文章编号:1007-2934(2006)02-0019-03

E-measure 混沌摆的数学解析与运动方程

何忠蛟 汪建章

(浙江工商大学,杭州,310035)

摘 要 首先阐述了混沌摆的科学描述;其次对混沌摆进行了数学解析,分析了瞬衰解和稳态解的作用;然后构建了混沌摆的运动方程。得到了 E-measure 混沌摆实验必须满足的两个前提条件,加深了对混沌现象的深入了解。

关键词 混沌摆;运动方程;前提条件

中图分类号:O415.5 **文献标识码**:A

1 引言

美国 PASCO 公司的 E-measure 实验,是对传统物理实验的一个很好补充,它能够增强实验的直观性、趣味性。使学生既得到基本的物理实验技能训练,又可使学生掌握计算机处理实验数据的基本技巧。其中,E-measure 混沌摆实验能够使学生加深对混沌本质的深入了解。

2 科学描述

下面,分析 E-measure 混沌摆的物理模型。如果一个物理摆同时受到弹簧的回复力(F_k)、阻尼力(F_f)、驱动力(F_D)。设弹簧的回复力 $F_k=-kx$,阻尼力 $F_f=-\gamma\frac{dx}{dt}$,驱动力 $F_D=F_o\cos(\omega t)$。利用牛顿第二定律,该物理摆的运动方程是:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\frac{dx}{dt}+kx=F_o\cos(\omega t) \tag{1}$$

其中,m 是物理摆的质量;$x(t)$是物体相对于平衡位置的位移;γ 是物体的阻尼系数;k 是弹簧的弹性系数;F_o 是驱动力的振幅;ω 是驱动力的角频率。

3 数学解析

由于方程(1)是二阶常微分方程,因此方程(1)的数值解是由通解($X_c(t)$)和特解($X_p(t)$)两部分组成,即:

$$X(t)=X_c(t)+X_p(t) \tag{2}$$

收稿日期:2006-03-16

$$X_c(t) = exp\left(-\frac{\gamma}{2m}t\right)\cdot\left(Aexp\left(\left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)\right)^{\frac{1}{2}}t + Bexp\left(-\left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right)t\right) \quad (3)$$

$$X_p(t) = D\cos(\omega t - \delta) \quad (4)$$

$$D = \frac{F_o}{\left(\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+4\omega^2\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}};\delta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega\gamma}{m\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)}\right)$$

其中，参数 D 是物理摆运动的振幅；参数 δ 是驱动力和物体振动之间的位相延迟。

可以看到，该方程数值解中的通解（$X_c(t)$）的每一项都有相同系数 $\exp\left(-\frac{\gamma}{2m}t\right)$，当 $t\to\infty$，$\exp\left(-\frac{\gamma}{2m}t\right)\to 0$，该通解（$X_c(t)$）是瞬衰解，其作用可以忽略；当 $t\to\infty$ 时，特解（$X_p(t)$）是稳态解，其作用是维持物理摆的运动。

还有一点需要说明，由函数式 D 可知，物理摆运动的振幅（D）仅与驱动力的角频率（ω）有关，即 $D = f(\omega)$。一般情况下，为了达到好的实验效果，必须调节驱动的角频率（ω）有关，即 $D = f(\omega)$。一般情况下，为了达到好的实验效果，必须调节驱动力的角频率（ω），使物理摆运动的振幅最大，即 $D\to max$。其方法是令 $\frac{dD}{d\omega} = 0$，可得，当 $\omega_R = \left(\frac{k}{m}-2\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 时，振幅 D 为最大值，分别记为 ω_R 和 R_{max}。这是 E－measure 混沌摆实验中必须满足的前提条件之一。

