Построение модели акционерной страховой компании в рамках модели риска Крамера-Лундберга

Климовицкий Роман

27 апреля 2021 г.

1 Введение

Наиболее распространенными и хорошо описанными моделями страхования являются модели страхования Крамера-Лундберга и Спарре-Андерсена:

- **Модель страхования Крамера-Лундберга**
  В данной модели капитал страховой компании определяется как случайный процесс $\{Y_t, t \geq 0\}$ следующим образом:

$$Y_t = y_0 + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \eta_k, \tag{1}$$

  где $y_0, c > 0$, N_t – пуассоновский процесс интенсивности λ, $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. В данной модели в качестве параметра y_0 берется начальный капитал компании, c – скорость получения премий (например, от застрахованных лиц), процесс N_t определяет моменты наступления страховых случаев, а η_k – размеры страховых выплат по ним. Подобная модель страхования может успешно применятся для моделирования капитала компании, занимающейся страхованием имущества или страхованием от несчастных случаев.

- **Модель страхования Спарре-Андерсена** [1] является обобщением модели Крамера-Лундберга: капитал страховой компании определяется аналогичным образом, но случайный процесс N_t, согласно которому определяются моменты выплат, считается произвольным процессом восстановления:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \tag{2}$$

  где $x, c > 0$, N_t – процесс восстановления, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Далее проведем краткий обзор результатов, полученных в ходе работ с данными моделями или их разновидностями.

2 Обзор литературы

В книге Булинского А. В. и Ширяева А. Н. [2] рассмотрен классический случай модели страхования Крамера-Лундберга и получен фундаментальный результат для оценки вероятности разорения. Доказательство полученной оценки проведено с помощью мартингальных методов, а именно – при помощи теоремы об остановке для мартингалов.

Бойков А.В. в своей работе [3] рассматривает модель Крамера-Лундберга, в которой поступления в капитал страховой компании поступают дискретно в соответствии с отдельным пуассоновским процессом. По аналогии с классической моделью Крамера-Лундберга, для вероятностей неразорения получены интегральные уравнения и экспоненциальные оценки.

Необычную модификацию модели Спарре-Андерсена в своей работе [4] изучает Муромская А.А. Страховая компания, для которой строится модель, является акционерным обществом и платит дивиденды в соответствии с линейной барьерной стратегией: при превышении капитала $U_t = Y_t - D_t$ (D_t – сумма дивидендов, выплаченная компанией к моменту времени t) барьерной функции b_t поступающая премия начинает полностью или частично выплачиваться в качестве дивидендов. В случае, когда $b_t = b + at$ является линейной, можно считать, что до следующего страхового случая интенсивность выплаты дивидендов равна $c - a$. Таким образом, капитал компании сохраняется на уровне b_t до очередной страховой выплаты.

За основу в дальнейшей работе возьмем именно модель страховой компании, являющейся акционерным обществом, поскольку данная проблема до конца не изучена, что открывает дополнительные возможности для экспериментов.

3 Постановка задачи

Для упрощения задачи в качестве базовой модели возьмем модель страхования Крамера-Лундберга (1).

Пусть D_t – сумма выплаченных дивидендов к моменту времени t. Тогда результирующий капитал компании в момент времени t равен $U_t = Y_t - D_t$.

Как уже было упомянуто, рассматривается некоторая барьерная функция b_t, определяющая нижнюю грань капитала компании для выплаты дивидендов:

1. Если $U_t < b_t$, дивиденды не выплачиваются;
2. Если $U_t > b_t$, в момент времени t единовременно выплачиваются дивиденды в размере $U_t - b_t$ (такое может быть только при $t = 0$, поэтому без ограничения общности можно считать, что всегда выполнено $U_t \leq b_t$);
3. После наступления момента $U_t = b_t$ значение капитала остается на уровне b_t до наступления следующего страхового случая или до превышения барьерной функцией капитала.

