

# 混沌摆系统的动力学分析和数值模拟

朱桂萍\*, 王 健

(扬州大学 物理科学与技术学院, 江苏 扬州 225002)

**摘 要:** 在混沌实验摆动力学方程基础上, 分析其分别处于保守和耗散非线性系统的动力学特性. 采用实际物理实验系统的参数进行数值模拟, 探讨不同的策动频率、振幅和外加阻尼等参数条件对混沌摆系统动力学行为的影响, 且分析这些参数在实验过程中所起的调节作用. 数值模拟结果表明: 混沌实验摆系统动力学性质灵敏地依赖于策动频率值; 系统策动振幅必须大于一定阈值是混沌相出现的必要条件; 磁阻尼参数对系统混沌相动力学状态影响不明显.

**关键词:** 混沌摆; 动力学特性; 实验参数; 数值模拟

**中图分类号:** O 415.5

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1007-824X(2008)03-0027-04

非线性系统的混沌行为是自然界普遍和重要的物理现象, 混沌动力学性质也是数学和物理学关注的研究前沿课题之一.<sup>[1-10]</sup> 实验混沌摆是演示非线性系统混沌等动力学特性最直接的实验装置<sup>[10-11]</sup>, 然而各种参数对实验混沌摆动力学特性的调节作用不是很清楚. 为此, 在本文中, 笔者拟以 PASCO 公司的实验混沌摆为模型, 在动力学方程基础上探讨其作为保守系统和耗散系统的动力学特性行为, 并进一步对实际物理实验系统的参数进行数值模拟.

## 1 混沌摆动力学方程

混沌实验摆动力学模型如图 1 所示. 转轮的内、外半径分别为  $r, R$ , 质量为  $m$ , 转轮圆盘的转动惯量  $I = mR^2/2$ ; 偏心铜圆柱体的质量为  $m_{\text{cop}}$ , 其与转轮中心的距离为  $L_{\text{cop}}$ , 偏心转矩惯量  $I_{\text{cop}} = m_{\text{cop}}gL_{\text{cop}}$ ; 磁阻尼力矩用  $\mu$  表示, 线性弹簧的倔强系数为  $k$ ; 外部策动力的距离如图所示分别为  $L_a, L_b, L_c$ . 容易得到该系统中转轮的动力学方程为

$$I\ddot{\theta} + \mu\dot{\theta} + I_{\text{cop}}\sin\theta + kr(2k\theta - \Delta L_0) = kr(L_c - L_{c_0}), \quad (1)$$

其中  $\theta$  表示转轮的转角;  $\Delta L_0$  是初始位置时弹簧的伸长;  $L_{c_0}, L_c$  分别为初始时刻和  $t$  时刻外部策动振幅,

$$L_{c_0} = A_c \sqrt{I_a^2 + I_b^2 - 2I_a I_b \cos\phi_0},$$

$$L_c = A_c \sqrt{I_a^2 + I_b^2 - 2I_a I_b \cos(\omega_d t + \phi_0)},$$

式中  $\phi_0$  为初始相角,  $\omega_d$  为策动力的角速度,  $A_c$  为策动振幅. Fig. 1 Schematic plot of the chaotic pendulum

幅. 为讨论动力学性质方便, 将(1)式改写成如下的标准一阶微分方程形式:

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -I_{\text{cop}}I^{-1}\sin\theta - 2kr^2I^{-1}\theta + krI^{-1}\Delta L, \quad (2)$$

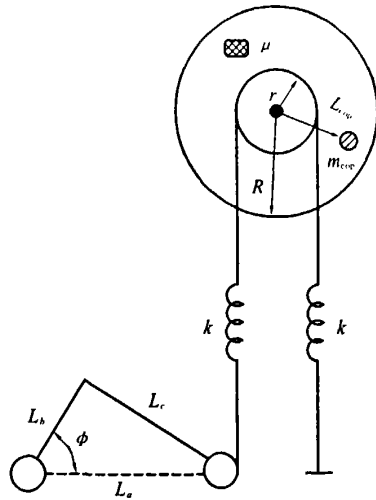


图 1 混沌摆动力学示意图

收稿日期: 2008-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10705023)

\* 联系人, E-mail: gpzhu@yzu.edu.cn

其中  $\Delta L = L_c - L_{c_0} + \Delta L_{c_0}$ .

