中学数学实验教材

第一册（下）

中学数学实验教材编写组编

1981 年 9 月

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计

的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数(包括概率统计)、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目　录

第四章　多项式的四则运算

我们已经学习了一次方程和一元二次方程的解法，总结其要点就是：设未知数、列方程式、进而解方程。从运算的角度上看，其基本原理就是：把未知数当作具有数系运算通性的符号，与已知数一样参加运算，进而再运用数系运算通性去求出所设未知数。这种含有未知数的算式的运算，就是解代数方程的基本功。把这些运算系统化，就是本章的主要内容多项式的四则运算。

第一节　单项式与多项式

一、单项式

由已知数及未知数符号 $x, y, \ldots$ 的方幂相乘，所得到的式子，叫做**单项式**。例如：$8x$，$9x^2$，$-2x^4$，$\frac{1}{2}x^7$，$-\frac{3}{7}x^{32}$，$0.618xy^2$，$-\sqrt{2}x^{121}$，$7x^2y$，$-\sqrt{7}xyz$，$\frac{3}{4}x^2y^3z$，以及 $-\frac{\sqrt{3}}{5}mt$，$\sqrt{\frac{1}{3}}x^2y^3zt$ 等都是单项式。

在单项式中，未知数符号前面的数字因数叫做这个单项式的**系数**；未知数符号叫做单项式的**元**；所含不同未知数的个数，就叫这个单项式的**元数**；而所含各元乘方指数的总和，就叫做这个单项式的**次数**。例如，以上所举各单项式的系数，元数，次数分别如表 1.1 所示。

今后，我们就以单项式的元数，次数为准来称呼每一个单项式。例如：$-2x^4$ 称为一元四次单项式，$0.618xy$ 与 $7xy$ 都称为二元三次单项式等。

由于 2 可以看成 $2x^0$，$-\sqrt{5}$ 可以看成 $-\sqrt{5}y^0$ 等，因而，单独一个不等于 0 的数，也是一个单项式，只不过这样的单项式的次数都为零次。

所以，一般地说，任一个非零数 a，都是单项式的特例，我们叫做**零次单项式**。例如：$2, -\sqrt{5}, 0.3, -3\sqrt{2}, -7\frac{1}{2}$ 等，都是零次单项式。

又由于数 0 可以看成：

$$0 \cdot x^0, 0 \cdot x, 0 \cdot x^2, \ldots, 0 \cdot x^n, \ldots$$

表 4.1

单项式	系数	元数	次数
$8x$	8	一元	1 次
$9x^2$	9	一元	2 次
$-2x^4$	-2	一元	4 次
$\frac{1}{2}x^7$	$\frac{1}{2}$	一元	7 次
$-\frac{3}{7}x^{32}$	$-\frac{3}{7}$	一元	32 次
$0.618xy^2$	0.618	二元	3 次
$-\sqrt{2}x^{121}$	$-\sqrt{2}$	一元	121 次
$7x^2y$	7	二元	3 次
$-\sqrt{7}xyz$	$-\sqrt{7}$	三元	3 次
$\frac{3}{4}x^2y^3z$	$\frac{3}{4}$	三元	6 次
$-\frac{\sqrt{3}}{5}mt$	$-\frac{\sqrt{3}}{5}$	二元	2 次
$\sqrt{\frac{1}{3}}x^2y^3zt$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	四元	7 次

所以，对于“零”这个特殊的数，我们就叫做**零单项式**。零单项式是单项式中唯一的**次数不定的单项式**。尽管它有多种形式的写法，但**每种写法中系数都是 0**。因而，通常还是用“0”表示零单项式。

综上所述，单项式包括：

- 单项式
  - 非零单项式
    - 零次单项式
    - 非零次单项式
  - 零单项式

练习

1. 指出下列各单项式的系数、元数及次数：

$$x^8,\qquad -x^4y,\qquad 3x^5,\qquad -1.41xyz,\qquad \sqrt{7}x^7$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}xy, \qquad -\sqrt{3}, \qquad -x^2y^2z^2, \qquad \frac{22}{7}, \qquad 0$$

2. 什么是零单项式？它与零次单项式有什么差别？

如果在几个单项式中，不管它们的系数是不是相同，只要它们所含的未知数相同，而且各相同未知数的指数都对应相等，那么，这几个单项式就叫做**同类单项式**。简称**同类项**。

例如：$\frac{1}{2}x^2$ 与 $-5x^2$ 与 $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2$ 是同类项。$\sqrt{5}xy^2$ 与 $-7xy^2$ 与 $\frac{1}{3}xy^2$ 也是同类项。$\sqrt{2}xyz^2$ 与 $100xz^2y$ 与 z^2xy 也是同类项。

但是，$5x^3$, $7y^3$ 与 $7z^3$ 就不是同类项；$-xy$, $23xy^2$, $51x^2y$ 与 $\frac{1}{2}x^2y^2$ 都不是同类项。

练习

把下列各单项式，按同类项分成各个组。你能分出几组来？

$$-7, \qquad 6x, \qquad \frac{1}{2}x^3y, \qquad \sqrt{2}, \qquad -xyz, \qquad -0.5yx^3$$

$$\sqrt{5}zyx, \qquad \frac{x^3y}{5}, \qquad 0.1x, \qquad 9yxz, \qquad 10yx^3$$

二、多项式

由有限个单项式的代数和组成的式子，叫做**多项式**。也就是说，用“+”“−”号把有限个单项式连结起来所得的式子，就叫多项式。例如：$3x+0.5+2x^2$, $x^3-3x+\sqrt{2}$, $xy-3x+\sqrt{5}y+1$, $-\frac{\sqrt{2}}{7}x^3y^3+2.31x^2-8z$ 等，都是多项式。

一个单项式可以看作是多项式的特例，特别是，**零单项式**也可以称为**零多项式**。

多项式就是若干单项式的代数和，而单项式又是一些数与具有数系运算通性的未知数符号的方幂所组成的。因此，单项式自然也具有数系运算通性，就是说：

单项式加、乘满足交换、结合律及分配律；例如：

$$5x^2-1+8x=5x^2+8x-1 \qquad \text{(交换律)}$$

$$\begin{aligned}(7xy-8y^2)+3xy&=(7xy+3xy)-8y^2 && \text{(交换律，结合律)}\\ &=10xy-8y^2 && \text{(分配律)}\end{aligned}$$

单项式 0 与单项式 1 具有数 0 与 1 的运算特性；例如：$7x^3+0=7x^3$, $(7x^3)\cdot 0=0$, $7x^3\cdot 1=7x^3$ 等。

利用单项式运算的通性，特别是运用交换律、结合律和分配律，我们完全可以把一个多项式当中的同类项合并起来，集中成为一项，这就是**合并同类项**。例如：

$$\begin{aligned} 3x+7x^2-15x &= 7x^2+(3x-15x) && \text{(交换律，结合律)} \\ &= 7x^2+(3-15)x && \text{(分配律)} \\ &= 7x^2-12x \end{aligned}$$

$$3x^2+\sqrt{3}x^3-\sqrt{2}x^2-2x^3=(3-\sqrt{2})x^2+(\sqrt{3}-2)x^3$$

$$x^3-2x^2y+y^3+x^2y+1=x^3-x^2y+y^3+1$$

由此可知，**合并同类项，就是指同类单项式的相加或相减**，其法则是：**把同类单项式的系数相加或相减，而单项式中的未知数及它们的乘方指数不变**。

对于一元单项式来说，合并同类项，就是一元同类单项式相加或相减，它的法则可以用以下式子表示：

$$\boxed{ax^n+bx^n=(a+b)x^n, \qquad ax^n-bx^n=(a-b)x^n}$$

其中，a,b 为单项式的系数，可以是任意的已知实数；n 为自然数。

例 4.1 合并以下各同类项：

1. $x+2x+3x+4x$
2. $7x^3-2x^3+5x^3+(-0.5)x^3-0.7x^3$
3. $\sqrt{2}xy^2-xy^2+3xy^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}xy^2$

解：

1. $x+2x+3x+4x=(1+2+3+4)x=10x$
2. $7x^3-2x^3+5x^3+(-0.5)x^3-0.7x^3=(7-2+5-0.5-0.7)x^3=8.8x^3$
3. $\sqrt{2}xy^2-xy^2+3xy^2-\dfrac{\sqrt{2}}{2}xy^2=\left(\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1+3\right)xy^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\right)xy^2$

练习

合并以下各同类项：

1. （口答）：

$$7x^4+(-9)x^4,\qquad \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^3,\qquad 0.5x^7+\frac{1}{100}x^7,\qquad 81x^{12}-(-3x^4)^3$$

$$9xy^2-xy^2,\qquad 4y^2z^2-(-2zy)^2,\qquad 2x^2-\left(-\frac{1}{2}\right)x^2-5x^2,$$

$$4x^3+(-x)^3-\frac{9}{4}x^3+\left(-\frac{1}{4}\right)x^3$$

2. $3xy^3-4y^3x+7xy^3-(-2)xy^3,\qquad ax^n+bx^n+cx^n-dx^n$

在多项式中，所含不同未知数的个数，称为这个多项式的**元数**；经过合并同类项以后，多项式所含非零单项式的个数，称为这个多项式的**项数**；多项式合并同类项后，所含各单项式中最高次项的次数，就称为这个多项式的**次数**。例如：

- $3x+0.5+2x^2$ 就是一元、三项、二次多项式；
- $x^3-3x+x^2+\sqrt{2}-x=x^3-3x+\sqrt{2}$（合并同类项），就是一元、三项、三次多项式；
- $xy-3x+\sqrt{5}y+1$ 就是二元四项二次多项式；
- $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x^2y^2+2.3xz-8z^2$ 就是三元、三项、五次多项式。

在今后，我们常常把所遇到的多项式，先合并同类项，再以这个多项式的元数、次数为准来称呼这个多项式。例如：

- $x^3-3x+\sqrt{2}$ 称为一元三次多项式；
- $x^2+x^3-y-x^2=x^3-y$ 称为二元三次多项式。

特别是，象 $10,\sqrt{2},-\dfrac{1}{3}$ 等非零实数，称为零次多项式（一元或多元的）。数 0，称为**零多项式**（一元或多元的，次数不定）。

一个多项式，经过合并同类项以后，还可以把所含不同类项，运用交换律按它们各项的次数顺序排列。次数由高到低排列的多项式，称为**降次排列**；反之，就称为**升次排列**，通常使用降次排列的形式。

对于一元多项式来说；比如 $7x^2-1+5x^2-x$ 按降次排列可以写成：$7x^3+5x^2-x-1$。按降次排列的一元多项式，称为这个多项式的标准形式。显然，一元 n 次多项式的标准形式可以表示为：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0, \qquad (a_n\neq 0)$$

其中：$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ 都是已知实数，且 $a_n\neq 0$，它们分别是 n 次项，$(n-1)$ 次项，……，1 次项和零次项（常数项）的系数。n 是自然数。

例 4.2 把下列各多项式整理成标准形式：

1. $-3-5x^5+x^2-3x-x^3+\sqrt{2}x^4$
2. $-10\sqrt{2}x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2-x^3+\sqrt{2}x^2+101$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x^8+10^{10}+x^{10}-\sqrt{3}x^3-5x^2$

解： 先合并同类项，再按降次排列。

$$-3-5x^5+x^2-3x-x^3+\sqrt{2}x^4=-5x^5+\sqrt{2}x^4-x^3+x^2-3x-3$$

$$\begin{aligned}-10\sqrt{2}x+\frac{1}{\sqrt{2}}x^2-x^3+\sqrt{2}x^2+101&=-x^3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)x^2-10\sqrt{2}x+101\\&=-x^3+\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2-10\sqrt{2}x+101\\\frac{1}{\sqrt{3}}x^8+10^{10}+x^{10}-\sqrt{3}x^3-5x^2&=x^{10}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)x^3-5x^2+10^{10}\\&=x^{10}-\frac{2\sqrt{3}}{3}x^3-5x^2+10^{10}\end{aligned}$$

对于多元多项式，也可以先合并同类项，再按某一个元的降次排列，但最后的结果，就每一项的次数而言，不一定有降次的排列顺序。例如：$x^4-x^3y^2+7x^2y-3xy+4x+1$ 就是一个按 x 的降次排列的二元多项式，但就其各项的次数却不是降次排列，其中第二项的次数是 5，而第一项却是 4 次。

练习

将下列多项式整理成标准形式，并指出它的元数、次数和项数。

1. $2x^5-\left(-\dfrac{1}{2}x^5\right)+(-3)x^5$
2. $3x^2-4x^2+7x^3-x^3-1$

3. $3+2t^2-3t+4t^3+3t^2-2t^3-5$

4. $\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x^2+\frac{1}{2}x^4-x+0\cdot x^3+7$

5. $(2y^2)^2+(-3y)^3-y^4+9y^3-\left(\sqrt{3}y^2\right)^2-\left(-\sqrt{2}y\right)^2+y-1$

6. $5xy-3x^4y+x^6-8x^3y^4-2y+1$ （按 x 的降次）

三、多项式的值

任一个多项式，就是已知数和未知数用加、减、乘，乘方运算连接起来的一个式子，例如：一元四次多项式 $5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$ 就是已知数 5、4、3、2、1 与未知数 x 的方幂用加、乘运算连接起来的一个式子。

这种关系的式子，我们可以用一个符号 $f(x)$ 来表示，写成：

$$f(x)=5x^4+4x^3+3x^2+2x+1$$

特别注意，这里的 f 是指一种关系，x 是指这种关系式中的未知数，符号 $f(x)$ 就是关于未知数 x 的一种关系式的标记，不要、也不能把这个标记认为是 f 与 x 的乘积。

当然，在一个关系式中，未知数符号还可以用 $y,z,\ldots$ 等字母表示；而且不同的多项式又表达了不同的关系式。因而，多项式还可以用符号 $f(y)$、$g(y)$、$g(x)$、$h(x)$、$\varphi(z)$ 等来表示。但一定要注意：在同一个问题中，如果出现两个以上的不同多项式，那么就要用不同的符号分别表示它们。例如：

- $f(x)=4x^2+3x-1$ 与 $g(x)=5x-3$ 就表示了关于同一个未知数 x 的两个不同关系式；
- $h(x)=x^2-2x+1$ 与 $h(y)=y^2-2y+1$ 就表示了关于不同未知数 x,y 的同一种关系式。

如果已知一个一元多项式 $f(x)$，就是给出了一些已知数（各项系数）、未知数 x 和一定运算顺序的关系式。比如：$f(x)=3x^2-2x+1$。其中，未知数 x 是可以任意取数值的。那么，当 x 取某一个给定的数值时，比如：$x=2$ 时，代入已知的关系式，就一定可以相应地算出 $f(x)$ 的一个数值来，这个数值我们就记作：

$$f(2)=3\times 2^2-2\times 2+1,\quad \text{即：}\ f(2)=9$$

并且，我们把 $f(2)=9$ 就叫做当 $x=2$ 时 $f(x)$ 的值。

一般地说：

一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\quad (a_n\neq 0)$$

当 $x=b$ 时，可以得出一个值，记作 $f(b)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$。这里 $f(b)$ 就叫做当 $x=b$ 时，多项式 $f(x)$ 的值。

例 4.3 已知 $g(y)=4y^2+3y+1$，试求：当 $y=0,1,-1,10,-\dfrac{1}{2},0.82,a$ 时，多项式 $g(y)$ 的值。

解： 分别将 $y=0,1,-1,10,-\dfrac{1}{2},0.82,a$ 代入 $g(y)$ 的表达式中，就可以算出相应的多项式的值。

$$\begin{aligned}
g(0)&=4\times 0^2+3\times 0+1=1\\
g(1)&=4\times 1^2+3\times 1+1=8\\
g(-1)&=4\times(-1)^2+3\times(-1)+1=2\\
g(10)&=4\times 10^2+3\times 10+1=431\\
g\left(-\frac{1}{2}\right)&=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=\frac{1}{2}\\
g(0.82)&=4\times(0.82)^2+3\times(0.82)+1=6.1496\\
g(a)&=4a^2+3a+1
\end{aligned}$$

例 4.4 已知 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$，试求：$f(0)$、$f(1)$、$f(-1)$ 及 $f(10)$ 的值。

解：

$$\begin{aligned}
f(0)&=0^n+0^{n-1}+\cdots+0+1=1\\
f(1)&=1^n+1^{n-1}+\cdots+1+1=n+1\\
f(-1)&=(-1)^n+(-1)^{n-1}+\cdots+(-1)+1=\begin{cases}1 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\\ 0 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\end{cases}\\
f(10)&=10^n+10^{n-1}+\cdots+10+1=\underbrace{11\cdots11}_{(n+1)\text{位}}
\end{aligned}$$

例 4.5 已知 $h(y)=my-1$，且 $h(2)=1$。试求：m 的值和 $h(y)$ 的表达式。

解： $\because \quad h(2)=1$

$\therefore \quad 1=2m-1$，解出 $m=1$

$\therefore \quad h(y)=y-1$

例 4.6 已知 $f(x)=x^2+mx+n$，且 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，$f(1)=1$。试求：$f(0)$，$f(2)$，$f(-8)$。

解： 首先要求出 $f(x)$ 表达式中的 m,n

$\because \quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ 及 $f(1)=1$

$$\therefore \quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^2+m\times\left(\dfrac{1}{2}\right)+n=0 \\ 1^2+m+n=1 \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}m+n=0 \\ m+n=0 \end{cases}$$

解这个方程组，可得：$n=-\dfrac{1}{2}$，$m=\dfrac{1}{2}$。

因而，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$，所以

$$f(0)=-\frac{1}{2}$$

$$f(2)=2^2+\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$$

$$f(-8)=(-8)^2+\frac{1}{2}\times(-8)-\frac{1}{2}=59\frac{1}{2}$$

练习

1. 已知 $f(x)=9x^3+8x^2+7x+6$，试求：$f(0)$，$f(1)$，$f(10)$。
2. 已知 $\varphi(x)=5x^5+4x-1, h(x)=7x^4+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}, g(y)=y^{10}+7$，以及 $R(x)=x^5-x^3-x+\dfrac{8}{7}$。试分别求出：$\varphi(0), h(0), g(0)$ 及 $R(0)$。从这里你能发现有什么规律吗？
3. 运用上题的规律，求出 $f(0), g(0)$。
   (a) $f(y)=ay^9+by^7-my^3+ny+\sqrt{2}$
   (b) $g(y)=a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots+a_1y+a_0, (a_{n-1}\neq 0)$
4. 已知 $f(y)=5y+m$，且 $f(1)=10$，求 m 与 $f(10)$ 的值。

5. 已知 $h(x) = x^2 + mx - n$，且 $h(7) = h(4) = 0$，试求：m, n 及 $f(10)$ 的值。

6. 你能写出一个多项式 $g(x)$，使得 $g(10) = 321$ 吗?

对于多元多项式同样可以用符号 $f(x, y, z, \dots)$ 来表示。同样可以给出未知数的值（是一组值），代入多项式的表达式中，从而计算出相应的多项式的值。例如：二元多项式

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x - y - 1$$

当 $x = 1, y = 0$ 时，它相应的值记为：

$$f(1, 0) = 1^2 + 1 \times 0 + 0^2 - 1 - 0 - 1 = -1$$

例 4.7 已知 $g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 1$，试求：$g(0, 0, 0)$，$g(1, 2, 3)$，以及 $g\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1\right)$。

解：

$$\begin{aligned} g(0, 0, 0) &= 1 \\ g(1, 2, 3) &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + 1 = 37 \\ g\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1\right) &= \left(-\sqrt{2}\right)^3 + \left(\sqrt{2}\right)^3 + (-1)^3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

练习

1. 已知 $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 4y^2 - 1$，求：$f(0, 0)$，$f(1, 1)$，$f(-1, 0)$，以及 $f(\sqrt{2}, \sqrt{3})$，$f(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$。

2. 已知 $f(y, z, t) = \sqrt{2}y^2z^2t^2 + myzt^2 - nz + 1$，且 $f(1, 1, 1) = 0$，$f(0, 1, -\sqrt{2}) = 5$，试求 m, n 的值。

四、多项式的恒等

对于两个一元多项式 $f(x)$, $g(x)$ 来说，当未知数 x 同取任一个数值 a 时，如果它们所得的值都是相等的，即 $f(a) = g(a)$。那么，这两个多项式就称为是**恒等**的。记为 $f(x) \equiv g(x)$，或简记为 $f(x) = g(x)$。例如：

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - (1 - 2x) \\ g(x) &= 3x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

当 x 任取一个值时,比如 $x=0,-1,1,\ldots,a$ 时,都有:$f(0)=-1=g(0)$,　$f(-1)=0=g(-1)$,　$f(1)=4=g(1),\ldots,f(a)=3a^2-(1-2a)=3a^2+2a-1=g(a)$。

因此，多项式 $f(x)=3x^2-(1-2x)$ 与 $g(x)=3x^2+2x-1$ 是恒等的，记为

$$f(x)=3x^2-(1-2x)\equiv g(x)=3x^2+2x-1$$

反过来，我们也可以得出：

如果 $f(x)=g(x)$，那么，对于任意一个数值 a，都有 $f(a)=g(a)$。

实际上，要判断两个多项式是否恒等，也用不着取遍 x 的任意值去计算，只要根据两个多项式的表达式，用下面的结论就不难判断清楚：

如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 整理成标准形式以后，它们的各同类项系数都对应相等，那么这两个多项式就一定恒等，即 $f(x)\equiv g(x)$。

事实上，只要符合以上结论的两个多项式，显然不管 x 同取任何值，它们对应的值总是相等的。这就符合“恒等”的要求，所以 $f(x)\equiv g(x)$。例如：

$$\varphi(y)=1-2y+3y^3,\qquad h(y)=3y^3+y^2-(2y+y^2-1)$$

只要把 $h(y)$ 整理成标准形式：$h(y)=3y^3-2y+1$，就可以发现它们的各同类项系统是对应相等的。因此，$\varphi(y)\equiv h(y)$。它们实质上是同一个多项式。

这个结论反过来也是正确的，即

如果 $f(x)\equiv g(x)$，那么，这两个多项式的各同类项系数就一定对应相等。

我们以三次多项式为例，说明如下：设 $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$，$g(x)=b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$。由于 $f(x)\equiv g(x)$，就是说，当 x 取任意一个数值 x 时，两多项式的值总是对应相等的。因而，

$$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0\equiv b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0=g(x)$$

即：

$$(a_3-b_3)x^3+(a_2-b_2)x^2+(a_1-b_1)x+a_0-b_0\equiv 0$$

这就是说，x 取任意一个数时，上式都恒等于 0，所以，上式左边，各项的系数必须都是 0。即：

$$(a_3-b_3)=0,\quad (a_2-b_2)=0,\quad (a_1-b_1)=0,\quad a_0-b_0=0$$

$\therefore\quad a_3=b_3,\quad a_2=b_2,\quad a_1=b_1,\quad a_0=b_0$

$\therefore\quad f(x),\ g(x)$ 的各同类项系数对应相等。

同样可以说明这一结论对任何两个恒等多项式都是正确的。

例 4.8 已知 $f(x)=-2x^3+ax^2-4x+b$, $g(x)=cx^3-dx+1$。而且 $f(x)\equiv g(x)$。试求：a、b、c、d 的值。

解： $\because\quad f(x)\equiv g(x)$，即：

$$-2x^3+ax^2-4x+b\equiv cx^3-dx+1$$

$\therefore$ 它们的各同类项系数对应相等，即：

$$-2=c,\qquad a=0,\qquad -4=-d,\qquad b=1$$

因此，$a=0,\qquad b=1,\qquad c=-2,\qquad d=4$。

例 4.9 已知 $f(y)=y^3-y^2+y+1$, $g(y)=b_5y^5+b_4y^4+b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0$ 且 $f(y)\equiv g(y)$。试求：b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 的值。

解： $\because\quad f(y)\equiv g(y)$，即

$$y^3-y^2+y+1\equiv b_5y^5+b_4y^4+b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0$$

$\therefore$ 它们的各同类项系数对应相等，即：

$$0=b_5,\qquad 0=b_4,\qquad 1=b_3,\qquad -1=b_2,\qquad 1=b_1,\qquad 1=b_0$$

因此，$b_0=b_1=b_3=1$, $b_2=-1$, $b_4=b_5=0$。

例 4.10 已知 $f(y)=2y^3-ay^2-3y+b$，$g(y)=(m+1)y^3+y^2-(n+2)y-\dfrac{1}{2}$，且 $f(y)\equiv g(y)$。试求：$f(2)$ 及 $g(10)$ 的值。

解： $\because\quad f(y)\equiv g(y)$，即：

$$2y^3-ay^2-3y+b\equiv(m+1)y^3+y^2-(n+2)y-\frac{1}{2}$$

$\therefore\quad 2=m+1,\quad -a=1,\quad -3=-(n+2),\quad b=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\quad a=-1,\quad b=-\dfrac{1}{2},\quad m=1,\quad n=1$

因此可知：

$$f(y)=g(y)=2y^3+y^2-3y-\frac{1}{2}$$

所以，

$$f(2)=2\times 2^3+2^2-3\times 2-\frac{1}{2}=13\frac{1}{2}$$
$$g(10)=2\times 10^3+10^2-3\times 10-\frac{1}{2}=2069\frac{1}{2}$$

对于两个多元多项式，也可以类似地得出：

1. 如果当未知数取任何值（是一组数）时，两个多项式相应的值总相等，那么这两个多项式称为恒等的。
2. 两个恒等的多元多项式，它们的各同类项系数是对应相等的。

练习

1. 多项式 $f(x)=ax^4-1$ 与 $g(x)=bx^2+cx+d$ 具备什么条件时，才能有 $f(x)\equiv g(x)$。
2. 已知 $f(x)=5x^4+(a+b)x^3+3x^2+1$, $g(x)=10x^3+\dfrac{a-b}{2}x^2+1+5x^4$ 且 $f(x)\equiv g(x)$，试求 a,b 的值。
3. 如果 $f(x,t)=ax^2+3tx+4t^2$ 与 $g(x,t)=bt^2+\dfrac{a+b}{2}tx-(a-b)x^2$ 是恒等的，试求 a,b 的值。

五、一元多项式的根

根据已给的多项式 $f(x)$，把 x 的任一个值 a 代入 $f(x)$ 的表达式，就可以求出 $f(x)$ 的一个相应的值 $f(a)$，很自然地，我们会提出相反的问题：例如，已知 $f(x)=2x^2-13x+21$ 的一个值为 10，能否找到一个 x 的值 b，使得 $f(b)=10$ 呢？特别是，能否找到一个 x 的值 a，使得 $f(a)=0$ 呢？

要解决这类问题，仍要借助于代数运算。只要解方程 $f(x)=10$ 与 $f(x)=0$，就可求出所要找的数 b 与 a。

由方程 $2x^2-13x+21=10$，可解出：$x_1=1$，$x_2=\dfrac{11}{2}$。

$\therefore$　当 $b=1$ 或 $b=\dfrac{11}{2}$ 时，可解出：$x_1=3$，　$x_2=\dfrac{7}{2}$。

$\therefore$　当 $a=3$ 或 $a=\dfrac{7}{2}$ 时，$f(a)=0$。

一般地说，

> 能够使多项式 $f(x)$ 的值等于 0 的未知数 x 的值，叫做多项式 $f(x)$ 的根，即：如果 $f(a)=0$，那么 a 叫做 $f(x)$ 的根。

在上例中，$x=3$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$ 就是多项式 $f(x)=2x^2-13x+21$ 的根。因为 $f(3)=0$, $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=0$。

因此，一元多项式 $f(x)$ 的根，显然就是方程 $f(x)=0$ 的根。一元一次多项式的求根问题，就是第二章中所学习的一元一次方程式的求根问题；一元二次多项式的求根问题，同样是一元二次方程式的求根问题。这些问题我们已经可以解决。但是，一般的一元 n 次多项式的求根问题，就要归结为求解一元 n 次方程的问题，这就不是太容易了。

例 4.11　试求多项式的根：

$$f(x)=2x^2-7x+3,\qquad g(x)=1-x-56x^2$$

解：

1. 设 $f(x)=0$，即：$2x^2-7x+3=0$

   $\therefore\quad x_1=3,\quad x_2=\dfrac{1}{2}$

   所以，$f(x)$ 的实根有两个：$x=3$ 与 $x=\dfrac{1}{2}$。

2. 设 $g(x)=0$，即：$1-x-56x^2=0$

   $\therefore\quad x_1=\dfrac{1}{8},\quad x_2=-\dfrac{1}{7}$。

   所以。$g(x)$ 的实根有两个：$x=\dfrac{1}{8}$ 与 $x=-\dfrac{1}{7}$。

例 4.12　求多项式 $f(x)=2x^2+13x+21$ 与多项式 $g(x)=x^2+2x-3$ 的公根。

解： 设 $f(x)=2x^2+13x+21=0$，求出它的根：

$$x_1=-3,\qquad x_2=-\frac{7}{2}$$

又设 $g(x)=x^2+2x-3=0$，求出它的根：

$$x_3=-3,\qquad x_4=1$$

$\therefore$　$f(x)$ 与 $g(x)$ 的公根是 $x=-3$。

练习

1. 求下列各多项式的根：

$$f(x)=x^2-3x+28,\qquad g(x)=5x^2-1,\qquad h(y)=9y^2-9y$$

2. 已知 $f(x)=7x^2-4x+5=8$，试求 x 的值。
3. y 取何值时，$f(y)=2y^2-5y+7$ 的值等于 1。
4. x 取何值时，多项式 $f(x)=x^2-4$ 与 $g(x)=8x^2-5x-22$ 能有相等的值？
5. 试求 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=x^2-x-2$ 的公根。

习题 4.1

1. 指出下列各单项式的系数、元数和次数：

$$3x^2,\qquad xy,\qquad -\sqrt{2}x^3,\qquad -\frac{xy^2}{3},\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}x^2y^2,\qquad -\frac{5}{7}ty^4$$

2. 在下列各单项式中，先找出各同类项，再将各同类项合并起来。

$$\frac{1}{3}x^2y,\qquad -5xy^2,\qquad 0.2x^2y^3,\qquad 4xy,\qquad \sqrt{2},\qquad -7^2y^2,\qquad -xy$$

$$-1\frac{1}{3},\qquad \sqrt{2}x^2y^2,\qquad 0.6yx^2,\qquad -\sqrt{15}xy^2,\qquad \frac{1}{2}x^2y,\qquad 0.8y^3x^2$$

$$-x^3y,\qquad \sqrt{15}xy^2,\qquad -(-7x)^2y,\qquad (2y)^2x,\qquad -\left(\frac{x}{3}\right)^2y$$

3. 在每一个多项式中，合并同类项：
   (a) $-3x-15x+8x$
   (b) $-6x^2-7x^2+8x$
   (c) $x^3-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3}x^3$
   (d) $t-t^2+t^3-2t+2t^3$
   (e) $3+4x^2-3x+4x^3+3x^2-2x^3-5x^0$

(f) $x^2yz-x^4+\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{1}{2}x^2yz-\frac{1}{6}x^2y^2+x^4-\frac{1}{2}x^2yz$

4. 把 $(x-y)$，$(a+b)$ 作为一个因式，合并同类项：

(a) $3(x-y)^2-7(x-y)+8(x-y)^2+6(x-y)+1$

(b) $4(a+b)+2(a+b)^2-3(a+b)-7(a+b)^2+2(a+b)^0$

5. 把下列各多项式整理成标准形式：

(a) $9x^9-10x+8x^7-5x^9-14x+7x^6-x^0-x^7+1$；

(b) $1-3t^2+7t^6-\frac{1}{2}t^5+3t^2+\frac{1}{2}t^5$；

(c) $-(2x)^2+(-3x)^3-(-x)^2+1-(-x)$；

6. 把下列二元多项式先按 x 的降次排列，再按 y 的降次排列：

(a) $13x^2y^3-2x^3y^2-7xy^4+5x^4y-3x^5+10y^5-1$；

(b) $24x^2y^3-7x^3y-3xy^2+y-6$；

(c) $y^4-4y^2+0.3y^3-1.5y+x$。

7. 如果已知 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一个零次多项式，你能知道 a,b,c 各应取什么数值吗?

8. 如果已知 $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 是一个零多项式，你能知道 a,b,c,d 都是什么数值吗？为什么?

9. 已知 $f(x)=4x^4-3x^3+2x^2-x+5$，试求：$f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f(10)$。

10. 已知 $g(x)=9x^9+8x^8+7x^7+6x^6+5x^5+4x^4+3^3+2x^2+x$，试求：$g(0)$, $g(1)$, $g(-1)$ 及 $g(10)$。

11. 已知 $f(y)=y^n+1$，试求：$f(0), f(1), f(-1), f(10)$。

12. 已知 $\varphi(x,y)=x^2+xy+y^2$，试求：$\varphi(0,0)$, $\varphi(0,1)$, $\varphi(1,0)$, $\varphi(1,1)$ 及 $\varphi(10,10)$.

13. (a) 如果 $f(x)=mx^2+x+1$ 且 $f(3)=22$，求 m 的值。

(b) 如果 $g(y)=ay^2+by+2$, 且 $g(2)=6$, $g(7)=51$, 试求：$g(1)$, $g(-1)$ 及 $g(10)$.

14. 已知 $f(x)+g(x)=x^3+x^2+x+4$，且 $f(x)-g(x)=x^3-x^2-x$。试求：$f(2)+g(5)$ 的值。

15. 求出下列各多项式的根：

    (a) $f(x)=x^2-4$
    (b) $g(x)=5x-x^2$
    (c) $\varphi(x)=x^2-16x-17$
    (d) $R(x)=3x^2-15x+3$
    (e) $f(y)=5y^2+2y-3$
    (f) $g(y)=90y^2-y-89$

16. 求出 $f(x)=x^2-x-56$ 与 $g(x)=x^2+6x-7$ 的公根，并求出 $f(1)+g(8)$ 的值。

17. 如果多项式 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的根是 5 和 1，并且 $f(0)=5$，试求 a,b,c 的值。

18. 试写出一个一元二次多项式 $g(x)$，使它能够同时满足 $g(0)=-1$，$g(1)=-1$，$g(2)=1$ 的条件。

19. 如果多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

与多项式 $g(x)=x^n-3x^3+2x-1$ 是恒等的，试写出 $a_n,a_{n-1},\ldots,a_1,a_0$ 各应取什么值？

20. 已知 $f(x)=x^n-x^{n-1}+1$，试求出 $f(1)$，$f(-1)$ 及 $f(10)$。

第二节　多项式的加、减、乘法

一、多项式的加减法

几个单项式相加、减的式子，就是一个多项式，只要运用合并同类项的法则，就可以把结果整理出来。

例 4.13　计算下列各单项式的代数和：

1. $3x+(-5x^2)-(-2x)-5x-(+3x^2)$
2. $\frac{1}{2}x^2y^3-\left(-\frac{1}{3}x^2y^3\right)-\left(-\frac{1}{4}x^2y^3\right)$

3. $-(8xy^2-21x^2y)-(4xy^2-x^2y)$

解：

1.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=3x-5x^2+2x-5x-3x^2 && \text{(去括号)}\\&=(3x+2x-5x)-(5x^2+3x^2) && \text{(交换、结合律)}\\&=-8x^2 && \text{(合并同类项法则)}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}x^2y^3+\frac{1}{3}x^2y^3+\frac{1}{4}x^2y^3 && \text{(去括号)}\\&=\frac{13}{12}x^2y^3 && \text{(合并同类项法则)}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=-8xy^2+21x^2y-4xy^2+x^2y\\&=(-8xy^2-4xy^2)+21x^2y+x^2y\\&=-12xy^2+22xy^2\end{aligned}$$

两个多项式的和，仍是一个多项式，它由这两个多项式的各项相加而成。

两个多项式的差，仍是一个多项式，它由所要减去的多项式各项变号后与被减多项式的各项相加而成，即

$$f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)]$$

例 4.14 试求各题中两个多项式的和：

1. $f(x)=3x^7+4x^2+x,\qquad g(x)=2x^7+3x^3+7x^2+2x+1$
2. $\varphi(x)=x^4-x^3+x^2-x+1,\qquad R(x)=x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1$
3. $f(a,b,c)=3a-2b-c,\qquad g(a,b,c)=c-b-a$

解：

1.

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= (3x^7+4x^2+x)+(2x^7+3x^3+7x^2+2x+1) \\
&= 3x^7+4x^2+x+2x^7+3x^3+7x^2+2x+1 \\
&= 5x^7+3x^3+11x^2+3x+1
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)+R(x) &= (x^4-x^3+x^2-x+1) \\
&\quad +(x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1) \\
&= x^4-x^3+x^2-x+1+x^7-x^6+x^5-x^4+x^3-x^2+x-1 \\
&= x^7-x^6+x^5
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c)+g(a,b,c) &= (3a-2b-c)+(c-b-a) \\
&= 3a-2b-c+c-b-a \\
&= 2a-3b
\end{aligned}
$$

可见，两个多项式相加，实际上就是先去括号（由于括号前是“+”号，因而，把括号及它前面的“+”号一起去掉），再合并同类项，并整理成为标准形式。

例 4.15　试求下列各组多项式的差 $f(x)-g(x)$：

1. $f(x)=x^3+3x+0.1,\qquad g(x)=7x-2$
2. $f(x,y)=-x^3+3x^2y-xy^2-y^3,\qquad g(x,y)=-\dfrac{1}{2}x^3-x^2y+\dfrac{1}{3}xy^2$

解：

1.

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= (x^3+3x+0.1)-(7x-2) \\
&= x^3+3x+0.1-7x+2 \\
&= x^3-4x+2.1
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}f(x,y)-g(x,y)&=(-x^3+3x^2y-xy^2-y^3)\\&\quad-\left(-\frac{1}{2}x^3-x^2y+\frac{1}{3}xy^2\right)\\&=-x^3+3x^2y-xy^2-y^3+\frac{1}{2}x^3+x^2y-\frac{1}{3}xy^2\\&=-\frac{1}{2}x^3+4x^2y-\frac{4}{3}xy^2-y^3\end{aligned}$$

可见，两个多项式相减，仍是先去括号（由于括号前是“$-$”号，因而，把括号及它前面的“$-$”号去掉后，括号里面的各项都要变号），再合并同类项，并整理成标准形式。

例 4.16 如果已知 $f(x)+g(x)=x^2+6x+9$，且 $f(x)=ax+7$，$g(x)=x^2+4x+b^2$。

试求：a,b 的值及 $f(10)+g(0)$。

解： $\because$ 已知 $f(x)+g(x)=x^2+6x+9$

又 $\because$

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)&=(ax+7)+(x^2+4x+b^2)\\&=x^2+(a+4)x+7+b^2\end{aligned}$$

由恒等式 $x^2+6x+9\equiv x^2+(a+4)x+7+b^2$ 比较它们两边各同类项系数，可以得出：

$$\begin{cases}6=a+4\\9=7+b^2\end{cases}$$

$\therefore\quad a=2,\quad b=\pm\sqrt{2}$

因而：$f(x)=2x+7,\quad g(x)=x^2+4x+2$

$\therefore\quad f(10)+g(0)=2\times10+7+2=29$

练习

计算下列各题：

1. $(13x-3x^2-2x^3-6)+(15x-3x^4+5x^3-9x^2)$
2. $(8x^5+3x^3-2x+1)+(4x-5x^4-2x^3-1)+(7x^2-9x^5)$
3. $(3x^2+x-5)-(4-x+7x^2)$

4. $(2x^2 - 5x + 4) - (3x^2) - x + 3$

5. $(10x^3 - 6x^2 + 5x - 4) - (2x^2 - 4x - 9x^3 - 2)$

6. $(5x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x) - (5x^3 - 2x - 3x^2 + 7)$

7. $(5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1) - (4x^4 + 2x^2 - 1) - (x^3 - 1)$

8. $(5y^2 - 7y) - (7y^2 - 5y)$

9. $5 - (x^3 - 3x - 5) + (x^4 + x^3 + x^2 - 1)$

10. $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{4}{3}x - \frac{5}{12}x^2 + \frac{3}{4}\right) - \left(1 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}x^2\right)$

11. 已知 $f(x) + g(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$，而且 $f(x) - g(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 15$。试求：$f(x)$，$g(x)$ 的表达式以及 $f(2)$，$g(3)$。

12. 已知 $f(x) + 2g(x) = 4x^3 + 9$，且 $f(x) = ax^2 + bx - 3$，$g(x) = cx^3 - 7x^2 + d$。试求：$f(x)$ 与 $g(x)$ 的表达式及 $f(\sqrt{2}) + g(\sqrt{2})$ 的值。

二、一元多项式的乘法

先考虑一元单项式的乘法。单项式的乘法同样具有数系运算通性，即满足乘法交换律、结合律、分配律和指数运算律等。

例 4.17　计算：

1. $3x^2 \cdot 5x^3$
2. $8x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}x^8\right)$
3. $\sqrt{3}x \cdot \left(-\frac{1}{3}x^4\right) \cdot (-\sqrt{3}x^2)$

解：

1.

$$\begin{aligned} 3x^2 \cdot 5x^3 &= (3 \cdot 5) \cdot (x^2 \cdot x^2) && \text{(交换、结合律)} \\ &= 15x^5 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}8x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}x^8\right)&=\left[8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot(x^2\cdot x^8)\\&=-4x^{10}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}x\cdot\left(-\frac{1}{3}x^4\right)\cdot\left(-\sqrt{3}x^2\right)\\=&\left[\sqrt{3}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\cdot(x\cdot x^4\cdot x^2)\\=&x^7\end{aligned}$$

一般地，两个一元单项式相乘，只要把各系数相乘，未知数的指数相加即可。即

$$ax^m\cdot bx^n=abx^{m+n}$$

再考虑一元单项式与多项式、多项式与多项式的乘法。

例 4.18 计算：

1. $2x^2\cdot(5x^4+1)$
2. $(x+1)\cdot(x-1)$
3. $(x^2+x+1)\cdot(x-1)$

解：

$$\begin{aligned}2x^2\cdot(5x^4+1)&=2x^2\cdot 5x^4+2x^2\cdot 1&&\text{(分配律)}\\&=10x^6+2x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+1)\cdot(x-1)&=(x+1)\cdot x-(x+1)\cdot 1&&\text{(分配律)}\\&=x^2+x-x-1&&\text{(分配律)}\\&=x^2-1&&\text{(合并同类项)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+x+1)\cdot(x-1)&=(x^2+x+1)x-(x^2+x+1)\cdot 1\\&=x^3+x^2+x-x^2-x-1\\&=x^3-1\end{aligned}$$

一般地，两个多项式相乘，先用分配律展开成单项式相乘积的代数和，再合并同类项，最后整理成标准形式。

例 4.19 计算 $f(x)\cdot g(x)$.