В дальнейшей работе попробуем получить оценку вероятности разорения компании в случае линейной барьерной стратегии аналогично стандартной модели Крамера-Лундберга: когда $b_t = b + at$, в том числе оценку вероятности разорения на интервале. Также смоделируем описанный процесс на одном из языков программирования с возможностью задания произвольной барьерной функции.

4 Теоретическая часть

4.1 Оценка вероятности разоерния в модели Крамера-Лундберга

Перед тем, как приступить к рассмотрению модификации модели Крамера-Лундберга, рассмотрим метод нахождения оценки вероятности разорения для его стандартного варианта (1). Кратко осветим основные моменты из работы Ширяева, Булинского [2].

Для начала предположим, что

$$\psi(v) = \mathbb{E}e^{v\eta_1} < \infty, \ v > 0. \tag{3}$$

Как правило, выплаты η_k ограничены, поэтому такое предположение вполне реалистично. Далее, воспользовавшись формулой полной вероятности и свойствами пуассоновского процесса, можем получить:

$$\mathbb{E}e^{-v(Y_t-Y_s)} = e^{(t-s)g(v)}, \text{ где } g(v) = \lambda(\psi(v)-1) - vc. \tag{4}$$

Подставляя в (4) $Y_0 = y_0$, получаем:

$$0 < \mathbb{E}e^{-vY_t} = e^{tg(v)-vy_0} < +\infty, \; t \in \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Введем процесс Z_t:

$$Z_t = e^{-vY_t - g(v)t} \tag{6}$$

и покажем, что он является мартингалом относительно естественной фильтрации $\mathbb{F}^Y$ процесса Y_t. Понятно, что он будет согласован с $\mathbb{F}^Y$ – Z_t явно выражается через Y_t. То, что Z_t является L_1-процессом, мы показали ранее (5). Осталось посчитать условное математическое ожидание при $t > s$:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}(Z_t|\mathcal{F}_s^Y) = \mathbb{E}(e^{-vY_t-g(v)t}|\mathcal{F}_s^Y) = \mathbb{E}(e^{-v(Y_t-Y_s)-vY_s-g(v)t}|\mathcal{F}_s^Y) = \\ = e^{-vY_s-g(v)t}\,\mathbb{E}(e^{-v(Y_t-Y_s)}|\mathcal{F}_s^Y) = e^{-vY_s-g(v)t}\,\mathbb{E}(e^{-v(Y_t-Y_s)}) = \\ = e^{-vY_s-g(v)t}\cdot e^{(t-s)g(v)} = e^{-vY_s-g(v)s} = Z_s.\end{gathered} \tag{7}$$

Далее вводим момент разорения:

$$\tau = \inf\{t > 0 : Y_t < 0\}. \tag{8}$$

По построению видно, что он является марковским моментом относительно фильтрации $\mathbb{F}^{\mathbb{Y}}$. Для применения теоремы об остановке нам нужны ограниченные марковские моменты. Поэтому будем рассматривать момент $\min(\tau, t)$. Применим теорему об остановке для процесса Z_t и данного марковского момента:

$$\begin{gathered}e^{-vy_0} = \mathbb{E}Z_0 = \mathbb{E}Z_{\min(\tau,t)} \geq \mathbb{E}e^{-vY_{\min(\tau,t)}-g(v)\cdot\min(\tau,t)}\mathrm{I}(\tau \leq t) = \mathbb{E}e^{-vY_\tau - g(v)\tau}\mathrm{I}(\tau \leq t) \geq \\ \geq |\; Y_\tau \leq 0 \text{ п.н. в силу непр. траекторий } | \geq \mathbb{E}e^{-g(v)\tau}\mathrm{I}(\tau \leq t) \geq \inf_{0\leq s\leq t} e^{-g(v)s}\cdot \mathrm{P}(\tau \leq t).\end{gathered} \tag{9}$$