实验参数的取值参照 PASCO 公司实验混沌摆数据如下: 转动圆盘实验参数为  $m = 0.12 \text{ kg}$ ,  $R = 0.095 \text{ m}$ ,  $r = 0.04 \text{ m}$ ; 偏心铜圆柱体参数为  $m_{\text{cop}} = 0.015 \text{ kg}$ ,  $L_{\text{cop}} = 0.06 \text{ m}$ ; 弹簧的倔强系数  $k_1 = k_2 = 2.0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  $L_{c_0}, L_{c_0}$  分别为  $0.1, 0.13 \text{ m}$ ;  $A_c, \mu$  和  $\omega_d$  作为实验系统的可调节参数. 为简单起见, 对系统动力学性质没有影响的弹簧初始伸长和外部策动力的初位相分别取  $\Delta L_0 = 0$ ,  $\phi_0 = \pi/9$ . 在以下的数值模拟中, 对微分方程(2)采用四阶 Runge-Kutta 数值差分方法.

## 2 动力学特性分析

### 2.1 保守系统的动力学性质

当无外部策动力( $\Delta L = 0$ )和磁性阻尼( $\mu = 0$ )时, 装置构成保守动力学系统, 方程(2)可简化为  $\theta = \omega$ ,  $\dot{\omega} = -I_{\text{cop}}^{-1} \sin \theta - 2kr^2 I^{-1} \theta$ . 该系统具有椭圆不动点,  $\theta^* = 0$ . 当  $\theta$  较小时,  $\sin \theta \approx \theta$ , 系统近似以圆频率  $\omega_0 = \sqrt{(I_{\text{cop}} + 2kr^2)/I}$  做简谐振动. 一般情况下, 系统在给定初始条件对应的椭圆环相图上运动. 图 2 是系统在上述实验参数条件下的相图及其对应的运动状态分析图. 其中图 2(a)是不同初始条件下角位移  $\theta$  和角速度的相图, 可见当给定一个初始条件后, 系统保持能量守恒, 在椭圆等能面上运动; 图 2(b)是给定初始条件  $t = 0$  时  $\omega - t$  时序图, 可见  $\omega(t)$  可近似视为谐振动; 图 2(c)是图 2(b)的傅立叶变换功率谱分析. 从图中可以得到, 在给定初始条件下, 系统以中心圆频率  $\omega = 2\pi f = 6.46 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  做周期运动, 该频率略大于近似简谐振动频率  $\omega_0 = 5.3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . 这是因为简谐振动忽略了高阶非线性项, 所以实际非线性保守系统的振动周期要略大于简谐振动近似值.

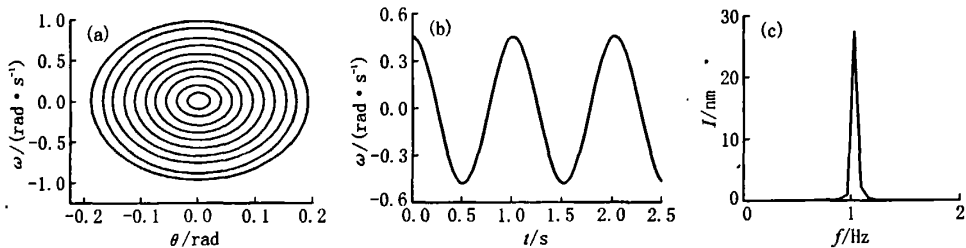


图 2 保守系统的动力学相图(a), 角速度时序(b)和角速度功率谱分析(c)图

Fig. 2 Phase diagram in the conserved system (a), time series of angular frequency (b), and the power spectrum (c)

### 2.2 耗散系统的动力学性质

当有外部策动力和阻尼存在时, 该系统成为耗散动力学体系. 此时系统表现出许多复杂的动力学性质, 并且这些性质十分依赖于驱动振幅  $A_c$ , 驱动频率  $\omega_d$  和阻尼系数  $\mu$  等可调节实验参数. 为表示方便, 设  $\omega_d = \sqrt{\alpha} \omega_0$ ,  $\omega_0$  定义如前述,  $\alpha$  是无量纲的调节参数. 这里主要讨论两类动力学动态特征: 准周期解和混沌解. 对于线性系统容易观察到的共振等动力学状态以及周期解情况, 此处不讨论.

1) 准周期解. 在一定的外部驱动频率  $\omega_d$  下, 当外部策动力的振幅  $A_c$  和磁性阻尼  $\mu$  较小、转轮的最大振幅  $\theta_{\text{max}}$  不是太大时, 系统动力学状态处于弱非线性情况, 动力学方程(1)存在准周期解. 图 3 是准周期解的相图及其动力学分析. 在一维运动中, 准周期解的产生可以理解两类不可共度频率振动叠加的结果. 由图 3(c)功率谱可见, 系统本征频率有最高的振幅分量, 驱动频率振幅也有一定分量. 当这两种频率不可共度(比值是无理数)时, 两类振动在相空间没有共同周期, 因而在轮胎状相空间上交织出如图 3(a)所示的网状相轨极限环.