1. $f(x)=3x^3-2x^2+4x-1,\qquad g(x)=7x^2+0.1x-5$；
2. $f(x)=x^4-x^3+x^2-x,\qquad g(x)=9x^3-1$

解：

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= (3x^3-2x^2+4x-1)\cdot(7x^2+0.1x-5)\\
&= (3x^3-2x^2+4x-1)\cdot 7x^2+(3x^3-2x^2+4x-1)\cdot 0.1x\\
&\quad +(3x^3-2x^2+4x-1)\cdot(-5)\\
&= 21x^5-14x^4+28x^3-7x^2+0.3x^4-0.2x^3+0.4x^2-0.1x\\
&\quad -15x^3+10x^2-20x+5\\
&= 21x^5-13.7x^4+12.8x^3+3.4x^2-20.1x+5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x)\cdot g(x) &= (x^4-x^3+x^2-x)\cdot(9x^3-1)\\
&= (x^4-x^3+x^2-x)\cdot 9x^3-(x^4-x^3+x^2-x)\cdot 1\\
&= 9x^7-9x^6+9x^5-9x^4-x^4+x^3-x^2+x\\
&= 9x^7-9x^6+9x^5-10x^4+x^3-x^2+x
\end{aligned}$$

多项式乘法还可以与整数除法相类似的采用竖式进行计算。比如，例 4.19 的两题可以按下边的竖式进行：

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & f(x): & & 3x^3 & -2x^2 & +4x & -1\\
\times) & g(x): & & & 7x^2 & +0.1x & -5\\
\hline
 & & & -15x^3 & +10x^2 & -20x & +5\\
 & & +0.3x^4 & -0.2x^3 & +0.4x^2 & -0.1x & \\
+) & 21x^5 & -14x^4 & +28x^3 & -7x^2 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\therefore\quad f(x)g(x)=21x^5-13.7x^4+12.8x^3+3.4x^2-20.1x+5$$

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
 & & f(x): & & x^4 & -x^3 & x^2 & -x & +0\\
 & \times) & g(x): & & & 9x^3 & +0x^2 & +0x & -1\\
\hline
 & & & & -x^4 & +x^3 & -x^2 & +x & +0\\
 & & & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & \\
 & & +0x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & & \\
+) & +9x^7 & -9x^6 & +9x^5 & -9x^4 & +0x^3 & & & \\
\hline
\end{array}$$

$\therefore \quad f(x)g(x) = 9x^7 - 9x^6 + 9x^5 - 10x^4 + x^3 - x^2 + x$

由此可以看出：多项式相乘用竖式进行计算，就是先将多项式按降次排成标准形式，**缺项补零**，并使两相乘多项式中各同类项上、下对齐，然后，就像整数竖式乘法类似地从右向左，逐项相乘，把乘得的各同类项也要上、下对齐，最后，将遍乘所得各同类项合并起来，就能得到两多项式的乘积。

例 4.20 已知 $G(x) = x - 2$，$F(x)G(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 10$，且 $F(x) = ax^2 + bx - 5$，试求 a, b 的值及 $F(x)$。

解： 由已知可得：

$$(x-2)(ax^2+bx-5) \equiv 2x^3 - 3x^2 - 7x + 10$$

即：$ax^3 + (b-2a)x^2 - (5+2b)x + 10 \equiv 2x^3 - 3x^2 - 7x + 10$。

比较两边同类项的系数，得：

$$a = 2, \quad b - 2a = -3, \quad 5 + 2b = 7$$

可以解出，$a = 2, \quad b = 1$。

$\therefore \quad F(x) = 2x^2 + x - 5$。

综合以上各例，可以得到一个重要的事实：

> 两个多项式的乘积，仍是一个多项式，它的次数等于两个多项式的次数和。

多项式的乘法运算，可以推广到任何有限个多项式。

练习

1. 计算：

$$2x^2(-3x)^3, \qquad \sqrt{2}x^5 \cdot (-\sqrt{3}x^3), \qquad \frac{t}{2}\left(-\frac{2}{3}t^2\right)^2$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2 \cdot \sqrt{2}y^6, \qquad (\sqrt{3}+1)x^5 \cdot (\sqrt{3}-1)x^5, \qquad 0 \cdot (-139x^{139})$$

2. 计算：

(a) $5x^3 \cdot (x^2 - x + 2)$

(b) $(x+2)(x^2-2x+4)$

(c) $0 \cdot (x^3 - 5x + 1981)$

(d) $(x^2-2x+3) \cdot (3x^3-3x+5)$

(e) $(x^2+x+1) \cdot (x^2-x+1)$

(f) $(y^2+2y+2) \cdot (y^2-2)$

3. 用竖式计算：

   (a) $(2x^4+3x^2-x-1)\cdot(x^2+1)$

   (b) $(x^4-2)\cdot(3x^3-x+1)$

4. 计算下列各题，从中找出一些规律：

$$(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$
$$(x-1)\cdot(x^3+x^2+x+1)$$
$$(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-1)\cdot(x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$
$$(x-1)\cdot(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x^2+x+1)$$

5. 计算下列各题，并比较各次结果的项数和系数，你能发现什么规律吗？

$$(x+a)^2=(x+a)\cdot(x+a)=?$$
$$(x+a)^3=(x+a)\cdot(x+a)^2=?$$
$$(x+a)^4=(x+a)\cdot(x+a)^3=?$$
$$(x+a)^5=(x+a)\cdot(x+a)^4=?$$
$$(x+a)^6=(x+a)\cdot(x+a)^5=?$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

三、多元多项式的乘法

多元多项式相乘，与一元多项式相乘的原理是一样的，其方法仍是先用分配律展开成许多个单项式乘积的代数和，然后合并同类项，把结果整理出来。与一元多项式的乘积相比，所不同的是多元多项式的乘积中，非同类项较多，写起来比较繁，整理到最后的形式也较复杂。但只要在计算中，掌握“运用数系运算通性”这个要点，加上演算细心、认真对待，就不会出错的。

例 4.21　计算：

1. $(-xyz)\cdot(2x^2yz^3)$
2. $\left(-\dfrac{3}{4}x^2y^3\right)\cdot\dfrac{2}{3}x^3y^2$
3. $2x^2yz^3\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}xy^2z^3\right)$
4. $(-3x)^2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}xy\right)^3\cdot\left(\dfrac{2}{3}y\right)^2\cdot x$

解:

$$\begin{aligned}(-xyz)\cdot(2x^2yz^3)&=(-1)\times 2\cdot x\cdot x^2\cdot y\cdot y\cdot z\cdot z^3\\&=-2x^3y^2z^4\end{aligned}$$

$$\left(-\frac{3}{4}x^2y^3\right)\cdot\frac{2}{3}x^3y^2=-\frac{1}{2}x^5y^5$$

$$\begin{aligned}2x^2yz^3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}xy^2z^3\right)&=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2\cdot x\cdot y\cdot y^2\cdot z^3\cdot z^3\\&=-\sqrt{2}x^3y^3z^6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-3x)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}xy\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}y\right)^2\cdot x&=9x^2\cdot\left(-\frac{1}{8}x^3y^3\right)\cdot\frac{4}{9}y^2x\\&=9\times\left(-\frac{1}{8}\right)\times\frac{4}{9}x^6y^5\\&=-\frac{1}{2}x^6y^5\end{aligned}$$

例 4.22 计算:

1. $xy\cdot(x^2+xy+y^2+1)$
2. $(x+y)(x-y)$
3. $(x+y)(x^2+xy+y^2)$
4. $(x+y)^2$
5. $(x+y)^3$
6. $(x+y+z)^2$

解:

$$\begin{aligned}&xy\cdot(x^2+xy+y^2+1)\\&=x^3y+x^2y^2+xy^3+xy\qquad\text{(分配律)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)\cdot(x-y)&=x(x-y)+y(x-y)&&\text{(分配律)}\\&=x^2-xy+xy-y^2\\&=x^2-y^2&&\text{(合并同类项法则)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2)+y(x^2+xy+y^2)\\ &= x^3+x^2y+xy^2+x^2y+xy^2+y^3\\ &= x^3+2x^2y+2xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\ &= x(x+y)+y(x+y)\\ &= x^2+xy+xy+y^2\\ &= x^2+2xy+y^2\end{aligned}$$

这个结果，恰好与我们学过的“二数和的平方公式”是一样的。

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)^2\\ &= (x+y)(x^2+2xy+y^2)\\ &= x(x^2+2xy+y^2)+y(x^2+2xy+y^2)\\ &= x^3+2x^2y+xy^2+x^2y+2xy^2+y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= (x+y+z)(x+y+z)\\ &= x(x+y+z)+y(x+y+z)+z(x+y+z)\\ &= x^2+xy+yz+xy+y^2+yz+xz+yz+z^2\\ &= x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\end{aligned}$$

练习

1. 计算（口答）:

$$x^2y\cdot(-2x^3y^2),\qquad -ab\cdot(2ab)^2,\qquad \frac{1}{2}mt\cdot\left(-\frac{1}{3}t\right),\qquad (xy^2)^4$$

$$(x^2\cdot x^3)^4,\qquad (2m^2)^3,\qquad a^2\cdot(ab^2)^2,\qquad (-a^3b^3)\cdot(-3a)$$

2. 计算:

(a) $(-2.5x^2)\cdot(-4x)^2\cdot 6x^3$

(b) $\left(-\frac{1}{2}a^{n+2}\right)^2\cdot 2a^nb$

(c) $(3xy^2)^2 + (-4xy^3) \cdot (-xy)$

(d) $(-3.5a^2) \cdot (ab)^2 + 10a^3 \cdot \left(-\frac{1}{5}ab\right) \cdot (-2b)$

3. 计算:

(a) $(x+y+z) \cdot (x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)$

(b) $(x^2+xy+y^2) \cdot (x^2-xy+y^2)$

(c) $(x+ay+b) \cdot (x+cy+d)$

(d) $(x+y) \cdot (y+z) \cdot (z+x)$

(e) $(x-y) \cdot (y-z) \cdot (z-x)$

(f) $(x+y+z) \cdot (xy+yz+xz)$

4. 说明对于任何正整数 n，下列等式成立:

$$(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2} \cdot y + x^{n-3} \cdot y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right) = x^n - y^n$$

四、常用乘法公式

通过乘法、乘方运算，可以得到许多计算公式，熟记一些常用的乘法公式，并有效地运用，将有助于提高我们的运算速度和计算能力。

两项平方差公式

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2 \tag{I}$$

例 4.23 计算 $(2x+3y) \cdot (2x-3y)$

分析: 运用分配律可以展开，逐项相乘再整理，但仔细观察不难发现，所给的两个多项式是具有公式 I 的特点的，公式中的 a、b 可以是数、是单项式，也可以是多项式。此例中，把 $2x$ 看作 a，$3y$ 看作 b，很容易用公式计算出来。
解:

$$\begin{aligned}(2x+3y) \cdot (2x-3y) &= (2x)^2 - (3y)^2 \\ &= 4x^2 - 9y^2\end{aligned}$$

例 4.24 计算:

1. $(x^2+1)\cdot(x^2-1)$
2. $\left(\frac{x}{2}-y\right)\cdot\left(y+\frac{x}{2}\right)$
3. $(-5xy-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}-5xy)$

解:

1. $(x^2+1)\cdot(x^2-1)=(x^2)^2-1^2=x^4-1$
2. $$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2}-y\right)\cdot\left(y+\frac{x}{2}\right)&=\left(\frac{x}{2}-y\right)\cdot\left(\frac{x}{2}+y\right)\\&=\left(\frac{x}{2}\right)^2-y^2=\frac{x^2}{4}-y^2\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}\left(-5xy-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-5xy\right)&=-\left(5xy+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-5xy\right)\\&=-(\sqrt{2}+5xy)\cdot(\sqrt{2}-5xy)\\&=-\left[(\sqrt{2})^2-(5xy)^2\right]\\&=-(2-25x^2y^2)=25x^2y^2-2\end{aligned}$$

两项和的平方公式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \tag{II}$$

例 4.25　计算:

$$\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2,\qquad (m-n)^2$$

解:

$$\begin{aligned}\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2&=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot\left(\frac{y}{2}\right)+\left(\frac{y}{2}\right)^2\\&=4x^2+2xy+\frac{1}{4}y^2\end{aligned}$$

可以把 $m,-n$ 分别看作公式 II 中的 a,b，这样一来就有:

$$\begin{aligned}(m-n)^2&=[m+(-n)]^2\\&=m^2+2m(-n)+(-n)^2\\&=m^2-2mn+n^2\end{aligned}$$

例 4.26 计算：

$$[(2x+1)(2x-1)]^2, \qquad (x^2+3x-1)(x^2-3x-1)$$

解：

$$\begin{aligned}[(2x+1)(2x-1)]^2 &= [4x^2-1]^2 && \text{(公式 I)}\\ &= (4x^2)^2+2(4x^2)\cdot(-1)+(-1)^2 && \text{(公式 II)}\\ &= 16x^4-8x^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^2+3x-1)(x^2-3x-1) &= [(x^2-1)+3x]\cdot[(x^2-1)-3x]\\ &= (x^2-1)^2-(3x)^2\\ &= x^4-2x^2+1-9x^2\\ &= x^4-11x^2+1\end{aligned}$$

例 4.25、例 4.26 可以看出，若将公式 II 中的 b 用 $-b$ 代换，就能得到另一个公式。

两项差的平方公式

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \tag{III}$$

今后在运算中，可以直接使用。

例 4.27 计算：$(2x^2-xy-y^2)^2$

解：

$$\begin{aligned}(2x^2-xy-y^2)^2 &= [2x^2-(xy+y^2)]^2\\ &= 4x^4-2\cdot 2x^2\cdot(xy+y^2)+(xy+y^2)^2\\ &= 4x^4-4x^3y-4x^2y^2+x^2y^2+2xy^3+y^4\\ &= 4x^4-4x^3y-3x^2y^2+2xy^3+y^4\end{aligned}$$

练习

利用公式 I、II、III 计算：

1. (口答):

$$(-x+y)\cdot(x+y),\qquad (-x-y)\cdot(x-y),\qquad 99\times 101$$

$$(-a-b)^2,\qquad (-a+b)^2,\qquad -(a+b)^2,\qquad -(a-b)^2$$

2. $(xy+1)\cdot(xy-1),\qquad (x-y)(x+y)-(y-x)(x+y)$

3.

$$\left(t+\frac{m}{2}\right),\qquad (xy+2)^2,\qquad \left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{4}y\right)^2$$

$$(x+y+z)^2,\qquad (x^2+x+2)^2,\qquad \left(1+\frac{1}{2}t+t^2\right)^2$$

4. $\left(-\frac{1}{2}+y\right)^2,\qquad (a-b-c)^2,\qquad (x^2-4x-1)^2$

5. $(-5x^2+2x-1)(-5x^2-2x+1)$

6. $(a+b)^4$ (提示:$(a+b)^4=[(a+b)^2]^2$)

两项和的立方公式

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \tag{IV}$$

把其中的 b 换成 $-b$ 而得到另一个公式:

两项差的立方公式

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \tag{V}$$

例 4.28　利用公式计算:

$$(x+3)^3,\qquad (2x+3y)^3,\qquad \left(\frac{1}{2}xy-1\right)^3$$

解: $(x+3)^3=x^3+9x^2+27x+27$

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3&=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3\\&=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}xy-1\right)^3&=\left(\frac{1}{2}xy\right)^3-3\left(\frac{1}{2}xy\right)^2\cdot 1+3\cdot\left(\frac{1}{2}xy\right)\cdot 1^2-1^3\\&=\frac{1}{8}x^3y^3-\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{3}{2}xy-1\end{aligned}$$

例 4.29 计算：

1. $\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^3$
2. $\left[(m+n)^2+(m-n)^2\right]^3$

解：

1.

$$\begin{aligned}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^3&=\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^3\\&=x^6-\frac{3}{4}x^4+\frac{3}{16}x^2-\frac{1}{64}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left[(m+n)^2+(m-n)^2\right]^3&=\left[m^2+2mn+n^2+m^2-2mn+n^2\right]^3\\&=(2m^2+2n^2)^3=2^3\cdot(m^2+n^2)^3\\&=8(m^6+3m^4n^2+3m^2n^4+n^6)\\&=8m^6+24m^4n^2+24m^2n^4+8n^6\end{aligned}$$

练习

利用公式 IV、V 计算：

1. $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$
2. $(x^2+xy)^3$
3. $(2a-3b)^3$
4. $(\sqrt{2}-t)^3$
5. $\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^3$
6. $(a+b-c)^3$

两项立方和公式

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3 \tag{VI}$$

两项立方差公式

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3 \tag{VII}$$

例 4.30 计算：

$$(x+1)(x^2+1-x), \qquad (2-3y)(4+9y^2+6y)$$

解：

$$\begin{aligned}(x+1)(x^2+1-x)&=(x+1)(x^2-x+1)\\&=x^3+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2-3y)(4+9y^2+6y)&=(2-3y)(4+6y+9y^2)\\&=2^3-(3y)^3\\&=8-27y^3\end{aligned}$$

例 4.31 计算：

$$(x^5+1)(x^{10}-x^5+1), \qquad (x^3-1)(x^9+1)(x^6+x^3+1)$$

解：

$$\begin{aligned}(x^5+1)(x^{10}-x^5+1)&=(x^5)^3+1^3\\&=x^{15}+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x^3-1)(x^9+1)(x^6+x^3+1)&=[(x^3-1)(x^6+x^3+1)](x^9+1)\\&=(x^9-1)\cdot(x^9+1)\\&=(x^9)^2-1^2=x^{18}-1\end{aligned}$$

练习

利用乘法公式计算：

1. (口答)：

$$(a-1)(a^2+a+1), \qquad (-x+y)(x^2+xy+y^2)$$

$$(-m-n)(-m^2+mn-n^2), \qquad (m-n)(-m^2-mn-n^2)$$

2. $-\left(a+\dfrac{b}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{2}-a^2-\dfrac{b^2}{4}\right), \qquad (x^2+1)(x^6-1)(x^4-x^2+1)$

3. $(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$

4. $\left[\left(\dfrac{t}{3}-1\right)\left(1+\dfrac{t}{3}+\dfrac{t^2}{9}\right)\right]^2$

以上给出的七个乘法公式是常见的，在运用时，可以把公式里的字母 a,b 理解为单项式或多项式。反复运用这些公式，可以很简明地求出结果。

习题 4.2

1. 去括号：

$$a+(b-c),\qquad a-(b-c),\qquad a+(-b-c),\qquad a-(-b-c)$$

$$(a+b)+(c+d),\qquad -(a+b)-(c+d),\qquad (a-b)-(-c+d),\qquad -(a-b)+(-c-d)$$

2. 填空：

(a) $a+b+c-d=a+(\qquad\qquad)$

(b) $a^2+bx+c=-(\qquad\qquad)$

(c) $a-b+c-d=a-(\qquad\qquad)$

(d) $2x^2-3x+4=4-(\qquad\qquad)$

(e) $a-b-c-d=a-b+(\qquad\qquad)$

(f) $a+b-c+d=a+b-(\qquad\qquad)$

(g) $y^3-2y^2-y+4=4-y-(\qquad\qquad)$

(h) $(a+b+c)(a-b-c)=[a-(\qquad\qquad)][a+(\qquad\qquad)]$

(i) $(a-b+c)(a+b-c)=[a+(\qquad\qquad)]\cdot[a-(\qquad\qquad)]$

(j) $(-a+b+c)(a+b\qquad c)=[b-(\qquad\qquad)]\cdot[b+(\qquad\qquad)]$

3. 去括号，并合并同类项：

(a) $5a+(3x-3y-4a)$

(b) $(a^2-2ab+b^2)-(a^2-b^2)$

(c) $3x-(4y-2x+1)$

(d) $7a-(3b+a)$

(e) $-(x-2)-3(2x-1)$

(f) $(x^2-y^2)-(x^2-4y^2+1)$

4. 计算：

   (a) $(5m^2-5m+3)+(-4m^2-5m-3)$

   (b) $(2y^2-4y-1)+(-1+4y-2y^2)$

   (c) $\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}+2x^2\right)+\left(2\frac{1}{2}-x^2+x\right)$

   (d) $(x^8-5x^2-7)-(x^2-11x+6)$

   (e) $(p^2-4p+2)-(2+4p+p^2)$

   (f) $(4a^2-a+5)+(2a-7-8a^2)-(-18-3a+5a^2)$

   (g) $x-(1-2x+x^2)+(-1+3x-x^2)$

   (h) $15+(1-a)-(1-a+a^2)+(102+a^2-a^3)$

   (i) $3x^2-[7x-(4x-3)-2x^2]$

   (j) $5a^2+[a^2+(5a^2-7a)-(a^2-3a)]$

   (k) $1-\{1-[1-(1-x)-x]-x\}-x$

   (l) $\{3x-[x-1-(2x+1)+3]-3\}+(x+1)$

5. 计算：

   (a) $(10x^3-6x^2+5x-4)+(9x^3-2x^2-4x+2)$

   (b) $(2x^3-3x^2+6)-(3x^3-5x^2+6x-9)$

   (c) $(5a^3-3a^2+a)-(5a-8a^3+6a^2)$

   (d) $(30x^3-7x^2+4x)+(5x^3-3x+6)-(14x^2+8x+10)$

6. 先化简 $f(x)=(-x^2+5+4x^3)+(-x^2+5x-4)-(2x^3+x^2-x)$，再求出 $f(2)$，$f\left(1\frac{1}{5}\right)$。

7. 已知 $f(x)=9x^2+8x^3-16x$，$g(x)=3x^2-4+2x^3$，试求出 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$

8. 已知：$f(x)=x^3+ax^2+3$，$g(x)=bx^2+ax+b-1$，且 $f(x)-g(x)=x-5x^2+x^3$。试求：a,b 的值。并进一步求出 $f(x)+g(x)$ 的表达式。

9. 计算：

(a) $(x^3-2x^2+3x-1)\cdot 5x^2$

(b) $(3y^2-y+6)\cdot\left(-\frac{1}{3}y\right)$

(c) $-3x\cdot(3+2x-x^2+x^3)$

(d) $-\frac{2}{3}a\cdot\left(\frac{2}{3}a^2+\frac{5}{6}a-\frac{8}{3}\right)$

10. 计算：

$$(2x+3)(4x-5),\qquad (6y-1)(3y-4),\qquad (x-7)(x+3)$$

$$(3x-2x^2-5)\cdot(-2x-1),\qquad \left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}\right)$$

$$\left(2a^2+3a-5\right)\cdot(2a-3),\quad \left(y^2+3y-0.6\right)\cdot(2y-0.5),\quad (x-1)(x+3)+(x-1)^2$$

$$(2x+5)(x+2)-(x+3)(x+1)+(x-2)(1-x),\quad \left(x^2+2\right)\left(x^2-x\right)(x+1)+10$$

11. 先化简 $f(x)=(x-2)\left(x^2+2x+4\right)+(x+5)(x^2-5x+25)$，再求出 $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(10)$ 的值。

12. 用竖式作以下乘法：

(a) $(x^3-2x^2-5x+3)\left(x-2x^2-1\right)$

(b) $(8y^4-8y^2+7y-5)\left(2y^2-y+1\right)$,

(c) $\left(a^2+2a+4\right)^2$

(d) $(3a^2+2)\cdot(3a^2-2)\cdot(9a^4+4)$.

13. 已知 $f(x)=x-1$, $g(x)=x^2+x$, $h(x)=-x+1$。试验证：

(a) 乘法交换律成立：

$$f(x)\cdot g(x)=g(x)\cdot f(x)$$

(b) 乘法结合律成立：

$$f(x)\cdot[g(x)\cdot h(x)]=[f(x)\cdot g(x)]\cdot h(x)$$

(c) 乘法对加法的分配律也成立：

$$f(x)\cdot[g(x)+h(x)]=f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot h(x)$$

14. 已知 $f(x)$ 是 m 次多项式，$g(x)$ 是 n 次多项式，试问：

(a) $f(x)+g(x)$ 是几次多项式？

(b) $f(x)-g(x)$ 是几次多项式？

(c) $f(x)\cdot g(x)$ 又是几次多项式?

15. 用乘法公式计算:

$$(3a^2-4b)(3a^2+4b),\qquad (3x+y)(3x-y),\qquad (2x^2-y^2)(2x^2+y^2)$$

$$(a-4)(a+4)(a^2+16),\qquad (x+4)(x+2)(x-2),\qquad 5a^2+3(a+1)(a-1)$$

$$4x(x-1)-(5+2x)(2x-5),\qquad (1-x^n)(x^n+1)$$

$$3(2y+1)(1-2y)-4(-3y-2)\cdot(3y-2),\quad 4xy(x-y)\cdot y(x+y)-x^3(1+2y)(2y-1)$$

16. 用乘法公式计算:

$$(2x+3)^2,\qquad (a^2+a^3)^2,\qquad (2a+3b)^2,\qquad \left(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{3}y^2\right)^2$$

$$(a^n+b^n)^2,\qquad (a+b+c)^2,\qquad 4x-(2x+1)^2,\qquad (3x^2-4x+5)\cdot(3x^2+4x+5)$$

$$(4a^2b+3ab^2)-(3a^2b+4ab)^2,\qquad (a^n+b^n)^2-(2a^n+2b^n)^2$$

17. 用乘法公式计算:

$$(x-3)^2,\qquad (x-2y)^2,\qquad (x^n-1)^2,\qquad \left(3-a^{2a}\right)^2$$

$$3(2-y)^2-4(y-5)^2,\quad (x+4)^2-4(x-1)^2,\quad (3x^2-4x+5)(3x^2+4x-5)$$

$$\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n\right)^2-5\left(\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)\cdot\left(\frac{m}{2}-\frac{n}{3}\right)+3\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{3}n\right)^2$$

18. 用乘法公式进行计算:

$$93\times 87,\qquad 205\times 195,\qquad 39^2,\qquad 81^2,\qquad 999^2$$

19. 用乘法公式计算:

$$(x+2)^3-(x-2)^3,\qquad (4x^3-5y^2)^3,\qquad (a+b-c)^3$$

$$(0.5y+0.2t)^3-(0.2y-0.5t)^3$$

20. 用乘法公式计算:

$$(1+x)(1-x+x^2),\qquad (x+8)(x^2-8x+64)$$

$$(3a-4)(16+12a+9a^2),\qquad (2x+y)(-4x^2+2xy-y^2)$$

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{n}{2}+n^2\right),\qquad (9a^4+12a^2+16)(4-3a^2)$$

$$(a^2-3ab+9b^2)^2\cdot(a+3b)^2,\qquad (x^n-1)(x^{2n}+x^n+1)$$

$$(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(-x^2-xy-y^2)$$

21. 已知：$(x^2-1)(x^2+3x-a) \equiv x^4+bx^3-(b-a)x^2-3x+b-2a$。试求：$a,b$ 的值。

22. 如果多项式 $\dfrac{1}{4}x^2+ax+4 \equiv (bx+c)^2$。试求 a,b,c 的值。

23. 计算：

$$(-0.6a^2b^2c)\cdot(0.5ab^3),\qquad (-0.5axy^2)^3,\qquad [(-2x^2y)^3]^2$$

$$5a^2b^3(-4a^3bc)(-5ab^2),\quad (-5ax^2)^3\cdot(-2b^2x)^4,\quad (4a^2b+3ab^2)^2-(-ab^2+2a^2b)^2$$

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2,\qquad (e+2m-3n)^2\cdot(e-2m+3n)^2$$

$$(a+b-c)^3-(a-b+c)^3,\qquad \left[\frac{1}{3}a^2b^2-(ab+1)(ab-1)\right]^2$$

24. 计算：

(a) $(x-y)(x+y)(x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\cdots+xy^{n-1}+y^n)$

(b) $(x-y)(x+y)(x^n-x^{n-1}y+x^{n-2}y^2-\cdots+xy^{n-1}-y^n)$ （n 是正奇数）

(c) 化简：$(x^n+y^n)(x^n-y^n)(x^{2n}+y^{2n})$，并求出当 $x=y=1$ 时，此多项式的值。

25. 先化简：

$$f(x,y)=(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots(x^{2n}+y^{2n})\left(x^{8n}+x^{4n}y^{4n}+y^{8n}\right)$$

再求出：$f(-1,-1)$。

第三节　一元多项式的除法

本节仅就一元多项式来研究除法，仍然从多项式的的特例——单项式谈起。

一、单项式除法

由指数运算律：$a^m \div a^n = a^{m-n}$ $(a \neq 0,\ m > n)$ 以及零指数的定义：$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$，就可以知道：两个单项式 ax^m 和 bx^n，当 $bx^n \neq 0$ 且 $m \geq n$ 时，就有以下除法法则：

$$ax^m \div bx^n = \frac{a}{b}x^{m-n},\qquad (bx^n \neq 0,\ m \geq n)$$

这就是说：

两个单项式相除（除式不为零），其系数相除，未知数的指数相减，所得商仍是一个单项式。

例 4.32 计算：

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right) \div 6x, \qquad (-2x^3) \div 4x, \qquad (0.5x^5) \div \left(-\frac{1}{8}x^2\right)$$

$$(27x^5) \div (-9), \qquad 0 \div 2x^2, \qquad (-17x^7) \div 1$$

解：

1. $\left(\frac{1}{3}x^3\right) \div 6x = \left(\frac{1}{3} \div 6\right) x^{3-1} = \frac{1}{18}x^2$
2. $(-2x^3) \div 4x = -\frac{2}{4}x^{3-1} = -\frac{1}{2}x^2$
3. $(0.5x^5) \div \left(-\frac{1}{8}x^2\right) = \left[0.5 \div \left(-\frac{1}{8}\right)\right] x^{5-2} = -4x^3$
4. $(27x^5) \div (-9) = -3x^5$
5. $0 \div 2x^2 = 0$
6. $(-17x^7) \div 1 = -17x^7$

不难发现：

零单项式除以任一非零单项式，仍得零单项式；任一单项式除以 1，仍得原单项式。

例 4.33 计算：

1. $(5x^4 - 4x^3 + 3x^6) \div \left(-\frac{1}{2}x^2\right)$
2. $(7x^{n+3} - 9x^{n+5}) \div \left(\frac{1}{3}x^n\right) \div (-2x)$

解：

1.

$$
\begin{aligned}
&(5x^4-4x^3+3x^6)\div\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\\
=\ &5x^4\div\left(-\frac{1}{2}x^2\right)-4x^3\div\left(-\frac{1}{2}x^2\right)+3x^6\div\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\\
=\ &-10x^2+8x-6x^4\\
=\ &-6x^4-10x^2+8x
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
&(7x^{n+3}-9x^{n+5})\div\left(\frac{1}{3}x^n\right)\div(-2x)\\
=\ &\left(7x^{n+3}\div\frac{1}{3}x^n-9x^{n+5}\div\frac{1}{3}x^n\right)\div(-2x)\\
=\ &(21x^3-27x^5)\div(-2x)\\
=\ &-\frac{21}{2}x^2+\frac{27}{2}x^4
\end{aligned}
$$

练习

计算下列各题:

1. $\frac{1}{4}x^5+\frac{3}{4}x^2$
2. $\frac{22}{77}x^2+\frac{2}{7}x$
3. $7a^{n+3}\div 21a^n$
4. $-x^{n+1}\div\frac{1}{2}x$
5. $c^{12}\div c^3\div c^4$
6. $(n^8\div n^4)\div(n^6\div n^3)$
7. $(-0.2x)^3\div(-0.2x^8)$
8. $ax^5\div bx\div cx^3$
9. $[(-3y^3-4y^7)\div(-y)]-[6y^{12}\div(-2y^6)]$
10. x 取什么值时，$x^{2n}\div x^n=x^n$ 成立?

二、一元多项式的除法

一元多项式的除法与在小学学过的整数除法有许多类似的地方，我们还是从整数的除法分析起：

一个正整数 a 除以正整数 b，可以得到一个商数 g 及一个余数 r，它们之间的关系是：

$$a = g \cdot b + r, \qquad (0 \leq r < b)$$

例如：

$$\begin{array}{r} 173 \\ 3\,\overline{)520} \\ \underline{3} \\ 22 \\ \underline{21} \\ 10 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 37 \\ 21\,\overline{)783} \\ \underline{63} \\ 153 \\ \underline{147} \\ 6 \end{array}$$

就是说：520 除以 3，得商数 173，余数 1；783 除以 21，得商数 37，余数 6。

显然它们都有关系式：

$$520 = 173 \times 3 + 1, \qquad \text{其中：} 0 < 1 < 3;$$

$$783 = 37 \times 21 + 6, \qquad \text{其中：} 0 < 6 < 21.$$

学习有理数以后，任一个整数除以负整数时，是否也有这样的关系呢？

例如：17 除以 -2，可以得：

$$17 = (-8) \times (-2) + 1$$

其中：$0 < 1 < |-2|$。

又如，-29 除以 3，可以得：

$$-29 = (-9) \times 3 + (-2)$$

这里的余数为 -2，为了统一使余数总是正数，且总小于除数的绝对值，上式可以写成：

$$-29 = (-10) \times (-3) + 1$$

其中：$0 < 1 < |+3|$。

再如，-132 除以 -21 可以得：

$$\begin{aligned} -132 &= 6 \times (-21) + (-6) \\ &= 7 \times (-21) + 15 \end{aligned}$$

其中：$0 < 15 < |-21|$。因此，我们可以一般地得出：

任何整数 A 除以非零整数 B，所得的商数为 Q，余数为 R，一定满足下列关系式：

$$A = Q \cdot B + R, \qquad \text{其中：} 0 \leq R < |B|$$

显然，当 A 能够被 B 整除时，$R = 0$。

练习

已知 A, B，试求出 Q 与 R，使它们满足等式：

$$A = QB + R \qquad \text{且} \quad 0 \leq R < |B|$$

1. $A = -152, \qquad B = 12$；
2. $A = 178, \qquad B = -14$；
3. $A = -1329, \qquad B = -3$；
4. $A = -1735, \qquad B = -15$。

对于两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x) \neq 0$ 的除法，也可以类似地进行讨论。

多项式 $f(x)$ 除以 $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$，就是要求出两个多项式 $Q(x)$ 和 $R(x)$，使它们能够满足关系式：$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x)$，且 $R(x) = 0$ 或 $R(x)$ 是一个比 $g(x)$ 次数低的多项式。这时，多项式 $Q(x)$、$R(x)$ 就分别叫做 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、余式。

如何求出商式 $Q(x)$ 与余式 $R(x)$ 呢？仍然可以类似于数的除法去做，一般称为**长除法**。

例 4.34 已知 $f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3$，$g(x) = x^2 + 2x + 1$，

试求：$f(x)$ 除以 $g(x)$ 所得的商式 $Q(x)$，余式 $R(x)$。

解： 类似于数的除法列式：

$$
\begin{array}{r}
4x - 3 \\
x^2+2x+1 \overline{\big)\ 4x^3+5x^2-2x-3} \\
\underline{-4x^3-8x^2-4x\quad} \\
-3x^2-6x-3 \\
\underline{3x^2+6x+3} \\
0
\end{array}
$$

所以，$f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $Q(x) = 4x-3$，余式 $R(x) = 0$。显然，$f(x) = Q(x)\cdot g(x) + R(x)$。这里 $R(x) = 0$。

例 4.35 已知 $f(x) = 3x^5-4x^4-2x^3-35x^2-28x+18$, $g(x) = x^3-2x^2+x-13$

试求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $Q(x)$，余式 $R(x)$。

解： 用长除法列式如下：

$$
\begin{array}{r}
3x^2 \quad +2x \quad -1 \\
x^3-2x^2+x-13 \overline{\big)\ 3x^5-4x^4-2x^3-35x^2-28x+18} \\
\underline{-3x^5+6x^4-3x^3+39x^2\qquad\qquad} \\
2x^4-5x^3\quad+4x^2-28x\qquad \\
\underline{-2x^4+4x^3\quad-2x^2+26x}\qquad \\
-x^3\quad+2x^2\quad-2x+18 \\
\underline{x^3\quad-2x^2\quad+x-13} \\
-x\quad+5
\end{array}
$$

所以，得到商式 $Q(x) = 3x^2+2x-1$。余式 $R(x) = -x+5$ （次数低于 $g(x)$ 的次数），而且有关系式：

$$f(x) = Q(x)\cdot g(x) + R(x)$$

由以上两例可以看出：多项式相除的整个算式中，最关键的是各项系数的运算。这就是说，把被除式、除式都按降次排成标准式，缺项补 0，列出除法竖式以后，只要进行各项系数间的运算，就可以得出商式、余式的系数；然后取被除式与除式的次数之差，作为商式的次数，降次排列；而余式的次数要比。除式的次数低。

所以，除法的算式还可以简化成以下形式（以例 4.35 来说）：

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{\quad 3+2-1 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\
1-2+1-13) & 3-4-2-35-28+18 \\
-) & \underline{3-6+3-39 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad +2-5+4-28 \\
-) & \underline{\qquad +2-4+2-26 \qquad} \\
 & \qquad\qquad -1+2-2+18 \\
-) & \underline{\qquad\qquad -1+2-1+13} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0-1+5
\end{array}
$$

所以，商式 $Q(x)=3x^2+2x-1$，余式 $R(x)=0x^2-x+5=-x+5$。这种简化形式的方法，叫做**分离系数法**。

例 4.36 试求 $f(x)=5x^4-7x^3+10x^2-2x-3$ 除以 $g(x)=x^2-1$ 的商式及余式。

解： 长除法的书写格式，通常采用下列形式：

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & -7x^3 & +10x^2 & -2x & -3 & x^2-1 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +5x^2 & & & 5x^2-7x+15 \\ \cline{1-3}
 & -7x^3 & +15x^2 & -2x & & \\
 & 7x^3 & & -7x & & \\ \cline{2-4}
 & & 15x^2 & -9x & -3 & \\
 & & -15x^2 & & +15 & \\ \cline{3-5}
 & & & -9x & +12 &
\end{array}
$$

因此，分离系数法就可以写成：

$$
\begin{array}{ll|ll}
\text{被除式：} & 5-7+10-2-3 & 1+0-1 & \text{除式} \\ \cline{3-3}
-) & 5+0-5 & 5-7+15 & \text{商式} \\ \cline{1-2}
 & \quad -7+15-2 & & \\
-) & \quad -7+0+7 & & \\ \cline{1-2}
 & \qquad 15-9-3 & & \\
-) & \qquad 15+0-15 & & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\quad -9+12 & \text{余式} &
\end{array}
$$

所以，商式 $Q(x)=5x^2-7x+15$，余式 $R(x)=-9x+12$。

应该注意：在长除法中，如果被除式的首项是 ax^n，除式的首项是 bx^m，那么，商式的首项就应该是 $\dfrac{a}{b}x^{n-m}$，$(n\geq m)$。

例 4.37 已知被除式 $f(x)$，除式 $g(x)$，试用分离系数法求出商式 $Q(x)$ 与余式 $R(x)$：

1. $f(x)=2x^3-4x^2+x-3,\qquad g(x)=x-3$

2. $f(x)=2x^3-4x^2+x-3,\qquad g(x)=2(x-3)$

解：

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2-4+1-3 & 1-3 \\ \cline{3-3}
-) & 2-6 & 2+2+7 \\ \cline{1-2}
 & \quad\ \ 2+1 & \\
-) & \quad\ \ 2-6 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\quad 7-3 & \\
-) & \qquad\quad 7-21 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad +18 &
\end{array}
$$

$\therefore\qquad Q(x)=2x^2+2x+7$，$R(x)=18$。

所以：$2x^3-4x^2+x-3=(2x^2+2x+7)(x-3)+18$。

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2-4+1-3 & 2-6 \\ \cline{3-3}
-) & 2-6 & 1+1+\frac{7}{2} \\ \cline{1-2}
 & \quad\ \ 2+1 & \\
-) & \quad\ \ 2-6 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\quad 7-3 & \\
-) & \qquad\quad 7-21 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad +18 &
\end{array}
$$

$\therefore\qquad Q(x)=x^2+x+\dfrac{7}{2}$，$R(x)=18$。

所以：$2x^3-4x^2+x-3=\left(x^2+x+\dfrac{7}{2}\right)\cdot 2(x-3)+18$。

比较例 4.37 的两题，可以发现：两题的被除式相同，2 题的除式是 1 题的除式的 2 倍，而相除的结果中得到：余式相同，2 题的商式却是 1 题商式的 $\dfrac{1}{2}$。

这个规律，对多项式除法是正确的，这是因为：如果 $f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$ 成立，那么，$f(x)=\left[\dfrac{1}{a}Q(x)\right]\cdot[ag(x)]+R(x)$ 显然也成立。

因此，我们可以得出：

> 两个多项式相除（除式不为 0）时，如果被除式不变，而除式乘以一个非零常数 k，那么，所得的余式不变，但商式却等于原来商式的 $\dfrac{1}{k}$。

总结以上各例，可以归纳出一元多项式除法的原理和运算过程是：

把被除式、除式按降次排列成标准形式，逐步把除式乘以适当的单项式，使得每一次的积与被除式或“上一步所剩下来的式子”的首项相同，再相减就得到一个较低次数的多项式，这样逐步降次，直到“所剩下来的式子”的次数低于除式的次数为止。这时，“剩下来的式子”就是所求的余式，而每次所乘的单项式的代数和，就是所求的商式。

练习

1. 在下列各题中，$f(x)$ 是被除式，$g(x)$ 是除式，试用长除法、分离系数法求它们的商式与余式：
   (a) $f(x)=7x^7+6x^6+5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x-7,\quad g(x)=x^2+x-1$
   (b) $f(x)$ 同 (a)，$g(x)=x^2-1$
   (c) $f(x)=x^4+3x^2+1,\quad g(x)=2x^2+3$
   (d) $f(x)=3x^6-5x^4-7x^2+x+13,\quad g(x)=2x^4+x^2+1$
2. 如果被除式 $f(x)$ 是 n 次多项式，除式 $g(x)$ 是 m 次多项式，你知道商式 $Q(x)$, 余式 $R(x)$ 是几次多项式吗?
3. 先用分离系数法求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式与余式，再不作除法，写出 $f(x)$ 除以 $\psi(x)$ 的商式与余式：
   $$f(x)=2x^4+6x^3-4x^2-5,\qquad g(x)=x-2$$
   (a) $\psi(x)=2(x-2)$
   (b) $\psi(x)=\frac{1}{2}(x-2)$

三、综合除法

以下介绍多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ (b 为一个非零常数) 的一种简便方法。

例 4.38 求 $f(x)=2x^3+3x-1$ 除以 $g(x)=x-4$ 的商式和余式。

解： 用分离系数法，

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 2+0+3-1 & 1-4 \\ \cline{3-3}
-) & 2-8 & 2+8+35 \\ \cline{1-2}
 & \qquad 8+3 & \\
-) & \qquad 8-32 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad 35-1 & \\
-) & \qquad\qquad 35-140 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad\quad +139 &
\end{array}
$$

$\therefore$　商式 $Q(x) = 2x^2 + 8x + 35$，余式 $R(x) = +139$。

因为余式 $R(x)$ 的次数要低于除式 $g(x)$ 的次数，而这里的除式 $(x-4)$ 是一次式，所以，这里的余式就只能是零次多项式（非零数）或零多项式。在今后，对于除式是一次式的除法，所求得的余式，就直接说成是余数。

把例 4.38 中的算式进一步分析一下，是可以发现其中的规律的：

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 2+0+3-1 & 1-4 \\ \cline{3-3}
-) & \boxed{2}-8 & 2+8+35 \\ \cline{1-2}
 & \qquad +8+3 & \\
-) & \qquad \boxed{+8}-32 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad +35-1 & \\
-) & \qquad\qquad \boxed{+35}-140 & \\ \cline{1-2}
 & \qquad\qquad\quad +139 &
\end{array}
$$

1. 除式 $(x-4)$ 首项系数为 1，因而商式的首项系数 2，正好是被除式的首项系数。

2. 在算式左半部分，凡被围的各数字，正好是商式的各项系数，它们除首项系数与被除式首项系数相同外，都和每一步“所剩下来的式子”的首项系数相同。

3. 在算式左半部分，被围数字之后的一个数，分别是这样得到的：

$$-8 = \boxed{2} \times (-4), \quad -32 = \boxed{8} \times (-4), \quad -140 = \boxed{35} \times (-4)$$