Таким образом,

$$\mathrm{P}(\tau \leq t) \leq e^{-vy_0}\sup_{0\leq s\leq t} e^{g(v)s}. \tag{10}$$

Изучив функцию $g(v)$, введенную в (4), и предположив, что $c - \lambda\mathbb{E}\eta_1 > 0$ можно понять, что у уравнения $g(v) = 0$ существует единственный положительный корень v_0, $g(v_0) = 0$. Отсюда заключаем, что

$$\mathrm{P}(\tau \leq t) \leq e^{-v_0y_0} \; \forall t \in \mathbb{R}_+ \implies \mathrm{P}(\tau < \infty) \leq e^{-v_0y_0}. \tag{11}$$

4.2 Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями

Без углубления в доказательство опишем аналогичный результат, полученный Бойковым А.В. для модели Крамера-Лундберга со стохастическими премиями [3].

Данная модель описывается следующим образом. Пусть у нас заданы два независимых пуассоновских процесса $N(t)$ и $N_1(t)$ с интенсивностями λ и λ_1 соответственно, а также два набора случайных величин $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ с функциями распределения $F(u)$, $F(0) = 0$ и $G(v)$, $G(0) = 0$ – так определяются размеры выплат по страховым случаям и размеры стохастических премий соотвественно, причем случайные величины в каждом из наборов распределены одинаково, все случайные величины независимы в совокупности, x – размер стартового капитала. Тогда под моделью Крамера-Лундберга со стохастическими премиями понимают процесс эволюцию капитала согласно процессу $X(t)$:

$$X(t) = x + \sum_{i=1}^{N_1(t)} c_i - \sum_{i=1}^{N(t)} y_i. \tag{12}$$

Данная модель более актуальна с точки зрения реального мира: доход страховой компании, как правило, не постоянен и зависит от множества факторов. Более того, доход обычно поступает не непрерывно, а так же, как и выплаты по страховым случаям – частями.

Вероятность неразорения для стартового капитала x определяется как $\varphi(x) = \mathrm{P}(X(t) \geq 0\ \forall t \in \mathbb{R}_+)$. В этом случае данная вероятность оценивается согласно теореме:

Теорема 4.1 ([3], теорема 1)**.** *Вероятность неразорения $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению*

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(x-u)dF(u) + \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v)dG(v). \tag{13}$$

Если R – положительное решение характеристического уравнения

$$\lambda_1(\mathbb{E}e^{-Rc_i} - 1) + \lambda(\mathbb{E}e^{-Ry_i} - 1) = 0, \tag{14}$$

то $e^{-R(\Pi(t)-R(t)}$ – мартингал и $\varphi(x) \geq 1 - e^{-Rx}$.

4.3 Модель акционерной страховой компании в рамках модели Спарре-Андерсена

Муромская А.А. [4] рассматривает модель Спарре-Андерсена (2) в связке с барьерной стратегией выплат дивидендов, описанной в разделе 3. В качестве барьерной функциии берется линейная. На процесс N_t накладываются дополнительные ограничения: интервалы между моментами выплат $\{T_i\}$ имеют гамма-распределение с плотностью

$$g(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t},\ t \geq 0,\ \alpha > 1,\ \lambda > 0. \tag{15}$$

В процессе описания полученных результатов также рассматриваются характеристические уравнения ($G(t)$ – функция распределения случайных величин $\{T_i\}$):

$$\int_0^\infty e^{ry} dF(y) \int_0^\infty e^{-crt} dG(t) = 1 \tag{16}$$

и

$$\int_0^\infty e^{-qy} dF(y) \int_0^\infty e^{-t(Ra+qa-qc)} dG(t) = 1. \tag{17}$$

Доказывается, что данные уравнения имеют единственные положительные корни – R и Q соответственно. Тогда для вероятности разорения страховой компании $\varphi(x, b)$ в зависимости от начального капитала x и барьерной функции $b_t = b + at$ можно выписать оценку:

$$\psi(x, b) \leq e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b} e^{Qx}, \tag{18}$$

