10.6.11에서 살펴본 보조정리와 파투의 보조정리를 동시에 사용했다. 위의 식으로부터 $\lim_{K\to\infty} \|f - f_{n_K}\|_p = 0$임을 알 수 있다.

이제 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 코시수열이었음을 상기하자. 따라서 임의로 $\epsilon > 0$이 주어지면 어떤 자연수 N이 존재하여 두 자연수 n, m이 N보다 크면 $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon/2$를 만족한다. 이때 자연수 K를, $n_K > N$이면서 $\|f - f_{n_K}\| < \epsilon/2$이 되도록 잡으면 $n > N$인 경우

$$\|f - f_n\|_p \le \|f - f_{n_K}\|_p + \|f_{n_K} - f_n\|_p < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

를 만족한다. 따라서 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 노음 $\|\cdot\|_p$에 대하여 f로 수렴하는 것을 알 수 있다. 그런데 $f \in L^p(E)$인 것은 앞에서 보였고, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$는 $L^p(E)$ 안에서 임의로 잡은 코시수열이었으므로, $L^p(E)$에 노음 $\|\cdot\|_p$이 주어지면 $L^p(E)$이 완비공간이 됨을 보였다.

10.6.15. (가) 만약 어떤 $a > 0$에 대하여 $g(a) < 0$이면 모든 $x \in [a,\infty)$에 대하여 $g(x) \le g(a) < 0$이므로 $\int_{[a,\infty)} g = -\infty$가 되어 $g \in L^1(\mathbb{R})$에 모순이다. 따라서 모든 $a > 0$에 대하여 $g(a) \ge 0$이다. 비슷한 이유로 모든 $a < 0$에 대하여서도 $g(a) \ge 0$이다. 따라서 $g \ge 0$이므로 따름정리 6.3.5를 생각하면 G를 정의에 의해 각 $x \in [-\pi,\pi]$에 대하여

$$\begin{aligned}
G(x) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} g(x - 2n\pi) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(g(x) + \sum_{n=1}^{N} g(x - 2n\pi) + \sum_{n=1}^{N} g(x + 2n\pi)\right) \\
&= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x - 2n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x + 2n\pi)
\end{aligned}$$

이라 나타낼 수 있다. 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여 $x \in [-\pi,\pi]$일 때 $g(x+2n\pi)$는 $x \in [(2n-1)\pi,(2n+1)\pi]$일 때 $g(x)$와 같기 때문에, $n > 0$일 때 $[-\pi,\pi]$ 위에서 $x \mapsto g(x + 2n\pi)$은 단조감소함수이다. 이제 $\mathbb{R}$에서 정의된 함수열 $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$을, 각 자연수 $N \in \mathbb{N}$에 대하여

$$h_N = \sum_{n=1}^{N} g\Big((2n-1)\pi\Big)\chi_{[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi]}$$

이라 정의하면 $0 \le h_N \le g$이고 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\lim_{N\to\infty} h_N(x)$이 존재함은 당연하므로 함수열

$\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$에 르벡 수렴정리를 사용할 수 있다. 그런데

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h_N &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{N} g\Big((2n-1)\pi\Big)\chi_{[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi]} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \int_{\mathbb{R}} g\Big((2n-1)\pi\Big)\chi_{[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi]} \\ &= \pi \sum_{n=1}^{N} g\Big((2n-1)\pi\Big)\end{aligned}$$

이므로, 르벡 수렴정리에 의해 각 $x \in [-\pi, \pi]$에 대하여

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi) &\le \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g(-\pi+2n\pi) \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} h_N \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \lim_{N\to\infty} h_N \\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g < \infty\end{aligned}$$

이 성립한다. 즉, $[-\pi, \pi]$에서 $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi)$로 정의된 함수는 각 점에서 급수가 수렴하는, 잘 정의된 함수가 된다. 또한, $g(x)$ 대신 $g(-x)$에 대하여 위의 논리를 그대로 적용하면 $[-\pi, \pi]$에서 $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(x-2n\pi)$로 정의된 함수도 각 점에서 급수가 수렴하는, 잘 정의된 함수가 됨을 알 수 있다. 편의상 $G_{(+)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi)$, $G_{(-)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g(x-2n\pi)$이라 놓자. 그러면 $G_{(+)}$는 단조감소함수들의 합으로써 단조감소함수이므로

$$\begin{aligned}V_{-\pi}^{\pi}(G_{(+)}) &= G_{(+)}(-\pi) - G_{(+)}(\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} g\Big((2n-1)\pi\Big) - \sum_{n=1}^{\infty} g\Big((2n+1)\pi\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \bigg(g\Big((2n-1)\pi\Big) - g\Big((2n+1)\pi\Big)\bigg) \\ &= g(\pi) - \lim_{n\to\infty} g\Big((2n+1)\pi\Big)\end{aligned}$$

인데, g가 $[0, \infty)$에서 단조감소하므로

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \inf\{g(x) : x \ge 0\} \ge 0$$

이고 만약 $\alpha = \inf\{g(x) : x \ge 0\}$라 두었을 때 $\alpha > 0$이면 $\displaystyle\int_{[0,\infty)} g \ge \int_{[0,\infty)} \alpha = \infty$이므로 $g \in L^1(\mathbb{R})$에 모순이다. 즉 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$이며 $V_{-\pi}^{\pi}(G_{(+)}) = g(\pi)$인 것 또한 알 수 있다. 한편 $G_{(-)}$는 단조증가함수들의 합으로써 단조증가함수이므로, 비슷한 과정을 통해 $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$이고 $V_{-\pi}^{\pi}(G_{(-)}) = g(-\pi)$임을 알 수 있다. 다시 말해, $G_{(+)}$와 $G_{(-)}$는 $[-\pi, \pi]$ 위에서 유계변동함수이다. 마지막으로, $g(x)$는 $[-\pi, 0]$에서 단조증가하고 $[0, \pi]$에서 단조감소하므로

$$V_{-\pi}^{\pi}(g) = V_{-\pi}^{0}(g) + V_{0}^{\pi}(g) = \Big(g(0) - g(-\pi)\Big) + \Big(g(0) - g(\pi)\Big) < \infty$$

이 되어, g 또한 $[-\pi,\pi]$ 위에서 유계변동함수이다. 따라서 $G = g + G_{(+)} + G_{(-)}$가 $[-\pi,\pi]$ 위에서 유계변동함수인 것을 알 수 있다.