它们有相类似的运算次序。

4. 如果将被围的数字，一律下移到最末一行，排列为：

$$\boxed{2} \quad \boxed{+8} \quad \boxed{+35} \ +139$$

那么，前三个数字就是商式的系数，末一个数就是余数。

所以，上边的算式可以压缩化简为这样的形式：

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2+0+3\ \ -1 & -4 \\ \cline{3-3}
-) & \quad -8-32-140 & \\ \cline{1-2}
 & 2+8+35+139 &
\end{array}
$$

为了计算方便，上式中的减法可以改为加法，这只要将减数 $-8,-32,-140$ 改变符号就行，再由这些数的形成规律看，只要将 -4 改变符号，这些数的符号就相应地改变了。因而，上边的算式又可以进一步简化为：

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 2+0+3\ \ -1 & +4 \\ \cline{3-3}
+) & \quad +8+32+140 & \\ \cline{1-2}
 & 2+8+35+139 &
\end{array}
$$

这样就能得出：商式：$2x^2+8x+35$，余数：$+139$。

例 4.39 求 $f(x)=7x^6+5x^4+4x^3+3x+1$ 除以 $g(x)=x+3$ 的商式 $Q(x)$ 及余数 R

解：

$$\because \qquad g(x)=x+3=x-(-3)$$

$$f(x)=7x^6+0x^5+5x^4+0x^3+4x^2+3x+1$$

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 7+\ 0\ +5+\ \ 0\ +\ \ 4+\ \ 3+\ \ 1 & -3 \\ \cline{3-3}
+) & \quad -21+63-204+612-1848+5535 & \\ \cline{1-2}
 & 7-21+63-204+612-1848+5536 &
\end{array}
$$

$\therefore$ 商式 $Q(x)=7x^5-21x^4+68x^3-204x^2+616x-1845$，余数 $R=5536$。

这种简化的带余除法，叫做**综合除法**。这种方法比长除法要简化得多。

例 4.40 用综合除法求 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ 除以 $g(x)=x-b$ 的商式 $Q(x)$，余数 R。

解：

$$
\begin{array}{rll|l}
 & a_2+a_1 & +a_0 & b \\ \cline{4-4}
+) & \quad +a_2b & +(a_2b+a_1)b & \\ \cline{1-3}
 & a_2+(a_2b+a_1) & +(a_2b^2+a_1b+a_0) &
\end{array}
$$

∴　　商式 $Q(x)=a_2x+(a_2b+a_1)$，余数 $R=a_2b^2+a_1b+a_0$。

如果除式 $g(x)=px-q\quad(p\neq 0)$，可以先将除式变形为：$px-q=p\left(x-\dfrac{q}{p}\right)$，用综合除法求出 $f(x)$ 除以 $\left(x-\dfrac{q}{p}\right)$ 的商式 $Q'(x)$ 及余数 R'。它们满足关系式；

$$f(x)=Q'(x)\left(x-\frac{q}{p}\right)+R'$$

再根据前一节的结论可知：

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{p}Q'(x)\cdot p\left(x-\frac{q}{p}\right)+R'\\&=\frac{1}{p}Q'(x)(px-q)+R'\end{aligned}$$

因此，可以求得 $f(x)$ 除以 $(px-q)$ 的商式为：$Q(x)=\dfrac{1}{p}Q'(x)$，余数为 $R=R'$。

例 4.41　用综合除法求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式及余数：

1. $f(x)=6x^3+13x^2+27x+15,\qquad g(x)=3x+2$
2. $f(x)=8x^2+7x-1,\qquad g(x)=4x-1$

解：

1. ∵　$g(x)=3x+2=3\left[x-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right]$

∴　可先求 $f(x)$ 除以 $\left[x-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right]$ 的商式 $Q'(x)$ 及余数 R'。

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 6 & +13 & +27 & +15 & -\frac{2}{3} \\
+) & & -4 & -6 & -14 & \\
\hline
 & 6 & +9 & +21 & \underset{\sim}{+1} &
\end{array}$$

这样得到：$Q'(x)=6x^2+9x+21$，$R'=1$。

∴　$Q(x)=\dfrac{1}{3}Q'(x)=2x^2+3x+7$，$R=R'=1$。

∴　$6x^3+13x^2+27x+15=(2x^2+3x+7)(3x+2)+1$。

2. ∵　$g(x)=4x-1=4\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$，　$f(x)=8x^4+0+0+7x-1$

由综合除法

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8+0+0+\ 7\ \ \ -1 & \dfrac{1}{4} \\
+) & \quad +2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{57}{32} & \\
\hline
 & 8+2+\dfrac{1}{2}+7\dfrac{1}{8}+\dfrac{25}{32} &
\end{array}
$$

$\therefore$ $f(x)$ 除以 $g(x)$ 得商式

$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \frac{1}{4}\left(8x^3+2x^2+\frac{1}{2}x+7\frac{1}{8}\right) \\
&= 2x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{57}{32}
\end{aligned}
$$

余数 $R=\dfrac{25}{32}$。

练习

用综合除法求商式及余数

1. $x^5+2x^4-14x^3+54x^2-45x-378$ 除以 $x-3$；
2. x^5-3x^2+2x-4 除以 $x+1$；
3. $9x^4-x^2+x-3$ 除以 $5x-2$；
4. $8x^5+2x^4+4x^2-3x-1$ 除以 $2x+1$；
5. $6x^4-x^3+2x-1$ 除以 $\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)$；

综合除法只是长除法过程的简化。对于除式是高于一次的多项式，仍可以类似进行。但书写较复杂，暂不研究。

一元多项式除法的基本原理在于进行逐步降次，直到“所剩下来的式子”的次数低于除式的次数为止。对于多元多项式来说，一般地就不可能使各个未知数同时都降次，所以，多元多项式一般没有除法，从这个意义上来看，除法是一元多项式特有的一种运算。

四、待定系数法求商式与余式

待定系数法是根据多项式恒等的条件来解决问题的一种常用代数方法。以下就以求多项式的商式与余式为例，说明这种方法。

例 4.42 试求 $f(x)=3x^4+x^3-4x^2-17x+5$ 除以 $g(x)=x^2+x+1$ 的商式 $Q(x)$ 与余式 $R(x)$。

分析： 因为所求的商式 $Q(x)$、余式 $R(x)$ 一定满足等式：$f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$。

这里又已知 $f(x)$ 是四次式，$g(x)$ 是二次式，不难判断，$Q(x)$ 一定是二次式，$R(x)$ 的次数低于二次，即 $R(x)$ 的次数最高是一次。

因此，我们可以不作长除法，而设出：

$$Q(x)=ax^2+bx+c, \qquad R(x)=dx+e$$

其中 a,b,c,d,e 都是将要确定的系数，我们都叫做待定系数。

由除法的基本关系等式：

$$f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$$

就可以利用多项式恒等条件，进而求出 a、b、c、d、e 的值，最后也就求出了商式及余式。

解： 由题意可设：

$$Q(x)=ax^2+bx+c, \qquad R(x)=dx+e$$

$\because \quad f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$

$\therefore \quad 3x^4+x^3-4x^2-17x+5=(ax^2+bx+c)(x^2+x+1)+ax+e$

即：

$$\begin{aligned} &3x^4+x^3-4x^2-17x+5\\ =&ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c+d)x+(c+e); \end{aligned}$$

比较等式两边对应同类项的系数，得

$$\begin{cases} 3=a \\ 1=a+b \\ -4=a+b+c \\ -17=b+c+d \\ +5=c+e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-5 \\ d=-10 \\ e=10 \end{cases}$$

所以，商式 $Q(x)=3x^2-2x-5$，余式 $R(x)=-10x+10$。

例 4.43 用待定系数法求 x^3+x^2+1 除以 $2x^2+3x+1$ 所得的商式 $Q(x)$ 及余式 $R(x)$。

解： $\because$ 被除式是 3 次式，除式是 2 次式，$\therefore$ 可设商式 $Q(x)=ax+b$，余式 $R(x)=cx+d$。由于

$$x^3+x^2+1=(ax+b)(2x^2+3x+1)+(cx+d)$$

即：

$$x^3+x^2+1=2ax^3+(3a+2b)x^2+(a+3b+c)x+(b+d)$$

比较两边同类项系数可得：

$$\begin{cases}1=2a\\1=3a+2b\\0=a+3b+c\\1=b-d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{4}\\d=\frac{5}{4}\end{cases}$$

$\therefore$ 商式 $Q(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$，余式 $R(x)=\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$。

从以上两例可以看出，用待定系数法求多项式相除的商式及余式，其要点和原理是：

1. 由被除式，除式的次数，设定商式与余式的次数，并以待定系数形式设出它们的表达式。商式的次数为被除式与除式次数之差；余式次数可设为除式的次数减一。
2. 由于除法的基本等式
$$f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$$
是恒等关系式，因此可以算出等式右边的结果。比较，两边同类项的系数，就得到以待定系数为未知数的方程组。
3. 解方程组，就可以求得各待定系数，进而可求得商式、余式。

练习

用待定系数法求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式及余式：

1. $f(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2,\qquad g(x)=x^2-3x+2$

2. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 3x + 4$

习题 4.3

1. 计算：

 (a) $(16m^2 + 24m^3) \div 8m^2$

 (b) $(8a^3 - 12a^2 + 16a) \div (-4a)$

 (c) $(ax^{n+4} - bx^{n+3} + cx^{n+2}) \div x^2$

 (d) $(3a^{n+2} + 2a^{n+1} - 4a^n) \div (-3a^{n-1})$

 (e) $(x-2)^2 \cdot (x+3) \div (x-2)$

 (f) $(3x-2)(5x+4) \div (2-3x)$

2. 把 $(x-2)$ 与 $(x+b)$ 都看成一个整体，设为辅助未知数。试计算：

 (a) $[4(x-2)^2 + 12(x+2)(x-2) - 8(x-1)^2(x-2)] \div 4(x-2)$

 (b) $[3(x+b)^3 - 6(x+b)^2 + 9(x+b)] \div 3(x+b)$

3. 用分离变量法与待定系数法计算：

 (a) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$ 除以 $x+3$；

 (b) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$ 除以 $x^2 + 3x + 1$；

 (c) $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ 除以 $x^2 - x + 1$；

 (d) $1 - 2x + 8x^3 - 4x^2$ 除以 $4x^2 - 2$；

 (e) $x + 1 + x^5 + 2x^3$ 除以 $2x + x^2 + 1$；

 (f) $3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ 除以 $2x^2 + x$。

4. 用综合除法求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式、余式。

 (a) $f(x) = 5x^2 + 4x - 12, \qquad g(x) = x + 2$；

 (b) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 3x - 2, \qquad g(x) = x - 2$；

 (c) $f(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 6, \qquad g(x) = x - 1$；

 (d) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 5, \qquad g(x) = x - 4$；

 (e) $f(x) = x^8 - 1, \qquad g(x) = x + 1$；

(f) $f(x)=x^2+6x^3-29x+21,\qquad g(x)=3x-2$；

(g) $f(x)=4x^3+6x^2-8x-10,\qquad g(x)=2x-1$；

(h) $f(x)=3x^3-11x^2+8x-3,\qquad g(x)=3x+2$；

(i) $f(x)=3x^3+ax^2+a^2x-2a^3,\qquad g(x)=3x-2a$；

(j) $f(x)=4x^4+5bx^3+9b^2x^2+6b^3x+4,\qquad g(x)=4x+b$。

5. 已知 $x^3+ax^2+bx+c=(x-1)(x-2)(x-3)+4$，试求：$a,b,c$ 的值。

6. 已知 $f(x)=ax^4+bx^2+cx+d$ 的根是：$x_1=10, x_2=1, x_3=12, x_4=4$。试求：$f(-1)$ 及 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$。

7. 如果已知 $f(x)=8x^3-2x^2+ax+b$ 除以 $g(x)=4x^2-2$ 所得的余式为 0，试求 a,b 的值。

8. 在第 7 题中，如果 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的余式是 $5x-3$，那么，a 与 b 又是何值?

9. 试把多项式 $3x^3-10x^2+13$ 表示成关于 $(x-2)$ 的方幂的形式。

提示： 先设 $3x^3-10x^2+13=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$，即：

$$3x^3-10x^2+13=\{[A(x-2)+B](x-2)+C\}(x-2)+D$$

再逐次用综合除法求出 D,C,B,A。

本章内容要点

这一章的主要内容是多项式的有关概念及其四则运算。

一、由已知数与未知数符号的方幂相乘而得到的式子叫单项式；若干个单项式的代数和，叫做多项式。多项式又叫做整式。

多项式的次数，就是指多项式中，次数最高的某一单项式的次数；而单项式的次数，就是所含各未知数的指数和。

任一非零常数，叫做零次多项式。

数零，叫做零多项式，它的次数不定。

二、一元 n 次多项式 $f(x)$ 的标准形式是：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\qquad (a_0\neq 0)$$

当 $x=b$ 时，$f(x)$ 的值记作：

$$f(b)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+\cdots+a_1b+a_0$$

三、两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，当 x 取任意值时，它们的值总相等，那么这两个多项式称为恒等，记作：

$$f(x)\equiv g(x)$$

如果 $f(x)\equiv g(x)$，那么，这两个多项式相应的同类项的系数都相等。这是待定系数法的依据。

四、能够使多项式 $f(x)=0$ 的 x 的值，叫做多项式 $f(x)$ 的根。要求多项式 $f(x)$ 的根，只要解方程 $f(x)=0$ 就可以得到。

五、多项式的加、减，乘法运算的结果仍是多项式（封闭的）。而且具有数系运算的通性。

如果用 f,g 表示两个多项式（一元或多元），它们分别为 m 次和 n 次 $(m>n)$。那么，

- $f+g$ 是一个 m 次多项式，$f-g$ 也是 m 次多项式；而 $f\cdot g$ 是一个 $(m+n)$ 次多项式。

六、常用乘法公式是运算的工具，必须掌握：

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)&=a^2-b^2\\(a\pm b)^2&=a^2\pm 2ab+b^2\\(a\pm b)^3&=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3\\(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)&=a^3\pm b^3\end{aligned}$$

这些公式中的 a,b，可以是数、或单项式、或多项式。因此，在应用中要具体分析，灵活掌握。

七、带余除法，是一元多项式的特有运算。

- $f(x)$ 除以 $g(x)$，就是要求出两个多项式 $Q(x)$ 与 $R(x)$，使它们满足关系式：

  $$f(x)=Q(x)\cdot g(x)+R(x)$$

  其中，$R(x)$ 的次数要低于 $g(x)$ 的次数。

- 除法的原理是：逐步寻求单项式，进行降次工作。具体方法有：类似于整数除法的长除法、分离系数法、待定系数法以及除式为一次式的综合除法。
- 两个一元多项式相除，当除式乘以一个非零常数 k 时，所得商式就是原商式的 $\frac{1}{k}$，所得余式不变，这是由于：

$$\begin{aligned} f(x) &= Q(x)\cdot g(x)+R(x) \\ &= \frac{1}{k}Q'(x)\cdot[k\cdot g(x)]+R'(x) \end{aligned}$$

复习题四

1. 计算：

   (a) $5x^2+(-4x)+1+(-3x)^2-(-5x)+(-3)^3+(-x^2)+6x-10$

   (b) $4x^2y-(+5xy)+(-3x^2y)-(x^2y)^2-(-3x^3)-(-2xy)$

2. 有一串单项式：

$$-x, 2x^2, -3x^3, 4x^4, \dots, -19x^{19}, 20x^{20}, \dots.$$

   (a) 你能说出它们排列的规律吗？

   (b) 根据你发现的规律，写出第 100 个、第 101 个、第 102 个单项式来。

   (c) 你能写出第 n 个、第 $n+1$ 个单项式来吗？

3. 如果一个三元单项式的系数和次数都是 4，试写出这个单项式的表达式（要考虑所有符合条件的各种可能）。

4. 有两个单项式，它们的和为 $10x^2y$，它们的差为 $-6x^2y$。试求出这两个单项式。

5. 设 $f(x)=3x^3-4x^2-5x+1$，$g(x)=2x^3+x^2+4x-3$，$h(x)=x^3-x^2-5x+2$

   (a) 试计算：

$$A=f(x)+g(x)+h(x), \qquad B=f(x)-g(x)+h(x)$$

$$C=f(x)+g(x)-h(x), \qquad D=-f(x)+g(x)+h(x)$$

   (b) 证明：$A=B+C+D$。

6. 已知：$f(x)+2g(x)=-5x^2-3x+2$，且 $2f(x)-g(x)=-x-1$。
试求出 $f(x)$，$g(x)$ 的表达式。

7. 已知：$f(x)=ax^2+bx+c$ 的两个根为 4，-5，且 $f(1)=f(-1)+2$
试求：$f\left(\sqrt{2}\right)$，$f(10)$。

8. 试确定满足恒等式 $(ax^2+bx+c)(x^2+1)=2x^4+6x^3-5x^2+6x-7$ 的 a,b,c 的值。

9. 已知 $f(x,y,z)=x^3+2(y^3+z^3)+6xyz$，求：$f(2,2,2)$。

10. 计算
   (a) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}+1\right)\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$
   (b) $\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y\right)^2$
   (c) $(x+2)^2+2(x-2)(x+2)+(x-2)^2$
   (d) $(3x-2y+1)^2$
   (e) $(5x^2-y^2)(-y^2-5x^2)$
   (f) $(3x+y-2)(3x-y+2)-(3x-2)(3x+2)$
   (g) $\left[(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)\right]^2\cdot(x-y)^2\cdot(x+y)^2$
   (h) $(a^8+b^8)\cdot(a+b)(a^4+b^4)(a-b)(a^2+b^2)$

11. 利用乘法公式证明：
$$(x+y)^6=x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6$$

12. 如果 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2+bx+1$ 是一个二次多项式的完全平方式，试用待定系数法求 a,b。

13. 试用综合除法求 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 的余数，并求出 $f(a)$：
   (a) $f(x)=7x^5-3x^2+9$ 除以 $x-2$ $(a=2)$;
   (b) $f(x)=7x^5-3x^2+9$ 除以 $x+1$ $(a=-1)$;
   (c) $f(x)=4x^3-8x^2+3x-6$ 除以 $x-\dfrac{1}{2}$ $(a=\dfrac{1}{2})$。

14. 从上题的各小题中，你能发现各题的余数 R 与相应的 $f(a)$ 有什么关系？再举一例，验证这一关系。

15. 试用综合除法求出下列各题中的 a、b、c、d：

(a) $2x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$；

(b) $x^3-6x^2+4x+8=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$；

(c) $3x^3-8x^2+10=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$。

（参看习题 4.3 第 9 题提示）。

16. 证明：

(a) 两个相邻奇数的平方差是 8 的倍数；

(b) 任意两个奇数的平方差除以 8 余 0。

17. 证明：

(a) $(x-y)(x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n)=x^{n+1}-y^{n+1}$；

(b) $(x+y)(x^{2n}-x^{2n-1}y+\cdots-xy^{2n-1}+y^{2n})=x^{2n+1}+y^{2n+1}$

注：第 2 题左边第二个括号内的符号是“+”、“−” 相间。

18. 已知 ax^2+bx+c 是一个一次二项式的完全平方式。试用待定系数法证明：$b^2-4ac=0$。

19. 如果 $f(x)=6x^4-x^3-18x^2+x+12$，试证明 $f(x)$ 能写成下面的形式：

$$f(x)=(x-1)(x+1)(2x-3)(3x+4)$$

20. 已知 $f(x+2)=3x^3+20x^2+45x+50$，试求：

(a) $f(0)$；$f(-2)$

(b) $f(1)$；$f(-1)$

(c) $f(+10)$；$f(12)$

(d) $f(a)$；$f(-a)$

提示：

(a) 可以将 $3x^3+20x^2+45x+50$ 先写成以下形式：

$$f(x+2)=A(x+2)^3+B(x+2)^2+C(x+2)+D$$

再求值。

(b) 可以由 $x+2=a$，求出 $x=a-2$，直接代入原式求值。

第五章　因式分解与余式定理

第一节　因式分解

一、因式与倍式

在算术中已经知道，如果整数 a 能够被整数 b 整除，就是说，能够找到一个整数 q，使 $a = q \cdot b$ 成立，那么，a 就叫做 b 的倍数，而 b 叫做 a 的因数。当然，这时 a 也是 q 的倍数，q 也是 a 的因数。

例如：由 $12 = 4 \times 3$，因而 12 是 3 与 4 的倍数，而 3 与 4 就是 12 的因数。

显然，12 的因数还有很多个，如：$\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ 等都是 12 的因数。

如果一个整数 $k, (k \neq 1)$ 除了 $\pm1, \pm k$ 以外再没有其它的因数，那么，k 就叫做**质数**（也叫**素数**）。

例如：$2, 3, 7, 5$ 等，都是质数。

在代数中，对于多项式来说，也有类似的概念。如果多项式 $f(x)$ 能够被非零多项式 $g(x)$ 整除，也就是，可以找到一个多项式 $Q(x)$，使 $f(x) = Q(x) \cdot g(x)$ 成立，那么，$f(x)$ 就叫做 $g(x)$ 的倍式，而 $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的因式。当然，这种情况下，$f(x)$ 也是 $Q(x)$ 的倍式，$Q(x)$ 也是 $f(x)$ 的因式。显然，这里的 $Q(x)$，$g(x)$ 的次数都不会大于 $f(x)$ 的次数。

例如：$\because \quad x - 1 = (x+1)(x-1)$，

$\therefore \quad x^2 - 1$ 就是 $(x+1)$，$(x-1)$ 的倍式；而 $(x+1)$，$(x-1)$ 又都是 (x^2-1) 的因式。

又由于任一个多项式 $f(x)$，都可以写成“一个零次多项式 a 与另一多项式 $\frac{1}{a}f(x)$ 的乘积”，即

$$f(x) = a \cdot \frac{1}{a} f(x)$$

因此,任何一个零次多项式 a 以及与 $f(x)$ 相差一个常数倍的多项式 $\dfrac{1}{a}f(x)$,都可以看成多项式 $f(x)$ 的因式。

例如:

$$\begin{aligned}
x^2-1 &= 1\cdot(x^2-1)\\
&= 2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\\
&= 2(x+1)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{5}\cdot(5x^2-5)\\
&= \frac{1}{5}\cdot(5x+5)(x-1)\\
&= \cdots\cdots\cdots\\
&= a\left(\frac{x^2}{a}-\frac{1}{a}\right)=a(x+1)\left(\frac{x}{a}-\frac{1}{a}\right)\\
&= a\left(\frac{a}{x}+\frac{1}{a}\right)(x-1)
\end{aligned}$$

$\therefore$　x^2-1 的因式还可以有:

$$1,\ x^2-1;\quad 2,\ \frac{x^2}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{x}{2}+\frac{1}{2},\ \frac{x}{2}-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{5},\ 5x^2-5,\ 5x+5,\ 5x-5;\ldots$$

一般地可以有因式:

$$a,\quad \frac{1}{a}x^2-\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a}x+\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a}x-\frac{1}{a},\ldots$$

今后,我们所说多项式的因式,一律不考虑它们之间零次因式(一个非零常数)的差别,这样一来,在上例中,我们就认为:$(x-1)$ 的因式有:$a,\ x+1,\ x-1,\ x^2-1$。

同样,由于 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$,因而它有因式 $a,\ x-1,\ x^2+x+1,\ x^3-1$。

如果一个多项式 $f(x)$,除了有零次因式和它本身 $f(x)$ 以外,再也没有其它因式,那么,$f(x)$ 就叫做**不可约多项式**。

如果一个多项式 $f(x)$,除有零次因式和它本身 $f(x)$ 外,还有次数较低(但大于 1 次)的其它因式 $Q(x)$, $g(x)$, 那么,$f(x)$ 就叫做**可约多项式**。

例如:多项式 $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$ 就是不可约多项式;多项式 $g(x)=x^2+1$, 在实数范围内是不可约多项式;多项式 $R(x)=x^2-2$ 在有理数范围内,是不可约多项式;但在实数范围内,由于 $x^2-2=(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})$,因此,它又是一个可约多项式。

多项式 $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ 是一个可约多项式。

练习

除零次因式和多项式本身外，试写出以下可约多项式的其余各因式：

1. $f(x) = x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$
2. $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x+1)(x-2)(2x-1)$

二、因式分解

由多项式乘法，可以求得 $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$。反过来，我们可以把 $(a^2 - b^2)$ 写成 $(a+b)\cdot(a-b)$ 的形式。这种把一个非零多项式写成几个多项式乘积的变形过程，叫做多项式的**因式分解**。

因此，多项式因式分解，就是要把一个多项式分解成为若干个不可约的多项式的乘积。在没有特别指明的一般情况下，只要求在有理数范围内分解到不可约为止。有时，还要求在实数范围内分解到不可约为止。

因式分解没有普遍适用的法则，只有通过各种典型的多项式分解因式，逐步认识特征，熟练技巧，才能融会贯通，举一反三。

(一) 提取公因式法

多项式的各项中，如果含有同一个因式，就可以运用分配律，把这个公共因式提取到括号外面，把原来的多项式写成两个因式的乘积形式。这种方法，叫做**提取公因式法**。

$$ma + mb + mc = m\cdot(a+b+c)$$

例 5.1　把下列各式分解因式：

1. $-ab + ac - a$
2. $12x^4y^2 - 8x^3y + 6x^2y^3$

解：

1. $-ab + ac - a = -a(b - c + 1)$
2. $12x^4y^2 - 8x^3y + 6x^2y^3 = 2x^2y(6x^2y - 4x + 3y^2)$

说明： 1 题中所提的公因式是 $-a$，因而，括号内各项都要变号。

2 题中所提的公因式是各项系数的最大公约数与各项所含公共元的最低次方的乘积。

例 5.2 分解因式：

1. $15(x+y)^2-5(x-y)(x+y)+10(x+y)$；
2. $2m(x-3)+(3-x)$；
3. $-ab(a-b)^2+a(b-a)^2-ac(a-b)^2$。

解：

1.

$$\begin{aligned}&15(x+y)^2-5(x-y)(x+y)+10(x+y)\\=&5(x+y)[3(x+y)-(x-y)+2]\\=&5(x+y)(3x+3y-x+y+2)\\=&5(x+y)(2x+4y+2)\\=&10(x+y)(x+2y+1)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}2m(x-3)+(3-x)&=2m(x-3)-(x-3)\\&=(x-3)(2m-1)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&-ab(a-b)^2+a(b-a)^2-ac(a-b)^2\\=&-ab(a-b)^2+a(a-b)^2-ac(a-b)^2\\=&-a(a-b)^2(b-1+c)\\=&-a(a-b)^2(b+c-1)\end{aligned}$$

练习

1. 填空：

$$36x^2y^2z=-4x^2y(\qquad),\quad x(y-z)=(\qquad)(x-y)$$

$$2x(x-y)^2=(\qquad)(y-x)^2,\quad 7y(y-x)^3=(\qquad)(x-y)^3$$

$$-x-x^2-x^3=-x(\qquad\qquad),\quad 6a^2b+12ab-18ab^2=6ab(\qquad\qquad)$$

2. 把下列各式分解因式:

(a) $4x^2y-6x^3y$

(b) a^3-a^{n+3}

(c) x^m+x^{m-1}

(d) $-a^3b-a^2b^2+ab$

(e) $4x^3y+6x^2y-12x^4y^2$

(f) $a(x-5)+b(5-x)-c(5-x)$

(g) $-6(x-y)^3-3y(y-x)^3$

(h) $(x-y)^2+2(x-y)(x+y)+(y-x)^2$

（二）分组分解法

有的多项式，如 $ma+mb+na+nb$，就其整体各项中并没有公因式，但如果运用结合律、交换律，就可以把其中有公因式的各项结合在一起，从而将原多项式分成若干组，先将各组的公因式提出，再观察是否还可以继续分解。

如：$(ma+mb)+(na+nb)=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n)$

例 5.3 把 $2ax+2ay+bx+by$ 分解因式。

解:

$$\text{原式}=2a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(2a+b)$$

例 5.4 把 $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$ 分解因式。

解:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(ax^2-ax)+(bx^2-bx)+(cx^2-cx)\\&=ax(x-1)+bx(x-1)+cx(x-1)\\&=x(x-1)(a+b+c)\end{aligned}$$

当然，也可以将原式分为二组进行因式分解。即

$$\text{原式}=(ax^2+bx^2+cx^2)-(ax+bx+cx)$$

同学可以自己练习。

例 5.5 把 $3a^3+6a^2b-3a^2c-6abc$ 分解因式。

解：

$$\begin{aligned}3a^3+6a^2b-3a^2c-6abc &= 3a(a^2+2ab-ac-2bc)\\ &= 3a[a(a+2b)-c(a+2b)]\\ &= 3a(a+2b)(a-c).\end{aligned}$$

可见，对一个多项式进行因式分解，应先考虑提公因式，再考虑分组分解，直到不能再分解时为止。

练习

分解因式：

1. $x^2-xy-2x+2y$
2. $3x-3y+ax-ay$
3. $ab-a+b^2-b$
4. $ax+bx-cy+ay-cx+by$
5. $a^2b+ab^2+a^2c+abc$
6. $2a^4-3a^3b-14a^2+21ab$

（三）乘法公式法分解因式

在第四章中学习过的乘法公式，都是恒等式，式中的字母都可以是数，也可以是单项式或多项式。只要将这些公式倒过来写出，就又可以作为因式分解的依据。

二项平方差公式

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

例 5.6 将下列各式分解因式：

1. $4a^2-9b^2$
2. $16x^2-y^4$
3. $\dfrac{9}{25}x^6-0.01x^2y^2$

解：

1. $4a^2-9b^2=(2a)^2-(3b)^2=(2a+3b)(2a-3b)$

2. $16x^2 - y^4 = (4x)^2 - (y^2)^2 = (4x + y^2)(4x - y^2)$

3. $\frac{9}{25}x^6 - 0.01x^2y^2 = \frac{x^2}{100}(36x^4 - y^2) = \frac{x^2}{100}(6x^2 + y)(6x^2 - y)$

例 5.7　分解下列各式的因式

$$49(a+b)^2 - 4(a-b)^2, \qquad x^3y - xy$$

解:

$$\begin{aligned} 49(a+b)^2 - 4(a-b)^2 &= [7(a+b)]^2 - [2(a-b)]^2 \\ &= [7(a+b) + 2(a-b)][7(a+b) - 2(a-b)] \\ &= (9a+5b)(5a+9b) \end{aligned}$$

$$x^3y - xy = xy(x^2 - 1) = xy(x+1)(x-1)$$

练习

1. 分解因式（口答）:

$$x^2 - 4, \quad 1 - a^2, \quad n^2 - 49, \quad -25 + y^2$$

$$144p^2 - 0.04q^2, \quad x^2 - \frac{b^2}{9}, \quad \frac{a^2 - b^2}{4}, \quad -1 + x^2y^2$$

2. 分解因式:

$$(a+b)^2 - c^2, \quad x^2 - (y+z)^2, \quad (2x+3)^2 - 9(x-1)^2, \quad y^4 - 16, \quad 64x^4 - 1$$

完全平方公式

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

例 5.8　分解因式:

1. $x^2 + 12x + 36$

2. $9a^2 - 30a + 25$

3. $(x+5y)^2 + (2x+10y)(3x-y) + (3x-y)^2$

解:

1. $x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$

2. $9a^2-30a+25=(3a)^2-2\cdot(3a)\cdot 5+5^2=(3a-5)^2$

3.

$$\begin{aligned}&(x+5y)^2+(2x+10y)(3x-y)+(3x-y)^2\\=&(x+5y)^2+2\cdot(x+5y)(3x-y)+(3x-y)^2\\=&[(x+5y)+(3x-y)]^2\\=&(4x+4y)^2=16(x+y)^2\end{aligned}$$

例 5.9 将 $x^2-y^2+a^2-b^2+2ax+2by$ 分解因式。

解： 只要将原式中各项交换、结合，再运用公式即可。

$$\begin{aligned}\text{原式}&=x^2+2ax+a^2-y^2+2by-b^2\\&=(x+a)^2-(y-b)^2\\&=(x+a+y-b)(x+a-y+b)\\&=(x+y+a-b)(x-y+a+b)\end{aligned}$$

练习

1. 分解因式（口答）:

$$a^2+10a+25,\quad 9-6b+b^2,\quad 4y^2-4y+1$$

$$1+2x+x^2,\quad 1+\frac{a^2}{9}-\frac{2}{3}a,\quad x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

2. 分解因式:

$$64m^2+48mn+9n^2,\quad 2ab-a^2-b^2,\quad -b+2bx-bx^2,\quad x^4-2x^2y^2+y^4$$

$$(m+n)^2-(2m+2n)(2m+n)+(2m+n)^2$$

$$4a^2-4n^2+b^2-m^2+4(ab+mn)$$

完全立方公式

$$a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$$

例 5.10 分解因式:

1. $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

2. $-8a^3-48a^2b-96ab^2-64b^3$

解:

$$\begin{aligned}&x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3\\=&x^3-3x^2(2y)+3x(2y)^2-(2y)^3\\=&(x-2y)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-8a^3-48a^2b-96ab^2-64b^3\\=&-8(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3)\\=&-8(a+2b)^3\end{aligned}$$

练习

1. 填空:

$$a^3+(\qquad)+(\qquad)+27b^3=(a+3b)^3$$

$$27x^3+(\qquad)+(\qquad)-64y^3=(3x-4y)^3$$

$$1+(\qquad)+(\qquad)+8a^6b^6=(1+2a^2b^2)^3$$

2. 分解因式:

$$1+3t^2+3t+t^3,\quad 125-150a+60a^2-8a^3,\quad 1-12a^2b^2+48a^4b^4-64a^6b^6$$

二项立方和、差公式

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

例 5.11　分解因式:

$$x^3+1,\qquad a^6-125b^3,\qquad 16x^6-\frac{1}{4}$$

解:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$a^6-125b^3=(a^2-5b)(a^4+5a^2b+25b^2)$$

$$
\begin{aligned}
16x^6-\frac{1}{4} &= \frac{1}{4}(64a^6-1) \\
&= \frac{1}{4}\left[(8a^3)^2-1\right] \\
&= \frac{1}{4}(8a^3+1)(8a^3-1) \\
&= \frac{1}{4}(2a+1)(4a^2-2a+1)(2a-1)(4a^2+2a+1)
\end{aligned}
$$

练习

分解因式：

$$x^8-8,\quad 125y^3+1,\quad a^3b^3-1,\quad \frac{1}{8}m^3+\frac{1}{27}n^3,\quad a^6-b^6,\quad a^9x^9-x^6$$

（四）配方法分解二次三项式

形如 $ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$ 的多项式，叫做二次三项式，其中 a、b、c 都是系数。

对于二次三项式，可以应用在第三章中学习过的配方法和二项平方差公式进行因式分解。

例 5.12 分解因式：

$$x^2+3x+40,\qquad 2x^2+x-3$$

解：

$$
\begin{aligned}
x^2+3x+40 &= x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-40 \\
&= \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2 \\
&= \left(x+\frac{3}{2}+\frac{13}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}-\frac{13}{2}\right) \\
&= (x+8)(x-5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^2+x-3 &= 2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right) \\
&= 2\left[x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{3}{2}\right] \\
&= 2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right] \\
&= 2\left(x+\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{1}{4}-\frac{5}{4}\right) \\
&= 2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1) \\
&= (2x+3)(x-1)
\end{aligned}
$$

一般地，对于二次三项式 $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ 来说，当 $b^2-4ac \geq 0$ 时，可以用配方法进行因式分解，其方法如下：

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right] \\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right] \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) \\
&= a\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

显然，用配方法分解因式的结果中，有一个因数是二次项系数 a，另两个因式正好是 x 与这个二次三项式的两根之差。这个结论，由例 5.12 的两题结果，也可以得到验证。

例 5.13 分解因式：

$$
4x^2-4x-3, \qquad 3x^2+6x-1, \qquad 8x^2+8x+2
$$

解：

$$
\begin{aligned}
4x^2-4x-3 &= 4\left(x^2-x-\frac{3}{4}\right)\\
&= 4\left[x^2-x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\right]\\
&= 4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]\\
&= 4\left(x-\frac{1}{2}+1\right)\left(x-\frac{1}{2}-1\right)\\
&= 4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\\
&= (2x+1)(2x-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3x^2+6x-1 &= 3\left(x^2+2x-\frac{1}{3}\right)\\
&= 3\left[(x^2+2x+1)-1-\frac{1}{3}\right]\\
&= 3\left[(x+1)^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2\right]\\
&= 3\left(x+1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+1-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\\
&= 3\left(x+\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
8x^2+8x+2 = 8\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right) = 8\left(x+\frac{1}{2}\right)^2
$$

练习

用配方法分解因式：

1. x^2+2x-3
2. $2x^2-7x+6$
3. $5x^2-8x+3$
4. $8x^2+10x+2$

（五）视察法分解二次三项式

二次三项式的因式分解，总是可以用配方法解决的，但分解时总要开平方，运算较繁。因而，在我们遇到一些较简单的二次三项式时，还可以用视察法（也

称十字相乘法）来分解。这个方法的原理是：

设二次三项式 $ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$ 能分解为：

$$ax^2+bx+c=(ux+r)(vx+s)$$

即：$ax^2+bx+c=uvx^2+(us+vr)x+rs$

由多项式恒等，可得：

$$uv=a, \qquad us+vr=b, \qquad rs=c$$

这就是说：要对 ax^2+bx+c 分解因式，只要能寻找到四个数 u、v、r、s，同时满足以上三个等式即可，如图所示：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[d, "u\cdot v=a"'] \arrow[dr] & r \arrow[d, "r\cdot s=c"] \arrow[dl] \\ v & s \end{tikzcd}$$

$$\Downarrow$$

$$vr+us=b$$

要找这四个数 u,v,r,s，可以这样去做：先找 a 的因数，使 $u\cdot v=a$；再找 c 的因数，使 $rs=c$；最后再试验 $us+vr$ 是否等于 b：

- 如果 $us+vr=b$，那么 $ax^2+bx+c=(ux+r)(vx+s)$；
- 如果 $us+vr\neq b$，那么就要重新安排 u、v、r、s 的位置或按上法另找一组数，继续试验，直到符合要求为止。

例 5.14 分解因式：

$$x^2-5x+6, \qquad x^2-x-12$$

分析： 这两题中，$a=1$, 不难看出 u,v 只有都等于 1 的情形，因而我们只要能找出数 r,s，满足 $rs=c$, $r+s=b$, 即可将二次三项式 x^2+bx+c 分解为 $(x+r)\cdot(x+s)$。

解：

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ & \times & \\ 1 & & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & 2 \\ & \times & \\ 1 & & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & & -2 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{array}$$

$1+6=7$（不合适） $\qquad$ $2+3=5$（不合适） $\qquad$ $-2+(-3)=-5$（合适）

$$\therefore\quad x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 1 & & 4 \end{array}$$
$-3+4=1$
（不合适）

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & \times & \\ 1 & & -4 \end{array}$$
$3-4=-1$
（合适）

$$\therefore\quad x^2-x-12=(x+3)(x-4)$$

例 5.15 分解因式：

$$15x^2-7x-2,\qquad 11x^2-54x+63$$

解：

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 1 \\ & \times & \\ 5 & & -2 \end{array}$$
$5-6=-1$
（不合适）

$$\begin{array}{ccc} 3 & & -2 \\ & \times & \\ 5 & & 1 \end{array}$$
$-10+3=-7$
（合适）

$$\therefore\quad 15x^2-7x-2=(3x-2)(5x+1)$$

$$\begin{array}{ccc} 11 & & -63 \\ & \times & \\ 1 & & -1 \end{array}$$
$-63-11=-74$
（不合适）

$$\begin{array}{ccc} 11 & & -21 \\ & \times & \\ 1 & & -3 \end{array}$$
$-21-33=-54$
（合适）

$$\therefore\quad 11x^2-54x+63=(11x-21)(x-3)$$

例 5.16 分解因式：$6x^2-xy-12y^2$

分析：遇到含有两个元的二次三项式，也可以与一元类似地作出因式分解。

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -4 \\ & \times & \\ 3 & & 3 \end{array}$$
$-12+6=-6$
（不合适）

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 3 \\ & \times & \\ 3 & & -4 \end{array}$$
$9-8=1$
（不合适）

$$\begin{array}{ccc} 2 & & -3 \\ & \times & \\ 3 & & 4 \end{array}$$
$-9+8=-1$
（合适）

$$\therefore\quad 6x^2-xy-12y^2=(2x-3y)(3x+4y)$$

练习

用视察法分解因式：

1. x^2+3x+2
2. x^2-x-2
3. x^2+x-30
4. $x^2-14x+45$
5. $x^2+12x-64$
6. $3x^2-7x+2$
7. $4y^2+y-3$
8. $10y^2-11y+1$
9. $2ax+8x^2+3a^2$
10. $14x^2+xy-3y^2$
11. x^4-6x^2-27
12. a^6-7a^3-8

综合以上各种分解因式的方法，一般可以按以下步骤考虑：

1. 先考虑提取公因式法，
2. 再考虑用公式或十字相乘法，
3. 再考虑分组分解法。

但是要注意：多项式的因式分解，和它的系数范围有密切关系，如：x^2-2 在有理数范围内就认为不能再分解了，而在实数范围内，它又可以分解为：

$$x^2-2=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

所以，在今后的分解因式时，如果没有特别指明，一般只要求在有理数范围内分解到不能再分解为止。

例 5.17　把 $x^6-3x^4+2x^2$ 分解因式。

解：

$$\begin{aligned}x^6-3x^4+2x^2&=x^2\left(x^4-3x^2+2\right)\\&=x^2(x^2-1)(x^2-2)\\&=x^2(x+1)(x-1)(x^2-2)\end{aligned}$$

例 5.18　把 $x^2+2xy+y^2-2x-2y-3$ 分解因式。

解：

$$\begin{aligned}x^2+2xy+y^2-2x-2y-3&=(x+y)^2-2(x+y)-3\\&=(x+y-3)(x+y+1)\end{aligned}$$

例 5.19 把 $x^5+x^4+x^3+x^2$ 分解因式。

解：

$$\begin{aligned} x^5+x^4+x^3+x^2 &= x^2\left(x^3+x^2+x+1\right) \\ &= x^2[x^2(x+1)+(x+1)] \\ &= x^2(x+1)(x^2+1) \end{aligned}$$

练习

分解因式：

1. $a^2+2ab+b^2-ac-bc$
2. $4m^2+4mn+n^2+6m+3n+2$
3. $a^6-a^4+a^3-a$
4. $x^5-x^4-2x^3+2x^2-8x+8$

在运用乘法公式或分组分解因式时，有时需要将多项式作一些人为的变形，常见的是需要**添项**或**拆项**。

例 5.20 把 $x^4+x^2y^2+y^4$ 分解因式。

解：

$$\begin{aligned} x^4+x^2y^2+y^4 &= x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2 && \text{(添项)} \\ &= (x^2+y^2)^2-(xy)^2 \\ &= (x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

例 5.21 把 a^4-11a^2+1 分解因式。

解：

$$\begin{aligned} a^4-11a^2+1 &= a^4-2a^2+1-9a^2 && \text{(拆项)} \\ &= (a^2-1)^2-(3a)^2 \\ &= (a^2+3a-1)(a^2-3a-1) \end{aligned}$$

练习

分解因式:

1. x^4-3x^2+1
2. x^4+4
3. a^4-3a^2-18
4. $x^4-27x^2y^2+y^4$

三、待定系数法分解因式

二元二次多项式

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$$

在一般情况下是不可约多项式。但在某些特殊情况下是能够分解成两个二元一次因式的。如何判断这样的多项式能否分解? 如果能分解时，又怎样入手呢? 我们将用待定系数法去解决这个问题。

例 5.22 把多项式 $2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2$ 分解因式。

分析: 直接视察可知这个多项式的前三项是可分解的:

$$2x^2-3xy-2y^2=(2x+y)(x-2y)$$

因而我们推断: 多项式 $2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2$ 若能分解成两个一次式，则必然是 $(2x+y+n)(x-2y+m)$ 的形式。我们只要能求出 m、n，多项式即可分解因式; 如果 m, n 不存在，就可断定，这个多项式不能分解因式。

解: $\because$ $2x^2-3xy-2y^2=(2x+y)(x-2y)$

$\therefore$ 可设 $2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2=(2x+y+n)(x-2y+m)$，即:

$$\begin{aligned}&2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2\\=&2x^2-3xy-2y^2+(2m+n)x+(m-2n)y+m\cdot n\end{aligned}$$

由多项式恒等，比较等式两边同类项的系数，可得:

$$2m+n=3 \tag{5.1}$$

$$m-2n=4 \tag{5.2}$$

$$m\cdot n=-2 \tag{5.3}$$

由 (5.1), (5.2) 可解出 $m=2$, $n=-1$。代入 (1.3) 满足。

$\therefore$ $2x^2-3xy-2y^2+3x+4y-2=(2x+y-1)(x-2y+2)$

例 5.23 将 $x^2-y^2+2x+y-1$ 分解因式

解： $\because\quad x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

$\therefore\quad$ 可设 $x^2-y^2+2x+y-1=(x+y+m)(x-y+n)$，即

$$x^2-y^2+2x+y-1=x^2-y^2+(m+n)x+(n-m)y+mn$$

比较等式两边同类项的系数，得：

$$m+n=2 \tag{5.4}$$

$$n-m=1 \tag{5.5}$$

$$m\cdot n=-1 \tag{5.6}$$

由 (5.4)、(5.5) 可解出：$m=\dfrac{1}{2},\quad n=\dfrac{3}{2}$。但将 m,n 的值代入 (5.6)：

$$m\cdot n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\neq -1$$

即同时满足 (5.4)、(5.5)、(5.6) 的 m,n 不存在。

因此，$x^2-y^2+2x+y-1$ 是不可约多项式，不能再分解因式。

例 5.24 已知 $f(x)=x^4+4x^2+3x+k$ 有一个因式 x^2+x+1。试求 k 值及另外的因式。

解： $\because\quad f(x)$ 为四次多项式，且有因式 x^2+x+1。

$\therefore\quad f(x)$ 的另一个因式必为二次式。

不妨设 $f(x)=(x^2+x+1)(ax^2+bx+c)$，即：

$$\begin{aligned} x^4+4x^2+3x+k &= (x^2+x+1)(ax^2+bx+c)\\ &= ax^4+(a+b)x^3+(a+b+c)x^2+(b+c)x+c \end{aligned}$$

比较等式两边同类项的系数，得：

$$\begin{cases} a=1\\ a+b=0\\ a+b+c=4\\ b+c=3\\ c=k \end{cases}$$

从中可解得：$a=1,\quad b=-1,\quad c=4,\quad k=4$。

因此，$f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+4)$，其中 x^2+x+1 与 x^2-x+4 都不可约。

练习

1. 分解因式：

   (a) $x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$；

   (b) $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$；

   (c) $x^2+3xy+2y^2+4x+3y+1$。

2. 已知 $f(x)=3x^4-2x^3-32x^2+66x+a$ 有一个因式是 x^2+2x-7。试求 a 的值及另外的因式。

习题 5.1

1. 填空：

   (a) $-3a^3b^2c=abc(\qquad\qquad)$

   (b) $mx^2+nx-p=m(\qquad\qquad)$

   (c) $-12a^2b-3a^2b^2x+27ab^2=3ab(\qquad\qquad)$

   (d) $3x^2y^3z^4-6x^3y^4z^2+18x^4y^2z^3=-3x^2y^2z^2(\qquad\qquad)$

2. 写出下列各题中的公因式：

   (a) $5x^2y,\qquad 15xy^2,\qquad 45xyz$

   (b) $24a^2(1-x)^2(x+y),\qquad 42ab(x-1)(x+y)^2$

   (c) $-2(a+b)^2+4(a+b),\qquad (a+b)^2-3(a+b)^3$

   (d) $(2x-4y)(2a-b),\qquad (x-y)(4a-2b)$

3. 用提取公因式法分解因式：

   (a) $-ax-ay+az$

   (b) $14ab-35a^2-21a$

   (c) $100m^2n-25mn^2+30m^2n^2$

   (d) a^m-a^{m+2}

   (e) $x(2a-3b)-y(3b-2a)$

   (f) $a^2(x-y)^3+b^2(y-x)^3$

(g) $2a(x+y-z)+3b(y-z+x)-5c(z-x-y)$

(h) $5m^2n^2(a-b-c)-10m^2n^3(b+c-a)+75m^2n^4(b-a+c)$

4. 分组分解因式:

(a) $1-x-y+xy$

(b) x^3-x+x^2-1

(c) $ab-bc-b^2+ca$

(d) $ax+y-ay-x$

(e) x^2+ax-y^2+ay

(f) $x^3+x^2y-x^2z-xyz$

(g) $ax^2+bx^2-bx-ax+cx^2-cx$

(h) x^3+9+3x^2+3x

5. 将下列多项式展开后，再分解因式。

(a) $(ax-by)^2+(ay+bx)^2+c^2x^2+c^2y^2$

(b) $ab(c^2-d^2)-cd(a^2-b^2)$

6. 分解因式:

(a) x^2+4x+3

(b) $x^2-11x+10$

(c) $x^2-2x-48$

(d) $2a^2+14ab+24b^2$

(e) $x^2+4xy-5y^2$

(f) $3x^2-7x+2$

(g) $6x^2-7x-3$

(h) $3x^2-2xy-8y^2$

(i) $(x^2-6)^2-25x^2$

(j) $x^2-4.5x+5$

(k) $x^2-7xy+10y^2$

(l) $x^2+2\frac{1}{2}x+1$

(m) $x^2+3\frac{5}{12}x+2$

(n) $20x^2-39x+18$

(o) $x^2-5.6x+6.4$

(p) $2x^3-7x^2y+3xy$

(q) a^6+26a^3-27

(r) $25x^{2n+2}-64x^{n+1}$

7. 在实数范围内分解因式:

(a) $3x^2+2x-3$

(b) $2x^2+16x+1$

(c) x^3-5x

(d) a^4-27a^2+1

8. 分解因式:

(a) $-x^2+12xy-36y^2$
(b) $25-20a+4a^2$
(c) $25x^4-10x^2y^2+y^4$
(d) $75-12x^2$
(e) $25t^2-0.09$
(f) $1-64a^2$
(g) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$
(h) $2mp^2-50m$
(i) $(x+1)^2-9(x-1)^2$
(j) $a^2-(2b+c)^2$
(k) $4(3p+5q)^2-9(2p-q)^2$
(l) $a^2x^{2n+1}-b^2x^{4n+2}$
(m) $8a^3+27b^3$
(n) $a-a^5$
(o) $(a+b)^3-8(2a-b)^3$
(p) $x^4+6x^2y^2+9y^4$
(q) $5x^6-10x^3y^3+5y^6$
(r) $18x^3y-36x^2y^2+18xy^3$
(s) $4x^3-8x^2+4x$
(t) $a^2-b^2-c^2-2bc$
(u) $25-a^2+6ab-9b^2$
(v) $9x^2-4y^2-z^2+4yz$
(w) $a^2+2a+1-c^2+2cd-d^2$
(x) a^6-64
(y) $16x^3-\frac{1}{4}$
(z) $t^6-3t^4+3t^2-1$

9. 用适当方法分解因式:

(a) $16m^3+2n^3-2m-n$
(b) $a^4+2a^3b+8ab^3+16b^4$
(c) $x^3-64y^3+x^2-16y^2$
(d) x^4-8x^2-9
(e) $x^4-8x^2+\frac{1}{4}$
(f) $(x+y)^2-22x-22y+21$
(g) $a^2-2a(b-c)+(c-b)^2$
(h) $4x^2-12xy+9y^2-2x+3y-2$
(i) $x^6-3x^4+2x^2$
(j) x^4+64y^4

10. 先分解因式，再求值:

(a) $f(x,y)=xy-\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，求：$f(75,65)$
(b) $\varphi(a,b)=6a^3b-3a^2b^2$，求：$\varphi\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$
(c) $g(a,x,y)=x(a+3)-y(a+3)$，求：$g\left(4,\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$
(d) $q(m,n)=m^2-n^2+(m+n)^2-m-n$。求：$q(1.5,-3.7)$

11. 证明:

(a) 47^6-47^5 能被 46 整除；

(b) $24^{10}+24^9$ 能被 25 整除；

(c) $5^{23}-5^{21}$ 能被 24 整除；

(d) 25^7+5^{13} 能被 30 整除；

(e) 对任意自然数 n，$(n+8)^2-n^2$ 一定是 8 的倍数；

(f) $81^7-27^9-9^{13}$ 必定是 45 的倍数；

(g) 如果 m 及 n 都是正偶数，或都是正奇数时，那么 m^2-n^2 必定是 4 的倍数。

12. 用待定系数法分解因式：

(a) $x^2+2xy+y^2+x+y-2$

(b) $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$

(c) $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$

13. m 是什么数值时，多项式 $f(x)=mx^2-2xy-3y^2+3x-5y+2$ 能够分解为两个一次因式？并分解出来。

14. 已知 $g(x)=2x^3+3x^2+\ell x+m$ 有一个因式 x^2+x-6，试求 ℓ,m 的值，并把 $g(x)$ 因式分解。

15. 已知 $f(x)=x^4+ax^3+x^2+bx+1$ 有一个因式 x^2-2x+1，试求 a,b 的值，并把 $f(x)$ 进行因式分解。

第二节 余式定理及其推论

一、余式定理

运用综合除法,我们可以求得任一个多项式 $f(x)$ 除以一次式 $x-a$ 及 $bx-a$ 的商式及余式。如果仔细观察每次做的结果,可以得出很重要而有趣的结论。我们还是先从例子谈起。

例 5.25 已知 $f(x)=x^3+3x^2-x-6$，

试求：$f(x)$ 除以 $x-2$ 及 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余式。

再求：$f(2)$ 及 $f(a)$ 的值。

解： 用综合除法

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +3 & -1 & -6 & 2 \\
 & +2 & +10 & +18 & \\
\hline
1 & +5 & +9 & \boxed{+12} &
\end{array}
$$

$\therefore$　$f(x)$ 除以 $x-2$，所得余式为一常数 12。

$$
\begin{array}{cccc|l}
1 & +3 & -1 & -6 & a \\
 & a & a^3+3a & a^3+3a^2-a & \\
\hline
1 & a+3 & a^3+3a-1 & \boxed{a^3+3a^2-a-6} &
\end{array}
$$

$\therefore$　$f(x)$ 除以 $x-a$，所得余式为 a^3+3a^2-a-6。又：

$$f(2)=2^3+3\times 2^2-2-6=12$$

$$f(a)=a^3+3a^2-a-6$$

由此看来，真是巧极了，$f(x)$ 除以 $x-2$ 的余式正好等于 $f(2)$，而 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式，也恰好等于 $f(a)$。我们不禁会问：

一般地多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+cdots+a_1x+a_0$ 除以 $x-a$ 时，所得的余式是否也等于 $f(a)$ 呢？以下定理可以做出肯定回答。

余式定理

多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式等于 $f(a)$。

证明： 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的商式为 $q(x)$，余式为 $r(x)$。由除法可得：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+r(x)$$

但：$\because$　$r(x)$ 的次数低于 $x-a$ 的次数，

$\therefore$　$r(x)$ 必为零或零次多项式，即 $r(x)$ 必为一个常数 R。

因而

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+R \tag{5.7}$$

这是一个恒等式，不论 x 取何值，总是成立的。今设 $x=a$，等式 (5.7) 也应成立。

于是就有：$f(a)=q(a)\cdot(a-a)+R$ 因此：

$$R=f(a) \tag{5.8}$$

这就证明了余式定理。这个结论使我们在不做除法的前提下，也可以用求多项式的值来求出余式。

例 5.26 不做除法，求下列各题的余数：

1. $f(x)=x^2-2x+1$ 除以 $x-\dfrac{1}{2}$。
2. $\varphi(x)=x^4+2x^3+4x+1$ 除以 $x+2$。

解：

1. $\because \quad f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}-1+1=\dfrac{1}{8}$

   由余式定理

$$\therefore \quad 余数R=\frac{1}{8}$$

2. 同理，$\because \quad \varphi(-2)=16-16-8+1=-7$

$$\therefore \quad 余数R=-7$$

例 5.27 求 $f(x)=2x^3-3x^2+8x-14$ 除以 $2x-3$ 的余数。

解： 由于 $f(x)$ 除以 $2x-3$ 所得余数与 $f(x)$ 除以 $x-\dfrac{3}{2}$ 所得的余数是相同的，所以

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+8\times\frac{3}{2}-14 \\ &= \frac{27}{4}-\frac{27}{4}+12-14=-2 \end{aligned}$$

可得：$f(x)$ 除以 $2x-3$ 的余数为 -2。

例 5.28 求证 $f(x)=x^4-1$ 可被 $x-1$ 整除。

分析： 要证明 $f(x)$ 可被 $x-1$ 整除，只要证明 $f(x)$ 除以 $x-1$ 所得余数是 0 即可。

证明：

$$\because \quad f(1)=1^4-1=0$$

$$\therefore \quad f(x)除以x-1余数为\ 0$$

因此，$f(x)=x^4-1$ 能被 $x-1$ 整除。

例 5.29 $f(x)=3x^5+10x^4-15x^3-9x^2+8x-7$。求 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ 的值。

说明： 如果直接将 $x=-\dfrac{1}{3}$ 代入 $f(x)$ 求值，显然计算繁杂。若根据余式定理，由于 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ 应等于 $f(x)$ 除以 $x+\dfrac{1}{3}$ 的余数，因而，可以用综合除法求出 $f(x)$ 除以 $x+\dfrac{1}{3}$ 的余数 R。这要简便一些。

解： 由综合除法

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 3 & +10 & -15 & -9 & +8 & -7 & -\frac{1}{3} \\ & -1 & -3 & +6 & +1 & -3 & \\ \hline 3 & +9 & -18 & -3 & +9 & \boxed{-10} & \end{array}$$

可知：$f(x)$ 除以 $x+\dfrac{1}{3}$ 的余数为 -10，

$$\therefore\quad f\left(-\frac{1}{3}\right)=-10$$

由余式定理，我们得到恒等式：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)+f(a) \tag{5.9}$$

练习

1. 设 $x^4-3x^3-5x^2+20x-8$，试分别求出 $f(x)$ 除以下列各式的余数：

$$x-1,\quad x+1,\quad x-2,\quad x+2,\quad 3x+1,\quad 3x-2$$

2. 用适当方法求值：

   (a) $f(x)=x^5-12x^3+15x-7$，求 $f(6)$。

   (b) $\varphi(x)=x^3-x+2$，求 $\varphi\left(-\dfrac{1}{2}\right)$。

3. 证明：$x^5+x^4-x^3-2x^2-2x$ 能被 $x-\sqrt{2}$ 整除。

二、余式定理的推论

由余式定理，可以得到以下四个重要推论：

推论 1

如果 $f(a)=0$，那么 $(x-a)$ 必能整除 $f(x)$；反过来，如果 $x-a$ 能整除 $f(x)$，那么 $f(a)=0$。

证明： 如果 $f(a)=0$，由等式 (5.9) 可得：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a)$$

这就是说，余数 $R=0$，$x-a$ 整除 $f(x)$。

反过来，如果 $x-a$ 整除 $f(x)$，即余数 $R=0$，由余式定理 $R=f(a)$。

$$\therefore \quad f(a)=0$$

推论 1 的内容，也可以这样叙述：如果 $f(a)=0$，那么，$f(x)$ 必定有因式 $(x-a)$。反过来，也正确。因此，推论 1 也叫**因式定理**。可作为判断 $x-a$ 是否是 $f(x)$ 的因式的依据。

例 5.30 试证明：

1. $x-2$ 是 $f(x)=x^3-5x^2+12x-12$ 的因式；
2. $x-a$ 是 $\varphi(x)=x^5-a^5$ 的因式。

证明：

1. $\because \quad f(2)=2^3-5\times 2^2+12\times 2-12=0$

   $\therefore$ 　由推论 1 知道 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式。

2. $\because \quad \varphi(a)=a^5-a^5=0$

   $\therefore \quad x-a$ 是 x^5-a^5 的因式。

例 5.31 试证明：对于正整数 n，$x-y$ 是 x^n-y^n 的因式，而不是 x^n+y^n 的因式。

证明： 设 $f(x)=x^n-y^n$，其中 y^n **看作**常数项。

$\because \quad f(y)=y^n-y^n=0$

$\therefore \quad x-y$ 是 x^n-y^n 的因式。

又设 $\varphi(x)=x^n+y^n$

$\because \quad \varphi(y)=y^n+y^n\neq 0$

$\therefore \quad x-y$ 是 x^n+y^n 的因式。

推论 2

如果多项式 $f(x)$ 有两个不同的根 a 和 b，那么，$(x-a)(x-b)$ 必能够整除 $f(x)$，即 $f(x)$ 必含有因式 $(x-a)(x-b)$；反过来说，如果 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)(x-b)$，也就是 $f(x)$ 能够被 $(x-a)(x-b)$ 整除，那么，a、b 一定是 $f(x)$ 的两个根。

证明： 由于 a 是 $f(x)$ 的根，即：$f(a)=0$。

$\because$　由推论 1 可知，$(x-a)$ 能整除 $f(x)$。不妨设

$$f(x)=q_1(x)\cdot(x-a) \tag{5.10}$$

将 $x=b$ 代入恒等式 (5.10)，可得 $f(b)=q_1(b)\cdot(b-a)$

$\because$　b 也是 $f(x)$ 的根

$\therefore$　$f(b)=0$

因而可以得到：$q_1(b)\cdot(b-a)=0$。

但由于 $b\neq a$，　$\therefore$　$b-a\neq 0$

$\therefore$　由上式得出 $q_1(b)=0$

根据推论 1，就说明 $x-b$ 能够整除 $q_1(x)$。

再设

$$q_1(x)=q_2(x)\cdot(x-b) \tag{5.11}$$

(5.11) 式代入 (5.10) 式：

$$f(x)=q_2(x)\cdot(x-b)\cdot(x-a)$$

这正说明 $(x-a)(x-b)$ 可整除 $f(x)$，也就是 $f(x)$ 含有因式 $(x-a)(x-b)$。

反过来，如果 $f(x)=q(x)\cdot(x-a)\cdot(x-b)$，不难由 $f(x)=0$ 得出，$q(x)\cdot(x-a)(x-b)=0$，显然可以得出 $f(x)$ 的两个根 $x=a$, $x=b$。

同理，我们可证明：如果 $f(x)$ 有 k 个不同的根，$a_1,a_2,\cdots,a_k$，那么，$f(x)$ 能被 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$ 整除。即：

$$f(x)=q(x)\cdot(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)$$

反过来说，结论也是成立的。

例 5.32　证明：$f(x)=x^4+2x^3-4x^2-2x+3$ 能够被 x^2-1 整除。

证明： 由于 $x^2-1=(x+1)(x-1)$，且：

$$\begin{aligned}f(-1)&=(-1)^4+2\times(-1)^3-4\times(-1)^2-2\times(-1)+3\\&=1-2-4+2+3=0\\f(1)&=1+2-4-2+3=0\end{aligned}$$

$\therefore$ $x=-1$，$x=1$ 是 $f(x)$ 的两个根。

因此，$f(x)$ 能被 $(x+1)(x-1)=x^2-1$ 整除。

例 5.33 a 和 b 是什么值的时候，才能使多项式 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2$ 能被 x^2-x-2 整除？

解： 由于 $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$，且由题意必有：

$$f(2)=16+8a+8+2b-2=0$$
$$f(-1)=1-a+2-b-2=0$$

即：

$$\begin{cases}4a+b=-11\\a+b=1\end{cases}$$

解此方程组得：$a=-4$，$b=5$。

所以，当 $a=-4$，$b=5$ 时，$f(x)$ 能被 x^2-x-2 整除。

练习

1. 证明：$f(x)=x^3-4x^2+9$ 含有因式 $x-3$。你能找出 $f(x)$ 的另一个因式来吗？
2. 已知 ±1 是 $f(x)=2x^3+3x^2-2x-3$ 的两个根，试用除法求出 $f(x)$ 的第三个根来。
3. 证明 $f(x)=x^4-2x^3-x-2$ 能被 x^2-3x+2 整除。
4. 如果 $x-3$ 能整除 $g(x)=x^3+ax^2-20x+6$，求 a。
5. 如果 $(x+2)(x-4)$ 能整除 $f(x)=2x^3-x^2+mx+n$。试求 m 及 n 的值。

推论 3

一个 n 次多项式 $f(x)$，至多只能有 n 个不同的根。

证明： 假如一个 n 次多项式 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根 $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$，那么由推论 2 就知：

$$f(x) = q(x) \cdot (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)(x-a_{n+1})$$

这显然是不可能的。因为等式右边各因式的乘积的次数，肯定超过了 n 次，这和已知 $f(x)$ 是 n 次多项式就矛盾了。

所以，n 次多项式 $f(x)$ 至多只能有 n 个不同的根。

以上这种“说明一个结论的反面是不可能的，从而说明了结论的正确”的方法，称为反证法。

例 5.34　试证明多项式 $ax^3+bx^2+cx+d \quad (a \neq 0)$ 至多只能有三个不同的根。

证明： 假如这个三次多项式有 4 个不同的根 a_1, a_2, a_3, a_4，那么，由余式定理的推论 2 可知：

$$ax^3+bx^2+cx+d = q(x)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$$

这个等式的左边也是已知的 3 次多项式，但它的右边，显然至少是一个 4 次多项式，这是不可能的。

所以，这个三次多项式，不可能有 4 个或 4 个以上不同的根，至多只能有三个不同根。

推论 4

如果两个 n 次多项式 $f(x)$，$g(x)$ 在 x 取 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ 这 $n+1$ 个不同的值时，它们所对应的值都相等，即

$$f(a_1) = g(a_1),\quad f(a_2) = g(a_2),\quad \ldots,\quad f(a_{n+1}) = g(a_{n+1})$$

那么，这两个多项式实是同一个多项式。即

$$f(x) = g(x)$$

我们仍用反证法来证明这个推论。

证明： 假如这两个 n 次多项式不同，即 $f(x) \neq g(x)$，那么，$f(x)-g(x)$ 就是一个次数不超过 n 的非零多项式。

又由已知，$f(a_1) = g(a_1)$，$f(a_2) = g(a_2)$，$\ldots$，$f(a_{n+1}) = g(a_{n+1})$，可以得出：$f(a_1)-g(a_1) = 0$，$f(a_2)-g(a_2) = 0$，$\ldots$，$f(a_{n+1})-g(a_{n+1}) = 0$。这就是说，$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ 都是多项式 $f(x)-g(x)$ 的根。这就是说：$f(x)-g(x)$

的次数不超过 n 次，却有 $n+1$ 个不同的根。这显然与推论 3 的结论是矛盾的。所以是不可能的。

因此，多项式 $f(x)-g(x)$ 不可能是一个非零多项式，也就是说，$f(x)-g(x)$ 只能是一个零多项式了。即

$$f(x)-g(x)=0$$

因此，$f(x)=g(x)$。

推论 4 告诉我们：只要给出在 x 取 $n+1$ 个不同值时多项式相应的值，就可以唯一确定一个 n 次多项式。

例 5.35 如果当 x 取 $0,1,2$ 时，多项式分别取值 $0,0,1$。试确定一个二次多项式 $f(x)$。

解： $\because \quad f(0)=0, \quad f(1)=0$

$\therefore \quad f(x)$ 一定可被 $x(x-1)$ 整除。

因而，可设 $f(ax)=kx(x-1)$。

又 $\because \quad f(2)=1$，代入上式得

$$1=k\times 2(2-1)$$

$\therefore \quad k=\dfrac{1}{2}$。因此，所求二次式为：

$$f(x)=\frac{1}{2}x(x-1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$$

例 5.36 试求一个三次多项式 $g(x)$，使它满足

$$g(0)=g(1)=0, \quad g(2)=1, \quad g(3)=5$$

解： $\because \quad g(0)=0, \quad g(1)=0$

$\therefore \quad g(x)$ 必含有因式 $x(x-1)$

因而可设所求三次式为：

$$g(x)=x(x-1)(Ax+B) \tag{5.12}$$

又 $\because \quad g(2)=1$ 及 $g(3)=5$，代入 (5.12)，得

$$\begin{cases} 1=2(2-1)(2A+B) \\ 5=3(3-1)(3A+B) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A+2B=1 \\ 18A+6B=5 \end{cases}$$

由此解方程组，可得：$A=\dfrac{1}{3}$，　$B=-\dfrac{1}{6}$。

因此，求得

$$g(x)=x(x-1)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$$

例 5.37　已知 $f(0)=5$，　$f(1)=5$，　$f(-1)=7$，　$f(2)=25$，　$f(-2)=17$。

试求：一个四次多项式 $f(x)$。

说明： 同以上两例一样，用待定系数法求出 $f(x)$。但仔细观察所给条件，我们还可以更简便而巧妙地去解决。

解： 将所给条件可以变形为：

$$\begin{aligned} f(0)-5&=0\\ f(1)-5&=0\\ f(-1)-5&=2\\ f(2)-5&=20\\ f(-2)-5&=12 \end{aligned}$$

因而，我们可以先求出另一个四次多项式 $F(x)$，使 $F(x)=f(x)-5$，当然就符合条件：

$$F(0)=0,\quad F(1)=0,\quad F(-1)=2,\quad F(2)=20,\quad F(-2)=12$$

这时，由推论 2 可设 $F(x)=x(x-1)(ax^2+bx+c)$。将条件 $F(-1)=2$，　$F(2)=20$，　$F(-2)=12$ 分别代入上式，可得：

$$\begin{cases} F(-1)=2=-1(-1-1)(a-b+c),\\ F(2)=20=2(2-1)(4a+2b+c),\\ F(-2)=12=-2(-2-1)(4a-26+c). \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} a-b+c=1\\ 4a+2b+c=10\\ 4a-2b+c=2 \end{cases}$$

解这个方程组，得：$a=1$，　$b=2$，　$c=2$。

因此，$F(x)=x(x-1)(x^2+2x+2)$，即：

$$F(x)=x^4+x^3-2x$$

所以，$f(x)-5=x^4+x^3-2x$，即：

$$f(x)=x^4+x^3-2x+5$$

练习

1. 当 x 取 $0,1,-\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 的值分别为 $-3,0,0$，试求一个二次多项式 $f(x)$。
2. 若 $f(0)=-2$，$f(-2)=0$，$f(1)=12$，试求二次三项式 $f(x)$。
3. 当 y 取 $0,1,2,-1$ 时，三次多项式 $\varphi(y)$ 的值分别为 $0,0,-6,-12$，试求：$\varphi(y)$。
4. 已知 $f(0)=15$，$f(1)=18$，$f(-1)=14$，试求 $f(2)$ 及 $f(-2)$ 的值。

三、余式定理及其推论的应用

对于整数系数多项式 $f(x)$，还可以应用余式定理及其推论分解因式或求它的有理根。

先考察以下例子：

$$6x^2-7x+2=(2x-1)(3x-2);$$
$$6x^3-35x^2+47x-12=(2x-3)(3x-1)(x-4);$$
$$8x^4-24x^3-x+3=(x-3)(2x-1)(4x^2+2x+1).$$

由这几例中，不难看出：整系数多项式分解因式后，各因式的最高次项系数都是原多项式的最高次项系数的因数，且各因式的常数项也都是原多项式的常数项的因数。如：上面第一例中，$2,3$ 都是 6 的因数；$-1,-2$ 都是 2 的因数。而在第二、三两例中，同样有：$2,3,1$ 都是 6 的因数，$-3,-1,-4$ 都是 -12 的因数及 $1,2,4$ 是 8 的因数，$-3,-1,+1$ 是 $+3$ 的因数。

一般地，对一元 n 次整系数多项式来说，同样因为分解后的各因式最高次项（或常数项）的乘积应等于原多项式的最高次项（或常数项）。所以，若 $px+q$ 是整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的因式，那么，p 一定是 a_n 的因数，q 一定是 a_0 的因数。（这里 p、q 是互质的）。

因此，当我们要对一整系数多项式进行因式分解时，就可以先将其可能含有的因式写出，再逐个用余式定理去检验，取真去伪，即可找出此多项式的各个因式。从而达到因式分解。

例 5.38　将 $f(x)=3x^3-4x^2+x+6$ 分解因式。

分析：如果 $f(x)$ 有因式 $px+q$,那么,p 可能取数 ±1;而 q 可能取数 ±1, ±2, ±3, ±6。

若 $p=1$，则因式 $px+q$ 可能为：

$$x\pm1,\quad x\pm2,\quad x\pm3,\quad x\pm6$$

若 $p=-1$，则因式 $px+q$ 又可能为：

$$-(x\mp1),\quad -(x\mp2),\quad -(x\mp3),\quad -(x\mp6)$$

如果把只差一常数倍的因式，看作是相同的，那么，$f(x)$ 的所有因式可能是：

$$x-1,\quad x+1,\quad x-2,\quad x+2,\quad x-3,\quad x+3,\quad x-6,\quad x+6$$

根据余式定理推论 1，我们可以由简单的因式开始，逐个进行判断。从而找出 $f(x)$ 的所有因式来。

解：　$\because\quad f(1)\neq0,\qquad\therefore\quad x-1$ 不是 $f(x)$ 的因式。

$\because\quad f(-1)=0,\qquad\therefore\quad x+1$ 是 $f(x)$ 的因式。

同样，$\because\quad f(2)=0,\qquad\therefore\quad x-2$ 是 $f(x)$ 的因式。

$\because\quad f(3)=0,\qquad\therefore\quad x-3$ 是 $f(x)$ 的因式。

以下不必尝试，$f(x)$ 不会再有一次因式。因此：

$$\begin{aligned}f(x)&=3x^3-4x^2+x+6\\&=(x+1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

应当指出，象例 5.38 中，$f(x)$ 是一个三次式，在找到一个因式 $x+1$ 后，可不必再去试了，只要用综合除法就可将 $f(x)$ 分解了。

$$\begin{array}{rrrr|l}1&-4&1&6&-1\\\cline{5-5}&-1&5&-6&\\\hline1&-5&6&0&\end{array}$$

因此：

$$\begin{aligned}f(x)&=(x+1)(x^2-5x+6)\\&=(x+1)(x-2)(x-3)\end{aligned}$$

例 5.39　将 $f(x)=2x^5-x^4-15x^3+9x^2+16x+4$ 分解因式。

解： $f(x)$ 的因式可能是：$x \pm 1,\quad x \pm 2,\quad x \pm 4,\quad 2x \pm 1$

$\because\quad f(1) = 15 \neq 0,\quad f(-1) = 9 \neq 0$

$\therefore\quad x \pm 1$ 不是 $f(x)$ 的因式。

以下为方便起见，应用综合除法试验，这样一旦确定一个因式，也可写出另一个因式。

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -1 & -15 & +9 & +16 & +4 & 2 \\
 & +4 & +6 & -18 & -18 & -4 & \\
\hline
2 & +3 & -9 & -9 & -2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

因此：

$$f(x) = (x-2)(2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 9x - 2) \tag{5.13}$$

继续将 $2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 9x - 2$ 分解因式，它的因式还可能是：$x \pm 1,\quad x \pm 2,\quad 2x \pm 1$。

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & +3 & -9 & -9 & -2 & 2 \\
 & +4 & +14 & +10 & +2 & \\
\hline
2 & +7 & +5 & +1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

因此：

$$2x^4 + 3x^3 - 9x^2 - 9x - 2 = (x-2)(2x^3 + 7x^2 + 5x + 1) \tag{5.14}$$

再将 $2x^3 + 7x^2 + 5x + 1$ 分解因式，它的因式可能是：$x \pm 1,\quad 2x \pm 1$。

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & +7 & +5 & +1 & -\frac{1}{2} \\
 & -1 & -3 & -1 & \\
\hline
2 & +6 & +2 & \boxed{0} &
\end{array}$$

因此：$2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)(2x^2 + 6x + 2)$，即

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = (2x+1)\left(x^2 + 3x + 1\right) \tag{5.15}$$

在有理数范围内，$x^2 + 3x + 1$ 已不能再分解。

综合 (5.13)、(5.14)、(5.15) 可得：

$$f(x) = (x-2)(x-2)(2x+1)(x^2 + 3x + 1)$$

例 5.40 把 $f(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ 分解因式。

解： 因式 $px+q$ 可能是：$x\pm1$,　$x\pm2$,　$2x\pm1$,　$3x\pm1$,　$3x\pm2$,　$6x\pm1$

逐个试除，可得：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
6 & +5 & +3 & -3 & -2 & -\frac{1}{2} \\
 & -3 & -1 & -1 & +2 & \\
\hline
6 & +2 & +2 & -4 & \boxed{0} & \frac{2}{3} \\
 & +4 & +4 & +4 & & \\
\hline
6 & +6 & +6 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

因此：$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)(6x^2+6x+6)$ 即：

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)$$

在我们进行因式分解时，不难看出，若 $f(x)$ 含有因式 $px+q$，则一定有 $f\left(-\dfrac{q}{p}\right)=0$，因而，$x=-\dfrac{q}{p}$ 必然是 $f(x)$ 的有理数根，如：

$$f(x)=(2x+1)(3x-2)(x^2+x+1)$$

$\therefore$　$f(x)$ 的有理根就是：$x_1=-\dfrac{1}{2}$,　$x_2=\dfrac{2}{3}$。

例 5.41　求方程 $2x^4+x^3+12=17x^2+16x$ 的有理数根。

解： 原方程变形为：$2x^4+x^3-17x^2-16x+12=0$

方程左边的多项式，可能有因式：$x\pm1$,　$x\pm2$,　$x\pm3$,　$x\pm4$,　$x\pm6$,　$2x\pm1$,　$2x\pm3$ 因而，此方程的有理根可能是：

$$x=\pm1,\quad x=\pm2,\quad x=\pm3,\quad x=\pm4,\quad x=\pm6,\quad x=\pm\frac{1}{2},\quad x=\pm\frac{3}{2}$$

逐个去进行试除，即可找到方程的根。

$$\begin{array}{rrrrr|l}
+2 & +1 & -17 & -16 & +12 & -2 \\
 & -4 & +6 & +22 & -12 & \\
\hline
2 & -3 & -11 & +6 & \boxed{0} & -2 \\
 & -4 & +14 & -6 & & \\
\hline
2 & -7 & +3 & \boxed{0} & & 3 \\
 & +6 & -3 & & & \\
\hline
2 & -1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

因此：$(x+2)(x+2)(x-3)(2x-1)=0$，原方程的有理根是：

$$x_1=x_2=-2, \qquad x_3=3, \qquad x_4=\frac{1}{2}$$

练习

1. 分解因式：

   (a) x^3-7x+6

   (b) $x^3+6x^2+11x+6$

   (c) x^4-2x^2+3x-2

   (d) $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$

   (e) $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$

   (f) $3x^5-3x^4-13x^3-11x^2-10x-6$

2. 求下列多项式或方程的有理根。

   (a) $x^3-5x^2-2x+24=0$

   (b) $2x^4-5x^3+3x^2+4x-6$

   (c) $12x^4-20x^3-11x^2+5x+2=0$

   (d) $16x^4-24x^2+16x-3$

四、根与系数的关系

在本章第一节因式分解中，我们已经知道：当 $b^2-4ac\geq 0$ 时，二次三项式 $ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ 利用配方法可以分解为 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ 的形式。其中

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

正好是这个二次三项式的两个实根。

由此，我们进一步可以探讨“根与系数”之间存在的内在关系：

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a(x-x_1)(x-x_2) \\ &= ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1\cdot x_2 \end{aligned}$$

比较上边等式两边同类项的系数，得

$$b=-a(x_1+x_2), \qquad c=ax_1\cdot x_2$$

$$\therefore \quad x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

这就是说：

> 二次三项式 $ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$(或一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$)，如果有两个实根 x_1、x_2，那么，这两个根与系数间一定有关系式：
>
> $$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

这就启发我们去考虑：一元 n 次多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$ 的根与系数之间有什么关系呢？不妨以一元三次多项式（或方程）为例，我们作以下分析：

设三次多项式 $ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ 有三个根 x_1,x_2,x_3。由余式定理推论 2 可知：

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

即：

$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d=ax^3&-a(x_1+x_2+x_3)x^2\\&+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-ax_1x_2x_3\end{aligned}$$

比较等式两边同类项的系数，得：

$$\begin{aligned}&a=a\\&b=-a(x_1+x_2+x_3)\\&c=a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\&d=-ax_1\cdot x_2\cdot x_3\end{aligned}$$

因此，可得出根与系数的关系如下：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}\\x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=+\dfrac{c}{a}\\x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a}\end{cases}$$

这就是说，一元三次多项式的三个根之和等于二次项系数除以首项系数的相反数；三个根两两乘积的和等于一次项系数除以首项系数；三个根之积等于常数项除以首项系数的相反数。

以上这种关系，可以类似地推广到一元 n 次多项式的情形。这就是韦达定理的内容。

韦达定理

设一元 n 次多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0 \quad (a_n\neq 0)$$

有 n 个根 $x_1,x_2,\ldots,x_n$。那么，这 n 个根与系数之间有以下关系：

- n 个根之和 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 等于 x^{n-1} 的系数除以首项系数的相反数，即：$-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$；
- n 个根的所有两两乘积之和 $(x_1x_2+\cdots+x_{n-1}x_n)$ 等于 x^{n-2} 的系数除以首项系数，即：$\dfrac{a_{n-2}}{a_n}$；
- n 个根的所有三个根乘积之和 $(x_1x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$ 等于 x^{n-3} 的系数除以首项系数的相反数，即：$-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$；
- ⋯⋯⋯⋯
- n 个根的所有 $(n-1)$ 个根乘积之和 $(x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_2x_3\cdots x_n)$ 等于 x 的系数除以首项系数再乘以 $(-1)^{n-1}$，即：$(-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$；
- n 个根的乘积 $x_1x_2\cdots x_n$ 就等于常数项除以首项系数再乘以 $(-1)^n$，即：$(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}$。

如果应用韦达定理，我们就可以把一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$ 即 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ 写成以下形式：

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

其中，x_1、x_2 是一元二次方程的两个根。

同样，一元三次方程，也可以写成：

$$x^3-(x1+x2+x3)x+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1\cdot x_2\cdot x_3=0$$

这样一来，如果已知方程的根，就可以反求出这个方程。

例 5.42 如果一个三次方程的根是 1, 2, 3，试求这个三次方程。

解： 由于：

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 1+2+3=6 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 &= 2+3+6=11 \\ x_1x_2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

由韦达定理可知所求三次方程为：

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

例 5.43 如果方程 $x^3-12x^2+44x+k=0$ 的三个根为：$a-d,\ a,\ a+d$。试求这个方程的根及 k 值。

解： 由韦达定理可知：

$$(a-d)+a+(a+d)=12 \tag{5.16}$$

$$a(a-d)+(a-d)(a+d)+a(a+d)=44 \tag{5.17}$$

$$(a-d)\cdot a\cdot(a+d)=-k \tag{5.18}$$

解 (5.16) 可得：$a=4$；代入 (5.17) 又可解出：$d=\pm2$。

$\therefore$　方程的三个根为：2,　4,　6

由 (5.18) 可求出：$k=-48$。

例 5.44 试作一个一元二次方程，使它的根正好是方程 $x^2-x-6=0$ 的二根的倒数。

解： 设 $x^2-x-6=0$ 的两根为 α,β。则由题意，所求一元二次方程的根就应该是 $\dfrac{1}{\alpha},\dfrac{1}{\beta}$。

又由韦达定理知：$\alpha+\beta=1$,　$\alpha\beta=-6$，因此：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta} &= \frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{6} \end{aligned}$$

所以，所求的方程是：$x^2+\dfrac{1}{6}x-\dfrac{1}{6}=0$，即：

$$6x^2+x-1=0$$

练习

1. 已知方程的根，求作方程：

   (a) -2, 5;

   (b) -1, 0, 1;

   (c) 2, 3, 4, 5.

2. 试作一个一元二次方程。使它的二根分别是方程 $x^2-12x+32=0$ 的二根的平方。

例 5.45 不解方程，试求方程 $2x^2-x-15=0$ 的根的平方和与立方和。

解： 设 $2x^2-x-15=0$ 的二根为 x_1,x_2，则由韦达定理知：$x_1+x_2=\frac{1}{2}$，$x_1x_2=-\frac{15}{2}$。

因此：

$$\begin{aligned}
x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\
&=\frac{1}{4}-2\times\left(-\frac{15}{2}\right)=15\frac{1}{4}\\
x_1^3+x_2^3&=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)\\
&=\frac{1}{8}-3\times\left(-\frac{15}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\
&=\frac{1}{8}+\frac{45}{4}=\frac{91}{8}=11\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

例 5.46 不解方程，试求 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 的根的平方和。

解： 设 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 的四个根是 x_1,x_2,x_3,x_4。则由韦达定理得：

$$\begin{cases}
x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\
x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=2\\
x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4+x_1x_3x_4=-1\\
x_1x_2x_3x_4=1
\end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned}
&x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\\
=&(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)\\
=&(-1)^2-2\times 2=-3
\end{aligned}$$

例 5.47 如果方程 $x^2+3x+m=0$ 的两根差是 5，求 m 值及两根。

解： 设两根为 x_1,x_2，由韦达定理及题意，得

$$\begin{cases} x_1+x_2=-3 \\ x_1-x_2=5 \end{cases}$$

解方程组可得：$x_1=1$，　$x_2=-4$

因此：$m=x_1\cdot x_2=-4$。

练习

1. 已知方程 $x^2-4x-12=0$ 的一根为 -2，求另一根。
2. 不解方程，求出 $3x^2-4x-15=0$ 的两根的平方和及平方差。
3. 方程 $x^2+px+45=0$ 的两根差的平方是 144，求 p 值。

习题 5.2

1. 用余式定理求下列各题的余数：
   (a) $f(x)=3x^4-2x^3+5x^2-4x+3$ 除以 $x-1$
   (b) $f(x)=2x^3+3x^2-5x+1$ 除以 $x+2$
   (c) $g(x)=9x^3-3x^2+6x-15$ 除以 $x+\dfrac{1}{3}$
   (d) $g(x)=x^4+x-1$ 除以 $2x-1$
   (e) $\varphi(x)=x^5-x^4+2x^3+x^2-x-2$ 除以 $5x+3$
2. 用综合除法求值：
   (a) $f(x)=2x^4+7x^3-14x^2+6x+7$。求：$f(-5)$。
   (b) $g(x)=6x^4+8x^3-5x^2+7x-3$。求：$g\left(\dfrac{2}{3}\right)$ 的值。
3. 不作除法，证明：
   (a) $(x-1)^3-2(x-1)^2+3(x-1)-6$ 能被 $x-3$ 整除。
   (b) $a^3+a^2b-3ab^2+b^3$ 能被 $a-b$ 整除。
4. 证明：若 n 是奇数时，$x+y$ 是 x^n+y^n 的因式；若 n 是偶数时，$x+y$ 不是 x^n+y^n 的因式。

5. 证明：$x^6-2x^5-4x^4+3x^3-3x^2+11x-6$ 能被 x^2-x-6 整除。

6. 证明：$f(x)=x^3-4x^2+x+6$ 必有因式 $(x-2)(x+1)$。

7. 如果 $x^4+3x^3+4x^2+ax+11$ 能被 $x+1$ 整除，试求 a 的值。

8. 当 a 为何值时：

   (a) $f(x)=2x^4-3x^3+11x^2-x+a$ 除以 $x+2$ 能余 3?