где

$$K = \frac{2^{\alpha-1}(\lambda+Rc)^{\alpha-1}R}{(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha-1}Q} + \frac{2^{\alpha-1}\Big((\lambda+Rc)^{\alpha}-(\lambda+Ra)^{\alpha}\Big)}{(\lambda+Ra)^{\alpha}-(\lambda+Ra+Qa-Qc)^{\alpha}}. \tag{19}$$

4.4 Модель акционерной страховой компании в рамках модели Крамера-Лундберга

Теперь перейдем к задаче, поставленной в разделе 3. Заметим, что времена между моментами скачков пуассоновского процесса интенсивности λ имеют экспоненциальное распределение с параметром λ. Экспоненциальное распределение в свою очередь является частным случаем гамма-распределения: $\mathrm{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, 1/\lambda)$. Это означает, что наша модель сводится к модели, рассмотренной Муромской А.А. в своей работе [4] и можем применить результат, описанный в подразделе 4.3.

Выпишем уравнение, аналогичное (16):

$$\begin{gathered} \mathbb{E}e^{r\eta_1} \cdot \mathbb{E}e^{-crT_1} = 1 \\ \mathbb{E}e^{r\eta_1} = \Big(\mathbb{E}e^{-crT_1}\Big)^{-1} = \frac{cr+\lambda}{\lambda}. \end{gathered} \tag{20}$$

В действительности мы уже работали с подобным уравнением в подразделе 4.1, когда изучали поведение функции $g(v)$ из (4). Там мы сослались на работу Ширяева А.Н. [2], где он показывает, что это уравнение имеет единственный положительный корень. Обозначим за R корень (20). Далее также выпишем аналог уравнения (17):

$$\begin{gathered} \mathbb{E}e^{-q\eta_1} \cdot \mathbb{E}e^{-T_1(Ra+qa-qc)} = 1 \\ \mathbb{E}e^{-q\eta_1} = \Big(\mathbb{E}e^{-T_1(Ra+qa-qc)}\Big)^{-1} = \frac{\lambda+Ra+q(a-c)}{\lambda}. \end{gathered} \tag{21}$$

Муромская А.А. доказывает ([4], лемма 1), что и это уравнением имеет единственный корень и обозначает его Q. Перепишем также выражение (19) в новых условиях:

$$K = \frac{R}{Q} + \frac{R(c-a)}{Q(c-a)} = \frac{2R}{Q}. \tag{22}$$

Итого, в соответствии с (18), получаем оценку на вероятность разорения:

$$\psi(x,b) \le e^{-Rx} + \frac{2R \cdot e^{-(R+Q)b+Qx}}{Q}. \tag{23}$$

4.5 Постановка задачи для программного кода

Сформулируем два утверждения, доказанных в работе Муромской А.А., которые могут нам пригодиться в дальнейшем исследовании.

Утверждение 4.1. *Корень уравнения (21) удовлетворяет неравенству:*

$$\frac{Ra}{c-a} < Q < \frac{Ra+\lambda}{c-a}. \tag{24}$$

Утверждение 4.2. *Если $\psi_k^{div}(x,b)$ – вероятность разорения в предположении, что поступило не более чем k требований, то для нее также выполнена оценка:*

$$\psi_k^{div}(x,b) \le e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b}e^{Qx}. \tag{25}$$

В дальнейшем смоделируем работу акционерной страховой компании в соотвествии с заданными ограничениями на языке Python. Используя метод Монте-Карло и утверждение 4.1 сравним вероятность дефолта в построенной модели с полученной оценкой. Корни R и Q будем вычислять будем с помощью метода градиентного спуска, используя в том числе результаты доказательства утверждения 4.2. После этого добавим в модель вариативности посредством введения возможности изменения стратегии выплат дивидендов и проведем экмперименты с различными барьерными функциями.