2) 混沌解. 混沌状态至今没有确切和人们广为接受的定义, 其动力学特征主要表现为运动状态对初值的敏感依赖, 功率谱没有明显周期峰而呈噪声状, 相图上表现出分形维数的奇怪吸引子几何形状. 图 4 是方程(1)的混沌解相图及其动力学分析. 由图 4(a)可见混沌吸引子的相图具有明显的奇

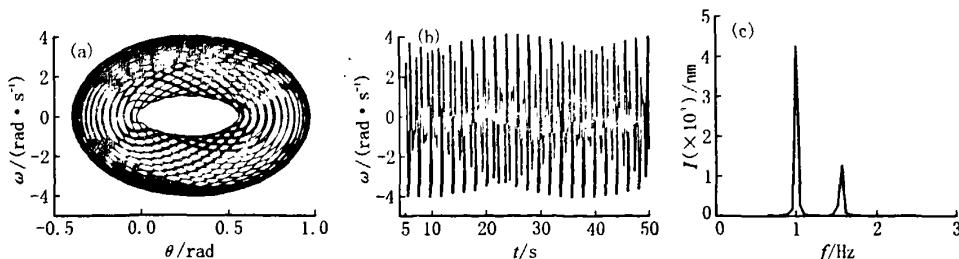


图3  $\alpha=3, A_c=0.5, \mu=0.01$  条件下的系统相图(a)、角速度时序(b)和角速度功率谱分析(c)图

Fig. 3 Phase diagram (a), time series of angular frequency (b), and the power spectrum (c) at  $\alpha=3, A_c=0.5, \mu=0.01$

怪吸引子形状。图4(b)是角速度 $\omega$ 的时序图,与准周期运动时序图有显著区别。图4(c)是功率谱图,具有随机噪声的形状。混沌解是非线性系统特有的动力学特征之一,其无序性类似于随机过程,但与随机过程有本质区别,混沌是一种确定性的无序。

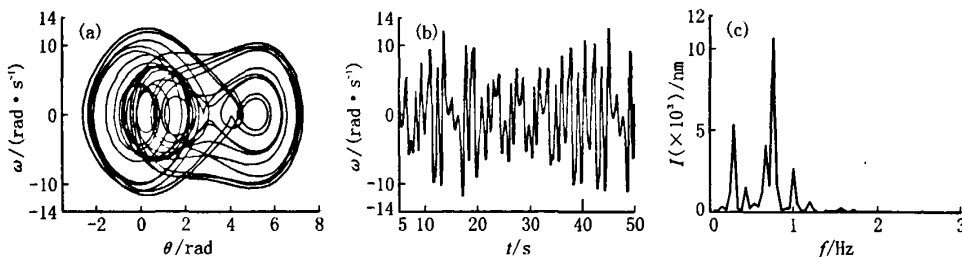


图4  $\alpha=0.07, A_c=1.8, \mu=0.01$  条件下的系统相图(a)、角速度时序(b)和角速度功率谱分析(c)图

Fig. 4 Phase diagram (a), time series of angular frequency (b), and the power spectrum (c) at  $\alpha=0.07, A_c=1.8, \mu=0.01$