   (b) $g(x)=x^3-3x^2+5x+a$ 除以 $x-1$ 能余 4?

   (c) $\varphi(x)=2x^3-3x^2+ax-6$ 除以 $2x-4$ 能余 6?

9. 若用 $x+1$ 及 $x-1$ 去除多项式 $2x^3-3x^2-ax-b$ 分别余 7 及 5。试求 a,b 的值。

10. 已知：$f(x)=x^3-6x^2+mx+n$ 能被 x^2-4x+3 整除，试求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$。

11. 如果 $g(x)=ax^2+bx+c$ 能被 $x+1$ 整除，而且被 $x-2$ 与 $x+2$ 除时分别余 2 与 -3，试求这个多项式 $g(x)$。

12. 如果一个二次三项式 $g(x)$ 的两根为 1 和 2，且 $g(3)=4$，试求出这个三项式 $g(x)$。

13. 求一个一元三次多项式 $f(x)$，使 $f(1)=f(-1)=f(2)=0$，且 $f(-2)=-12$。

14. 当 x 取 $-1,0,2$ 时，二次三项式 $\varphi(x)$ 分别取值 $-6,1,-3$。试求此三项式 $\varphi(x)$。

15. 如果 $f(0)=10$, $f(1)=14$, $f(-1)=10$, 以及 $f(-2)=8$，试求一个三次多项式 $f(x)$。

16. 求下列整系数方程的有理根。

   (a) $x^3-4x^2+x+6=0$

   (b) $x^3-8x^2+13x-6=0$

   (c) $9x^2-13x+6=0$

   (d) $x^4-7x^3+5x^2+7x-6=0$

   (e) $x^4+5x^3+8x^2+x-15=0$

   (f) $x^5+2x^4+2x^3+4x^2+5x+2=0$

17. 若方程 $(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0$ 有一个根是 1，试求它的另一根。

18. 若方程 $x^2+3x+m=0$ 的一根是另一根的 2 倍，求 m 的值。

19. 方程 $x^3-px^2+11x-6=0$ 的三个根的平方和等于 14。试求 p 的值。

20. 求作一个方程，使它的根是：

(a) $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{4}{3}$　　(b) $\frac{1}{5}$ 和 $-\frac{1}{5}$ 和 1

21. 求作一个三次方程，使它的根分别是方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的根的倒数。

22. 如果设 α,β,γ 是 $x^3+x^2-2x+3=0$ 的根，试作出根是 $y_1=\beta\gamma, y_2=\alpha\gamma$, $y_3=\alpha\beta$ 的新的三次方程。

23. 已知 $2x^2-6x+8=0$ 的三根是 α,β,γ。试求以下各式的值：

(a) $(\alpha+\beta+\gamma)^2$　　(c) $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$

(b) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$　　(d) $\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\beta^2$

24. 证明 $f(x)=2x^2+8x+9$ 除以 $(x-m)$，所得的余数都是正数。

25. 如果 $f(a)=1$，试求 $x^2\cdot f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余数。

26. $f(2)=2$、$f(-3)=4$, 求 $f(x)$ 除以 x^2+x-6 的余式。

第三节　辗转相除法

一、公因式与最高公因式

在小学算术中，我们已经知道：如果一个整数 c，同时是整数 a 和 b 的约数，那么，c 就叫做 a、b 的公约数（公因数）。例如：3 就是 12 和 18 的公约数。当然，两个整数的公约数还可以有许多，如：$\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ 都是 12 和 18 的公约数（公因数）。

两个数 a、b 的公约数中，最大的一个 d，叫做这两个数的最大公约数。记作 $(a,b)=d$。例如：$(12,18)=6$。

如果两个数 a、b 的最大公约数 $(a,b)=1$，那么，我们称 a、b 是两个互质的数，例如：

$$\because\quad (3,5)=1,\qquad \therefore\quad 3 \text{ 与 } 5 \text{ 是互质的}$$

要求两个数的最大公约数，只要将它们分解为质因数，选出它们所有的公约数的最低次方连乘即可。

例如，求 $(168, 756)$

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 168 & 756 \\ \hline
2 & 84 & 378 \\ \hline
3 & 42 & 189 \\ \hline
7 & 14 & 63 \\ \hline
 & 2 & 9
\end{array}
$$

$$\therefore \quad (168, 756) = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$

对于多项式，我们有类似的概念：如果一个多项式 $h(x)$，同时是两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的因式，那么，$h(x)$ 就叫做 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**公因式**。例如：$x-1$ 就是 x^2-1 和 x^3-1 的公因式。两个多项式的公因式可以有许多，如 $x-1$, $x+1$, x^2-1 都是 x^2-1, x^4+x^3-x-1 的公因式。特别注意，任何一个非零数（即零次多项式），都是 x^2-1, x^4+x^3-x-1 的公因式。

在两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的所有公因式中，次数最高的公因式 $d(x)$，就叫做这两个多项式的**最高公因式**，记作：$(f(x), g(x)) = d(x)$。

例如：$f(x) = 6x^4-6x^2 = 6x^2(x+1)(x-1)$, $g(x) = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$

因而可知：1, 3, 任一非零数 a, $x+1$, $x-1$, $2x+2$, ……以及 $x^2-1 = (x+1)(x-1)$, $5x^2-5 = 5(x+1)(x-1)$, ……都是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式。这里也可以看出：公因式中，次数最高的也不只一个：$x^2-1, 5x^2-5$, $\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}$ 等都是 $f(x), g(x)$ 的最高公因式。

但注意：这些最高公因式之间，只是相差一个常数倍（零次多项式），因此，我们约定：**在求两个多项式的最高公因式时，零次公因式（常数）不必考虑，只要各非零次项系数化为最简即可**。如在上例中，

$$(f(x), g(x)) = (x+1)(x-1) = x^2-1$$

例 5.48 求 $\varphi(x) = 4x^2+4x+1$ 与 $R(x) = 8x^3+12x^2+6x+1$ 的最高公因式。

解： 由于：

$$\varphi(x) = 4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$$
$$R(x) = 8x^3+12x^2+6x+1 = (2x+1)^3$$

$$\therefore \quad (\varphi(x), R(x)) = (2x+1)^2$$

例 5.49 求 $f(x)=2x^5y^2-12x^4y^3+18x^3y^4$ 与 $g(x)=4x^4y-36x^2y^3$ 的最高公因式。

解: 由于:

$$f(x)=2x^3y^2(x^2-6xy+9y^2)=2x^3y^2(x-3y)^2$$
$$g(x)=4x^2y(x^2-9y^2)=4x^2y(x+3y)(x-3y)$$

且 $\because$ 最高公因式不考虑零次式

$\therefore$ $(f(x),g(x))=x^2y(x-3y)$

由例 5.48、例 5.49 可见，求两个多项式的最高公因式，只要先分解因式，选各公因式的最低次方连乘即可。

如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除了只有零次公因式外，再没有其它公因式。也就是说：它们的最高公因式是 1(零次多项式)，我们就称这两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是互质的（又称既约的）。如：

$\because$ $\big(2(x^2-1),4(x^2+1)\big)=1$

$\therefore$ 多项式 $2(x^2-1)$ 与 $4(x^2+1)$ 是互质的。

练习

1. 求下列各组数的最大公约数：

   135，105；　　330，825，1485

2. 求下列各组多项式的最高公因式：

   (a) $12x^3y^2z^3,\qquad 18x^2y^4z^2,\qquad 30x^4yz^3$
   (b) $(a+b)^2(a-b),\qquad (a+b)(a-b)^2,\qquad a^3b-ab^3$
   (c) $x^2-1,\qquad x^2+2x+1,\qquad x^3+1$
   (d) $y^2+5y+6,\qquad y^2+y-2,\qquad y^2-14y-32$
   (e) $x^2+6x+9,\qquad (x^3+3x^2+3x+9)(x+3)$

二、辗转相除法求最大公约数

为了寻求求最高公因式的可行普遍算法，我们还是先来研究一下“如何求两个较大数目的最大公约数”？如：求 $(3887,2231)=?$

当然，我们仍然可分解质因数，选出公约数，进而求出最大公约数来。但未免太繁。我们现在试图要通过分析，对任两个较大数 a,b 找出一个求最大公

约数的可行的算法——辗转相除法。

分析： 因数分解可以看作是乘法的一种倒算。所以，因数分解与除法有着密切关系。

设数 $a > b$。我们可以用 b 去除 a，得到一个商数 q_1，和余数 r_1，使得:

$$a = q_1 \cdot b + r_1, \qquad \text{其中: } 0 \le r_1 < b$$

这时就有以下事实:

1. 当余数 $r_1 = 0$ 时，由 $a = q_1 \cdot b$ 可知:

$$(a, b) = b$$

如：由 $36 = 3 \times 12$，可以看出 $(36, 12) = 12$。

2. 当余数 $r_1 \neq 0$ 时，由 $a = q_1 \cdot b + r_1$，可知；任何能同时整除 b, r_1 的数，一定可以整除 a。即，所有 b, r_1 的公约数，一定也是 a, b 的公约数。

又由于 $r_1 = a + (-q_1) \cdot b$，所以，任何能同时整除 a, b 的数，也一定可以整除 b, r_1。即：所有 a, b 的公约数，也一定是 b, r_1 的公约数。

这就证明了，a, b 的公约数集合与 b, r_1 的公约数集合是相等的。因而:

$$(a, b) = (b, r_1)$$

例如：由于 $60 = 2 \times 24 + 12$ 及 $12 = 60 + (-2) \times 24$，因此就有 $(60, 24) = (24, 12)$。

所以，当 $r_1 \neq 0$ 时，我们可以把求 a, b 的最大公约数化为求较小的数 b, r_1 的最大公约数。

如果还嫌 b, r_1 数目太大，当然还可以重复以上的做法，用 r，除 b，得商 q_2，余 r_2，因而就又有:

$$b = q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < r_1$$

这时，若 $r_2 = 0$，则 $(b, r_1) = r_1$；从而 $(a, b) = (b, r_1) = r_1$。

若 $r_2 \neq 0$，则与前边做法同理就有 $(b, r_1) = (r_1, r_2)$；从而 $(a, b) = (b, r_2) = (r_1, r_2)$。其中 r_1, r_2 又比 b, r_1 要小了。

这样逐步重复地用除法把所要求最大公约数的一对数，换成愈来愈小的另一对数。最后自然可以求得 a, b 的最大公约数了。

这种方法，叫做**辗转相除法**。

例 5.50 求 $(187, 442)$

解： $\because \quad 442 > 187,$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 187\,\overline{)\,442} \\ 374 \\ \hline 68 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 51\,\overline{)\,68} \\ 51 \\ \hline 17 \end{array}$$

$\therefore\quad 442 = 2 \times 187 + 68,$
其中：$(187, 442) = (187, 68)$

$\therefore\quad 68 = 1 \times 51 + 17,$
其中：$(68, 51) = (51, 17)$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 68\,\overline{)\,187} \\ 136 \\ \hline 51 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 3 \\ 17\,\overline{)\,51} \\ 51 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore\quad 187 = 2 \times 68 + 51,$
其中：$(187, 68) = (68, 51)$

$\therefore\quad 51 = 3 \times 17,$
得出：$(51, 17) = 17$

将上述过程倒回去，就有：

$$17 = (51, 17) = (68, 51) = (187, 68) = (187, 442)$$

$\therefore\quad (187, 442) = 17$

在今后的实际计算中，当然不必象上面这样繁杂。只要特别注意：**辗转相除到最后能够整除时，它前一个余数就是所求的最大公约数**，因此，可以将上边的过程简写成如下格式：

$$\begin{array}{r|r|r|l} 2 & 187 & 442 & 2 \\ & 136 & 374 & \\ \cline{2-3} 3 & 51 & 68 & 1 \\ & 51 & 51 & \\ \cline{2-3} & 0 & \boxed{17} & \end{array}$$

$\therefore\quad (187, 442) = 17$

例 5.51　求 $(3887, 2231)$。

解：

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1 & 2231 & 3887 & 1 \\
 & 1656 & 2231 & \\
\cline{2-3}
1 & 575 & 1656 & 2 \\
 & 506 & 1150 & \\
\cline{2-3}
3 & 69 & 506 & 7 \\
 & 69 & 483 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & \boxed{23} &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad (3887, 2231) = 23$$

例 5.52 求 $(1547, 3135)$。

解:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
37 & 1547 & 3135 & 2 \\
 & 1517 & 3094 & \\
\cline{2-3}
2 & 30 & 41 & 1 \\
 & 22 & 30 & \\
\cline{2-3}
2 & 8 & 11 & 1 \\
 & 6 & 8 & \\
\cline{2-3}
2 & 2 & 3 & 1 \\
 & 2 & 2 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & \boxed{1} &
\end{array}
$$

$\therefore \quad (1547, 3135) = 1$ 可见，1547 与 3135 是互质的。

例 5.53 求 $(435, 783, 928)$

解:

$$
\begin{array}{r|c|r|l}
1 & 435 & 783 & 1 \\
 & 348 & 435 & \\
\cline{2-3}
 & \boxed{87} & 348 & 4 \\
 & & 348 & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|c|r|l}
1 & 435 & 928 & 10 \\
 & 348 & 870 & \\
\cline{2-3}
 & \boxed{29} & 58 & 2 \\
 & & 58 & \\
\cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$\because \quad (435, 783) = 87; \quad (87, 928) = 29$$

$$\therefore \quad (435, 783, 928) = 29$$

练习

用辗转相除法，求最大公约数：

1. (207，1840)
2. (429，1848)
3. (51425，13310)
4. (629，259，1073)
5. (5688，4977，6636)

三、辗转相除法求最高公因式

仿照前面求几个数的最大公约数的方法，同样地可以求几个一元多项式的最高公因式。只要把整数除法换成一元多项式除法即可。

设一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$，如果 $f(x)$ 的次数高于 $g(x)$ 的次数。那么就用 $g(x)$ 去除 $f(x)$，得商 $q_1(x)$，余 $r_1(x)$。因而有：

$$f(x)=q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x)$$

其中：$r_1(x)$ 的次数低于 $g(x)$ 的次数，或为 0。

所以，可得以下事实：

1. 如果 $r_1(x)=0$，那么 $f(x)=q_1(x)\cdot g(x)$，这时必有：$(f(x),g(x))=g(x)$。如：

   由 $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$，$\therefore\quad(x^3-1,x-1)=x-1$。

2. 如果 $r_1(x)\neq 0$，那么由 $f(x)=q_1(x)\cdot g(x)+r_1(x)$ 与 $r_1(x)=f(x)-q_1(x)\cdot g(x)$ 可以知道：

   $$(f(x),g(x))=(g(x),r_1(x))$$

   这就是说：求 $(f(x),g(x))$ 的问题，可以换成求次数较低的多项式 $g(x)$ 与 $r_1(x)$ 的最高公因式问题。

假如还嫌 $g(x)$ 与 $r_1(x)$ 的次数高，不易求得最高公因式，就可重复以上步骤，用 $r_1(x)$ 去除 $g(x)$，得到商式 $q_2(x)$ 与余式 $r_2(x)$，且有

$$g(x)=q_2(x)\cdot r_1(x)+r_2(x)$$

其中，$r_2(x)$ 的次数又比 $r_1(x)$ 的次数低，或等于 0。

这时,若 $r_2(x)=0$,则 $(g(x),r_1(x))=r_1(x)$,从而 $(f(x),g(x))=(g(x),r_1(x))=r_1(x)$。

若 $r_2(x)\neq 0$，则与前边同理可有:

$$(r_1(x),r_2(x))=(g(x),r_1(x))$$

从而就应有:

$$(f(x),g(x))=(g(x),r_1(x))=(r_1(x),r_2(x))$$

这里 $r_2(x)$ 的次数又比 $g(x)$, $r_1(x)$ 的次数低了。

这样逐步地运用除法，就可以把所求两个多项式的最高公因式问题，转换成求两个次数较低的多项式的最高公因式问题。直到最后，自然就会求得 $(f(x),g(x))$。

这种方法，同样叫**辗转相除法**。

例 5.54 如果 $f(x)=x^4+x^3-2$, $g(x)=x^3-1$，试求 $(f(x),g(x))$。

解: 先求 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商及余:

$$
\begin{array}{r|r}
 & x+1 \\ \cline{2-2}
x^3-1 & x^4+x^3\qquad-2 \\
 & -x^4\qquad+x\quad \\ \cline{2-2}
 & x^3+x-2 \\
 & -x^3\qquad+1 \\ \cline{2-2}
 & x-1
\end{array}
$$

$\therefore\quad f(x)=(x+1)\cdot g(x)+(x+1)$，并且 $(f(x),g(x))=(g(x),(x-1))$。

再求 $g(x)$ 除以 $x-1$ 的商及余。

$$
\begin{array}{r|r}
 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
x-1 & x^3\qquad\qquad-1 \\
 & -x^3+x^2\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & x^2\qquad\quad \\
 & -x^2+x\quad \\ \cline{2-2}
 & x-1 \\
 & -x+1 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore\quad g(x)=(x^2+x+1)(x-1)$，并且 $(g(x),x-1)=x-1$。

所以:$(f(x),g(x))=(g(x),(x-1))=x-1$，即:$(f(x),g(x))=x-1$。

今后，在计算中，也不必象上面那样繁杂，可以采用以下分离系数的简便格式：

$$\begin{array}{r|r|r|l}
1+1+1 & 1+0+0\quad -1 & 1+1+0+0-2 & 1+1\\
 & 1-1\qquad\qquad & 1+0+0-1\quad & \\ \cline{2-3}
 & 1+0\quad -1 & 1+0+1-2 & \\
 & 1-1\qquad\quad & 1+0+0-1 & \\ \cline{2-3}
 & 1-1 & \boxed{1-1} & \\
 & 1-1 & & \\ \cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}$$

$\therefore \quad (f(x),g(x))=x-1$

例 5.55 已知 $\varphi(x)=x^6+3x^4+3x^2+1$，$R(x)=x^5+3x^3+x^2+2x+1$。

求：$(\varphi(x),R(x))$。

解：

$$\begin{array}{r|r|r|l}
-1-1-3 & 1+0+3+1+2+1 & 1+0+3+0+3+0+1 & 1\\
 & 1-1+1-1\qquad\quad & 1+0+3+1+2+1\quad & \\ \cline{2-3}
 & 1+2+2+2+1 & -1+1-1+1 & \\
 & 1-1+1-1\quad & -1+0-1 & -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ \cline{2-3}
 & 3+1+3+1 & 1+0+1 & \\
 & 3-3+3-3 & 1+0+1 & \\ \cline{2-3}
 & 4+0+4 & 0 &
\end{array}$$

$\therefore \quad (\varphi(x),R(x))=4x^2+4$，若不计零次因式，则可得：

$$(\varphi(x),R(x))=x^2+1$$

正由于最高公因式可以不计零次多项式的因式，所以，在辗转相除的过程中，为使运算简便，**可以将除式或被除式的各项同乘（或除）以一个非零数**。如例 5.55 可以这样做：

$1+1+3$	$1+0+3+1+2+1$	$1+0+3+0+3+0+1$	1
	$1-1+1-1$	$1+0+3+1+2+1$	
	$1+2+2+2+1$	(乘以 -1) $-1+1-1+1$	$1-1$
	$1-1+1-1$	$1-1+1-1$	
	$3+1+3+1$	$1+0+1$	
	$3-3+3-3$	$-1+0-1$	
	(除以 4) $4+0+4$	$-1+0-1$	
	$\boxed{1+0+1}$	0	

$$\therefore \quad (\varphi(x), R(x)) = x^2+1$$

注意：用分离系数写出辗转相除的格式时，一定要按未知数的降次标准形式将除式、被除式排好，缺项补上 0。同时，要特别注意：辗转相除到能够整除时，前一步的余式，就是所求的最高公因式。

例 5.56 求 $f(x)=x^5+1$ 与 $g(x)=x^3+3x^2+3x+1$ 的最高公因式。

解：

(乘以 2)	$1+3+3+1$	$1+0+0+0+0+1$	$1-3+6$
	$2+6+6+2$	$1+3+3+1$	
$1+\dfrac{3}{2}$	$2+3+1$	$-3-3-1+0+1$	
	$3+5+2$	$-3-9-9-3$	
	$3+\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}$	$6+8+3+1$	
		$6+18+18+6$	
(乘以 2)	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}$	$-10-15-5$	(除以 -5)
	$\boxed{1+1}$	$2+3+1$	$2+1$
		$2+2$	
		$1+1$	
		$1+1$	
		0	

$$\therefore \quad (f(x), g(x)) = x+1$$

例 5.57 求 (x^3+x^2+2x+3, x^2+x+1)

解：同样用辗转相除法：

$1-2$	$1+1+1$	$1+1+2+3$	1
	$1+3$	$1+1+1$	
	$-2+1$	$1+3$	$1+3$
	$-2-6$	$1+3$	
(乘以 $\frac{1}{7}$)	7	0	
	$\boxed{1}$		

$\therefore\quad (x^2+x+1, x^3+x^2+2x+3)=1$ 即：x^2+x+1 与 x^3+x^2+2x+3 是互质的。

如果要求两个以上多项式 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ 的最高公因式时，只要先求 $(f_1(x), f_2(x)) = d_1(x)$，再求 $(d_1(x), f_3(x)) = d_2(x)$，再求 $(d_2(x), f_4(x)) = d_3(x), \ldots$，这样依次求下去，即可求得：

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x), \ldots)$$

例 5.58 求 $f_1(x)=x^4+x^3-x^2+x-2$，$f_2(x)=2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$，$f_3(x)=3x^4-x^3-x^2-1$，$f_4(x)=x^2-1$ 的最高公因式。

说明： 在这里，除两两求最高公因式的方法外，也可以先求 $(f_1(x), f_2(x)) = d_1(x)$，再求 $(f_3(x), f_4(x)) = d_2(x)$，最后求 $(d_1(x), d_2(x)) = d(x)$，从而求得：

$$(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)) = d(x)$$

解：

$1+1$	$1+1-1+1-2$	$2+5-2-7+2$	2
	$1+0-3+2$	$2+2-2+2-4$	
	$1+2-1-2$	$3+0-9+6$	
	$1+0-3+2$	$1+0-3+2$	$1-1$
	$2+2-4$	$1+1-2$	
	$\boxed{1+1-2}$	$-1-1+2$	
		$-1-1+2$	
		0	

$\therefore\quad (f_1(x), f_2(x)) = x^2+x-2 = d_1(x)$

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
-1-1 & 1+0-1 & 3-1-1+0-1 & 3-1+2 \\
 & 1-1 & 3+0-3 & \\
\hline
 & 1-1 & -1+2+0-1 & \\
 & 1-1 & -1+0+1 & \\
\cline{2-3}
 & 0 & 2-1-1 & \\
 & & 2+0-2 & \\
\cline{3-3}
 & & -1+1 & \\
 & & \boxed{1-1} & (\text{乘以 } -1)
\end{array}
$$

$\therefore \quad (f_3(x), f_4(x)) = x-1 = d_2(x)$

显然，$(d_1(x), d_2(x)) = (x^2+x-2, x-1) = x-1$,

$\therefore \quad (f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x)) = x-1$

练习

用辗转相除法求最高公因式

1. $f(x) = x^3-2x^2-2x-3, \qquad g(x) = 2x^3+x^2+x-1$
2. $g(x) = x^4+3x^3+2x^2+3x+1, \qquad f(x) = 2x^3+5x^2-x-1$
3. $f(x) = x^5-2x^3+9x^2-5x+3, \qquad g(x) = x^3-x^2+5x-3$
4. 求 $(6x^4-6x^2,\ 3x^2-3,\ 8x^8-8x^4,\ 7x^7-7x^3)$
5. $f(x) = x^4-2x^3-4x^2+4x-3, \qquad g(x) = 2x^3-5x^2-4x+3,$ $\varphi(x) = x^2-9$

四、公倍式与最低公倍式

还是先从小学算术中所学的公倍数和最小公倍数复习开始：

如果一个整数 c，同时是数 a 和 b 的倍数，那么 c 就叫 a、b 的公倍数。而两个数的公倍数中，最小的一个正整数，叫做这两个数的**最小公倍数**。记作 $[a, b]$。例如：4 和 6 的公倍数有：$\pm12, \pm24, \pm36, \ldots$，但是，其中最小的一个正整数是 12，因此，$[4, 6] = 12$。

在小学算术中，也学习了用分解质因数的方法求最小公倍数。

例 5.59　求 $[180, 240]$

解：

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 180 & 240 \\ \hline 3 & 36 & 48 \\ \hline 4 & 12 & 16 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

$\therefore\quad [180,240]=5\times3\times3\times4\times4=720$

这里我们也可知：$(180,240)=5\times3\times4=60$。不难看出：

$$(180,240)\cdot[180,240]=180\times240$$

一般地，对任意两正整数 a,b 都有：

$$(a,b)\cdot[a,b]=a\cdot b$$

由此，我们还可以用辗转相除先求出 (a,b), 进而求出 $[a,b]=\dfrac{a\times b}{(a,b)}$。

例 5.60 求 [6731, 2809]

解：

$$\begin{array}{r|r|r|l} 2 & 2809 & 6731 & 2 \\ & 2226 & 5618 & \\ \cline{2-3} 1 & 583 & 1113 & 1 \\ & 530 & 583 & \\ \cline{2-3} & \boxed{53} & 530 & 10 \\ & & 530 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$

$\therefore\quad (6731,2809)=53$

因此，$[6731,\ 2809]=\dfrac{6731\times2809}{53}=356743$

例 5.61 求 [513, 135, 3114]。

解：

$$\begin{array}{r|r|r|l} 1 & 135 & 513 & 3 \\ & 108 & 405 & \\ \cline{2-3} & \boxed{27} & 108 & 4 \\ & & 108 & \\ \cline{3-3} & & 0 & \end{array}$$

$\therefore \quad (513,\ 135) = 27$

$\therefore \quad [513,\ 135] = \dfrac{513 \times 135}{27} = 2565$

4	2565	3114	1
	2196	2565	
2	369	549	1
	360	369	
	$\boxed{9}$	180	20
		180	
		0	

$\therefore \quad (2565,\ 3114) = 9$

$\therefore \quad [2565,\ 3114] = \dfrac{2565 \times 3114}{9} = 887490$

因而，$[513,\ 135,\ 3114] = 887490$

对于多项式，同样可以讨论它们的公倍式与最低公倍式。

如果多项式 $\ell(x)$ 同时是多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的倍式，那么，$\ell(x)$ 就叫做它们的公倍式。而其中次数最低的公倍式，叫做**最低公倍式**。记作：$[f(x), g(x)]$。

例如：$x+1$ 与 $x-1$ 的公倍式有：x^2-1, $2x^2-2$, $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}$, $x(x^2-1)$, $(x^2+1)(x^2-1), \ldots$。

通常所求多项式的最低公倍式，同样不考虑零次式因式的差别。因而 x^2-1, $2x^2-2$, $\dfrac{1}{3}x^2-\dfrac{1}{3}$ 看作是一样的。它们之间只差一个非零常数倍。所以，

$$[x-1,\ x+1] = x^2-1$$

又如：$[3a^5b^2c,\ ab^4c^3d,\ 2a^2bc^6] = a^5b^4c^6d$。

就是说：最低公倍式等于各多项式中所有不同因式最高次方的连乘积。

例 5.62 求 $f(x) = 6x^4 - 6x^2$ 与 $g(x) = 3x^2 - 3$ 的最低公倍式。

解： 由于

$$f(x) = 6x^2(x^2-1) = 6x^2(x+1)(x-1)$$
$$g(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$\therefore \quad [f(x),\ g(x)] = x^2(x+1)(x-1)$

显然，由于多项式的最高公因式与最低公倍式都不计零次因式，所以同样有：

$$[f(x),\ g(x)] \cdot (f(x),\ g(x)) = k \cdot f(x) \cdot g(x)$$

其中，k 是一个非零常数。

例 5.63　求 $x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ 与 $2x^3+5x^2-x-1$ 的最低公倍式。

解： 由辗转相除法可求得：

$$\left(x^4+3x^3+2x^2+3x+1,\ 2x^3+5x^2-x-1\right)=x^2+3x+1$$

因此：

$$\begin{aligned}&\left[x^4+3x^3+2x^2+3x+1,\ 2x^3+5x^2-x-1\right]\\=&\frac{(x^4+3x^3+2x^2+3x+1)\times(2x^3+5x^2-x-1)}{x^2+3x+1}\\=&(x^2+1)(2x^3+5x^2-x-1)\end{aligned}$$

如果要求两个以上多项式的最低公倍式，和求最小公倍数一样，可以两两逐步求出，只要每一步细心计算，是不难的。

练习

1. 求下列各组数的最小公倍数：
   (a) 96，　84；
   (b) 161，　207；
   (c) 1233，　19180；
   (d) 110，　231，　426；
   (e) 236，　354，　767.

2. 求下列各组多项式的最低公倍式：
   (a) $2a^2b^3c$，　$4b^2c^4d$，　$6a^4d^2$
   (b) $(x-1)^2(x+1)$，　$3(x-1)(x+1)^3$，　$2(x-1)(x+1)^2$
   (c) $3x-1$，　$9x^2-1$，　$9x^2+1$
   (d) x^3-x^2+x-1，　x^3+x^2+x+1

习题 5.3

1. 某校一年级一班有学生 48 人，二班有学生 32 人，两班共同组成几个宣传小队，要求组成的小队中每个班的同学人数相等、总人数也相等，而且所组成的小队数最少，问：能组成几队？每队几人？(求最大公约数)

2. 一排电杆，相邻两根间距都是 45 米。如果要改成间距 60 米，且起点不动，那么从这根开始到第一根不动的电杆，距离是多少米？(求最小公倍数)

3. 小张、小王与小李三人做卫生值勤。小张 8 天轮一次，小王 10 天轮一次，小李 12 天轮一次。如果今天三人同时值勤，那么，至少几天后三人又能同时值勤？(求最小公倍数)

4. 求下列各组的最高公因式和最低公倍式：

   (a) $9x^2yz, \qquad -6xy^2z, \qquad 24xy^2$

   (b) $-3(a-b)^3, \qquad -6(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right), \qquad -8(a-b)^2(a+b)$

   (c) $x^2-y^2, \qquad x^4-y^4$

   (d) $m^2-4n^2, \qquad m^2+mn-2n^2, \qquad m^2+3mn+2n^2$

5. 求下列各组多项式的最高公因式和最低公倍式：

   (a) $x^2-3xy+2y^2, \qquad x^2+2xy-8y^2$

   (b) $m^2-m-6, \qquad m^2-2m-3$

   (c) $y^4-9y^2, \qquad y^3-5y^2+6y$

   (d) $24a^4b-24a^3b^2+6a^2b^3, \qquad 36a^3b^2-36a^2b^3+9ab^4$

   (e) $a^3-3a^2+2a, \qquad a^4-a^2, \qquad a^2+a-2$

   (f) $x^2-x-2, \qquad x^2+14x-32, \qquad x^2-5x+6$

   (g) $8x^3-27, \qquad 24x-8x^2-18, \qquad 27-54x+36x^2-8x^3$

   (h) $-6xy\left(x^2-3xy+2y^2\right), \qquad 4x^3y^2\left(x^2-xy-2y^2\right)$

6. 求最高公因式与最低公倍式。

   (a) $\left(b^2-2b\right)^4, \qquad \dfrac{1}{8}\left(b^2-2b\right)^2, \qquad \left(b^2-2b\right)^3;$

   (b) $6\left(4x^2-1\right), \qquad 4-8x, \qquad 12\left(4x^2-4x+1\right)$

   (c) $12\left(x^4-y^4\right), \qquad 10\left(x^6-y^6\right), \qquad 8\left(x^4y+xy^4\right)$

   (d) $x^2-x, \qquad 2x^2-6x, \qquad x^3-x$

   (e) $(x-1)(x-2), \qquad 5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$

   (f) $x^3-1, \qquad x^3-4x^2-4x-5$

   (g) $(x-1)^2(x-2)^2, \qquad (x^2-3x+2)(2x^3-5x^2+5x-6)$

   (h) $(x^2-1)^2(x+1)^2, \qquad (x^3+5x^2+7x+3)(x^2-6x-7)$

7. 用辗转相除法求最高公因式 $(f(x), g(x))$。

(a) $f(x) = x^3 + x^2 + 2x + 2, \qquad g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$

(b) $g(x) = 2x^3 - x^2 - x + 1, \qquad f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

(c) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1, \qquad g(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 1$

(d) $g(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x + 2, \qquad f(x) = 2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 2$

(e) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1, \qquad g(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

8. 求最低公倍式 $[f(x), g(x)]$

(a) $g(x) = 6x^3 + x^2 - 44x + 21, \qquad f(x) = 3x^3 - 13x^2 + 23x - 21$

(b) $f(x) = 6x^4 - 3x^3 + 7x^2 + x - 3, \qquad g(x) = 2x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 3x + 9$

(c) $g(x) = x^4 + 1, \qquad f(x) = x^3 - 1$

本章内容要点

这一章是第四章多项式理论的继续和深入，主要内容有：因式分解、余式定理及其推论和应用、辗转相除法及其应用。

一、在指定范围内，把一个多项式写成几个次数较低的不可约多项式之积的变形，就是多项式的因式分解。

多项式因式分解的常见方法有：

1. 提取公因式法；
2. 分组分解法；
3. 乘法公式分解法；
4. 配方法、视察法分解二次三项式；
5. 待定系数法分解二元二次多项式。

二、余式定理是：多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)$ 所得的余式是 $f(a)$，即

$$f(x) = q(x) \cdot (x-a) + f(a)$$

由此，可以得到以下推论：

1. 如果 $f(a) = 0$(或说 a 为 $f(x)$ 的根)，那么，$f(x)$ 可以被 $(x-a)$ 整除。反过来也正确。

2. 如果 $f(a)=0, f(b)=0$(或说 a, b 为 $f(x)$ 的两个不同的根)，那么，$f(x)$ 必可以被 $(x-a)(x-b)$ 整除，也就是 $f(x)$ 必含有因式 $(x-a)(x-b)$。反过来说，也是正确的。

3. 一元 n 次多项式 $f(x)$，至多只能有 n 个不同的根。

4. 如果：已知 $f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_{n+1})$ 共 $n+1$ 个值，那么，就可以确定一个 n 次多项式。

三、综合运用余式定理及其推论、综合除法及待定系数法，可以进行因式分解、求整系数多项式的有理根。

在这里，可以进一步发现，解方程与因式分解是互通的。因为：如果 $f(x)$ 可以分解为 $(mx+n)\cdot(px+q)\cdots(rx+s)$，那么，方程 $f(x)=0$ 就一定有有理根 $-\dfrac{n}{m}, -\dfrac{q}{p}, \ldots, -\dfrac{s}{r}$。

反过来，如果方程 $f(x)=0$ 有有理根 $-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{d}{c}, \ldots, -\dfrac{f}{e}$。那么，多项式 $f(x)$ 就一定含有因式：$(ax+b)(cx+d)\cdots(ex+f)$。

四、辗转相除法

利用辗转相除法，可以求出几个多项式的最高公因式和最低公倍式。

两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式记为：$(f(x), g(x))$；最低公倍式记为：$[f(x), g(x)]$。由于它们都不计非零常数因子，因而有以下关系式：

$$kf(x)g(x)=(f(x), g(x))\cdot[f(x), g(x)]$$

$$[f(x), g(x)]=\frac{f(x)\cdot g(x)}{(f(x), g(x))} \qquad (\text{非零常数 } k \text{ 不计})$$

复习题五

1. 分解因式：

(a) $\left(x^2+3x\right)^2-(2x+6)^2$

(b) $2a^8-7a^2b+3ab^2$;

(c) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$

(d) $x^6-3x^4+2x^2$

(e) $\left(a^2-b^2+1\right)^2-4a^2b^2$

(f) $a^4-5a^2b^2+4b^4$

(g) x^8-y^8

(h) x^9+y^9

(i) $15x^{2n+3}-25x^{a+1}$

(j) $(a+b)^3+125$

(k) $a^2+b^2+x^2-y^2-2(ax-by)$

(l) $\left(a^2+a\right)^2-10\left(a^2+a\right)+25$

(m) $a^2b^2+ab+\dfrac{1}{2}c-\dfrac{1}{4}c^2$

(n) $4x^2y^4+2xy^2-9z^2-3z$

(o) $(a-b)^3-4(a-b)^2+4(a-b)$

(p) $0.7m^3+1.4m^2+0.7mn^2$

(q) $xy+x^2+\frac{1}{4}y^2$

(r) $9x^2-4y^2-z^2+4yz$

2. 分解因式:

(a) $4x^4+y^4$

(b) a^4-23a^2+1

(c) $x^4-x^2+8x-16$

(d) $x^4-2x^3+x^2-16$

(e) $(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

(f) $xyz-yz-zx-xy+x+y+z-1$

(g) $x^2+y^2+z^2+2yz+2xz+2xy$

(h) $a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$

3. 先化简, 再将结果分解因式。

(a) $x(4x-5)+(1+3x)(1-3x)-3(x-2)(x+3)-3$

(b) $(2x^2+3x-1)(2x^2-3x+2)+(4x-1)(x-2)-1$

4. 先将被除式分解因式, 再求商。

(a) $[(a+b)^3-c^3]\div(a+b-c)$

(b) $(a^3+6a^2b+12ab^2+8b^8)\div(a+2b)$

5. 分解因式:

(a) x^3+x^2+x+1

(b) x^4-2x^2+8x+5

(c) $3x^3+2x^2y-19xy^2+6y^3$

(d) $6x^3-13x^2y-14xy^2-3y^3$

6. 用待定系数法分解因式:

(a) $2x^2-5xy-3y^2+x+11y-6$

(b) $x^2-5xy+6y^2-x+y-2$

(c) $x^2+3xy+2y^2+3zx+5y^3+2z^2$

7. 如果 $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的余数为 2，试求：$x^2\cdot f(x)-3f(x)$ 除以 $(x-1)$ 所得的余数。

8. 试证明：$f(x)=2x^2+7x+9$ 除以 $ax+b$ 的余式总是正数。

9. (a) 已知多项式 $f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b$ 含有因式 x^2-1，试求：a、b 的值。

(b) 已知 $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，试求 a 与 b 的值。

10. (a) 如果 $b_n + b_{n-1} + \cdots + b_1 + b_0 = 0$，试证明：多项式 $f(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ 必有一个因式 $x-1$；

(b) 证明：$(x+1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ 能被 $(x+1)\cdot(2x+1)$ 整除。

11. 证明以下各题：

(a) 若 n 为偶数，$n^3 - n$ 可被 6 整除；若 n 为奇数，$n^3 - n$ 可被 24 整除；

(b) $53^{53} - 33^{33}$ 可被 10 整除；

(c) 四个连续自然数的乘积加 1，必是一个完全平方数；

(d) 若一数除以 5 余 1，另一数除以 5 余 2，则这两个数的平方和能被 5 整除。

12. 已知方程 $(m+1)(x^2 - x) = (m-1)(x-1)$ 有两个互为相反数的根，试用韦达定理求出 m 的值。

13. 已知方程 $x^3 - 6x^2 + kx - 6 = 0$ 的三个根为：$a-d, a, a+d$ 试求它的三个根及 k 值。

14. 求作一个方程，使它的三个根分别为方程 $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ 的三个根的倒数。

15. 求最高公因式及最低公倍式。

(a) $g(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 2x - 1,\qquad f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 2x - 3$

(b) $g(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 2x + 1,\qquad f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$

(c) $g(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x,\qquad f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$

16. 如果 $ax^2 + bx + c$ 与 $cx^2 + bx + a$ 的最高公因式是 x 的一次多项式，试证明：$a + b + c = 0$ 或 $a - b + c = 0$。

17. 两个用相同字码组成的二位数（都是质数）的差是一个完全平方数。试求这两个数。

18. 若 $a, b, \sqrt{a^2 - 4b}$ 都是自然数，证明：方程 $x^2 - ax + b = 0$ 的根也是自然数。

第六章　分式与根式

第一节　分式与分式方程

一、分式与分式的基本性质

我们已经知道，两个整数 m, n 的比，是一个有理数 $\dfrac{m}{n}$，　$(n \neq 0)$. 同样，两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的比 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，　$(g(x) \neq 0)$ 就叫做**有理式**。

在有理式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，　$(g(x) \neq 0)$ 中，如果 $g(x)$ 的次数为 0，那么，有理式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 就是**整式**，也就是我们已经学过的多项式；如果 $g(x)$ 的次数高于 0 次，那么，有理式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 就叫做**分式**。

例如：$\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x+5}{x^2-9}$, $\dfrac{2x^2-3x+1}{x-3}$, $\dfrac{x^2+y^2}{2x+y}$ 等都是分式。$\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ 虽然恒等于整式 x^2+1，而从形式上仍然叫做分式。

但是，像 $\dfrac{x^2-1}{1}$、$\dfrac{3x+1}{2}$ 等都是整式，而这些整式也就是多项式：x^2-1，$\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}$ 等。

对于整式来说，由于其中的未知数决不会出现在分母当中，因而未知数可以取一切实数值；但对于分式来说，由于它的分母中必定含有未知数，因而未知数的取值，就要求限制在“使分母不等于零的实数值”的范围内。例如：

在分式 $\dfrac{2x+3}{x^2-3}$ 中，未知数 x 只允许取“$x^2-3 \neq 0$”的值，即 $x \neq \pm\sqrt{3}$ 的一切实数值。也就是说，在这个分式中的未知数可以取除“$\pm\sqrt{3}$”以外的其它任何实数值。

在分式中，分子的次数如果低于分母的次数，就叫做**真分式**；分子的次数如果不低于分母的次数，就叫做**假分式**。例如，$\dfrac{1}{x-3}$，$\dfrac{x+y}{2x^2+y}$ 等都是真分式；$\dfrac{2x+4}{x-3}$，$\dfrac{x^2+4x+6}{x+3}$，$\dfrac{x^2+y^2}{2x+y}$ 等都是假分式。

（一）分式的基本性质

1. 分式的分子、分母同乘以一个非零多项式，分式的值不变。用式子表示就是：

   如果 $h(x) \neq 0$，那么 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) \cdot h(x)}{g(x) \cdot h(x)}$。

   例如：$\dfrac{x}{x-3} = \dfrac{x(x-2)}{(x-3)(x-2)} \quad (x \neq 3,\ x \neq 2)$

2. 分式的分子、分母同除以一个非零多项式。分式的值不变。用式子表示就是：

   如果 $h(x) \neq 0$，那么 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) \div h(x)}{g(x) \div h(x)}$。