5 Результаты практической работы

В самом начале для удобства подсчетов мы зафиксировали параметры модели:

- λ - интенсивность процесса Пуассона, в соответствии с которым возникают страховые случаи;
- c - скорость поступления выплат;
- x - начальный капитал компании;
- для простоты в качестве размера выплат по страховым случаям η_i взяли равномерное распределение на отрезке $[m, M]$: $\eta_i \sim U[m, M]$, соответственно m, M - параметры этого распределения;
- b, a - параметры линейной барьерной функции, по которой определяется размер выплаты дивидендов.

5.1 Численное нахождение оценки вероятности разорения

Сперва нам нужно было получить численное представление оценки вероятности разорения, полученное в теоретических выкладках. Мы сделали это, применив функцию `minimize` из модуля `scipy.optimize` с указанием граничных условий на решение оптимизационной задачи – так мы нашли корни уравнений (16) и (17), учтя ограничения: корень первого уравнения должен быть положительным: $R > 0$, для корня второго уравнения Q должно выполняться утверждение 4.1.

Используя полученные значения R и Q, мы посчитали оценки вероятностей разорения для моделей Крамера-Лундберга с дивидендами и без дивидендов по неравенствам (23) и (11) соответственно.

5.2 Моделирование истории капитала акционерной страховой компании

Далее мы перешли непосредственно к моделированию. Мы реализовали интерфейсы для линейной барьерной функции и самой модели страховой компании: `LinearBarrier` и `KLStockInsuranceModel`. С помощью этих классов получили одну из реализаций случайного процесса, соответствующего капиталу страховой компании, и изобразили ее на графике (рис. 1).

По графикам видно, что барьерная функция оказывает небольшое влияние на капитал страховой компании. Скорее всего это связано с установленными параметрами модели: оценка вероятности разорения относительно большая. Соответственно, и значение капитала компании как правило будет лежать ниже барьереной функции.