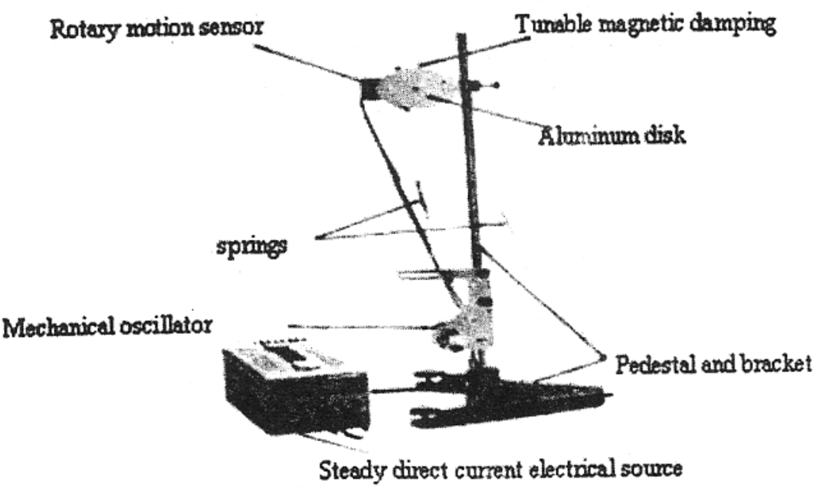

图 1　混沌实验装置示意图

Fig.1　Chaos lab equipment

4　E－measure 混沌摆的运动方程

如图 1 所示，振动体是一个可以旋转的铝盘（半径 R）；那么，作用在铝盘上的力分别是两根纤维线的拉力（T_1、T_2）；阻尼力（F_f）；铝盘的转动惯量（I）；铝盘的角加速度（α）。利用刚体转动定律，可得该铝盘的运动方程。

$$(T_1 - T_2)R - F_fR = I\alpha \quad (5)$$

其中，$T_1 = k_1(\Delta l_1 + R\theta) + F_o\cos(\omega t)$；$T_2 = k_2(\Delta l_2 - R\theta)$；$F_f = \gamma \frac{d\theta}{dt}$；$I = \frac{1}{2} mR^2$；$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$；$\Delta l_1 = l'_1 - l_1$；$\Delta l_2 = l'_2 - l_2$；$l_1$、$l_2$ 分别是两根弹簧的原长；l'_1、l'_2 分别是实验中铝盘静止时弹簧的长度。

由此，可得：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2\gamma}{mR}\frac{d\theta}{dt} - \frac{2}{mR}(k_1 + k_2)\theta = \frac{2F_o}{mR}\cos(\omega t) + \frac{2}{mR}(k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2) \tag{6}$$

由于方程(6)和方程(1)这两个二阶常微分方程的类型不一样，其解集也不一样。因此，为确保方程(6)和方程(1)的解集一样，必须在实验中满足 $k_1\Delta l_1 - k_2\Delta l_2 = 0$。只有这样，才能使方程(6)的数值解和方程(1)的数值解完全一样，即通解是瞬衰解，特解是稳态解，特解维持物体的振动。这是 E - measure 混沌摆实验中必须满足的前提条件之二。

5 结论

通过阐述了混沌摆的科学描述和对混沌摆运动方程的分析，得到了 E - measure 混沌摆实验必须满足的两个前提条件，加深了混沌实验的理论了解。

参考文献

[1] 何忠蛟.混沌的解析与 e - measure 混沌摆实验[J].大学物理实验.2005

[2] GLEICK J.Chaos：Making a New Science[M].New York(United States)：Viking Press，1997

[3] Eckmann JP，Ruelle D.Theory of Chaos and Strange Attractors[M].New York (United States)：Thomson Press，1995

[4] WIGGINS S，Global Bifurcations and Chaos[M].Washington(United States)：Springer Press，1993

A MATH ANALYSIS AND LOCOMOTION EQUATION OF E - MEASURE CHAOS PENDULUM

He Zhongjiao　Wang Jianzhang

(Zhejiang Gongshang University，Hangzhou，310035)

Abstract：Firstly the science description of E - measure chaos pendulum is expounded；secondly the Math analysis of E - measure chaos pendulum is put up and the function of the evanescence and the steady solution；then the locomotion equation is constructed. Two preconditions must be fulfilled on the lab and the chaos phenomenon is comprehended deeply.

Key words：chaos pendulum；locomotion equation；prcondition