   例如：$\dfrac{x^2(x^2+1)}{x^2+1} = x^2$

利用以上两个基本性质，可以进行分式的约分和通分。

（二）约分

如果一个分式的分子、分母有公因式时，可以类似于分数的约分，把最高公因式约去，使分式化简。分式的分子与分母没有非零次的公因式时，叫做**不可约分式（既约分式）**。不可约分式是最简分式，约分就是化分式为最简分式。

例 6.1 约简

1. $\dfrac{18a^{12}x^3y^2}{12a^3b^2x^5z}$
2. $\dfrac{8a^2-6a^5b}{16a^{20}}$
3. $\dfrac{32(x-2y)^2(-x+y)}{24(2y-x)^2(x-y)}$
4. $\dfrac{m^2-4n^2}{-m^2-4mn-4n^2}$

解：

1. $\dfrac{18a^{12}x^3y^2}{12a^3b^2x^5z} = \dfrac{3a^8y^2}{2b^3x^2z}$
2. $\dfrac{8a^2-6a^5b}{16a^{20}} = \dfrac{2a^2\left(4-3a^3b\right)}{16a^{20}} = \dfrac{4-3a^3b}{8a^{18}}$
3. $\dfrac{32(x-2y)^2(-x+y)}{24(2y-x)^2(x-y)} = \dfrac{-4(x-2y)^2(x-y)}{3(x-2y)^2(x-y)} = -\dfrac{4}{3}$

4.

$$\begin{aligned}\frac{m^2-4n^2}{-m^2-4mn-4n^2} &= \frac{m^2-4n^2}{-(m^2+4mn+4n^2)}\\ &= -\frac{(m-2n)(m+2n)}{(m+2n)^2}\\ &= -\frac{m-2n}{m+2n}\end{aligned}$$

例 6.2 约简 $\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^4+x^2+1}$

解： 用辗转相除法求得：

$$(x^4-2x^3+x-2, x^4+x^2+1) = x^2-x+1$$

用除法求得

$$\begin{aligned}x^4-2x^3+x-2 &= (x^2-x+1)(x^2-x-2)\\ x^4+x^2+1 &= (x^2-x+1)(x^2+x+1)\end{aligned}$$

$\therefore \quad \dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^4+x^2+1} = \dfrac{x^2-x-2}{x^2+x+1}$

例 6.3 约简 $\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-8x^2+11x-12}$

解： 用余式定理和综合除法求得：

$$\begin{aligned}x^3-6x^2+11x-6 &= (x-1)(x-3)(x-2)\\ x^3-8x^2+11x-12 &= (x-1)(x-3)(x-4)\end{aligned}$$

$\therefore \quad \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-8x^2+11x-12} = \dfrac{x-2}{x-4}$

下面我们和多项式一样，引入一个分式的符号：$F(x)$，它表示关于 x 的一个分式；同样，$G(x)$、$T(x)$ 可以分别表示 x 的另外的分式，例如：$F(x)=\dfrac{1}{x}$，$G(x)=\dfrac{2x}{x^2-3}$ $T(x)=\dfrac{7x}{9-x}$ 等。很自然，在一个分式 $F(x)$ 中，当 $x=a$ 时，分式的值可以表示为 $F(a)$。

例 6.4 先把下面的分式化简，再求它的值。

$$F(x)=\frac{-1-x^3}{2x^2-2x+2}, \qquad \text{其中} x=5$$

解：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{-(x^3+1)}{2(x^2-x+1)} \\
&= -\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{2(x^2-x+1)} = -\frac{x+1}{2} \\
F(5) &= -\frac{5+1}{2} = -3
\end{aligned}
$$

例 6.5 约简 $F(x)=\dfrac{2(x^2-1)(x-1)^2}{(1-x)^3(x+1)^2}$，问 x 取什么整数值时，能使 $F(x)$ 的值是正整数。

解：

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{2(x+1)(x-1)(x-1)^2}{-(x-1)^3(x+1)^2} \\
&= -\frac{2(x+1)(x-1)^3}{(x-1)^3(x+1)^2} \\
&= -\frac{2}{x+1}
\end{aligned}
$$

要使 $F(x)$ 的值是正整数，必须使 $x+1=-1$ 或 $x+1=-2$。

解得 $x=-2$ 或 $x=-3$。

$\therefore$ 当 $x=-2$ 或 $x=-3$ 时，$F(x)$ 的值是正整数。

由以上各例，可以得出：

1. 约分应当约去分子与分母的最高公因式及分子与分母的系数的最大公约数；

2. 如果分式的分子、分母是多项式，可以把它们分别分解因式以后，再进行约分；对于高次多项式，应用余式定理或辗转相除法可以求得最高公因式。

（三）通分

对于分母不相同的几个分式，可将每个分式的分子、分母乘以适当的非零多项式，而使各分式的分母都相同，这种运算叫做**通分**。通分时应取原来每个分式的分母的最低公倍式与它们各系数的最小公倍数之积作公分母。

例 6.6 把 $\dfrac{a}{2b}$，$\dfrac{b}{3a^2}$，$\dfrac{c}{4ab}$ 通分。

解： $[2b,\ 3a^2,\ 4ab]=12a^2b$

因此:

$$\frac{a}{2b}=\frac{a\cdot 6a^2}{2b\cdot 6a^2}=\frac{6a^3}{12a^2b}$$
$$\frac{b}{3a^2}=\frac{b\cdot 4b}{3a^2\cdot 4b}=\frac{4b^2}{12a^2b}$$
$$\frac{c}{4ab}=\frac{c\cdot 3a}{4ab\cdot 3a}=\frac{3ac}{12a^2b}$$

例 6.7 把 $\dfrac{2x}{x^2-y^2}$，$\dfrac{3y}{x^3+y^3}$ 通分。

解: 由于:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$
$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$\therefore\quad [x^2-y^2,x^3+y^3]=(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)$

因此:

$$\frac{2x}{x^2-y^2}=\frac{2x(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$
$$\frac{3y}{x^3+y^3}=\frac{3y(x-y)}{(x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)}$$

练习

1. 不改变分式的值，使分子、分母的最高次幂的系数变为正数。

(a) $\dfrac{-2a}{-3b}$　　(c) $\dfrac{1-3x^2+2x}{7+7x-x^2}$

(b) $\dfrac{7x^2}{-9y^2}$　　(d) $-\dfrac{-x^2-2x^4+5}{x^2+2x^4-5}$

2. (a) 在什么条件下 $\dfrac{3a-6b}{a+b}=0$

(b) 在什么条件下 $\dfrac{2a-b}{b-a}=1$

3. 约简下列各分式:

(a) $\dfrac{8x^5y^7}{-12x^3y^2}$

(b) $\dfrac{32p^4q^3}{16p^3q^4}$

(c) $\dfrac{-6a^2b^4}{-3a^4b^5}$

(d) $\dfrac{15m^3n^4(a+b)^3}{18m^2n^3(a+b)^4}$

(e) $\dfrac{2(3x-2y)}{3(2y-3x)}$

(f) $\dfrac{-ab(x+y)^3(x-y)}{b(x+y)^2(y-x)^2}$

(g) $\dfrac{3a(x-y)^3}{15(y-x)^3}$

(h) $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(b-a)(a-c)(c-b)}$

(i) $\dfrac{-(x+y-z)(x-y+z)(x-y-z)}{(y+z-x)(y-z+x)(y-z-x)}$

(j) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

(k) $\dfrac{1-x^3}{x^2-1}$

(l) $\dfrac{x^2+9x+14}{x^2+8x+7}$,

(m) $\dfrac{9a^4-1}{6a^2b^2+2b^2}$

(n) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2-2ac}$

(o) $\dfrac{1+3a^2-3a-a^3}{(a^2-2a+1)\,(2a^2-3a+1)}$

(p) $\dfrac{6x^3+11x^2-x-6}{12x^3-8x^2-27x+18}$

(q) $\dfrac{x^4-2x^2-3x-2}{2x^4-4x^3+2x-4}$

(r) $\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^3+2x^2-2x-1}$

4. 通分

(a) $\dfrac{z}{10x^2y^3}$, $\dfrac{y}{10x^3z^2}$

(b) $\dfrac{c}{-2ab}$, $\dfrac{b}{3ac}$, $\dfrac{a}{5bc}$

(c) $\dfrac{4}{3y}$, $\dfrac{y-1}{-2y^2}$, $\dfrac{y^2-1}{4y^3}$

(d) $\dfrac{3b}{5a}$, $\dfrac{-2c}{3b}$, $\dfrac{5a}{-2c}$

(e) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$, $\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}$, $\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

(f) $\dfrac{x}{x-y}$, $\dfrac{y}{x+y}$, $\dfrac{2}{y^2-x^2}$

(g) $\dfrac{a-1}{a+1}$, $-\dfrac{1+a}{1-a}$, $\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

(h) $\dfrac{2y-3}{2y^2-3y-2}$, $\dfrac{y-2}{4y^2+8y+3}$

(i) $\dfrac{1}{x^3-3x^2+2x}$, $\dfrac{2}{x^4-x^2}$, $\dfrac{-1}{x^2+x-2}$

(j) $\dfrac{1}{x^3-6x^2+11x-6}$, $\dfrac{1}{2x^3-7x^2+7x-2}$

5. 约简 $F(x)=\dfrac{6x^2-12x+6}{x^3-3x^2+3x+1}$ 问 x 取何整数值，能使 $F(x)$ 的值是正整数。

二、分式的运算

分式的四则运算法则和分数的四则运算法则是一样的。

(一) 分式的加减法

同分母的分式相加（减），只要把分子相加（减）作为分子，分母不变，并把结果化简；异分母的分式相加（减），就要先进行通分，再转化为同分母分式的相加（减）。

列 1. 测 2 m_1 原式

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2}{x}-\frac{x-3}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2(2x+1)}{x(x+1)^2}\\
&=\frac{2\cdot 2(x+1)^2}{2x(x+1)^2}-\frac{(x-3)\cdot x}{2x(x+1)^2}+\frac{x(x+1)}{2x(x+1)^2}\\
&\quad-\frac{2(2x+1)\cdot 2}{2x(x+1)^2}
\end{aligned}
$$

例 6.8　计算: $\dfrac{x+3y}{x^2-y^2}-\dfrac{x+2y}{x^2-y^2}+\dfrac{2x-3y}{x^2-y^2}$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{x+3y-(x+2y)+(2x-3y)}{x^2-y^2}\\
&=\frac{2x-2y}{x^2-y^2}=\frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)}\\
&=\frac{2}{x+y}
\end{aligned}
$$

例 6.9　计算: $\dfrac{2}{x}-\dfrac{x-3}{2x^2+4x+2}+\dfrac{1}{2x+2}-\dfrac{4x+2}{x(x+1)^2}$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{2}{x}-\frac{x-3}{2(x+1)^2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{2(2x+1)}{x(x+1)^2}\\
&=\frac{2\cdot 2(x+1)^2}{2x(x+1)^2}-\frac{(x-3)\cdot x}{2x(x+1)^2}+\frac{x(x+1)}{2x(x+1)^2}-\frac{2(2x+1)\cdot 2}{2x(x+1)^2}\\
&=\frac{4(x+1)^2-(x-3)x+x(x+1)-4(2x+1)}{2x(x+1)^2}\\
&=\frac{4x^2+4x}{2x(x+1)^2}=\frac{4x(x+1)}{2x(x+1)^2}=\frac{2}{x+1}
\end{aligned}
$$

例 6.10 化简：$\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$

分析： $\because \quad a-c=-(c-a), \quad b-a=-(a-b), \quad c-b=-(b-c),$

$\therefore \quad (a-c,b-a,c-b)=(a-b)(b-c)(c-a).$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=-\frac{1}{(a-b)(c-a)}-\frac{1}{(b-c)(a-b)}-\frac{1}{(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{-b+c-c+a-a+b}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=0
\end{aligned}$$

例 6.11 计算 $\dfrac{a^3}{a-1}-a^2-a-1$

分析： $-a^2-a-1=-(a^2+a+1)$。一个分式和一个整式的代数和，可以把整式 a^2+a+1 当作 $\dfrac{a^2+a+1}{1}$。

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{a^3}{a-1}-\frac{a^2+a+1}{1}\\
&=\frac{a^2}{a-1}-\frac{(a^2+a+1)(a-1)}{a-1}\\
&=\frac{a^3-(a^3-1)}{a-1}\\
&=\frac{1}{a-1}
\end{aligned}$$

例 6.12 计算：$\dfrac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}+\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}$

分析： 由余式定理得 $x-1$ 是第一个分式的分子、分母的公因式，将此分式约简：

$$\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^3+x^2+2x)}=\frac{x+1}{x^3+x^2+2x}$$

由余式定理得 $2x-1$ 是第二个分式的分子、分母的公因式，将此分式约简：

$$\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}=\frac{(x+2)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+x+2)}=\frac{x+2}{x^2+x+2}$$

解：

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{x+1}{x^3+x^2+2x}+\frac{x+2}{x^2+x+2}\\
&= \frac{x+1}{x(x^2+x+2)}+\frac{x(x+2)}{x(x^2+x+2)}\\
&= \frac{x^2+3x+1}{x(x^2+x+2)}
\end{aligned}
$$

例 6.13　已知 $a+b+c=0$，求证：$\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}+\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}+\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$

分析： 利用已知条件 $a+b+c=0$，使各个分母化简。

证明： 由于：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{b^2+c^2-a^2} &= \frac{1}{b^2+c^2-(b+c)^2} = -\frac{1}{2bc}\\
\frac{1}{c^2+a^2-b^2} &= \frac{1}{c^2+a^2-(c+a)^2} = -\frac{1}{2ac}\\
\frac{1}{a^2+b^2-c^2} &= \frac{1}{a^2+b^2-(a+b)^2} = -\frac{1}{2ab}
\end{aligned}
$$

因此：

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}\\
=&-\frac{1}{2bc}-\frac{1}{2ac}-\frac{1}{2ab}\\
=&-\frac{a+b+c}{2abc}=0
\end{aligned}
$$

练习

1. 计算下列各式的值：

(a) $\dfrac{a^2-2a+1}{a^2+a+1}-\dfrac{a^2+3a-3}{a^2+a+1}+\dfrac{5a-4}{a^2+a+1}$

(b) $\dfrac{1}{m^4n^3}+\dfrac{2}{m^3n^4}$

(c) $\dfrac{5a}{6b^2c}-\dfrac{7b}{12ac^2}+\dfrac{11c}{8a^2b}$

(d) $\dfrac{1}{2a-b}+\dfrac{1}{2a+b}$

(e) $\dfrac{2x}{a-b}-\dfrac{x}{b-a}$

(f) $\dfrac{2}{x-y}-\dfrac{x+y}{(y-x)^2}$

(g) $a-b+\dfrac{2b^2}{a+b}$

(h) $\dfrac{y^3}{x-y}+x^2+xy+y^2$

2. 计算下列各式：

(a) $\dfrac{1}{(x-3)(2-x)}+\dfrac{1}{(x-2)(3-x)}$

(b) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{4x-x^2-3}$

(c) $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{6ab}{(b-a)(b-c)}-\dfrac{a^2+b^2}{(a-b)(c-b)}$

(d) $\dfrac{x^2-4}{x^3-3x^2-x+c}-\dfrac{3x^2-14x-5}{3x^3-2x^2-10x-3}$

（二）分式的乘法

两个分式相乘时，分子的乘积作为积的分子，分母的乘积作为积的分母，再把结果化简。即：

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{h(x)}{q(x)}=\frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot q(x)}$$

例 6.14 计算：$\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab+b^2}\times\dfrac{a-b}{a^3+b^3}$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{\left(a^2-b^2\right)(a-b)}{\left(a^2+ab+b^2\right)\left(a^3+b^3\right)}\\
&=\frac{(a+b)(a-b)^2}{\left(a^2+ab+b^2\right)(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}\\
&=\frac{(a-b)^2}{a^4+a^2b^2+b^4}
\end{aligned}$$

例 6.15 计算：$(xy^2-2xy+x)\cdot\dfrac{y^3+1}{y^3-y}$

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\frac{x(y^2-2y+1)}{1}\cdot\frac{y^3+1}{y(y^2-1)}\\
&=\frac{x(y-1)^2(y+1)(y^2-y+1)}{y(y+1)(y-1)}\\
&=\frac{x(y-1)(y^2-y+1)}{y}
\end{aligned}$$

例 6.16 计算：$\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x+1}-\dfrac{x^3+1}{(x-1)^3}\right)\cdot(x^2-2x+1)$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\frac{x^3+1}{(x-1)^3}\right)\cdot(x-1)^2 \\
&= \frac{(x^2+x+1)(x-1)-(x^3+1)}{(x-1)^3}\cdot(x-1)^2 \\
&= \frac{(x^3-1)-(x^3+1)}{x-1} = -\frac{2}{x-1}
\end{aligned}
$$

(三) 分式的除法

两个分式相除时，把除式的分子、分母颠倒后与被除式相乘即可。即:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \div \frac{h(x)}{q(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{q(x)}{h(x)} = \frac{f(x)\cdot q(x)}{g(x)\cdot h(x)}$$

例 6.17 计算: $\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \div \dfrac{x^2-1}{x^4-1}$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{x^2-1}{x^2+1}\times\frac{x^4-1}{x^2-1} \\
&= \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} \\
&= x^2-1
\end{aligned}
$$

例 6.18 计算: $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \div (x-y)$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\times\frac{1}{x-y} \\
&= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2}\times\frac{1}{x-y} \\
&= \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

例 6.19 计算 $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \div \left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{b+a}{ab}\div\frac{b-a}{ab} \\
&= \frac{b+a}{ab}\times\frac{ab}{b-a} \\
&= \frac{b+a}{b-a}
\end{aligned}
$$

例 6.20 化简：$$\dfrac{\dfrac{2(1-x)}{1+x}+\dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^2}+1}{\dfrac{2(1+x)}{1-x}+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2+1}$$

说明： 这是一个分子、分母都是分式的繁分式，实际上就是两个分式相除。可以先把它们分别化简后，再进行除法运算。

解：

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \dfrac{\dfrac{2(1-x)(1+x)+(1-x)^2+(1+x)^2}{(1+x)^2}}{\dfrac{2(1+x)(1-x)+(1+x)^2+(1-x)^2}{(1-x)^2}} \\
&= \frac{[(1+x)+(1-x)]^2}{(1+x)^2} \div \frac{[(1+x)+(1-x)]^2}{(1-x)^2} \\
&= \frac{[(1+x)+(1-x)]^2}{(1+x)^2} \times \frac{(1-x)^2}{[(1+x)+(1-x)]^2} \\
&= \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2} = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2
\end{aligned}$$

练习

1. 计算下列各式

(a) $\dfrac{3ab}{4xy} \div \dfrac{10x^2y}{21a^2b}$

(b) $8a^2b^4 \cdot \left(-\dfrac{3a}{4b^3}\right)$

(c) $\dfrac{(a-b)^2}{ab} \div (a-b)$,

(d) $\left(\dfrac{3a^2b}{-2c^3}\right)^3$

(e) $\dfrac{a^2-x^2}{4ax} \div \dfrac{x-a}{8x}$

(f) $\dfrac{x^2-x}{x-3} \div \dfrac{x^2-x^3}{3-x}$

(g) $(x^2-6x+9) \div \dfrac{x^2-9x+18}{x+3}$

(h) $\dfrac{a+x}{(m+n)^2} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{12} \cdot \dfrac{m+n}{n-m} \cdot \dfrac{6\left(m^2-n^2\right)}{x+y}$

2. 化简：

(a) $\dfrac{\dfrac{c}{b}}{a}$

(b) $\dfrac{c}{\dfrac{b}{a}}$

(c) $\dfrac{a-\dfrac{1}{a}}{a-1}$

(d) $\dfrac{P+2-\dfrac{1}{P+2}}{P+2+\dfrac{1}{P+2}}$

3. 化简：$G(a)=\dfrac{1-\dfrac{4a+1}{a+1}}{a}$，问 a 取何整数值时，$G(a)$ 等于正整数。

三、分式方程

如果方程式中含有分式，那么这样的方程，叫做 **分式方程**，例如 $\dfrac{2}{x}=1$，$y+1+\dfrac{2}{y}=\dfrac{y^2}{y-1}$，$\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{1}{x+3}$ 等，都是分式方程。如果 x 是未知数，a 表示一个非零常数，那么 $\dfrac{x}{a}+x=1$，就不是分式方程。

解分式方程主要是设法把原方程变形为整式方程，也就是在方程两边乘以同一个含有未知数的整式。这个整式一般是分母的最低公倍式。

例 6.21 解方程 $\dfrac{5}{x-1}=\dfrac{1}{x+3}$

解： 两边乘以分母的最低公倍式：$(x-1)(x+3)$，并约简得：

$$5(x+3)=x-1$$

解整式方程：$4x=-16 \quad \Rightarrow \quad x=-4$

验根：把 $x=-4$ 分别代入原方程两边。

$$\text{左式}=\frac{5}{-4-1}=-1$$
$$\text{右式}=\frac{1}{-4+3}=-1$$

$\because$　左 = 右

$\therefore$　原方程的解集是：$\{-4\}$。

例 6.22 解方程：$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{x^2-4}=1+\dfrac{2}{x-2}$

解： 原方程就是：$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}=1+\dfrac{2}{x-2}$

两边乘以分母的最低公倍式 $(x+2)(x-2)$, 并约简得:

$$(x-2)+4x=(x+2)(x-2)+2(x+2)$$

解整式方程 $x^2-3x+2=0$, $\quad\therefore\quad x_1=1,\ x_2=2$

验根: 把 $x=1$ 代入原方程两边:

$$\begin{aligned}右式&=\frac{1}{1+2}+\frac{4}{1-4}=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}=-1\\ 左式&=1+\frac{2}{1-2}=1-2=-1\end{aligned}$$

$\therefore\quad x=1$ 是原方程的根。

把 $x=2$ 代入原方程时，由于分母 $x-2=0$, $x^2-4=0$，就是说：当 $x=2$ 时原方程没有意义，所以 $x=2$ 不是原方程的根，应舍去它。

因此：原方程的解集是 $\{1\}$。

从以上两例可以看出：分式方程的两边乘以同一个含有未知数的整式，并进行约简，就得到一个新的整式方程。这个整式方程的根，可能是原分式方程的根，也可能不是原分式方程的根。而这里不适合原方程的根，就叫做原方程的**增根**，验根后应该舍去（例如，在例 6.22 中的 $x=2$ 就是增根）。

我们不禁要问：解分式方程的过程中，为什么可能增根呢?

先观察例 6.22, 原分式方程未知数 x 的可取值范围是 $x\neq\pm2$ 的一切实数，整式方程 $x^2-3x+2=0$ 的 x 可取值范围扩大为一切实数，这样解整式方程得到的根 $x_1=1$, 恰好在原方程 x 的可取值范围内，所以适合原方程，是原方程的根。而另一根 $x_2=2$, 恰好在原方程 x 可取值范围外，所以不适合原方程，是原方程的增根。

再观察例 6.21, 原分式方程未知数 x 的可取值范围是 $x\neq1$ 且 $x\neq-3$ 的一切实数，整式方程 $5(x+3)=x-1$ 的 x 可取值范围扩大为一切实数，但这个整式方程的根 $x=-4$, 恰好在原分式方程的可取值范围内，所以是原方程的根。

解分式方程过程中，由于原方程两边乘以含有未知数的整式，约简而得到一个整式方程。这样就扩大了未知数的可取值范围，自然就有产生增根的可能。但是，增根并不可怕，只要通过检验，就可以鉴别出来把它舍去。所以，解分式方程是必须进行验根的。

仔细观察、分析，不难发现：分式方程的增根，都正好是“使原方程中的一些分母的值为零”的未知数值。因此，解分式方程时，比较简捷的验根的方法是：把整式方程的根，逐个代入分母的最低公倍式中，如果其值不等于零，则是原方程的根；如果其值等于零，则它是原方程的增根，要舍去。

例 6.23　试求一个正实数 x 满足下述条件：$x=\dfrac{1}{x-1}$

解： 方程两边乘以 $x-1$，并约简得 $x(x-1)=1$。

解整式方程：$x^2-x-1=0$，

$\therefore\quad x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\qquad x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

验根：把 $x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 代入 $x-1$，其值不等于零。把 $x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 代入 $x-1$，其值不等于零。

$\therefore$　原方程的解集是：$\left\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

但 $\because\quad \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}<0$，不合题意应舍去。

$\therefore$　所求正实数是：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

综合以上各例，可以概括出解分式方程的一般步骤是：

1. 方程两边乘以分母的最低公倍式，并约简变形为整式方程。
2. 解整式方程。
3. 验根：把整式方程的根分别代入原方程分母的最低公倍式中去。如果其值不等于零，则是原方程的根；如果其值等于零，则是原方程的增根，要舍去。

练习

解下列方程：

1. $\dfrac{5}{y}=\dfrac{3}{y-2}$
2. $1-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{5-x}{x-4}$
3. $1+\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{5-x}{x-4}$
4. $\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{1+x}+1$

例 6.24　解方程：$\dfrac{2}{1+x}-\dfrac{3}{1-x}=\dfrac{6}{x^2-1}$

解： 原方程就是 $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}=\dfrac{6}{(x+1)(x-1)}$

方程两边乘以 $(x+1)\cdot(x-1)$，并约简得：

$$2(x-1)+3(x+1)=6$$

解整式方程

$$\begin{aligned} 2x-2+3x+3&=6\\ 5x&=5\\ x&=1 \end{aligned}$$

验根：把 $x=1$ 代入 $(x+1)\cdot(x-1)$ 所得的值等于零。

$\therefore\quad x=1$ 是增根（舍去），

$\therefore\quad$ 原方程的解集是空集 $\emptyset$。

例 6.25 解方程 $\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-3}$

分析： 如果开始就乘以分母的最低公倍式，这样很复杂，所以先采取方程两边分别通分，这样比较简便。

解： 方程两边分别通分得：

$$\begin{aligned} \frac{3x-3-4x+8}{(x-1)(x-2)}&=\frac{x-3-2x+8}{(x-3)(x-4)}\\ \frac{-x+5}{(x-1)(x-2)}&=\frac{-x+5}{(x-3)(x-4)} \end{aligned}$$

方程两边乘以 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$，得：

$$(-x+5)(x-3)(x-4)=(-x+5)(x-1)(x-2) \tag{6.1}$$

即：

$$(-x+5)[(x^2-7x+12)-(x^2-3x+2)]=0$$

解整式方程 $(-x+5)(-4x+10)=0$

$\therefore\quad x_1=5,\quad x_2=\dfrac{5}{2}$

验根：把 $x_1=5,\quad x_2=\dfrac{5}{2}$ 分别代入分母的最低公倍式中，很明显其值都不等于零。

$\therefore\quad$ 原方程的解集是 $\left\{5,\dfrac{5}{2}\right\}$。

注意： 如果在方程 (6.1) 的两边除以 $-x+5$，那么就会丢失 $x=5$ 这一个根，所以在解方程的过程中，如果方程两边除以含有未知数的整式，那么原方程就有丢根的可能，丢根是不易找回来的，因此在解方程的过程中，要尽量避免进行这种变形。

练习

解下列方程：

1. $x=\dfrac{1}{x-1}$

2. $\dfrac{10x}{2x-1}+\dfrac{5}{1-2x}=2$

3. $\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{3y-y^2}{y^2-1}=0$

4. $\dfrac{1}{t+2}+\dfrac{1}{t+7}=\dfrac{1}{t+3}+\dfrac{1}{t+6}$

在解有些分式方程的过程中，如果利用换元法，引进一个辅助未知数，那么，就可以得到一个容易解的方程，使解法简化。

例 6.26 解方程 $\dfrac{(x-1)^2}{x}+\dfrac{x}{(x-1)^2}=2$

解： 设 $\dfrac{(x-1)^2}{x}=y$，则 $\dfrac{x}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{y}$

代入原方程就是 $y+\dfrac{1}{y}=2$，两边乘以 y，并约简得

$$y^2+1=2y \quad\Rightarrow\quad y^2-2y+1=0$$

解这个方程，得：$y=1$。

把 $y=1$ 代入 $\dfrac{(x-1)^2}{x}=y$，得：

$$\frac{(x-1)^2}{x}=1 \tag{6.2}$$

两边乘以 x，并约简得：

$$(x-1)^2=x \tag{6.3}$$

即：$x^2-3x+1=0$

$\therefore\quad x_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\qquad x_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$。

把 x_1,x_2 分别代入方程 (6.2) 的分母中，其值不等于零。

$\therefore\quad$ 原方程的解集是 $\left\{\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

说明： 解上例的过程中，由方程 (6.2) 到方程 (6.3) 有产生增根的可能，所以只要把 x_1,x_2 代入方程 (6.2) 验根就可以。

例 6.27 解方程 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{b}{x}\quad(a\neq b)$

解： 方程两边乘以 abx 得：

$$bx+a^2b=ax+ab^2$$

解整式方程 $(b-a)x=ab(b-a)$

$\because \quad a\neq b, \qquad \therefore \quad b-a\neq 0$

$\therefore \quad x=ab$。

验根：把 $x=ab$ 代入 abx 得 a^2b^2。

$\because \quad a\neq 0,\ b\neq 0$（如果 $a=0, b=0$, 那么原方程无意义）。

$\therefore \quad a^2b^2\neq 0$

$\therefore$ 原方程的解集是 $\{ab\}$。

练习

解下列方程：

1. $\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a}{b}=1 \quad (a+b\neq 0)$
2. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{x-a-b} \quad (a+b\neq 0)$
3. 在 $\dfrac{1}{R}=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r-r_1}$ 中，已知 R, r_1，求 r。（其中各字母表示正数，$r_1>4R$）

例 6.28 某公社原计划要在一定的日期里开垦荒地 960 亩，如果实际每天比原计划多开垦 40 亩，可提前 4 天完成原计划。求原计划一天开垦荒地的亩数和完成的天数。

分析： 这个应用题中的数量关系，可列表如下：

	工作总量	一天的工作量	所需天数
原计划工作情况	960 亩	x 亩	$\frac{960}{x}$
实际工作情况	960 亩	$(x+40)$ 亩	$\frac{960}{x+40}$

$$\text{原计划需要的天数}=\text{实际需要天数}+4(\text{天})$$

解： 设原计划每天开垦荒地 x 亩，则原计划需要 $\dfrac{960}{x}$（天）完成，实际每天开垦荒地 $(x+40)$ 亩，实际需要 $\dfrac{960}{x+40}$（天）

按题意得：$\dfrac{960}{x}=\dfrac{960}{x+40}+4$

两边乘以 $x(x+40)$, 得：

$$960(x+40)=960x+4x(x+40)$$

整理得：$x^2+40x-9600=0$

$\therefore \quad x_1 = 80, \quad x_2 = -120$

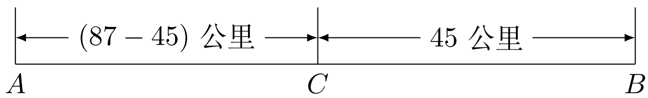
检验：$x_1 = 80$ 是原方程的根。$x_2 = -120$ 是原方程的根，但不合题意，应舍去。

又 $\dfrac{960}{x} = \dfrac{960}{80} = 12(\text{天})$

答：原计划每天开垦荒地 80 亩，需要 12 天。

例 6.29 A、B 两地相距 87 公里，甲骑自行车从 A 出发向 B 驶去，经过 30 分钟后，乙骑自行车由 B 出发，用每小时比甲快 4 公里的速度向 A 驶来，两人在距离 B45 公里的 C 处相遇，求各人的速度。

分析：



	所行距离	速度	时间
甲	(87 − 45) 公里	x 公里/小时	$\frac{87-45}{x}$
乙	45 公里	$(x+4)$ 公里/小时	$\frac{45}{x+4}$

$$\text{甲自 } A \text{ 到 } C \text{ 所需要时间} = \text{乙由 } B \text{ 到 } C \text{ 所需要时间} + \frac{30}{60}\text{小时}$$

解： 设甲每小时行 x 公里，则乙每小时行 $(x+4)$ 公里，按题意：

$$\frac{87-45}{x} = \frac{45}{x+4} + \frac{30}{60}$$

两边乘以 $2x(x+4)$ 得：

$$2 \times 42(x+4) = 2 \times 45x + x(x+4)$$
$$x^2 + 10x - 336 = 0$$

$\therefore \quad x_1 = 14, \qquad x_2 = -24$

检验：$x = 14$ 是原方程根，$x = -24$ 是原方程根，但不合题意，舍去。

$$x + 4 = 14 + 4 = 18$$

答：甲每小时行 14 公里，乙每小时行 18 公里。

例 6.30 甲乙两个工程队合做一项工程，两队合做两天后，由乙队单独做 1 天就完成了全部工程。已知乙队单独做所需的天数是甲队单独做所需天数的 $1\frac{1}{2}$ 倍。求甲、乙两队单独做各需多少天？

解： 设甲队独做 x 天完成，乙队独做 $\frac{3}{2}x$ 天完成，则甲每天工作量是 $\frac{1}{x}$，乙每天工作量是 $\frac{1}{\frac{3}{2}x}$，甲、乙两队合做一天的工作量是 $\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{2}x}$；合做两天的工作量是 $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)$。

按题意得：

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{2}x}\right)+\frac{1}{\frac{3}{2}x}=1$$

就是 $\frac{2}{x}+\frac{4}{3x}+\frac{2}{3x}=1$

方程两边乘以 $3x$ 得：

$$6+4+2=3x$$

$$3x=12$$

$$x=4$$

经检验，$x=4$ 是原方程的根。又 $\frac{3}{2}x=6$。

答：甲独做 4 天完成任务，乙独做 6 天完成任务。

练习

1. 甲、乙两个车工，各车 1500 个螺丝。乙改进了操作方法，生产效率提高到甲的 3 倍，因此比甲少用 20 个工时完成任务。他们每小时各车多少个螺丝？

2. 甲、乙两个车站相距 96 公里，快车和慢车同时从甲站开出，1 小时后，快车在慢车前 12 公里，快车比慢车早 40 分钟到达乙站。快车和慢车的速度各是多少？

3. 甲、乙、丙三人合做一件工作 12 天完成，已知甲 1 天完成的工作，乙须要 2 天，丙须要 3 天，问三人单独完成。这件工作，各需要多少天？

习题 6.1

1. 下列各分式在什么条件下无意义：

(a) $\dfrac{1}{2x-3}$

(b) $\dfrac{x-y}{x+y}$

(c) $\dfrac{x}{x^4+1}$

(d) $\dfrac{2x-1}{x^2-2}$

2. 当 x 取何值时，分式 $\dfrac{x-2}{(1-x)(x+3)}$

(a) 没有意义;

(b) 分式值等于 0;

(c) 分式值等于 1.

3. 分式 $\dfrac{a+3}{a-4}$ 和 $\dfrac{(a+3)(a-3)}{(a-4)(a-3)}$ 的值是不是永远相等?

4. 先化简下列各式，再求它的值。

(a) $\dfrac{3a^2-ab}{8a^2-6ab+b^2}$, 其中 $a=-\dfrac{2}{3}, \quad b=\dfrac{1}{2}$

(b) $\dfrac{75(x-2y)^3(2x-y)^2}{15(y-2x)^2(2y-x)}$, 其中 $x=4.5, \quad -y=1.7$

5. 计算下列各式:

(a) $\dfrac{a}{a^2-1}+\dfrac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\dfrac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\dfrac{2a^3}{a^4-1}$

(b) $a-\dfrac{a^2-b^2}{a}+\dfrac{a^2+b^2}{a}-b$

(c) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}$

(d) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$

(e) $\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-5x+6}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}$

(f) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-ab+b^2}\cdot\dfrac{a^3+b^3}{(a-b)x^2}\div\dfrac{b^2-a^2}{x^2}$

(g) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x^3-1}\div\dfrac{1}{x^2+x+1}$

(h) $\left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)\div\dfrac{x^2-x+1}{x}$

(i) $\left(1+\dfrac{a}{x}+\dfrac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\dfrac{a}{x}\right)-\dfrac{2x^3-a^3}{x^3}$

(j) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-2\right)\div\dfrac{x}{x-y}$

6. 化简 $F(x)=-\dfrac{1}{1-\dfrac{1+x}{x-\dfrac{1}{x}}}$ ，又 x 取何值能使 $F(x)$ 的值等于 2？$F(x)$ 的值能等于 1 吗？为什么？

7. 解下列各方程：

(a) $\dfrac{1-3x}{1+3x}+\dfrac{3x+1}{3x-1}=\dfrac{12}{1-9x^2}$

(b) $\dfrac{7}{x^2+x}-\dfrac{1}{x-x^2}=\dfrac{6}{x^2-1}$

(c) $5+\dfrac{96}{x^2-16}=\dfrac{2x-1}{x+4}-\dfrac{3x-1}{4-x}$

(d) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}$

(e) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-\dfrac{9}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$

(f) $\dfrac{x^2+3x+1}{4x^2+6x-1}-\dfrac{3\left(4x^2+6x-1\right)}{x^2+3x+1}-2=0$

8. 解下列关于 x 的方程：

(a) $x+\dfrac{1}{x}=a+\dfrac{1}{a}$

(b) $\dfrac{1}{b+x}=\dfrac{3b}{2x^2}-\dfrac{1}{x}$

(c) $\dfrac{x+m}{x-n}+\dfrac{x+n}{x-m}=2 \quad (n+m\neq 0)$

(d) $\dfrac{2x}{x+b}+\dfrac{x}{x-b}=\dfrac{b^2}{4x^2-4b^2}$

9. 解下列应用题：

(a) 甲组人数比乙组人数多 10 人，甲、乙两组人数的比是 $\dfrac{5}{4}$，求两组人数。

(b) 甲做 90 个机器零件所用的时间和乙做 120 个机器零件所用的时间相同，已知两人每小时一共做 35 个机器零件，两人每小时各做多少个？

(c) 马车后轮周长比前轮周长大 20 厘米，行了 2500 米时，前轮比后轮多转了 60 转。求前后轮的周长各等于多少米？（精确至 0.01 米）

(d) 一辆汽车原定在若干小时内以某一定的速度到达相距 300 里的目的地，如果每小时加快 10 里，那么可以早到 $1\dfrac{1}{2}$ 小时。求原定的速度。

(e) 甲组的工作效率比乙组高 25%, 因此甲组加工 2000 个零件所用的时间比乙组加工 1800 个零件所用的时间还少 30 分钟。甲，乙两组每小时各能加工多少个零件?

(f) 某工厂有一个水池，上面装有甲、乙两个水管，如果把两个水管都打开，1 小时 20 分就可以把水池注满，若打开甲管 10 分钟和打开乙管 12 分钟，就可以注满水池的 $\frac{2}{15}$，求单独一个水管注满水池各需多少时间?

(g) 汽船顺流、逆流各走 48 公里，共经 5 小时。如果水流速度每小时 4 公里，求汽船在静水中的速度。

(h) 一架飞机顺风飞行 1380 公里和逆风飞行 1020 公里所需的时间相等，已知这架飞机的速度是每小时 300 公里。求风的速度。

第二节　二次根式与根式方程

我们已经学习过平方根，也就是如果 $x^2 = a$, 那么 x 叫做 a 的二次方根，简称平方根。正数的平方根是两个相反的数，记作 $\pm\sqrt{a}$; 0 的平方根是 0; 负数在实数范围内没有平方根。

正数的正平方根叫做算术平方根；零的算术平方根是零，记作 $\sqrt{0} = 0$。

一、二次根式和二次根式的变形

表示平方根的式子，叫做**二次根式**。

例如：$\sqrt{3}$,　$-2\sqrt{7}$,　$-\sqrt{x}\ (x \geq 0)$,　$\sqrt{b^2+1}$ 等都是二次根式。

由第三章学过的平方根与算术平方根的意义，可以得到二次根式的基本性质：

1. $(\sqrt{a})^2 = a \quad (a \geq 0)$
2. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$
3. $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0)$
4. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0,\ b > 0)$

利用二次根式的基本性质，可以进行化简。

例 6.31 化简 $\sqrt{(x-2)^2}$

解：

$$\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geq 2\\ 2-x, & x<2\end{cases}$$

例 6.32 化简 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$

解：

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-2xy+y^2}&=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|\\ &=\begin{cases}x-y, & x\geq y\\ y-x, & x<y\end{cases}\end{aligned}$$

例 6.33 化简 $\sqrt{(x^2+1)^2}$

解： $\sqrt{(x^2+1)^2}=x^2+1$

例 6.34 如果 a、b 为非负实数，试化简下列各式：

$$\sqrt{a^4},\qquad \sqrt{0.01a^2b^6},\qquad \sqrt{a^{2n}}$$

(n 是自然数)。

解：

1. $\sqrt{a^4}=\sqrt{(a^2)^2}=a^2$
2. $\sqrt{0.01a^2b^6}=\sqrt{(0.1ab^3)^2}=0.1ab^3$
3. $\sqrt{a^{2n}}=\sqrt{(a^n)^2}=a^n$

从例 6.34 可见，如果被开方数中的字母与数字因数都为非负实数，那么当被开方数的指数是偶数的时候可以化去根号。

练习

1. 回答下列各题：

   (a) 289 的平方根等于什么？

   (b) 0 的平方根等于什么？

(c) 361 的算术平方根等于什么?

(d) $\sqrt{\dfrac{144}{169}}$ 等于什么?

(e) $-\sqrt{0.0064}$ 等于什么?

(f) -0.01 有没有平方根?

2. 化简下列各式:

(a) $\sqrt{(-3)^2}$　　(c) $\sqrt{(a-1)^2}$

(b) $\sqrt{x^2}$　　(d) x^2-6x+9

3. (a) 如果 $\sqrt{a^2}=-a$, a 是怎样的数?

(b) 式子 $\sqrt{-a}$ 在什么条件下有意义（在实数范围内)?

4. x 取何值下列各式有意义?