(나) 정리 10.5.1에 의해, $g \in L^1(\mathbb{R})$이므로 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$\widehat{G}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-inx}dx$$

이 된다. 그런데 G가 $[-\pi,\pi]$에서 유계변동함수임을 **(가)**에서 보았으므로, 디리클렛-조르당 정리에 의해

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{G}(n) = \frac{G(0+)+G(0-)}{2}$$

이 성립함을 알 수 있다.

이제 **(가)**에서와 같이 $G_{(+)}, G_{(-)}$를 정의하고

$$\begin{aligned}G(x) &= g(x) + G_{(+)}(x) + G_{(-)}(x)\\ &= g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x-2n\pi)\end{aligned}$$

라 두었을 때, 위의 식의 마지막 줄의 두 급수가 각각 $G_{(+)}$와 $G_{(-)}$로 고르게 수렴하는 급수임을 보일 것이다. 편의상 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi)$의 N번째 부분합을 $G_{+,N}(x) = \sum_{n=1}^{N} g(x+2n\pi)$으로 나타내면 $\{G_{+,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$이 $G_{(+)}$로 점별수렴하는 것은 이미 알고 있다. 그런데 $G_{(+)} - G_{+,N} = \sum_{n=N+1}^{\infty} g(x+2n\pi)$ 이 단조감소함수의 합으로써 단조감소함수이므로

$$\begin{aligned}\left\|G_{(+)} - G_{+,N}\right\|_{\infty} &= \sup_{-\pi\le x\le\pi}\Big(G_{(+)}(x) - G_{+,N}(x)\Big)\\ &= G_{(+)}(-\pi) - G_{+,N}(-\pi)\\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} g\Big((2n-1)\pi\Big)\end{aligned}$$

이 성립하는데, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} g\Big((2n-1)\pi\Big)$이 수렴하는 것을 **(가)**에서 확인했기 때문에, 임의로 $\epsilon > 0$ 이 주어졌을 때 어떤 자연수 N_0이 존재하여 $N > N_0$이면 $\sum_{n=N+1}^{\infty} g\Big((2n-1)\pi\Big) < \epsilon$을 만족하도록 할 수 있다. 그런데 이는 즉, $N > N_0$이면 $\left\|G_{(+)} - G_{+,N}\right\|_{\infty} < \epsilon$임을 의미하기 때문에, 함수열 $\{G_{+,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$은 $G_{(+)}$으로 고르게 수렴한다. 비슷한 방식으로, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} g(x-2n\pi)$의 N번째 부분합을 $G_{-,N}(x) = \sum_{n=1}^{N} g(x-2n\pi)$으로 나타내면 함수열 $\{G_{-,N}\}_{N\in\mathbb{N}}$이 $G_{(-)}$으로 고르게 수렴하는 것 또한 알 수 있다. 이로부터

$$\begin{aligned}G(0+) &= \lim_{x\to0+}\left(g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x+2n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} g(x-2n\pi)\right)\\ &= g(0+) + \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0+}(x+2n\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0+} g(x-2n\pi)\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(2n\pi+)\end{aligned}$$

임을 알 수 있고, 비슷하게 $G(0-) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(2n\pi-)$ 인 것 또한 알 수 있다. 따라서 문제에서 주어진 것처럼 등식

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{g(2n\pi+)+g(2n\pi-)}{2} &= \frac{G(0+)+G(0-)}{2} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{G}(n) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-inx}dx\end{aligned}$$

이 성립한다.

(다) 연습문제 8.4.3에서 등식

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-itx}dt = e^{-x^2/2}$$

가 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 성립하는 것을 보았다. 이때 x의 자리에 $\dfrac{n}{\sqrt{2\alpha}}$을 대입하고 $t = \sqrt{2\alpha}u$라 두면 등식

$$\begin{aligned}e^{-n^2/(4\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}e^{-itn/\sqrt{2\alpha}}dt \\ &= \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2}e^{-inu}du\end{aligned}$$

이 성립함을 알 수 있다. 한편 $g(x) = e^{-\alpha x^2}$은 $\mathbb{R}$에서 연속이므로 각 정수 $n \in \mathbb{Z}$에 대하여

$$\frac{g(2n\pi+)+g(2n\pi-)}{2} = g(2n\pi) = e^{-4\alpha n^2\pi^2}$$

이 된다. 따라서 $g(x) = e^{-\alpha x^2}$에 대하여 **(나)**에서 얻은 등식을 적용하면

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4\alpha n^2\pi^2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}e^{-inx}dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-n^2/(4\alpha)}\end{aligned}$$

을 얻는다.

(라) 임의로 $x > 0$을 고정하고, 위의 **(다)**에서 얻은 등식에서 $\alpha = \dfrac{x}{4\pi}$인 경우를 생각하자. 그러면

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\pi n^2/x}$$

을 얻기 때문에, $\Theta(x)$의 정의를 이용하면 각 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $\Theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\Theta\left(\dfrac{1}{x}\right)$이 성립함을 알 수 있다.