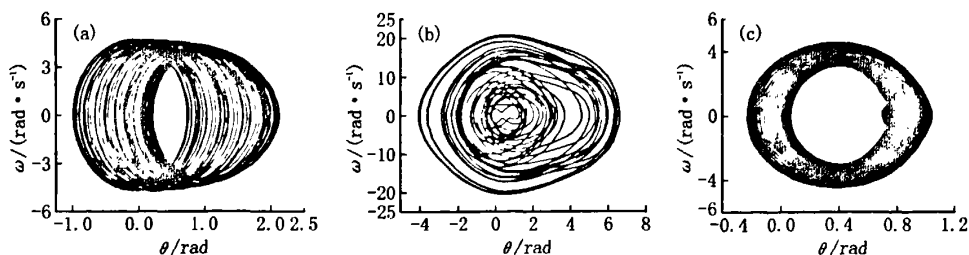
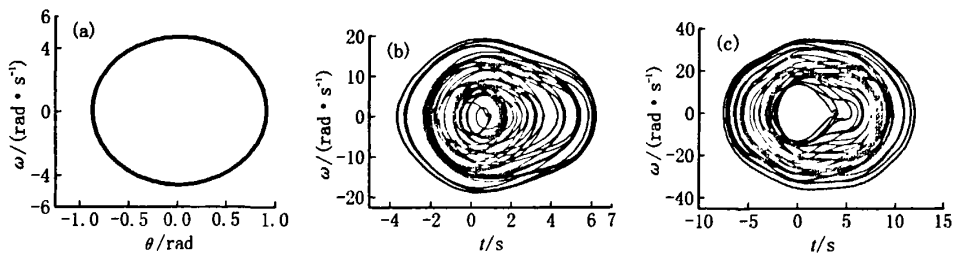
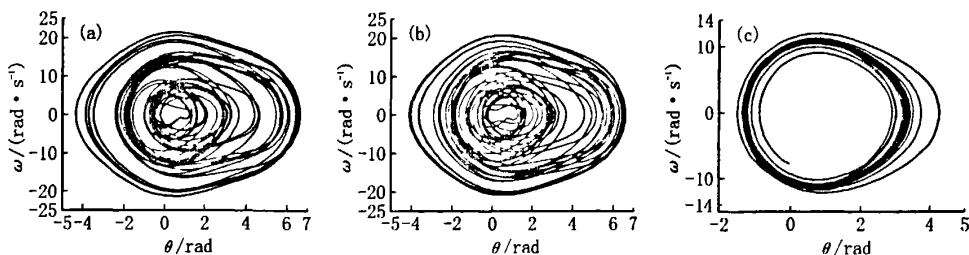
### 3 实验参数对系统动力学性质的影响

如何调节实验混沌摆系统的参数而使系统演示出各种非线性动力学特征行为,特别是混沌相图,是实验过程中的关键。通过调节实验系统 $A_c, \mu, \omega_d$ 来使系统处于不同的动力学状态区间,对动力学模型的数值模拟有助于理解调节参数对系统性质的影响。

图5~7是不同系统参数 $A_c, \mu, \omega_d$ 数值模拟的结果。①由图5可见,在给定 $A_c=1.0, \mu=0.01$ 条件下,系统动力学性质灵敏地依赖于策动频率 $\omega_d$ ,混沌相图只出现在一定的 $\omega_d$ 值附近,如图5(b)所示。当策动频率 $\omega_d$ 较大或较小时,系统处于准周期状态,如图5(a), (c)所示。②在给定 $\omega_d, \mu$ 值情况下,图6显示调节不同振幅值的结果。图6(a)显示当 $A_c=0.01$ 时系统处于准周期态,图6(b), (c)分别显示 $A_c=0.9, 1.5$ 时的混沌相图。由此可见,要使系统处于混沌动力学相,振幅必须大于一定值。③图7显示不同阻尼条件下系统的动力学状态,7(a), (b)是混沌相相图,7(c)是过阻尼相图。由图可见,磁阻尼参数值的大小对系统混沌相动力学状态影响不灵敏,在给定 $A_c, \omega_d$ 情况下,系统在一定 $\mu$ 参数范围都保持混沌状态,直到 $\mu$ 值很大时系统处于过阻尼状态。

### 4 结果与讨论

从实验混沌摆体系的动力学方程出发,分析该系统的非线性保守和耗散动力学性质,讨论了不同实验参数条件对系统动力学性质的影响。从数值模拟结果发现:系统动力学性质灵敏地依赖于策动频率 $\omega_d$ ;系统的策动振幅 $A_c$ 必须大于一定值是混沌相出现的必要条件;磁阻尼参数 $\mu$ 对系统混沌相动力学状态影响不明显。通过动力学分析将有助于更好地理解实验混沌摆的动力学性质,同时可更好地掌握实验中参数调节范围。

图 5  $A_c=1.0, \mu=0.01$  条件下的系统相图Fig. 5 Phase diagram at  $A_c=1.0, \mu=0.01$ (a)  $a=0.01$ ; (b)  $a=1.0$ ; (c)  $a=5.0$ 图 6  $\alpha=1.0, \mu=0.01$  条件下的系统相图Fig. 6 Phase diagram at  $\alpha=1.0, \mu=0.01$ (a)  $A_c=0.01$ ; (b)  $A_c=0.9$ ; (c)  $A_c=1.5$ 图 7  $\alpha=1.0, A_c=1.0$  条件下的系统相图Fig. 7 Phase diagram at  $\alpha=1.0, A_c=1.0$ (a)  $\mu=0.001$ ; (b)  $\mu=0.009$ ; (c)  $\mu=20$ 