(a) $\sqrt{x-3}$　　(c) $\sqrt{a^2+1}$

(b) $\sqrt{x+4}$　　(d) $\sqrt{-x^2}$

5. 如果 x, y 是非负实数，化去下列各式的根号。

(a) $\sqrt{0.04x^2y^4}$

(b) $\sqrt{121x^4y^6}$

(c) $\sqrt{\dfrac{1}{16}x^6y^8}$

(d) $\sqrt{x^{2n}y^{4m}}$　(n, m 为自然数)

应当指出，如果没有特殊说明，根号内的字母取值，都要使二次根式有意义。

利用二次根式的基本性质，还可以进行二次根式的变形。

(一) 因式的外移和内移

如果在二次根式的根号内，有的因式能够开得尽，那么，就可以用它的算术根代替而移到根号外面；反过来，也可以将根号外面的正因式，平方以后移到根号里面去。

如果被开方数是代数和的形式，那么先分解因式，变形为积的形式，再移因式到根号外面来。

例 6.35 把下列各根号内的因式移到根号外面来。

1. $\sqrt{x^5}$
2. $\sqrt{8a^3b^2}\quad(b\geq 0)$
3. $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$
4. $\sqrt{\dfrac{c}{a^2b^2}}\quad(a>0,\ b>0)$

解:

1. $\sqrt{x^5}=\sqrt{x^4\cdot x}=\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{x}=x^2\sqrt{x}$
2. $\sqrt{8a^3b^2}=\sqrt{4a^2b^2\cdot 2a}=\sqrt{4a^2b^2}\cdot\sqrt{2a}=2ab\sqrt{2a}$
3. $\sqrt{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=\sqrt{(a+b)^3}=(a+b)\sqrt{a+b}$
4. $\sqrt{\dfrac{c}{a^2b^2}}=\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a^2b^2}}=\dfrac{\sqrt{c}}{ab}=\dfrac{1}{ab}\sqrt{c}$

例 6.36 把下列各根号外面的因式移到根号里面去。

$$2a\sqrt{a},\qquad (m-n)\sqrt{m}\ \ (m-n\geq 0),\qquad -x\sqrt{a}\ \ (x>0)$$

解:

1. $2a\sqrt{a}=\sqrt{(2a)^2\cdot a}=\sqrt{4a^3}$
2. $(m-n)\sqrt{m}=\sqrt{(m-n)^2\cdot m}$
3. $-x\sqrt{a}=-\sqrt{ax^2}$

这里要注意，$-x\sqrt{a}=\sqrt{a(-x)^2}=\sqrt{ax^2}$ 是不正确的，因为 $-x<0$, 不能进行内移。

（二）化去根号内的分母

在根号内的分母中，如果有开得尽的因式，就可以用它的算术根代替而移到根号外面；如果有开不尽的因式，就可以利用分式的基本性质，将分子、分母乘以同一个适当的非零代数式，使分母的各因式都能开得尽，从而用其算术根代替，并移到根号外面，使根号里面不含有分母。

例 6.37 化去根号里面的分母

$$\sqrt{\frac{3}{50}},\qquad \sqrt{\frac{c}{a^2b}}\quad(a>0,\ b>0),\qquad \sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}\quad(a>b)$$

解：

1. $\sqrt{\dfrac{3}{50}}=\sqrt{\dfrac{3\times 2}{50\times 2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{100}}=\dfrac{1}{10}\sqrt{6}$

2. $\sqrt{\dfrac{c}{a^2b}}=\dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{bc}{b^2}}=\dfrac{1}{ab}\sqrt{bc}$

3.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}&=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}}\\&=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\\&=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}}\\&=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}\\&=\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}\end{aligned}$$

练习

1. 把下列根号内的因式移到根号外面来：

(a) $\sqrt{27}$

(b) $\sqrt{98}$

(c) $\sqrt{0.32}$

(d) $\sqrt{0.0003}$

(e) $\sqrt{x^3}$

(f) $\sqrt{16a}$

(g) $\sqrt{121a^4}$

(h) $\sqrt{\dfrac{x^2y}{16}}\quad (x\geq 0)$

(i) $\sqrt{x^2+6x+9}\quad (x\geq 3)$

(j) $\sqrt{x^3+6x^2+12x+8}$

2. 把下列各根号外面的因式移到根号里面去：

(a) $5\sqrt{2}$

(b) $2\sqrt{7}$

(c) $x\sqrt{y}\quad (x\geq 0)$

(d) $\dfrac{2}{5}\sqrt{a}$

(e) $2m\sqrt{mn}\quad (m\geq 0)$

(f) $3x\sqrt{\dfrac{y}{3x}}\quad (x>0)$

3. 化去根号里面的分母。

(a) $\sqrt{1\frac{1}{2}}$

(b) $a\sqrt{\frac{a}{b}}\quad (b>0)$

(c) $\sqrt{\frac{a^3y}{b^4z^3}}\quad (a\geq 0,\ b>0)$

(d) $(x+y)\sqrt{\frac{1}{x+y}}\quad (x+y>0)$

(e) $\frac{4a}{3m}\sqrt{\frac{3m}{2a}}\quad (a>0)$

(f) $(m-n)\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}\quad (m-n>0)$

二、最简二次根式与同类根式

如果一个二次根式具备下列两个条件称为最简二次根式。

1. 被开方数每一个因数的指数都小于开方次数 2；
2. 根号内不含分母。

如根式 $\sqrt{2a}$, $3\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{4x^2+1}$ 等都是最简二次根式；如 $\sqrt{a^3b}$, $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ 等就不是最简二次根式。

例 6.38 把下列根式化成最简根式。

1. $\sqrt{4x^3y^5}\quad (x\geq 0)$
2. $\sqrt{8x^3y^4}\quad (x\geq 0)$
3. $xy\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)}\quad (x>0,\ y>0).$

解：

1. $\sqrt{4x^3y^5}=2xy^2\sqrt{xy}$
2. $\sqrt{8x^3y^4}=2xy^2\sqrt{2x}$

3.

$$
\begin{aligned}
xy\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)} &= xy\sqrt{\frac{(x+y)^2}{xy}} \\
&= xy\sqrt{\frac{(x+y)^2xy}{x^2y^2}} \\
&= (x+y)\sqrt{xy}
\end{aligned}
$$

如果几个二次根式化成最简根式以后，被开方数相同，那么这几个二次根式叫做**同类根式**。

例如：$2\sqrt{5}$、$\dfrac{1}{3}\sqrt{5}$、$a\sqrt{5}$ 等都是同类根式；而 $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$、$\sqrt{x}$ 与 $\sqrt{y}$、$\sqrt{a}$ 与 $\sqrt{7a}$ 等都不是同类根式。

例 6.39　把下列各根式化为最简根式，并指出哪些是同类根式？

$$
\sqrt{2},\qquad \sqrt{75},\qquad \sqrt{\frac{1}{50}},\qquad \sqrt{\frac{1}{27}},\qquad \sqrt{3}
$$

$$
\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3}\quad (b>0),\qquad 6b\sqrt{\frac{a}{2b}}\quad (b>0)
$$

解： 由于：

$$
\begin{aligned}
\sqrt{75} &= \sqrt{25\times 3} = 5\sqrt{3} \\
\sqrt{\frac{1}{50}} &= \frac{1}{50}\sqrt{25\times 2} = \frac{1}{10}\sqrt{2} \\
\sqrt{\frac{1}{27}} &= \frac{1}{27}\sqrt{9\times 3} = \frac{1}{9}\sqrt{3} \\
\frac{2}{3}\sqrt{8ab^3} &= \frac{2}{3}\times 2b\sqrt{2ab} = \frac{4b}{3}\sqrt{2ab} \\
6b\sqrt{\frac{a}{2b}} &= \frac{6b}{2b}\sqrt{2ab} = 3\sqrt{2ab}
\end{aligned}
$$

因此：$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\dfrac{1}{50}}$、$\sqrt{75}$ 与 $\sqrt{\dfrac{1}{27}}$ 与 $\sqrt{3}$、$\dfrac{2}{3}\sqrt{8ab^3}$ 与 $6b\sqrt{\dfrac{a}{2b}}$ 分别是同类根式。

同类根式与同类项一样，可以进行合并，通常称为**合并同类根式**。其方法也与合并同类项类似，只要先化为最简根式，再运用分配律把同类根式各根号前的因式相加即可。

例 6.40　合并下列各式中的同类根式：

1. $\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\sqrt{5}+\dfrac{1}{3}\sqrt{5}+\dfrac{1}{6}\sqrt{5}$

2. $\sqrt{12}-\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{18}$

3. $5\sqrt{ab}-x\sqrt{ab}+y\sqrt{ab}$

解：

1.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+6\frac{1}{6}\right)\sqrt{5}\\&=2\sqrt{5}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}+3\sqrt{2}\\&=\left(2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{3}+3\sqrt{2}\\&=\frac{7}{6}\sqrt{3}+3\sqrt{2}\end{aligned}$$

3.

$$\text{原式}=(5-x+y)\sqrt{ab}$$

练习

1. 把下列各根式化成最简根式：

   (a) $\sqrt{72}$

   (b) $\sqrt{17^2-8^2}$

   (c) $\sqrt{9a^3bc^3}\quad(a\geq 0, c\geq 0)$

   (d) $\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

   (e) $\sqrt{\frac{y^2}{x}}(y\geq 0)$,

   (f) $\sqrt{\frac{(a+b)^4}{(a-b)^8}}$

   (g) $\sqrt{x^3-2x^2+x}\quad(x>1)$;

   (h) $ab\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$

2. 下列各组根式是不是同类根式？

(a) $5\sqrt{125}$ 和 $3\sqrt{45}$

(b) $2\sqrt{a^3b^3c}$, $\frac{1}{2}\sqrt{4ab^5c}$ 和 $3\sqrt{\frac{c}{ab}}$

(c) $\sqrt{2x}$, $\sqrt{2a^2x^3}$ $(a>0)$ 和 $\sqrt{50xy^2}$ $(y>0)$.

3. 合并下列各式中的同类根式:

(a) $6\sqrt{3}+\sqrt{0.12}+\sqrt{48}$

(b) $\frac{1}{2}\sqrt{a}-2\sqrt{b}+4\sqrt{a}+3\sqrt{b}-\frac{3}{2}\sqrt{a}$

(c) $\sqrt{125}+\sqrt{\frac{2}{3}}-4\sqrt{216}+3\sqrt{\frac{1}{5}}$

(d) $2a\sqrt{3ab^2}-\left(\frac{b}{5}\sqrt{27a^3}-2ab\sqrt{\frac{3a}{4}}\right)$ $(b>0)$

三、二次根式的运算

二次根式的运算与整式的运算类似。

(一) 加法和减法法则

先把根式化成最简根式，再合并同类根式。

例 6.41 计算 $\left(\sqrt{24}-\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{6}\right)$

解:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{6}\\&=\left(2-\frac{2}{3}+1\right)\sqrt{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}\\&=\frac{7}{3}\sqrt{6}-\sqrt{2}\end{aligned}$$

例 6.42 计算 $\frac{2x}{3}\sqrt{18x}+12x\cdot\sqrt{\frac{x}{8}}-x^2\sqrt{\frac{2}{x^3}}$

解:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=2x\sqrt{2x}+3x\sqrt{2x}-\sqrt{2x}\\&=(2x+3x-1)\sqrt{2x}\\&=(5x-1)\sqrt{2x}\end{aligned}$$

练习

1. 计算下列各式

   (a) $\sqrt{0.2}+\sqrt{125}$

   (b) $2\sqrt{\frac{1}{27}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{1\frac{1}{3}}$

   (c) $\sqrt{3ax^2}-\sqrt{3a^3x^2}$

   (d) $\sqrt{\frac{y}{3x^2}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{y}{3}}$

   (e) $\sqrt{2ab}-2b\sqrt{\frac{a}{2b}}$

   (f) $2\sqrt{25a}-3\sqrt{a^2b}+5\sqrt{36a}-2\sqrt{a^2b}$

   (g) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{18}}-\sqrt{48}\right)$

   (h) $(5\sqrt{a}-3\sqrt{25a})+(2\sqrt{35a}+2\sqrt{9a})$.

2. 下列计算是否正确？为什么？

   (a) $\sqrt{3}+\sqrt{97}=10_3$

   (b) $5+\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

   (c) $\sqrt{2x}+\sqrt{14x}=\sqrt{16x}=4\sqrt{x}$

   (d) $\frac{\sqrt{50}+\sqrt{8}}{2}=\sqrt{25}+\sqrt{4}=5+2=7$

由二次根式的基本性质 3、4，反过来运用，就可以得到二次根式的乘、除法法则。

（二）乘法和除法法则

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\quad(a\geq 0,\ b\geq 0),\qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\quad(a\geq 0,\ b>0)$$

并化为最简根式。一般地，还可以写成以下公式：

$$m\sqrt{a}\cdot n\sqrt{b}=mn\sqrt{ab}$$

$$m\sqrt{a}\div n\sqrt{b}=\frac{m\sqrt{a}}{n\sqrt{b}}=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{a}{b}}$$

并将结果化为最简二次根式。

例 6.43 计算下列各式:

1. $\sqrt{4x^3}\cdot\sqrt{\dfrac{3x}{2}}$
2. $3\sqrt{5a}\cdot 4\sqrt{10b}$
3. $\left(\sqrt{xy}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{1}{xy}}\right)\cdot\sqrt{xy}$

解:

1. $\sqrt{4x^3}\cdot\sqrt{\dfrac{3x}{2}}=\sqrt{4x^3\cdot\dfrac{3x}{2}}=\sqrt{6x^4}=x^2\sqrt{6}$
2. $3\sqrt{5a}\cdot 4\sqrt{10b}=3\times 4\sqrt{50ab}=12\times\sqrt{2ab}=60\sqrt{2ab}$
3. $\left(\sqrt{xy}+2\sqrt{\dfrac{y}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{1}{xy}}\right)\cdot\sqrt{xy}=xy+2y-x+1$

例 6.44 计算下列各式:

1. $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}\right)$
2. $\left(6\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)^2$
3. $\left(x\sqrt{a}-y\sqrt{b}\right)^2$

解:

1. 原式 $=42-14\sqrt{6}+15\sqrt{6}-30=12+\sqrt{6}$
2. 原式 $=\left(6\sqrt{3}\right)^2+2\cdot6\sqrt{3}\cdot3\sqrt{6}+\left(3\sqrt{6}\right)^2=108+108\sqrt{2}+54=162+108\sqrt{2}$
3. 原式 $=ax^2+by^2-2xy\sqrt{ab}$

例 6.45 计算下列各式:

1. $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$
2. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\sqrt{xy}+\sqrt{ab}\right)$
3. $\left(4\sqrt{\dfrac{a}{2}}+6\sqrt{\dfrac{b}{4}}\right)\cdot\left(\sqrt{8a}-3\sqrt{b}\right)$

解:

1. 原式 $=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=7-3=4$
2. 原式 $=\left(\sqrt{xy}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=xy-ab$

3. 原式 $=\left(2\sqrt{2a}+3\sqrt{b}\right)\cdot\left(2\sqrt{2a}-3\sqrt{b}\right)=\left(2\sqrt{2a}\right)^2-\left(3\sqrt{b}\right)^2=8a-9b$

由例 6.45 中，我们发现：计算结果都不再含有根式。

两个含有根式的式子相乘，如果它们的乘积中不再含有根式，那么，这两个式子就叫做**互为有理化因式**。

例如，$\sqrt{7}+\sqrt{3}$ 与 $\sqrt{7}-\sqrt{3}$；$\sqrt{x+y}$ 与 $\sqrt{x+y}$；$a+2\sqrt{b}$ 与 $a-2\sqrt{b}$；$\sqrt{xy}+\sqrt{ab}$ 与 $\sqrt{xy}-\sqrt{ab}$；$2\sqrt{2a}+3\sqrt{b}$ 与 $2\sqrt{2a}-3\sqrt{b}$ 等等，都是互为有理化因式。

练习

计算下列各题：

1. (a) $\sqrt{6x}\cdot\sqrt{2x}$
   (b) $2\sqrt{2a}\cdot\sqrt{24ab}$
   (c) $\dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{5a}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{0.4}{a}}$
   (d) $(\sqrt{10}-2\sqrt{15})\cdot\sqrt{5}$
   (e) $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})\cdot\sqrt{xy}$

2. (a) $(4\sqrt{3}+5\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
   (b) $(a+\sqrt{ab})\cdot(b+\sqrt{ab})$
   (c) $\left(\sqrt{mn}+\sqrt{\dfrac{m}{n}}-m\right)\cdot\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}}-n\right)$

3. (a) $(7+3\sqrt{2})\cdot(\sqrt{18}-7)$
   (b) $(2\sqrt{ax}+5\sqrt{by})\cdot(2\sqrt{ax}-5\sqrt{by})$
   (c) $(\sqrt{x+3}-\sqrt{2x})\cdot(\sqrt{x+3}+\sqrt{2x})$
   (d) $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$
   (e) $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2$
   (f) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$
   (g) $(1+\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(1-\sqrt{x}+\sqrt{y})$

4. 写出以下各根式的有理化因式：

$$3\sqrt{7},\quad 7-\sqrt{11},\quad 5\sqrt{3}+\sqrt{10},\quad \sqrt{2x^2-1},\quad x+x\sqrt{y}$$

$$a^2-b\sqrt{a+1},\qquad \sqrt{x+2}-\sqrt{x}$$

例 6.46 计算下列各式：

1. $\sqrt{104} \div \sqrt{13}$
2. $9\sqrt{45} \div \frac{3}{2}\sqrt{1\frac{1}{2}}$
3. $18\sqrt{2x^3} \div 3\sqrt{3y}$
4. $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}} \div \frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}$

解：

1. 原式 $= \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{104}{13}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
2. 原式 $= 9 \times \frac{2}{3}\sqrt{45 \times \frac{2}{3}} = 6\sqrt{30}$
3. 原式 $= \frac{18\sqrt{2x^3}}{3\sqrt{3y}} = 6\frac{2x^3}{3y} = \frac{2x}{y}\sqrt{6x}$
4. 原式 $= -6 \times \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2} \cdot \frac{2bx^2}{a-b}} = -\frac{15}{2}\sqrt{4b} = -15\sqrt{b}$

在二次根式的除法运算中，总是先用法则将分子、分母并入一个根号内，再将根号里边的分母化去，使结果成为最简根式。

在实际的运算中，有时先把分母中的根号化去再进行计算，较为简便，例如，计算 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 的近似值（精确到 0.01）时，就可以先把分母中的根号化去再计算：

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx \frac{2.449}{2} \approx 1.23$$

同样，在计算 $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ （精确到 0.01）的近似值时，也可以先将分母中的根号化去再计算，较为简便。

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ &\approx 1.732 + 1.414 = 3.146 \approx 3.15\end{aligned}$$

把分母中的根号化去，叫做**分母有理化**。分母有理化的方法是：根据分式的基本性质，只要将分子、分母同乘以分母的有理化因式，就可以达到目的。

在根式的除法中，先进行有理化分母，往往是较简便的。

例 6.47 计算：

1. $\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab\right)\div\sqrt{ab}$
2. $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$
3. $\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\div\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$
4. $\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}$
5. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}\quad(a>b)$

解：

1.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{\left(\sqrt{a^3b}+\sqrt{ab^3}-ab\right)\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab\cdot\sqrt{ab}}}\\&=\frac{1}{ab}\left(a^2b+ab^2-ab\sqrt{ab}\right)\\&=a+b-\sqrt{ab}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{(a^2-b^2)\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}}\\&=\frac{a^2-b^2}{a+b}\cdot\sqrt{a+b}\\&=(a-b)\sqrt{a+b}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{4\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\\&=\frac{\left(4\sqrt{3}+5\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}\\&=\frac{12+4\sqrt{6}+5\sqrt{6}+10}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}\\&=22+9\sqrt{6}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{2\cdot(3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}\\&=\frac{6-4\sqrt{2}}{3^2-(2\sqrt{2})^2}\\&=\frac{6-4\sqrt{2}}{9-8}=6-4\sqrt{2}\end{aligned}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})} \\
&= \frac{a+b+2\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}+a-b}{(\sqrt{a+b})^2-(\sqrt{a-b})^2} \\
&= \frac{2a+2\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a-b}}{2b} \\
&= \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}
\end{aligned}
$$

例 6.48 计算（精确到 0.01):

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

2. $2 \div \left(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

解:

1.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\right]\left[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\right]} \\
&= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+3-\sqrt{15}}{2\sqrt{6}} \\
&= \frac{(3+\sqrt{6}-\sqrt{15})\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \\
&= \frac{3\sqrt{6}+6-\sqrt{90}}{12} = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{6}-\sqrt{10}\right) \\
&\approx \frac{1}{4}(2+2.449-3.162) \approx 0.32
\end{aligned}
$$

2.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \frac{2\left[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]}{\left[(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]\cdot\left[(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]}\\
&= \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}\\
&= \frac{2-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}\\
&= \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\\
&= \frac{\sqrt{2}-2-\sqrt{6}}{-2}\\
&\approx -\frac{1}{2}(1.414-2-2.449) \approx 1.52
\end{aligned}$$

练习

1. 计算下列各式：

(a) $\sqrt{ab} \div \sqrt{3a}$

(b) $5n \div 3\sqrt{mn}$

(c) $\sqrt{9a^2} \div \sqrt{\dfrac{a}{9}}$

(d) $25a^2x \div 5a\sqrt{x}$

(e) $(x\sqrt{y} - y\sqrt{x}) \div \sqrt{xy}$

(f) $\left(\sqrt{x} - \sqrt{\dfrac{x}{2}}\right) \div \sqrt{x}$

(g) $\left(\sqrt{mn} + \sqrt{\dfrac{m}{n}} - m\right) \div \sqrt{\dfrac{m}{n}}$

(h) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$

(i) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}) \div (\sqrt{5}-\sqrt{2})$

(j) $(a+\sqrt{ab} \div (b+\sqrt{ab}))$

2. 将下列各式分母有理化：

(a) $\dfrac{5y^2}{\sqrt{75y}}$

(b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

(c) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

(e) $\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}$

(f) $\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}}$

3. 试一试：你能把下列各式的分子有理化吗？

(a) $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{4}$

(b) $\dfrac{b(\sqrt{x^2-a^2}-x)}{a}$

四、根式方程

已经学过的整式方程和分式方程统称为有理方程。在实际中我们还会遇到像 $\sqrt{x^2-1}=2$, $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}=7$ 等方程，这些**根号里含有未知数的方程叫做根式方程**。方程 $\sqrt{2}x^2+3x-\sqrt{5}=0$, $\dfrac{x}{\sqrt{2}-1}=3$, 虽然带有根号，但根号内不含有未知数，所以它们不是根式方程。

在根式方程中，由于未知数包含在根号内，因而，未知数只允许取使二次根式有意义的值。例如，根式方程 $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2$ 中，未知数 x 只允许在"能使 $x-1\geq 0$, 且 $3-x\geq 0$"的范围内取值。

解根式方程主要是设法把原方程变形为有理方程。我们通常采用的方法是方程两边平方，逐步使含有未知数的根式有理化。

例 6.49　解方程 $\sqrt{x+7}=x-5$

解： 两边平方得：

$$(\sqrt{x+7})^2=(x-5)^2$$

整理后，得方程：$x^2-11x+18=0$ 解出：$x_1=9,\qquad x_2=2$

验根：把 $x=9$ 代入原方程两边。

$$\text{左式}=\sqrt{9+7}=4$$
$$\text{右式}=9-5=4$$

$\therefore\quad x=9$ 是原方程的根。

把 $x=2$ 代入原方程两边。

$$\text{左式}=\sqrt{2+7}=3$$
$$\text{右式}=2-5=-3$$

两边的值不等。

$\therefore\quad x=2$ 是原方程的增根（舍去）。

$\therefore\quad$ 原方程的解集是：$\{9\}$。

通过上例可以看出：根式方程两边平方后，就得到一个新的整式方程，这个新方程的根可能是原根式方程的根；也可能是原方程的增根。但为什么会产生增根呢?

观察原方程 $\sqrt{x+7}=x-5$, 不难知道：未知数 x 的取值范围，既要使 $x+7\geq 0$, 又要使 $x-5\geq 0$, 这样才能使原方程中的根式有意义。

但是，在原方程两边平方后所得的新方程 $(\sqrt{x+7})^2=(x-5)^2$ 中，未知数 x 的取值范围，只要求使 $x+7\geq 0$ 就能使新方程有意义。这就是说，新方程中未知数的取值范围扩大了。

事实上，方程两边平方 $(\sqrt{x+7})^2=(x-5)^2$ 可以变形为：

$$(\sqrt{x+7})^2-(x-5)^2=0$$

即：

$$\left[\sqrt{x+7}-(x-5)\right]\left[\sqrt{x+7}+(x-5)\right]=0$$

这就相当于得到以下两个方程：

$$\sqrt{x+7}-(x-5)=0, \qquad \sqrt{x+7}+(x-5)=0$$

这样一来，解整式方程：$x+7=(x-5)^2$，就相当于解以上两个根式方程，但原题所给出的根式方程只是其中的一个。因此，解的过程中就可能产生增根。

很明显，在例 6.49 中，原方程的增根 $x=2$ 就是方程 $\sqrt{x+7}=-(x-5)$ 的根。

由以上分析，可以得出以下结论：

方程两边平方，实际上就是方程两边乘以同一个含有未知数的因式，这样，未知数的取值范围就可能扩大，就可能产生原方程的增根。这时，就必须进行验根，把增根舍去。

例 6.50 解方程 $\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11}=7$

分析： 解根式方程时，利用“**移项规则**”可以把所含根式比较均匀地分列于等号两边，然后再逐步平方。这样比较简便。

解：

$$\begin{aligned} \sqrt{x+10}&=7-\sqrt{x-11} && \text{(移项)}\\ x+10&=49-14\sqrt{x-11}+x-11 && \text{(两边平方)}\\ \sqrt{x-11}&=2 \\ x-11&=4 && \text{(两边平方)}\\ x&=15 \end{aligned}$$

验根：把 $x=15$ 代入原方程：

$$\begin{aligned} \text{左式}&=15+10+15-11=5+2=7\\ \text{右式}&=7 \end{aligned}$$

$\therefore$　原方程的解集是 $\{15\}$。

例 6.51　解方程 $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{5x-6}=0$

解：

$$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6} \qquad \text{(移项)}$$

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{3x-5}+3x-5=5x-6 \qquad \text{(两边平方)}$$

$$\sqrt{2x-3}\cdot\sqrt{3x-5}=1(2x-3)(3x-5) \quad =1 \quad \text{(两边平方)}$$

$$6x^2-19x+14=0$$

$\therefore$　$x_1=2,\quad x_2=\dfrac{7}{6}$

把 $x=2$ 代入原方程：

$$\text{左式}=1+1-2=0$$

$$\text{右式}=0$$

$\therefore$　$x=2$ 是原方程的根。

把 $x=\dfrac{7}{6}$ 代入原方程，因为 $\sqrt{2x-3}=\sqrt{-\dfrac{2}{3}}$，被开方数是负数，使原方程无意义，所以 $x=\dfrac{7}{6}$ 是增根（舍去）。

$\therefore$　原方程的解集是 $\{2\}$。

由以上例题，告诉我们：

解根式方程进行验根时，可以把有理方程的每一个根分别代入原根式方程的每一个根号内，如果代入后，至少有一个根号内得负数，就说明这个根使原方程无意义，肯定是增根，应该舍去（如例 6.51）；如果代入后，使原方程中的每一个根号内都为非负数，就说明这个根能使原方程中的根式有意义，但还不能保证能使原方程两边相等，仍然有可能是增根（如例 6.49），所以还应该继续代入原方程两边，进行检验。

总之，解根式方程的一般步骤是：

1. 移项，使方程中含未知数的根式比较均匀的分列于等号的两边；
2. 方程两边同时平方，逐次化去根号，得到有理方程；
3. 解有理方程；
4. 验根。

练习

1. 解下列方程:

(a) $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$　　(c) $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$

(b) $\sqrt{x^2-3x+4}+5=x$　　(d) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}-x=3$

2. 不解方程判别下列各方程是否有解

(a) $\sqrt{3x-2}=-4$

(b) $\sqrt{2x+1}=-(x^2+1)$

(c) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}=0$

(d) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}=-3$

例 6.52　解方程 $x^2-2x+6\sqrt{x^2-2x+6}=21$

解: 设 $\sqrt{x^2-2x+6}=y$, 则 $x^2-2x+6=y^2$。原方程可变形为 $y^2+6y-27=0$

$\because\quad y_1=3,\qquad y_2=-9$

这就是 $\sqrt{x^2-2x+6}=3$ 或 $\sqrt{x^2-2x+6}=-9$ ，其中 $\sqrt{x^2-2x+6}$ 是算术根，所以不能等于 -9。

$\therefore\quad \sqrt{x^2-2x+6}=-9$ 无解。

解方程

$$\sqrt{x^2-2x+6}=3 \tag{6.4}$$

两边平方:

$$x^2-2x+6=9\quad\Rightarrow\quad x^2-2x-3=0 \tag{6.5}$$

$\therefore\quad x_1=3,\qquad x_2=-1$

验根：把 $x_1=3$, $x_2=-1$, 分别代入方程检验，可知这两个根都是原方程的根。

$\therefore$　原方程的解集是：$\{3,\ -1\}$。

在上题求解过程中，由方程 (6.4) 变形为方程 (6.5) 有产生增根的可能，所以，验根时只须代入方程 (6.4) 检验就可以。

练习

解下列方程

1. $x^2+8x+\sqrt{x^2+8x}=12$

2. $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 2} - 4 = 0$

例 6.53 解方程：$\sqrt{3x-1} + \dfrac{2}{\sqrt{3x-1}} = \sqrt{5x+3}$

解： 方程两边乘以 $\sqrt{3x-1}$ 得：

$$3x - 1 + 2 = \sqrt{5x+3} \cdot \sqrt{3x-1}$$

即：

$$3x + 1 = \sqrt{(5x+3)\cdot(3x-1)}$$

两边平方：$(3x+1)^2 = (5x+3)(3x-1)$，整理得：

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$\therefore \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -\dfrac{2}{3}$

经检验，当 $x = -\dfrac{2}{3}$ 时，原方程所含的根号内都是负数，因而 $x = -\dfrac{2}{3}$ 是增根，应舍去。

$x = 1$ 是原方程的根。

$\therefore$　原方程的解集是：$\{1\}$。

例 6.54 解方程 $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$

解： 分母有理化得：

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-(1-x^2)} - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-(1-x^2)} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

就是

$$\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x^2} - \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

去分母：

$$2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3}$$
$$4(1-x^2) = 3$$
$$4x^2 = 1$$

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{1}{2}, \quad x_2 = -\dfrac{1}{2}$

经检验知，$x_1 = \dfrac{1}{2}$ 和 $x_2 = -\dfrac{1}{2}$ 都是原方程的根。

原方程的解集是 $\left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\}$

练习

解下列方程:

1. $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=2$

2. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}+2=0$

习题 6.2

1. 求下列各式的值:

   (a) $\sqrt{(a-b)^2}$, 当 $a=15,\ b=9$

   (b) $\sqrt{(2m-3n)^2}$, 当 $m=4,\ n=5$

   (c) $\sqrt{b^2-6b+9}$, 当 $0<b<3$.

2. 化简并讨论下列各式:

   (a) $\sqrt{x^2}+x$

   (b) $x+\sqrt{1-2x+x^2}$

   (c) $(m-n)\sqrt{\dfrac{m+n}{(m-n)^2}}$

   (d) $\dfrac{1}{x-1}\sqrt{(x-1)\left(x^2-1\right)}$

3. 化简下列各式:

   (a) $2\sqrt{9a^2bc^3}$

   (b) $\sqrt{12(x+y)^3}$

   (c) $\sqrt{\dfrac{32c^3}{9a^5b}}$

   (d) $\sqrt{25m^3+50m^2}$

   (e) $\sqrt{\dfrac{ac^2+bc^2}{a-b}}$

   (f) $\sqrt{27x^2-9x^3}\quad(x<0)$

4. 计算下列各式:

   (a) $\sqrt{ab}+2\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\sqrt{\dfrac{1}{ab}}-6\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

   (b) $0.1\sqrt{200}-2\sqrt{0.12}+4\sqrt{0.5}+0.4\sqrt{108}$

   (c) $a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\quad(a>b>0)$

(d) $\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)-\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{b}{a}+2\right)$

5. 计算下列各式:

(a) $\left(\sqrt{24}-3\sqrt{1.5}+2\sqrt{2\dfrac{2}{3}}\right)\cdot\sqrt{2}$

(b) $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{n}{m}}-\dfrac{ab}{n}\sqrt{mn}+\dfrac{a^2}{b^2}\sqrt{\dfrac{m}{n}}\right)\cdot a^2b^2\sqrt{\dfrac{n}{m}}$

(c) $10a^2\sqrt{ab}\cdot 5\sqrt{\dfrac{b}{a}}\cdot 15\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

(d) $(\sqrt{27}+\sqrt{28})(\sqrt{12}-\sqrt{63})$

(e) $\left(\dfrac{1}{4}\sqrt{a-b}+2\sqrt{a}\right)\left(\dfrac{1}{4}\sqrt{a-b}-2\sqrt{a}\right)$

(f) $\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2$

6. 计算下列各式:

(a) $\left(\dfrac{3x}{2}\sqrt{\dfrac{x}{y}}-0.4\sqrt{\dfrac{3}{xy}}+\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{xy}{2}}\right)\div\dfrac{4}{15}\sqrt{\dfrac{3y}{2x}}$

(b) $\dfrac{3\sqrt{5}+\sqrt{32}}{3\sqrt{5}-\sqrt{32}}$

(c) $\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}\quad(a>1)$

(d) $\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}$

(e) $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}\quad(x>a)$

(f) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}-\sqrt{12}-3\sqrt{2}}$

(g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

(h) $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

7. 计算下列各式:

(a) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$,

(c) $\dfrac{\sqrt{y+1}-\sqrt{y}}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{y-1}+\sqrt{y}}{\sqrt{y-1}-\sqrt{y}}$

(d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

8. 解下列方程:

(a) $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{x+5}$
(b) $\sqrt{x^2-3x+1}+7=2x$
(c) $\sqrt{1-x}+\sqrt{12+x}=5$
(d) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$
(e) $\sqrt{y-1}-\sqrt{y+2}=\sqrt{5y-1}$
(f) $\sqrt{3+\sqrt{x}}=\sqrt{9-5\sqrt{x}}$

9. 解下列方程:

(a) $\dfrac{\sqrt{y}+\sqrt{y-3}}{\sqrt{y}-\sqrt{y-3}}=2y-5$

(b) $\dfrac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}}=2x+3$

(c) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}-4\sqrt{x^2-a^2}=0\quad(a\neq 0)$

10. 解下列方程:

(a) $7x^2-4\sqrt{7x^2+1}-31=0$

(b) $x^2-3x+\sqrt{2x^2-7x+6}=\dfrac{x}{2}-3$

(c) $3x^2-6x-2\sqrt{x^2-2x+4}+4=0$

(d) $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}=3\dfrac{1}{3}$

本章内容要点

本章是在学习多项式（整式）的基础上，进一步学习了分式及其运算、根式及其运算和分式方程、根式方程。

一、多项式，分式，根式等，都是含有数字和字母并涉及加、减、乘、除、乘方、开平方六种代数运算的式子，这些式子统称为代数式。其中，凡只涉及字母的加、减、乘、乘方运算的式子，叫做多项式（整式）；凡涉及字母的除法运算且字母含在除式中的式子，叫做分式；分式与整式，又统称为有理式。

凡涉及字母或数字的开方运算的式子叫做根式，根号内含有字母的根式，又称为关于这个字母的无理式。如 $\sqrt{2}$ 是根式，但不是无理式，$\sqrt{x}$，$\sqrt{x-1}$，$\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$ 等都是无理式。

关于代数式的概念，可以列表如下：

$$\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{多项式（即整式）}\\\text{分式}\end{cases}\\\text{无理式}\end{cases}$$

二、如果有多项式 $f(x), g(x)$ 且 $g(x)$ 的次数大于零次，那么分式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 有以下基本性质：

$$\frac{f(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot h(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\div h(x)}{g(x)\div h(x)}$$

其中，$h(x)$ 是非零多项式。

利用基本性质，可以进行分式的通分和约分。分式的四则运算和分数的四则运算是一样的。

三、表示平方根的式子，叫做二次根式。

二次根式有以下基本性质：

- $\left(\sqrt{a}\right)^2=1 \quad (a\geq 0)$
- $\sqrt{a^2}=|a|$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad (a\geq 0,\ b\geq 0)$
- $\sqrt{a\div b}=\sqrt{a}\div\sqrt{b} \quad (a\geq 0,\ b>0)$

利用基本性质，二次根式可以进行以下变形：

1. 因式的内移与外移，即

$$m\sqrt{a}=\sqrt{am^2} \quad (m>0)$$
$$\sqrt{a^2m}=a\sqrt{m} \quad (a>0)$$

2. 化去根号内的分母或化去分母中的根号——都是有理化分母的内容，即

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{a\times b}{b\times b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b} \qquad (b>0)$$

或

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b} \qquad (b>0)$$

如果一个二次根式符合条件：

1. 被开方各因数的指数小于 2；
2. 根号内不含分母（即分母已经有理化）。

那么这个二次根式就叫做最简二次根式。

如果几个二次根式化为最简根式以后，根号内的式子相同，那么，这几个二次根式就叫做同类根式。同类根式和同类项一样可以合并。

二次根式的四则运算和多项式的运算很类似。只要注意化为最简根式和合并同类根式就行了。

四、分式方程与根式方程的解法要点是：设法转化为整式方程求解。由于它们的特点不同，转化方法也就不同。

分式方程的特点是：分母中含有未知数。因而，要利用分式的基本性质或等式的基本性质，两边乘以同一个整式（一般是取各分母的最低公倍式），约简后转化为一个整式方程。

根式方程的特点是：根号内含有未知数，因而，就要方程两边同次乘方（如：同平方）后，利用根式的基本性质转化为有理方程，并进而转化为整式方程。

但是，一定要注意，在解分式方程与根式方程的过程中，由于各自的转化方式都能引起未知数允许取值范围的扩大，所以都可能产生增根。因此，无论是解分式方程，还是解根式方程，最后的验根都是不可缺少的，验根，将起到“识别真假”“去伪存真”的作用。

五、已学过的方程有：整式方程、分式方程、根式方程，统称为代数方程。其系统可列表如下：

$$\text{代数方程}\begin{cases}\text{有理方程}\begin{cases}\text{整式方程}\begin{cases}\text{一次方程}\\\text{二次方程}\\\text{高次方程}\end{cases}\\\text{分式方程}\end{cases}\\\text{根式方程}\end{cases}$$

复习题六

1. 约简下列各分式：

(a) $\dfrac{x^4+x^3-x-1}{x^4-x^3+x-1}$ (b) $\dfrac{x^4-2x^3-2x-1}{x^5-2x^3-2x^2-3x-2}$

2. 判别 $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3-x^2-x-1}$ 是不是最简分式，为什么？

3. 计算下列各式：

(a) $\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)\div(x+y)+x\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)$

(b) $\dfrac{m^2+n^2}{m^2+2mn+n^2}+\dfrac{2}{mn}\div\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^2$

(c) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$　　(d) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}$

4. (a) 已知 $a=-2, b=-1$. 求 $\left(a-\dfrac{a^2}{a+b}\right)\left(\dfrac{a}{a-b}-1\right)\div\dfrac{b^2}{a+b}$ 的值。

   (b) 已知 $x=-2,\ y=\dfrac{1}{3}$, 求 $\dfrac{4x^2+12xy+9y^2-16}{4x^2-9y^2-4(2x-3y)}$ 的值。

5. 解下列方程:

   (a) $\dfrac{3}{1+3x}\left(x-\dfrac{x}{1+x}\right)+\dfrac{x}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{1+3x}\right)=1$

   (b) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+1=0$

   (c) $x^2+5x-5=\dfrac{6}{x^2+5x}$

6. 解下列关于 x 的方程:

   (a) $\dfrac{5a^2}{4x^2-a^2}=\dfrac{2x}{2x-a}-\dfrac{x}{2x+a}$

   (b) $\dfrac{x}{3a+x}-\dfrac{x}{x-3a}=\dfrac{a^2}{9a^2-x^2}$

7. 当 a 取何值时，下列各式的值最小?

$$\sqrt{8+a},\qquad \sqrt{4-a^2},\qquad \sqrt{16-a}$$

8. (a) 已知 $x=25, y=15$，计算:

$$\sqrt{x^3+x^2y+\frac{1}{4}xy^2}+\sqrt{\frac{1}{4}x^3+x^2y+xy^2}$$

   (b) 已知 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$，其中 a,b 都是正数，

   求 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 的值。

9. 已知 $\sqrt{3}\approx 1.732$, 求 $\dfrac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 的值.

10. 化简下列各式:

   (a) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\qquad (x\geqslant 1)$

   (b) $\sqrt{3+2\sqrt{5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}}}}$

11. 设 $x=\sqrt{3+\sqrt{5}},\quad y=\sqrt{3-\sqrt{5}}$,
求 $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}$-的值.

12. 关于 x 的二次方程 $(a+1)(x^2-x)=(a-1)(x-2)$ 的两个根互为相反数, 取其正根求 $\sqrt{4x^2-12x+9}$ 的值。

13. (a) 若 $a+\dfrac{1}{b}=1,\quad b+\dfrac{1}{c}=1$. 求证 $abc+1=0$.
    (b) 若 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{z}=a,\quad \dfrac{z}{y}+\dfrac{y}{x}=b,\quad \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y}=c$
    求证 $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)=8$。

14. 解方程 $\dfrac{x^3+2}{x^2-x+1}+\dfrac{x^3-2}{x^2+x+1}=2x$

15. 试证明:
    (a) 两个真分式的和仍是真分式;
    (b) 两个真分式的差也是真分式。

第七章　代数运算的初步应用

我们讨论了多项式的基本运算，而这些运算的应用很广泛，在第二章、第三章中解代数方程式的原理，实质上就是多项式的运算。本章就多项式运算的另一些初步应用加以讨论，以扩大同学们的视野，进一步体会代数运算的基本精神和方法。

第一节　求和公式

一、等差数列求和

在第一章中，我们利用运算性质，曾经简捷地计算过:

$$1+2+3+\cdots+100=5050$$
$$1+3+5+\cdots+99=2500$$

在这两串数 $1,2,\ldots,100$ 和 $1,3,5,\ldots,99$ 中都有一个特点: 从第二个数起；每个数与它前边的一个数的差都相等。象第一个数串中，这个差为 1；第二个数串中，这个差为 2。

象这样有次序地排好的一串数，其中任一数与它前一个数的差都相等。我们就把这样一串数叫做**等差数列**。这个“相等的差”，叫做这个数列的**公差**。数列中的每一个数，叫做这个数列的一项。排头的一个数，叫首项，排尾的一个数叫末项。

可见，**等差数列的任一项，都应等于它前面的一项加上公差**。

若用 a_1 表示等差数列的首项，d 表示公差，那么这个等差数列的每一项可写成:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & a_1+d, & a_1+2d, & \cdots, & a_1+99d, & \cdots. \\ | & | & | & & | & \\ \text{首项,} & \text{第二项,} & \text{第三项,} & \cdots, & \text{第 100 项,} & \cdots. \end{array}$$

一般地，这个数列的第 n 项可表为：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

由此，一个等差数列，只要知道它的首项和公差，就可以写出它的任何一项来。

例 7.1 1. 写出首项为 2, 公差为 5 的等差数列的各项；

2. 写出首项为 2, 公差为 -1 的等差数列的各项。

解：

1. 首项为 2, 公差为 5 的等差数列各项为：$2, 7, 12, \dots, 2+5(n-1), \dots$
2. 首项为 2, 公差为 -1 的等差数列的各项为：$2, 1, 0, -1, -2, \dots, 2+(n-1)\cdot(-1), \dots$

例 7.2 如果一等差数列的首项是 5, 公差是 2, 那么它的第 10 项，第 15 项各是多少？

解： $\because$ 第 n 项为 $a_n = a + (n-1)d$

这里 $a_1 = 5$, $d = 2$, $n = 10, 15$。

$\therefore$ 第 10 项应为：

$$\begin{aligned} a_{10} &= a_1 + (10-1)d \\ &= 5 + 9 \times 2 = 23 \end{aligned}$$

同样，第 15 项应为：

$$a_{15} = 5 + (15-1) \times 2 = 33$$

练习

1. 写出下列等差数列的公差，并求出它的第 100 项是多少？如何表示它的第 n 项？
   (a) $3, -1, -5, -9, \dots$
   (b) $5, 7, 9, 11, \dots$
2. 如果等差数列的第 10 项是 100, 公差是 10, 你能知道这个数列的首项是多少吗？
3. 如果等差数列的首项是 2, 第 10 项是 20, 你能知道这个数列的公

差是多少吗?

4. 如果以 1 为首项，2 为末项，那么在中间插入 9 项，构成一个等差数列。你能写出这个数列的各项来吗?