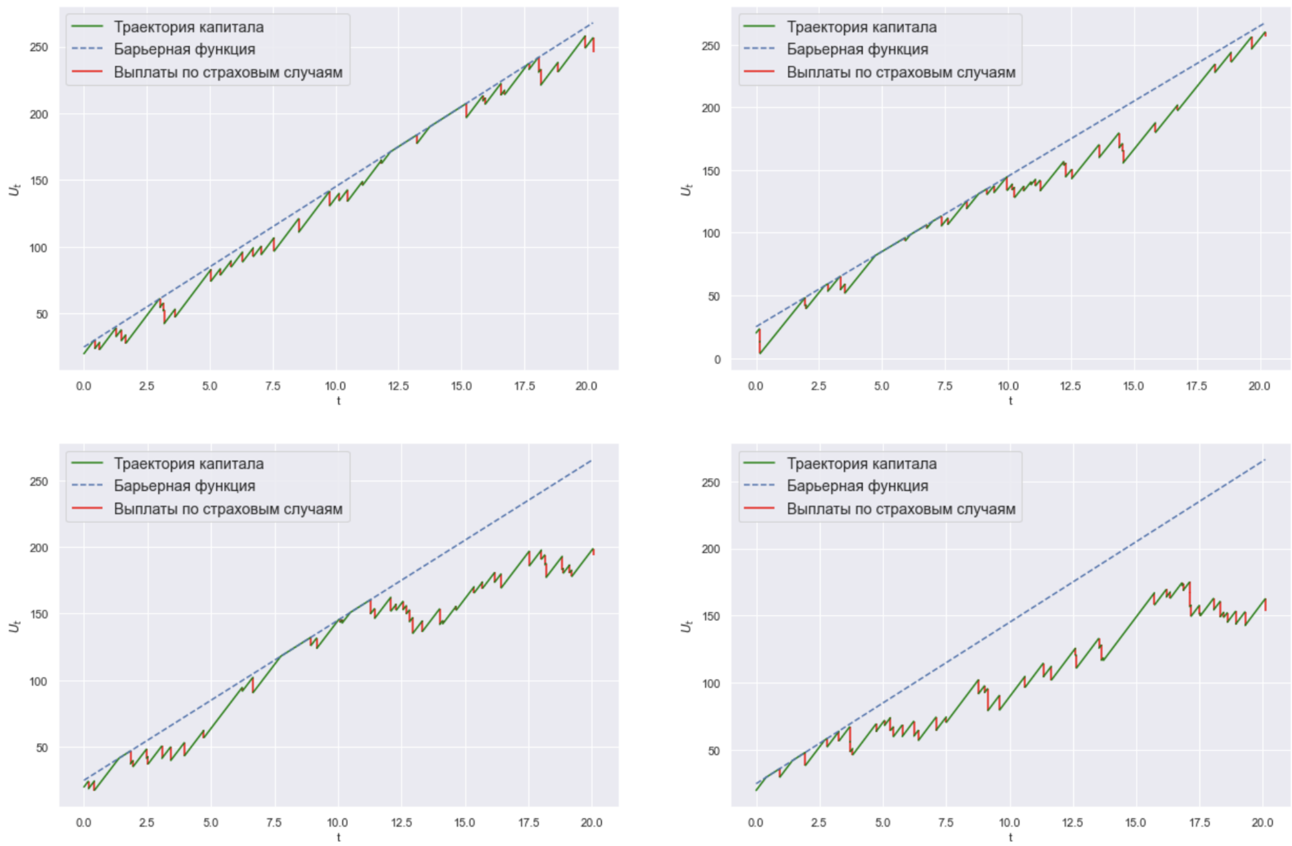

Рис. 1: Траектории капитала акционерной страховой компании с линейной стратегией выплаты дивидендов

5.3 Сравнение оценки вероятности разорения с эвристической оценкой вероятности, полученной с помощью метода Монте-Карло

После того, как мы получили численное представление оценки вероятности разорения и научились моделировать изменение капитала страховой компании с течением времени, мы смогли приступить к сравнению вычисленной оценки с результатами реального моделирования.

Для получения эмпирической оценки вероятности разорения мы использовали метод Монте-Карло: для разлиных временных огарничений мы 5000 раз запускали моделирование и считали, сколько раз модель приходила к разорению. Таким образом, мы проверяли справедливость утверждения 4.2 на ограниченном временном отрезке. Результаты первого эксперимента отразили на графике (рис. 2).

Рис. 2: Сравнение теоретических и эмпирических оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для стандартной модели Крамера-Лундберга и модели акционерной страховой компании

Из графика видно, что вероятность разорения акционерной страховой компании как правило выше – это ожидаемый результат, ведь выплата дивидендов негативно влияет на размер капитала компании. Вместе с этим ни одна из эмпирических оценок не превосходит своей верхней теоретической оценки. Тем не менее, оценка вероятности разорения для модели с выплтой дивидендов кажется избыточной, ведь даже значение стандартной оценки вероятности лежит выше графика эмпирической оценки. Мы предположили, что это может быть также связано с неудачным выбором параметров модели: чем менее благоприятными они являются, тем более модели с выплатой дивидендов и без выплаты дивидендов становятся друг на друга похожи. Поэтому при выборе более благоприятных параметров модели разница может быть существеннее.

Чтобы получить более наглядную картину, мы изменили параметры модели и повторили эксперимент (рис. 3).

Рис. 3: Сравнение теоретических и эмпирических оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для стандартной модели Крамера-Лундберга и модели акционерной страховой компании с альтернативными параметрами

График существенно изменился. Эмпирическая оценка вероятности разорения теперь лежит между двумя теоретическими оценками. Это означает, что оценка вероятности разорения стандартной модели Крамера-Лундберга для модели акционерной компании не работает, а наша полученная оценка является правильной.