## 参考文献:

- [1] OTT E. Chaos in dynamical systems [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993: 1-22.
- [2] 何大初, 汪秉宏, 牛建军, 等. 非线性动力学引论 [M]. 西安: 陕西科学技术出版社, 2001: 3-10.
- [3] BAKER GREGORY L, BLACKBURN JAMES A. The pendulum a case study in physics [M]. New York: Oxford University Press, 2005: 8-24.
- [4] BATISTA A A, OLIVEIRA F A, NAZARENO H N. Duffing oscillators: control and memory effects [J]. Phys Rev E, 2008, 77: 066216.
- [5] SINGH T U, NANDI A, RAMASWAMY R. Coexisting attractors in periodically modulated logistic maps [J]. Phys Rev E, 2008, 77: 066217.
- [6] LAI Y C, HE D R, JIANG Y M. Basins of attraction in piecewise smooth Hamiltonian systems [J]. Phys Rev E, 2005, 72: 025201.
- [7] MALININ S V, CHERNYAK V Y. Classical nonlinear response of a chaotic system I: collective resonances [J]. Phys Rev E, 2008, 77: 056201.

(下转第 34 面)

- [7] VENKATASUBRAMANIAN S, PARUCHURI G R. Application of power ultrasound in leather processing: an eco-friendly approach [J]. J Clean Prod. 2001, 9(1): 25-33.
- [8] 高淑珍. 超声波对染色过程的促进作用研究 [J]. 印染, 1999(2): 5-8.
- [9] 程 欣. 超声催化二氧化钛降解偶氮染料——甲基橙的研究 [D]. 西安: 陕西师范大学, 2007.
- [10] 岑科达, 殷福才, 程建萍, 等. 超声降解水溶性偶氮染料甲基橙的实验研究 [J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2007, 30(1): 77-81.
- [11] 李仕平, 田 雨, 姚 磊. 二氧化钛光催化降解酸性大红 G [J]. 化学工程师, 2004(11): 19-21.

## Amending the uptake rate formula of the ultrasound dyeing

LI Guo-zheng, WU Sheng-ju\*, ZHUANG Shui-tian

(Appl Acoust Inst, Shaanxi Norm Univ, Xi'an 710062, China)

**Abstract:** To evaluate the ultrasonic-assisted dyeing effect, methyl orange and acid red G, in which there isn't any fabric, is researched. The results show that the absorbance of methyl orange decreases, and that of acid red G solution increases when the power of the ultrasound is relatively high with little treatment capacity. So the uptake rate formula must be amended when the effect of ultrasound is considered. Eventually, the influence mechanism of ultrasound on the dyeing solution is analyzed.

**Keywords:** ultrasound; absorbance; uptake rate; ultrasonic cavitation

(责任编辑 时 光)

(上接第 30 面)

- [8] der SANDE G V, SORIANO M C, FISCHER I, et al. Dynamics, correlation scaling, and synchronization behavior in rings of delay-coupled oscillators [J]. Phys Rev E, 2008, 77: 055202.
- [9] ABARBANEL H D I, CREVELING D R, JEANNE J M. Estimation of parameters in nonlinear systems using balanced synchronization [J]. Phys Rev E, 2008, 77: 016208.
- [10] BERTUGLIA C S, VAIO F. Nonlinearity, chaos, and complexity; the dynamics of natural and social systems [M]. New York: Oxford University Press, 2005: 6-10.
- [11] 周能锋, 骆军委, 蔡阳键. 物理摆的多吸引子混沌状态实现与理论模拟 [J]. 浙江大学学报: 自然科学版, 2001, 28(1): 42-45.

## Analysis and simulation of dynamic properties of the chaotic pendulum

ZHU Gui-ping\*, WANG Jian

(Sch of Phys Sci & Tech, Yangzhou Univ, Yangzhou 225002, China)

**Abstract:** On the basis of the dynamic equation for the chaotic pendulum, the author studies its dynamic properties as a conserved system and a dissipative system, respectively. Simulations using the practical physical parameters are also performed to investigate the dynamic consequences caused by different driven frequency, the driven amplitude and the strength of the external dissipation. The roles played by these parameters during the experimental is also discussed. The simulated results indicate that the properties of the chaotic dynamic system are sensitive to the driven frequency. A threshold value of amplitude exists for the appearance of chaos phase. The system is insensitive to the dissipative magnetic force.

**Keywords:** chaotic pendulum; dynamic properties; experimental parameters; numerical simulation

(责任编辑 时 光)