等差数列前 n 项的和如何求呢? 下边我们就利用数系运算的通性，导出它的求和公式。

例 7.3 求 $1+2+3+\cdots+n$

解： 设

$$1+2+3+\cdots+n=S \tag{7.1}$$

则利用交换律，可以改写为

$$n+\cdots+3+2+1=S \tag{7.2}$$

将等式 (7.1)，(7.2) 相加，得

$$\underbrace{(1+n)+\cdots+[(n-2)+3]+[(n-1)+2]+(n+1)}_{n\text{项}}=2S$$

即：$n(n+1)=2S$，　$\therefore\quad S=\dfrac{n(n+1)}{2}$

因此：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

当 $n=100$ 时，就是：

$$1+2+3+\cdots+100=\frac{100(100+1)}{2}=5050$$

一般地，对于等差数列 $a_1,a_1+d,a_1+2d,\ldots,a_1+(n-1)d,\ldots$ 的前 n 项求和公式，可作如下推导：

设 $S=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$，又 $S=[a_1+(n-1)d]+[a_1+(n-2)d]+[a_1+(n-3)d]+\cdots+a_1$，两式相加，可得：

$$2S=\underbrace{[2a_1+(n-1)d]+[2a_1+(n-1)d]+\cdots+[2a_1+(n-1)d]}_{n\text{项}}$$

即：$2S=n[2a_1+(n-1)d]$，　$\therefore\quad S=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

这就是**等差数列前 n 项和的公式**。

其中，a 为首项，可以是任意数；d 为公差，可以是任意数；n 为项数，只能是自然数。

例 7.4　求 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

解： 这里 $a_1=1$, $d=2$, 共 n 项，因此：

$$S=\frac{n[2+(n-1)\times 2]}{2}=n^2$$

即：$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$。

例 7.5　如果等差数列的首项为 3，前 25 项的和为 1000，试求这个数列的公差是多少?

解： 将 $a_1=3$, $n=25$, $S=1000$, 都代入求和公式：

$$S=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

可得：$1000=\dfrac{25(6+24d)}{2}$。

$$\therefore \quad d=\frac{74}{24}=\frac{37}{12}$$

例 7.6　试求：$\dfrac{1}{2}+1+1\dfrac{1}{2}+\cdots+100$

分析： 这个和式中的各项，显然是一个等差数列，其首项为 $\dfrac{1}{2}$, 公差为 $\dfrac{1}{2}$, 末项为 100, 但一共是多少项呢？可以由等差数列的第 n 项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 求出来。

解： 将首项 $a_1=\dfrac{1}{2}$ 公差 $d=\dfrac{1}{2}$ 以及末项 $a_n=100$ 都代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 中，得

$$100=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}$$

解出 $n=200$，这就是说，和式中共有 200 项。因此：

$$\begin{aligned}S&=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}\\&=\frac{200\left[2\times\frac{1}{2}+199\times\frac{1}{2}\right]}{2}\\&=100+199\times 50=10050\end{aligned}$$

练习

1. 求 $2+4+6+\cdots+50$
2. 求 $7+5+3+\cdots+(-101)$

3. 求 $1+(1+n)+(1+2n)+\cdots+(1+n^2-n)$

如果把等差数列前 n 项和的公式变形，又可以得出：

$$\begin{aligned} S &= \frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2} \\ &= \frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2} \end{aligned}$$

$\therefore \quad S=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

因此，等差数列的求和公式，又可以叙述为：等差数列前 n 项和，等于首项加末项，乘以项数，再除以 2。

二、等比数列求和

如果在一串按次序排好的数中，从第二个数起，每一数与它前一个数的比都相等。那么，这串数就叫做**等比数列**。这个相等的比值，叫这个数列的**公比**。其中的每一个数，叫做等比数列的一项，头一项称为首项，最后一项称为末项。

不难看出，等比数列的任一项，都应等于它的前一项乘以公比。

若以 a_1 表示首项，q 表示公比，则可以写出等比数列的每一项分别是：

$$\begin{array}{cccccccc} a_1, & a_1q, & a_1q^2, & \cdots, & a_1q^9, & \cdots, & a_1q^{100}, & \cdots. \\ | & | & | & & | & & | & \\ \text{第一项，} & \text{第二项，} & \text{第三项，} & \cdots, & \text{第 10 项，} & \cdots, & \text{第 101 项，} & \cdots. \end{array}$$

一般地，等比数列的第 n 项是：

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$$

例 7.7 写出首项是 2，公比分别是 2，-1 的等比数列。

解： 首项是 2, 公比是 2 的等比数列是：

$$2,4,8,\ldots,2^n,\ldots$$

首项是 2, 公比是 -1 的等比数列是：

$$2,-2,2,\ldots,(-1)^{n-1}\cdot 2,\ldots$$

例 7.8 一等比数列的首项为 3, 公比是 $\dfrac{1}{2}$，求它的第 10 项及第 20 项。

解： $\because \quad a_n = a_1 q^{n-1}$.

当 $n = 10$ 时可得第 10 项：

$$a_{10} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512}$$

当 $n = 20$ 时可得第 20 项：

$$a_{20} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{3}{2^{19}} = \frac{3}{524288}$$

练习

1. 写出下列等比数列的公比及第 100 项、第 n 项。

   (a) $4, 12, 36, 108, \ldots$

   (b) $5, -10, 20, -40, \ldots$

   (c) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$

2. 如果给你两个数 4 与 25，你能在它们中间插入一个数，使这三个数成等比数列吗？它们的公比是多少？

例 7.9 求 $3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \cdots + 3 \cdot 4^{n-1}$

解： 这是一个等比数列的前 n 项求和的问题，可设：

$$S = 3 + 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{n-1}$$

则有

$$4S = 3 \times 4 + 3 \times 4^2 + \cdots + 3 \times 4^{n-1} + 3 \times 4^n$$

两式相减得：

$$\begin{aligned} (4-1)S &= 3 \times 4^n - 3 \\ S &= \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1 \end{aligned}$$

一般地，对于等比数列 $a_1, a_1 q, a_1 q^2, \ldots, a_1 q^{n-1}, \ldots$ 的前 n 项求和，我们可作如下推导：

设 $S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1}$，则：

$$qS = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$$

两式相减：$(1-q)S=a_1-a_1q^n$。

当 $q\neq 1$ 时，

$$S=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

这就是等比数列的前 n 项求和公式。

而当 $q=1$ 时，这个等比数列为：$a_1,a_1,a_1,\ldots,a_1,\ldots$

显然前 n 项和 $S=na_1$。

例 7.10　求 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$

解： $\because\quad a_1=1,\quad q=\frac{1}{3},\quad n=4$

$$\therefore\quad S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1-\frac{1}{3^4}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{80}{81}}{\frac{2}{3}}=\frac{40}{27}$$

例 7.11　如果等比数列前两项的和是 $1\frac{1}{2}$，而这两项的差是 $\frac{1}{2}$，试求这数列的前 10 项和。

解： 设等比数列的首项为 a_1，第二项为 a_1q，则由已知得：

$$\begin{cases} a_1+a_1q=1\frac{1}{2} \\ a_1-a_1q=\frac{1}{2} \end{cases}$$

两式相加得：$2a_=2,\qquad \therefore\quad a_1=1$

两式相减得：$2a_1q=1,\qquad \therefore\quad a_1q=\frac{1}{2}$

已知 $a_1=1,\qquad \therefore\quad q=\frac{1}{2}$。

因此，前 10 项和应为：

$$S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{1\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}$$

练习

求和：

1. $3+6+12+24+\cdots+3072$

2. $1-2+4-8+\cdots-512+1024$

3. $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1} \qquad (x \neq 1)$

习题 7.1

1. 求下列等差数列的公差及第 10 项、第 n 项。

   (a) $5,\ 11,\ 17,\ 23, \ldots$

   (b) $2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots$

   (c) $-13,\ -11,\ -9,\ -7, \ldots$

   (d) $-\frac{3}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ 1, \ldots$

   (e) $(4a-3b),\ (2a+b),\ 5b,\ (9b-2a), \ldots$

   (f) $(a+3m),\ (a+m),\ (a-m),\ (a-3m) \ldots$

2. 求下列等差数列指定的部分和：

   (a) $2,\ 7,\ 12, \ldots$ 的前 10 项；

   (b) $15,\ 8,\ 1, \ldots$ 的前 15 项；

   (c) $\frac{1}{6},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{2}, \ldots$ 的前 14 项；

   (d) $(x-y),\ x,\ (x+y), \ldots$ 的前 30 项；

   (e) $(x-y),\ y,\ (-x+3y), \ldots$ 的前 25 项。

3. 如果已知等差数列的首项 a_1, 项数 n, 末项 a_n, 试求这些数列的和 S_n。

   (a) $a_1=3, \quad a_{13}=61,$

   (b) $a_1=15, \quad a_{11}=-25,$

   (c) $a_1=3.14, \quad a_{22}=5.68$

4. 在下列各题中，插入指定个数的中间项，使它们与给定两数成等差数列。

   (a) 在 -9 与 5 之间，插入一个数；

   (b) 在 7 与 25 之间，插入 5 个数；

   (c) 在 13 与 -5 之间，插入 4 个数；

   (d) 在 28 与 -26 之间，插入 8 个数。

5. 求下列等比数列的公比及第 10 项，第 n 项。

   (a) $4,\ 4,\ 4,\ 4,\ldots$

   (b) $4,\ 12,\ 36,\ 108,\ldots$

   (c) $-24,\ 12,\ -6,\ 3,\ -\dfrac{3}{2},\ldots$

   (d) $5x^3,\ 10x^2,\ 20x,\ 40,\ldots \qquad (x \neq 1)$

   (e) $\dfrac{x}{y},\ x,\ xy,\ xy^2,\ldots \qquad (y \neq 1)$

6. 求下列等比数列的指定部分和：

   (a) $1,\ 3,\ 9,\ 27,\ldots$ 的前 10 项；

   (b) $2,\ -2,\ 2,\ -2,\ldots$ 的前 101 项；

   (c) $625,\ 125,\ 25,\ 5,\ 1,\ldots$ 的前 10 项；

   (d) $56,\ -28,\ 14,\ -7,\ldots$ 的前 10 项。

7. 试在 $\dfrac{1}{2}$ 与 $\dfrac{9}{8}$ 之间，插入一个数，使它们成等比数列。并求出它们的公比。

8. 如果有一数列是：$100,\ 95,\ 90,\ 85,\ldots$ 你能知道这一数列的前多少项和最大？并求出这个最大值。

第二节　待定系数法

待定系数法是一种重要的数学方法。在本册书的前几章内容中，已经利用待定系数法解决过许多问题，例如：多项式除法，分解因式，寻求根与系数的关系等。本节将在此基础上，进一步说明待定系数法的意义和原理，以及它在代数里的其它应用。

一、待定系数法及其根据

先从我们已经熟悉的具体例子谈起。

例 7.12 试求 $f(x) = 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2$ 除以 $g(x) = x^2 + 1$ 的商式和余式。

解： 由多项式除法可知，其商式必定是一次式，其余式至多是一次式。因而可设商式 $Q(x) = ax + b$, 余式 $R(x) = cx + d$。由除法恒等式，可得

$$4x^3 + 7x^2 + 6x + 2 = (ax + b)(x2 + 1) + (cx + d)$$

即：$4x^3+7x^2+6x+2=ax^3+bx^2+(a+c)x+b+d$

比较两边同类项系数，得

$$\begin{cases} a=4 \\ b=7 \\ a+c=6 \\ b+d=2 \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=4, \quad b=7, \quad c=2, \quad d=-5$$

因此，$f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商式 $Q(x)$、余式 $R(x)$ 分别为：

$$Q(x)=4x+7, \qquad R(x)=2x-5$$

例 7.13 已知多项式 ax^3+bx^2+cx+d 能被 x^2+p 整除，求证：$ad=bc$。

分析： 只要根据已知条件，设法建立恒等关系，从中找出已知系数 a,b,c,d 之间的关系，就可达到目的。

证明： 由于三次多项式 ax^3+bx^2+cx+d, 能被二次式 x^2+p 整除，因而，其商式必为一次式，不妨设商式为 $mx+n$ (m,n 为待定系数)。这样，可以得出恒等式：

$$ax^3+bx^2+cx+d=(mx+n)(x^2+p)$$

即：$ax^3+bx^2+cx+d=mx^3+nx^2+pmx+pn$

比较等式两边同类项的系数，得

$$\begin{cases} a=m & (7.3) \\ b=n & (7.4) \\ c=pm & (7.5) \\ d=pn & (7.6) \end{cases}$$

利用这个方程组，消去待定系数 m,n 和已知系数 p, 就可以找出 a,b,c,d 的关系。

将 (7.3), (7.4) 分别代入 (7.5), (7.6)；再由 (7.5), (7.6) 可得：

$$\frac{c}{a}=m=\frac{d}{b}$$

$\therefore \quad ad=bc$

象以上例题的解题方法，叫做待定系数法（或叫未定系数法），这个方法的特点是引进待定系数（未知的），列出一个含有待定系数的恒等式，然后根据多项式恒等的性质，比较等式两边的同类项系数，得出一个方程组。解这个方程组，求出待定系数，或消去待定系数而找出原来已知系数之间所存在的关系，使问题得以解决。

这个方法的主要根据是两个多项式恒等的性质，即

定理

如果两个多项式恒等，那么，这两个多项式的同类项系数都一定对应相等。

也就是说，如果

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$$

那么，$a_n=b_n$，$a_{n-1}=b_{n-1},\ldots,a_1=b_1$，$a_0=b_0$

证明： 由于 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\equiv b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

移项，合并同类项可得：

$$(a_n-b_n)x^n+(a_{n-1}-b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)\equiv 0$$

所以，$a_n=b_n$，$a_{n-1}=b_{n-1},\ldots,a_1=b_1$，$a_0=b_0$

练习

1. 多项式 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2+mx+n$ 如果能被二次三项式 x^2-2x+1 整除，试求 m,n 的值。
2. 如果 ax^2+bx+c 能被 $px+q$ 整除。试求 a,b,c 和 p,q 之间应具有什么关系？

二、待定系数法的应用

待定系数法在代数上有许多应用，除我们已经学习过的“求商式及余式、分解因式、寻求方程的根与系数的关系”等内容外，以下将学习另外一些应用。从中进一步领会这个方法的要点和重要。

(一) 把多项式表示成另一个多项式的各次幂的形式

在代数中，有时需要将一个多项式，表示成次数较低的另一个多项式的各次幂的形式。例如，在习题 4.3 第 9 题中，就是把多项式 $3x^3-10x^2+13$ 表示成 $x-2$ 的各次幂的形式的:

$$3x^3-10x^2+13=A(x-2)^3+B(x-2)^2+C(x-2)+D$$

当时，采用的是逐次使用综合除法的方法，其实这类问题也可以用待定系数法解决。

例 7.14 试用 $(x-1)$ 的各次幂表示出多项式 $2x^3-x^2+2x+3$

解: 设 $2x^3-x^2+2x+3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 因此:

$$\begin{aligned}&2x^3-x^2+2x+3\\&\qquad=ax^3-3ax^2+3ax-a+bx^2-2bx+b+cx-c+d\end{aligned}$$

即: $2x^3-x^2+2x+3=ax^3+(b-3a)x^2+(3a-2b+c)x-a+b-c+d$

比较两边同类项系数，得

$$\begin{cases}a=2\\b-3a=-1\\3a-2b+c=2\\-a+b-c+d=3\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$a=2,\quad b=5,\quad c=6,\quad d=6$$

因此，$2x^3-x^2+2x+3=2(x-1)^3+5(x-1)^2+6(x-1)+6$

应该指出，待定系数法在解以上这种问题时，并不是最简便的。使用习题 3.4 第 9 题所提示的综合除法要简便一些。

其实，这类问题如果用换元法变形，会更简便。这就是:

设 $x-1=y$, 则 $x=y+1$, 代入原多项式中，得

$$\begin{aligned}2x^3-x^2+2x+3&=2(y+1)^3-(y+1)^2+2(y+1)+3\\&=2y^3+6y^2+6y+2-y^2-2y-1+2y+2+3\\&=2y^3+5y^2+6y+6\end{aligned}$$

再将原设 $x-1=y$ 代入上式右边，得:

$$2x^3-x^2+2x+3=2(x-1)^3+5(x-1)^2+6(x-1)+6$$

练习

用三种方法解下列各题：

1. 把 $3x^3-10x^2+13$ 表示成 $x-2$ 的各次幂的形式。
2. 用 $(x+1)$ 的各次幂表示多项式 x^4-1。

（二）求多项式与求方程的解

如果给出 n 次多项式在 x 取 $n+1$ 个不同数值时所对应的值，就可以用待定系数法求出这个多项式的表达式，进而还可以求出其它值。

解：

例 7.15　已知 $f(1)=-1$, $f(2)=4$, $f(3)=-3$, 试求二次多项式 $f(x)$ 的表达式以及 $f(10)$。

解： 设 $f(x)=ax^2+bx+c$, 则由已知条件可知：

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=-1, \\ f(2)=4a+26+c=4, \\ f(3)=9a+36+c=-3. \end{cases}$$

解这个方程组，得 $a=-6,\quad b=23,\quad c=-18$。

因此，所求二次多项式为

$$f(x)=-6x^2+23x-18$$
$$f(10)=-388$$

如果给出一元三次或四次方程的一个或两个根，那么用除法可以得到一个一元二次方程，进而求出其余的两个根。这样的方程也可以利用待定系数法来解。

例 7.16　已知方程 $x^4-9x^2+12x-4=0$ 有两个根 1 与 2, 试求这个方程的另两个根。

分析： 由于 1 与 2 是已知方程的两个根，根据余式定理的推论可知，$x^4-9x^2+12x-4$ 含有因式 $(x-1)(x-2)$. 又因为 $x^4-9x^2+12x-4$ 的首项系数是 1, 所以可设它的另一个因式是 x^2+ax+b. 其中 a,b 是待定系数。

解： 由已知可设 $x^4-9x^2+12x-4=(x-1)(x-2)(x^2+ax+b)$

在以上恒等式中，分别取 $x=0,-1$，得：

$$\begin{cases}-4=26\\-24=6(1-a+b)\end{cases}$$

解这个方程组，得 $b=-2,\quad a=3$。

再解方程 $x^2+3x-2=0$，得：$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

因此，原方程的另两个根是 $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$，$\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$。

如果给出一元三次或四次方程的根有某种给定的关系，那么，利用方程的根与系数间的关系，余式定理的推论等，就可以解所给的方程，这样的方程也可以用待定系数法来解。

例 7.17 已知方程：$2x^3-3x^2-8x+12=0$ 有两个互为相反数的根。试求这个方程的所有的根。

解： 由已知，可设所给方程的根为：$a,-a,b$。根据余式定理推论，则有

$$\begin{aligned}2x^3-3x^2-8x+12&=2(x-a)(x+a)(x-b)\\&=2x^3-2bx^2-2a^2x+2a^2b\end{aligned}$$

比较等式两边同类项的系数，得

$$\begin{cases}-3=-2b & (7.7)\\-8=-2a^2 & (7.8)\\12=2a^2b & (7.9)\end{cases}$$

由 (7.7), (7.8) 解出：$a=\pm2,\quad b=\dfrac{3}{2}$。代入 (7.9) 都能够适合。所以，原方程的根是 $2,-2,\dfrac{3}{2}$。

练习

用待定系数法解下列各题：

1. 已知 $f(1)=-4$, $f(0)=-5$, $f(-1)=-14$, $f(2)=1$。试求三次多项式 $f(x)$ 的表达式及 $f(10)$。

2. 已知 $g(1)=g(2)=g(3)=0$, $g(0)=6$, $g(-1)=12$。试求四次多项式 $g(x)$ 表达式及它的另一个根。

3. 已知方程 $x^3-x^2-8x+12=0$ 有两个根相等，试解这个方程。

4. 已知方程 $x^4-6x^3+8x^2+8x-16=0$ 有两个根都是 2，试求这个方程的另两个根。

（三）把一个分式化为部分分式

在分式的运算和变形中，有时需要把一个真分式化为另外几个真分式的代数和的形式，例如：

$$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2x-1}$$

其中，两个比较简单的真分式 $\frac{1}{x-1}$，$\frac{3}{2x-1}$ 就叫做原真分式 $\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}$ 的**部分分式**。

把一个分化成部分分式的代数和，对今后学习高等数学很有用途。以下将举例说明如何用待定系数法，化分式为部分分式的和。

因为一个假分式都可以化成一个整式与一个真分式的和，所以只要研究真分式的情形就可以了。

首先我们分析一下，$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}$ 是怎样化成 $\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2x-1}$ 的？

因为原分式的分母是互质的两个多项式 $x-1$ 与 $2x-1$ 的乘积，因此它就是 $x-1$ 和 $2x-1$ 的最低公倍式。所以原分式一定是这样两个真分式 $\frac{a}{x-1}$ 与 $\frac{b}{2x-1}$ 的代数和，这里 a,b 是待定的常数。

如果恒等式

$$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{2x-1} \tag{7.10}$$

成立，那么就一定可以求出 a,b 的值。

由 (7.10)

$$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}=\frac{a(2x-1)+b(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$$

由于两个相等的分式的分母相等，因此它们的分子也一定相等。

$\therefore\quad 5x-4=a(2x-1)+b(x-1)$，即：

$$5x-4=(2a+b)x-(a+b)$$

比较等式两边同类项的系数，得到：

$$\begin{cases}2a+b=5\\a+b=4\end{cases}$$

解得：$a=1, b=3$。代入等式 (7.10) 得到

$$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{2x-1}$$

一般地说，如果 P、Q 是互质的两个因式，那么真分式 $\dfrac{A}{PQ}$ 可以化为形如 $\dfrac{B}{P}$ 与 $\dfrac{C}{Q}$ 两个真分式的和，即 $\dfrac{B}{P}$ 与 $\dfrac{C}{Q}$ 为 $\dfrac{A}{PQ}$ 的部分分式。

例 7.18 化分式 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ 为部分分式。

分析： 因为原分式分母中的因式 $2x-1$ 与 $(3+x)(3-x)$ 是互质的因式。所以，原分式可以化成下面两个真分式的和，即

$$\frac{a}{2x-1}+\frac{ex+f}{(3+x)(3-x)}$$

这里 a, e, f 都是待定系数。

这两个分式都是真分式，也就是分子的次数小于分母的次数。第一个分式的分母是一次，所以分子可以用常数 a 表示，第二个分式的分母是二次，所以分子应用一次式 $ex+f$ 表示。

但由前面分析知道等式 $\dfrac{ex+f}{(3+x)(3-x)}=\dfrac{b}{3+x}+\dfrac{c}{3-x}$ 可以成立。

因此 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}$ 可以化成 $\dfrac{a}{2x-1}+\dfrac{b}{3+x}+\dfrac{c}{3-x}$ 的形式。

解： 设：

$$\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{3+x}+\frac{c}{3-x} \tag{7.11}$$

$\therefore$ 有恒等式

$$23x-11x^2=a(3+x)(3-x)+b(2x-1)(3-x)+c(2x-1)(3+x) \tag{7.12}$$

- 令 $x=\dfrac{1}{2}$，代入恒等式 (7.12) 得：$\dfrac{35}{4}=a\cdot\dfrac{35}{4}$

  $\therefore \quad a=1$

- 令 $x=-3$，代入恒等式 (7.12) 得：$-168=(-42)b$

  $\therefore \quad b=4$

- 令 $x=3$，代入恒等式 (7.12) 得：$-30=45c$

  $\therefore \quad c=-\dfrac{2}{3}$

$$\therefore\quad \frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}=\frac{1}{2x-1}+\frac{4}{3+x}-\frac{2}{3(3-x)}$$

例 7.19 化分式 $\dfrac{4x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x-2)}$ 为部分分式。

分析： 因为原分式的分母中的因式 $x-1$ 与 x^2+x-2 不是互质的，所以先把原分式变形为：$\dfrac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}$ 这里 $(x-1)^2$ 与 $x+2$ 是互质的。

原分式可以化成这样两个真分式的和：$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{bx+m}{(x-1)^2}$

又由于

$$\begin{aligned}\frac{bx+m}{(x-1)^2}&=\frac{b(x-1)+b+m}{(x-1)^2}\\&=\frac{b(x-1)}{(x-1)^2}+\frac{b+m}{(x-1)^2}\\&=\frac{b}{x-1}+\frac{b+m}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

因为 b,m 都是待定常数，所以 $b+m$ 也是待定常数，不妨用 c 表示 $b+m$。这样原分式就可以化成：$\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$ 的形式。

解： $\dfrac{4x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x-2)}=\dfrac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}$

设 $\dfrac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{(x-1)^2}$

所以，$4x^2+3x-1=a(x-1)^2+b(x-1)(x+2)+c(x+2)$。

因为这是恒等式，x 可以任意取值，所以，我们不妨：

- 令 $x=1$, 得 $6=3c$, $\therefore\quad c=2$
- 再令 $x=-2$, 得 $9=9a$, $\therefore\quad a=1$
- 再令 $x=0$, 得 $-1=a-2b+2c$, $\therefore\quad b=3$

因此：

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)(x^2+x-2)}&=\frac{4x^2+3x-1}{(x-1)^2(x+2)}\\&=\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

例 7.20 化 $\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)^3}$ 为部分分式。

解： 设 $2x^2-x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c=[a(x-1)+b](x-1)+c$

累次作综合除法可以求得 a、b、c：

$$
\begin{array}{rrrr|l}
 & 2 & -1 & +1 & 1\\
 & & +2 & +1 & \\ \hline
 & 2 & +1 & \multicolumn{1}{|r}{+2 \longleftarrow c} & \\
 & & +2 & & \\ \cline{1-3}
a \longrightarrow & 2 & \multicolumn{1}{|r}{+3 \longleftarrow b} & &
\end{array}
$$

$\therefore\quad 2x^2-x+1=2(x-1)^2+3(x-1)+2$

因此：

$$
\begin{aligned}
\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^3}&=\frac{2(x-1)^2+3(x-1)+2}{(x-1)^3}\\
&=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}
\end{aligned}
$$

注意：

- $\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)^3}$ 可以化成 $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{(x-1)^3}$ 的形式。
- 也可以用待定系数法解，但并不简便。

例 7.21　化 $\dfrac{42-19x}{(x-4)(x^2+1)}$ 为部分分式。

说明： x^2+1 在实数范围内已不能分解因式，它与 $x-4$ 是互质因式。

解： 设 $\dfrac{42-19x}{(x-4)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x-4}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$

$\therefore\quad 42-19x=a(x^2+1)+(bx+c)(x-4)$ 是一个恒等式。

令 $x=4$，得 $a=-2$。

再把 $a=-2$ 代入上式，整理得到：

$$42-19x=(b-2)x^2+(c-4b)x-(4c+2)$$

比较等式两边同类项的系数，得

$$
\begin{cases}
b-2=0 & (7.13)\\
c-4b=-19 & (7.14)\\
-(4c+2)=42 & (7.15)
\end{cases}
$$

由 (7.13), (7.14) 解出 $b=2,\quad c=-11$。代入 (7.15) 都能够适合。因此：

$$\frac{42-19x}{(x-4)(x^2+1)}=-\frac{2}{x-4}+\frac{2x-11}{x^2+1}$$

通过以上各例，可以归纳出以下结论：

任何含有一个未知数的真分式，它的分母分解成不可约因式后，都可以化成部分分式的代数和。

把一个真分式化为部分分式的问题，我们在例题中已经学过了三种类型：

1. 分母中如果含有因式 $ax+b$ 的一次幂，那么，原真分式就对应有一个部分分式 $\dfrac{A}{ax+b}$ （A 是常数，$a\neq 0$）；
2. 分母中如果含有因式 $(ax+b)^n \quad (n>1)$，那么，原真分式就对应有 n 个部分分式的代数和，即
$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$
其中：$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 都是常数)；
3. 分母中如果含有因式 ax^2+bx+c 的一次幂，且 $b^2-4ac<0$，那么，原真分式就对应有一个部分分式 $\dfrac{mx+n}{ax^2+bx+c}$ （m, n 都是常数，$a\neq 0$）。

另外，还有一种类型，就是“分母中如果含有因式 $(ax^2+bx+c)^n \quad (n>1)$，且 $b^2-4ac<0$，那么，原真分式就对应有 n 个部分分式的代数和，即
$$\frac{m_1x+n_1}{ax^2+bx+c}+\frac{m_2x+n_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{m_nx+n_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$
其中，$m_1, n_1, m_2, n_2, \ldots, m_n, n_n$ 都是常数（$a\neq 0$）”。但运算较繁，这里就略去了。

练习

1. 已知下列各恒等式，求 A、B、C 的值。

   (a) $\dfrac{4x+1}{x(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}$

   (b) $\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-15}=\dfrac{A}{3x-5}+\dfrac{B}{4x+3}$

   (c) $\dfrac{4-7x}{(x^2+1)(x-2)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{C}{x-2}$

2. (a) 已知恒等式 $x^3-6x^2-4x+8=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$。求 A, B, C, D；

   (b) 用 $x-2$ 的各次幂表示 $3x^3-8x^2+10$。

3. 化下列各式为部分分式：

(a) $\dfrac{2x+11}{(x-2)(x+3)}$

(b) $\dfrac{6x-1}{(2x+1)(3x-1)}$

(c) $\dfrac{x}{x^2-2x-3}$

(d) $\dfrac{x^2-3x-1}{(x-2)^2}$

(e) $\dfrac{x^2+x-1}{(x^2+1)(x-2)}$

(f) $\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$

（四）求算术平方根 $\sqrt{c+2\sqrt{b}}$

在有些计算中，需要将算术平方根 $\sqrt{c+2\sqrt{b}}$ 表示为两个二次根式的代数和。利用待定系数法，也可以解决这类问题。

例 7.22 计算 $\sqrt{8+2\sqrt{12}}$

解： 设 $\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$（$x,y$ 都是正整数）。

则两边平方后可得：

$$8+2\sqrt{12}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=(x+y)+2\sqrt{xy}$$

以上恒等式要成立，必须满足：

$$\begin{cases} x+y=8 & (7.16)\\ xy=12 & (7.17)\end{cases}$$

将 (6.16) 代入 (6.17) 得：$x^2-8x+12=0$

解二次方程得：$x_1=2,\quad x_2=6$；

再由 (6.16), 得出 $y_1=6,\quad y_2=2$

$\therefore\quad \sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}(=\sqrt{6}+\sqrt{2})$

用同样的方法，可以求得：$\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$（注意：$\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{2}-\sqrt{6}$ 是错误的，因为 $\sqrt{2}$ 小于 $\sqrt{6}$, 其差小于零，但所求算术根 $\sqrt{8-2\sqrt{12}}$ 是不能小于零的。）

一般来说，要求形如 $a\pm 2\sqrt{b}$ 的数的算术平方根（a,b 都是正整数且 b 不是完全平方数），就可以引进未定数 x、y, 使它们满足 $\sqrt{a\pm 2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$（$x$、$y$ 都是正整数，且 $x>y$）。

两边平方，得 $a\pm 2\sqrt{b}=(x+y)\pm 2\sqrt{xy}$，比较等式两边相应的部分，得

$$\begin{cases} a=x+y & (7.18)\\ b=xy & (7.19)\end{cases}$$

解这个含有未定数 x, y 的方程组，得

$$\begin{cases} x = \dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2} \\ y = \dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \end{cases}$$

由这里还可以看出，形如 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的数，只有当 $a^2-4b>0$, 且是一个完全平方数时，才能有形如 $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ 的算术平方根。

例 7.23 求下列各数的算术平方根（精确到 0.01）：

1. $3+2\sqrt{2}$　　2. $9+4\sqrt{5}$　　3. $6-\sqrt{20}$

解：

1. 原式 $=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{2+1}\approx 2.41$

   因为，$x+y=3$ 且 $xy=2$，可观察得出 $x=2,\quad y=1$。

2. $\because\quad 9+4\sqrt{5}=9+2\sqrt{20}$

   $\therefore$　设 $\sqrt{9+2\sqrt{20}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$，两边平方，得：

$$9+2\sqrt{20}=(x+y)+2\sqrt{xy}$$

   比较两边相应部分，得

$$\begin{cases} x+y=9 \\ xy=20 \end{cases}$$

   解这个方程组，得：$x=5,\quad y=4$

   $\therefore\quad \sqrt{9+4\sqrt{5}}=\sqrt{5}+\sqrt{4}\approx 2.24+2=4.24$

3. 设 $\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$

   两边平方，得：$6-2\sqrt{5}=(x+y)-2\sqrt{xy}$

   $\therefore\quad x+y=6,\quad xy=5$ 解得 $x=5,\quad y=1$

   $\therefore\quad \sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1\approx 1.24$

练习

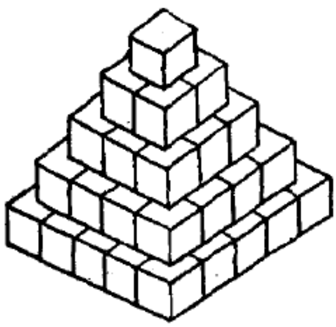
求下列各式的值（精确到 0.01）：

1. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
2. $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$
3. $\sqrt{10+4\sqrt{6}}$
4. $\sqrt{11-\sqrt{120}}$

（五）其它数列求和

除常见的等差，等比数列外，我国古代的“垛积术”中，还有一些较复杂的数列求和问题，这些问题也有重要应用。

例 7.24 某仓库中，存放的罐头堆成锥形垛。顶上放一桶，第二层有四桶，以下各层，每个桶均由四个桶顶着（如图）一垛共有五层。问这一垛共有多少桶?



解: 显然，这一垛共有：$(1+4+9+16+25)$ 桶。即：$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$ 桶。

这就是说，前五个自然数的平方和等于 55。

一般地，如果由前 n 个自然数的平方组成的数列 $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$。如何求出它们的和呢？能不能导出一个通用的公式呢?

以下我们将先对这个数列的前 n 项和的特点进行分析，然后应用待定系数法导出它的求和公式。

设 $1^2+2^2+\cdots+n^2=S(n)$，在 $S(n)$ 中，n 代表项数。显然有：

$$
\begin{aligned}
S(0)&=0\\
S(1)&=1\\
S(2)&=1^2+2^2=5\\
S(3)&=1^2+2^2+3^2=14\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
S(n)&=1^2+2^2+\cdots+n^2\\
S(n+1)&=1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2
\end{aligned}
$$

而且还可以看出：无论项数 n 取几，总有

$$S(n+1)-S(n)=(n+1)^2=n^2+2n+1$$

可见，$S(n)$ 很可能是一个关于项数 n 的多项式，它只要满足两个性质：

1. $S(0)=0$
2. $S(n+1)-S(n)=n^2+2n+1$ （n 的二次式）

这就启示我们，如果能求出一个多项式 $S(x)$，能满足以上两条性质，即 $S(0)=0$, $S(x+1)-S(x)$ 是一个二次式。那么，所求数列的前 n 项和，就是当 $x=n$ 时，多项式 $S(x)$ 的值 $S(n)$。

但是，满足以上两条性质的多项式 $S(x)$ 应该是几次多项式呢？

我们不妨设 $S(x)$ 是 m 次多项式，即

$$S(x)=ax^m+bx^{m-1}+\cdots+cx+d \quad (a\neq 0)$$

则：$S(x+1)=a(x+1)x^m+b(x+1)x^{m-1}+\cdots+c(x+1)x+d$ 由乘法公式，不难知道：

$$S(x+1)=a(x^m+mx^{m-1}+\cdots+1)+b[x^{m-1}+(m-1)x^{m-2}+\cdots+1]$$
$$+\cdots+c(x+1)+d$$
$$=ax^m+(b+am)x^{m-1}+\cdots+(c+\cdots)x+(a+b+\cdots+c+d)$$

$\therefore\quad S(x+1)-S(x)=(b+am-b)x^{m-1}+\cdots=amx^{m-1}+\cdots$

由于 $am\neq 0$, 显然 $S(x+1)-S(x)$ 是 $m-1$ 次多项式，因此，我们可以得出：

当 $S(x)$ 是一个 m 次多项式时，$S(x+1)-S(x)$ 必定是一个 $m-1$ 次多项式。

也就是说，多项式 $S(x+1)-S(x)$ 的次数比多项式 $S(x)$ 的次数低一次。

这样，由于在我们以上所求问题中，$S(x+1)-S(x)$ 是二次多项式，所以，$S(x)$ **必定是一个三次多项式**。

基于以上分析，以下我们就可以用待定系数法导出前 n 个自然数平方的求和公式。

例 7.25 试求 $1^2+2^2+\cdots+n^2$。

解： 设 $1^2+2^2+\cdots+n^2=S(n)$

由分析知 $S(n)$ 是一个关于项数 n 的三次式，且 $S(0)=0$, $S(1)=1$, $S(2)=5$, $S(3)=14$。其中，0 是 $S(n)$ 的一个根。

$\therefore$ 由余式定理的推论，得：

$$S(n)=n(an^2+bn+c)$$

这里 a、b、c 都是待定系数。

将 $S(1)=1$, $S(2)=5$, $S(3)=14$ 分别代入上式，即可得出

$$\begin{cases}1=a+6+c\\5=2(4a+26+c)\\14=3(9a+36+c)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=1\\4a+2b+c=\dfrac{5}{2}\\9a+3b+c=\dfrac{14}{3}\end{cases}$$

解这个方程组，得 $a=\dfrac{1}{3}$, $b=\dfrac{1}{2}$, $c=\dfrac{1}{6}$ 因此：

$$\begin{aligned}S(n)&=n\left(\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

练习

试用待定系数法求 $1^3+2^3+\cdots+n^3$。

习题 7.2

1. 已知 $x^4+4x^3+6px^2+4qx+r$ 能被 x^3+3x^2+9x+3 整除，试求 p、q、r 的值。

2. 已知 $f(x)=ax^2+bx+c$ 是一个完全平方式，试用待定系数法证明：$b^2-4ac=0$。

3. 试用待定系数法把 $f(x)=3x^3-10x^2+13$ 表示成 $(x-2)$ 的各次方幂和。

4. 用待定系数法，把 x^4-2x^2-2 表示成 x^2-x+1 的各次方幂和。

5. 已知 $x^3-x^2-8x+12=0$ 有两个根相等，试解这个方程。

6. 已知方程 $x^3-4x^2+x+k=0$ 有一个根是 -1, 试求它的另外两个根。

7. 如果方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 有两个根互为相反数，试求 p,q,r 应具有什么关系?

8. 化下列各分式为部分分式

   (a) $\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$

   (b) $\dfrac{x^2+x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

   (c) $\dfrac{x^2-2}{x^3-3x^2+2x}$

   (d) $\dfrac{x^3-6x^2+4x+8}{(x-3)^4}$

   (e) $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$

   (f) $\dfrac{21x-14}{(x-3)^2(2x+1)}$

   (g) $\dfrac{8x}{(x+1)(x^2-1)}$

   (h) $\dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

9. 求下列各算术平方根：

   (a) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

   (b) $\sqrt{15-2\sqrt{56}}$

   (c) $\sqrt{11+4\sqrt{7}}$

   (d) $\sqrt{26-8\sqrt{10}}$

10. 求下列数列的前 n 项和：$1^4,2^4,3^4,\ldots,n^4,\ldots$

本章内容要点

本章的主要内容是两种常见数列的求和及待定系数法与它的应用。

一、等差数列

1. 按顺序排好的一列数中，如果从第二个数起，每一个数与它前一个数的差都相等，那么，这一列数叫做等差数列。

   设等差数列的首项为 a_1, 公差为 d, 项数为 n, 末项为 a_n 及前 n 项和为 S_n, 则有以下关系式：

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

   如果已知 a_1, a_n, n, d, S_n 中的任意三个，就可以利用这两个公式，求出另两个。

2. 在两个已知数 a, b 之间，插入 n 个数构成等差数列的问题，实际上就是已知首项 a, 末项 b 及项数 $n+2$, 要求出公差，进而可以求出插入的各项，还可以求出所有项的和。

二、等比数列

按顺序排好的一列数中，如果从第二个数起，每一个数与它前一个数的比都相等，那么，这一列数叫做等比数列。

设等比数列的首项为 a_1, 公比为 q, 项数为 n, 末项为 a_n, 前 n 项的和为 S_n, 则有以下关系式：

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

公比 q 的取值，决定了等比数列各项的大小变化趋向：如果首项 $a_1 > 0$(或 < 0)，那么，

- 当 $q > 1$ 时，等比数列逐项增大（或减小）；
- 当 $0 < q < 1$ 时，等比数列逐项减小（或增大）；
- 当 $q < 0$ 时，等比数列各项将正、负相间，逐项在正、负值之间摆动。

三、待定系数法是一个重要的数学方法，其根据就是多项式恒等的性质。其方法的要点就是：引进未定系数，列出恒等式并进而得出含有未定系数的方程组，求出未定系数。

待定系数法应用广泛，具体作法中又有一定的技巧，除可以求商式、余式、分解因式、寻求方程的根与系数间的关系外，还应从以下应用中进一步去掌握：

- 求多项式与解方程；
- 用一个较低次的多项式的各次幂，表示另一个多项式；
- 将分式化成部分分式；
- 求形如 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的数的算术平方根；
- 求数列 $1^b,\ 2^b,\ 3^b, \ldots, n^b, \ldots$ 前 n 项和（b 是大于 1 的一个自然数）。

复习题七

1. 求下列数列的前 10 项和及第 n 项。

   (a) $0,\ -2,\ -4,\ -6, \ldots$;

   (b) $\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{16}, \ldots$;

   (c) $-0.1,\ 0.1,\ 0.3,\ 0.5 \ldots$;

   (d) $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9} \ldots$。

2. 试求出下列数列的第 n 项, 并导出它的前 n 项求和公式:

   (a) $1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{8},\ 4\frac{1}{16}, \ldots$;

   (b) $1.3, 1.03, 1.003, 1.0003, \ldots$;

   (c) $\frac{1}{1\times 2},\ \frac{1}{2\times 3},\ \frac{1}{3\times 4},\ \frac{1}{4\times 5}, \ldots$。

3. 如果有三个数成等差数列, 又成等比数列, 那么, 你能说明这三个数一定相等吗?

4. 首项为 100, 公差为 -10 的等差数列中, 前多少项的和最大? 求出这个和。

5. 如果 a, b, c 分别是一等比数列的第 p, q, r 项, 试说明:

$$a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1$$

   提示: 设这一数列的公比为 t, 并将 a 视为首项, 则 b, c 分别是第 $q-p+1$、$r-p+1$ 项。

6. 求和：$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n}{2^n}$

   提示：可以先求 $S_n - \frac{1}{2}S_n$

7. 已知 $f(-1)=0$，$-5f(0)=-\frac{10}{3}f(-2)=f(-3)=-20$，试求：$f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 及 $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ 的值。

8. ℓ 和 m 是何值时，方程 $x^4+4x^3-2x^2+\ell x+m=0$ 能有两组相等的根?

9. 方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 要有两个根是互为相反数，试问：p,q,r 必须符合什么条件?

10. 求和：

$$\frac{a}{x(x+a)}+\frac{a}{(x+a)(x+2a)}+\cdots+\frac{a}{[x+(n-1)a](x+na)}$$

提示：$\frac{a}{[x+(n-1)a](x+na)}=\frac{1}{x+(n-1)a}-\frac{1}{x+na}$

11. 将分式 $\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$ 化成部分分式。

12. 证明：如果 a,b,c 成等比数列，那么方程

$$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$$

有两个相等的实数根，且这个实数根正好等于公比。

提示：a,b,c 之间有关系 $b^2=ac$