5.4 Эксперименты с нелинейной барьерной функцией

В заключительном этапе практической работы мы решили убедиться, что построенная модель может работать и с другой барьерной функцией, отличной от линейной. В качестве примера мы взяли функцию вида $b_t = b + a\sqrt[4]{t}$. На следующих графиках (рис. 4, 5) изображены соответственно история изменения капитала страховой компании при единичном запуске моделирования и график эмпирической оценки вероятности разорения в зависимости от временного ограничения, полученный по аналогичному методу Монте-Карло.

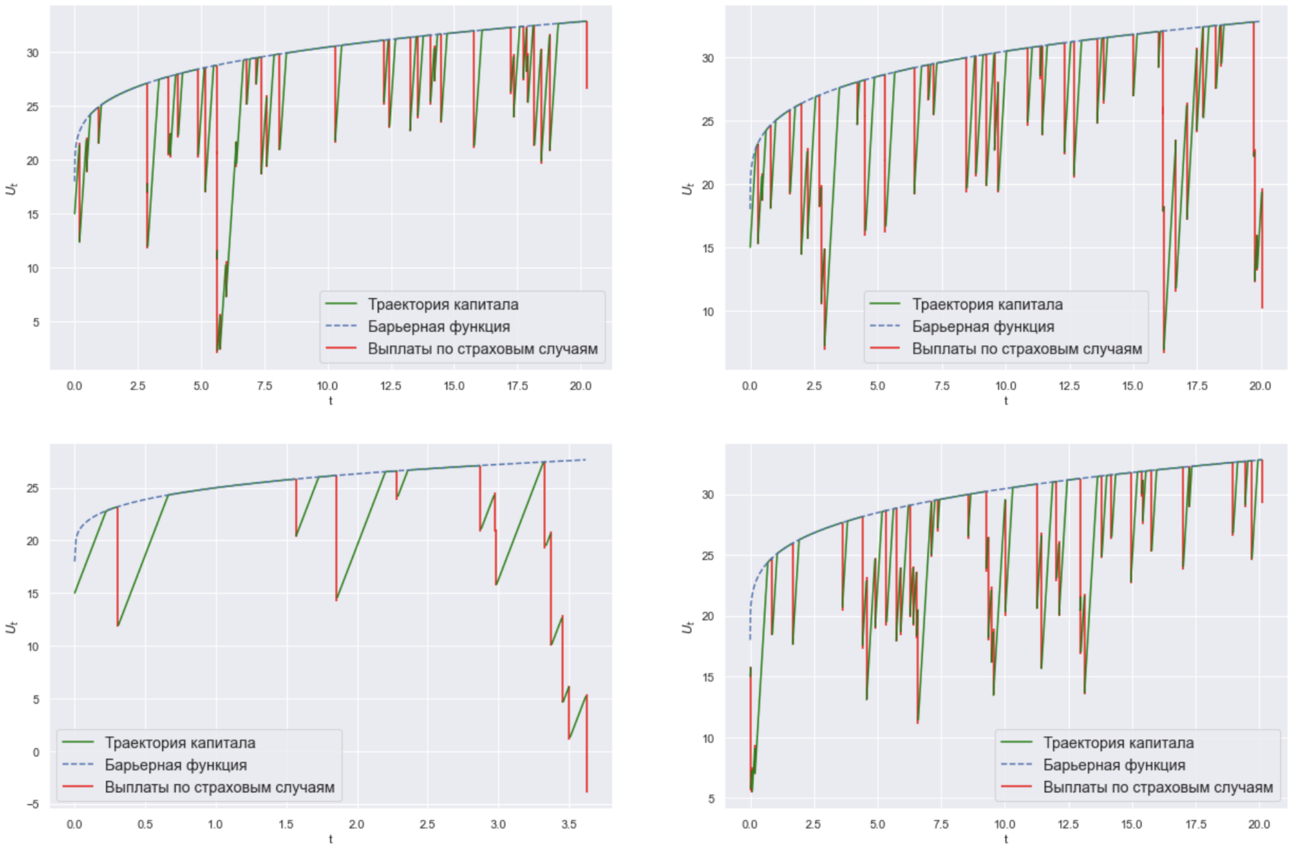

Рис. 4: Траектории капитала акционерной страховой компании с нелинейной стратегией выплаты дивидендов

На рис. 5 мы для наглядности оставили уровень верхней оценки для схожей модели с линейной стратегией выплаты дивидендов, чтобы показать, что при сублинейной барьерной функции полученная оценка не справедлива.

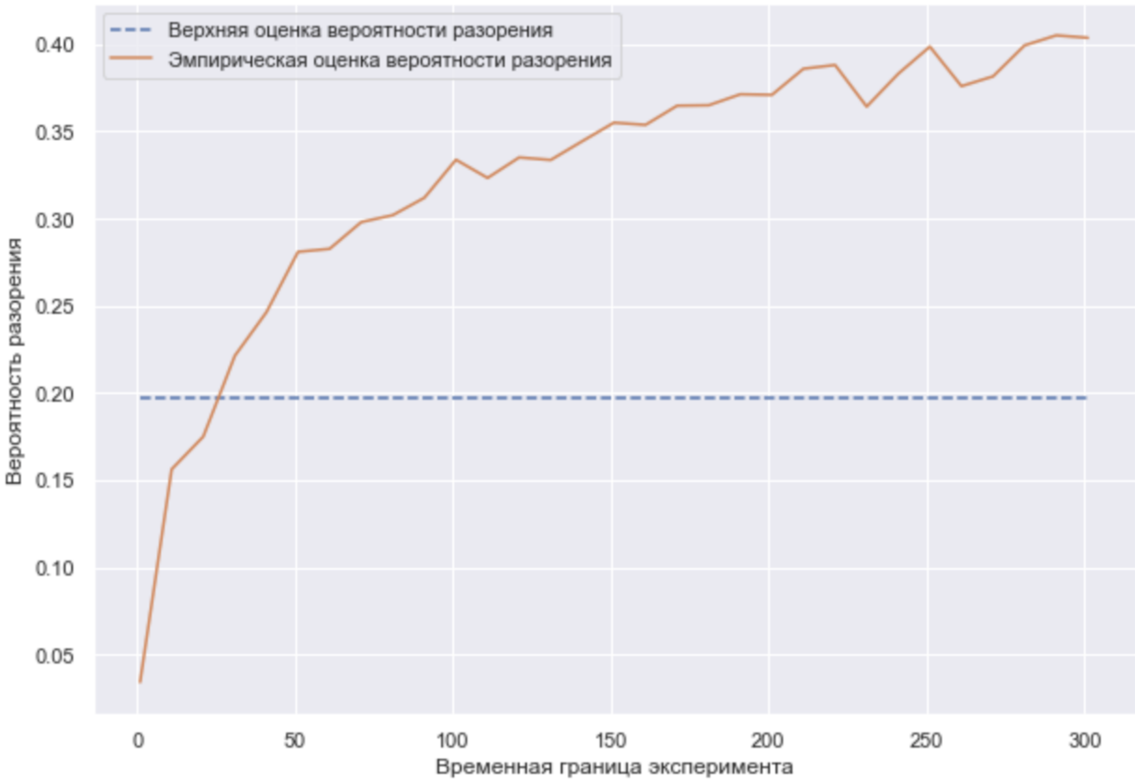

Рис. 5: Сравнение теоретической и эмпирической оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для модели акционерной страховой компании нелинейной стратегией выплаты дивидендов

Список литературы

[1] E. Sparre Andersen. n the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2(6), 1957.

[2] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[3] Бойков А.В. Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями. *Теория вероятностей и ее применения*, 47(3):549–553, 2002.

[4] Муромская А.А. Оценка вероятности разорения акционерной страховой компании в рамках модели риска Спарре Андерсена. *Фундаментальная и прикладная математика*, 22(3):179–189, 2018.