

# Построение модели акционерной страховой компании в рамках модели риска Крамера-Лундберга

Климовицкий Роман

4 мая 2021 г.

## 1 Введение

Наиболее распространенными и хорошо описанными моделями страхования являются модели страхования Крамера-Лундберга и Спарре-Андерсена:

- **Модель страхования Крамера-Лундберга**

В данной модели капитал страховой компании определяется как случайный процесс  $\{Y_t, t \geq 0\}$  следующим образом:

$$Y_t = y_0 + ct - \sum_{k=1}^{N_t} \eta_k, \quad (1)$$

где  $y_0, c > 0$ ,  $N_t$  – пуассоновский процесс интенсивности  $\lambda$ ,  $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины. В данной модели в качестве параметра  $y_0$  берется начальный капитал компании,  $c$  – скорость получения премий (например, от застрахованных лиц), процесс  $N_t$  определяет моменты наступления страховых случаев, а  $\eta_k$  – размеры страховых выплат по ним. Подобная модель страхования может успешно применяться для моделирования капитала компании, занимающейся страхованием имущества или страхованием от несчастных случаев.

- **Модель страхования Спарре-Андерсена [1]** является обобщением модели Крамера-Лундберга: капитал страховой компании определяется аналогичным образом, но случайный процесс  $N_t$ , согласно которому определяются моменты выплат, считается произвольным процессом восстановления:

$$X_t = x + ct - \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i, \quad (2)$$

где  $x, c > 0$ ,  $N_t$  – процесс восстановления,  $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  – независимые одинаково распределенные случайные величины.

Далее проведем краткий обзор результатов, полученных в ходе работ с данными моделями или их разновидностями.

## 2 Обзор литературы

В книге Булинского А. В. и Ширяева А. Н. [2] рассмотрен классический случай модели страхования Крамера-Лундберга и получен фундаментальный результат для оценки вероятности разорения. Доказательство полученной оценки проведено с помощью мартингаловых методов, а именно – при помощи теоремы об остановке для мартингалов.

Бойков А.В. в своей работе [3] рассматривает модель Крамера-Лундберга, в которой поступления в капитал страховой компании поступают дискретно в соответствии с отдельным пуассоновским процессом. По аналогии с классической моделью Крамера-Лундберга, для вероятностей неразорения получены интегральные уравнения и экспоненциальные оценки.

Необычную модификацию модели Спарре-Андерсена в своей работе [4] изучает Муромская А.А. Пусть страховая компания, для которой строится модель, является акционерным обществом и платит дивиденды в соответствии с линейной барьерной стратегией: при превышении капитала  $U_t = Y_t - D_t$  ( $D_t$  – сумма дивидендов, выплаченная компанией к моменту времени  $t$ ) барьерной функции  $b_t$  поступающая премия начинает полностью или частично выплачиваться в качестве дивидендов. В случае, когда  $b_t = b + at$  является линейной, можно считать, что до следующего страхового случая интенсивность выплаты дивидендов равна  $c - a$ . Таким образом, капитал компании сохраняется на уровне  $b_t$  до очередной страховой выплаты.

За основу в дальнейшей работе возьмем именно модель страховой компании, являющейся акционерным обществом, поскольку данная проблема до конца не изучена, что открывает дополнительные возможности для экспериментов.

### 3 Постановка задачи

Для упрощения задачи в качестве базовой модели возьмем модель страхования Крамера-Лундберга (1).

Пусть  $D_t$  – сумма выплаченных дивидендов к моменту времени  $t$ . Тогда результирующий капитал компании в момент времени  $t$  равен  $U_t = Y_t - D_t$ .

Как уже было упомянуто, рассматривается некоторая барьерная функция  $b_t$ , определяющая нижнюю грань капитала компании для выплаты дивидендов:

1. Если  $U_t < b_t$ , дивиденды не выплачиваются;
2. Если  $U_t > b_t$ , в момент времени  $t$  одновременно выплачиваются дивиденды в размере  $U_t - b_t$  (такое может быть только при  $t = 0$ , поэтому без ограничения общности можно считать, что всегда выполнено  $U_t \leq b_t$ );
3. После наступления момента  $U_t = b_t$  значение капитала остается на уровне  $b_t$  до наступления следующего страхового случая или до превышения барьерной функцией капитала.

В дальнейшей работе попробуем получить оценку вероятности разорения компании в случае линейной барьерной стратегии аналогично стандартной модели Крамера-Лундберга: когда  $b_t = b + at$ , в том числе оценку вероятности разорения на интервале. Также смоделируем описанный процесс на одном из языков программирования с возможностью задания произвольной барьерной функции.

## 4 Теоретическая часть

### 4.1 Оценка вероятности разорения в модели Крамера-Лундберга

Перед тем, как приступить к рассмотрению модификации модели Крамера-Лундберга, рассмотрим метод нахождения оценки вероятности разорения для его стандартного варианта (1). Кратко осветим основные моменты из работы Ширяева, Булинского [2].

Для начала предположим, что

$$\psi(v) = \mathbb{E}e^{vm} < \infty, \quad v > 0. \quad (3)$$

Как правило, выплаты  $\eta_k$  ограничены, поэтому такое предположение вполне реалистично. Далее, воспользовавшись формулой полной вероятности и свойствами пуассоновского процесса, можем получить:

$$\mathbb{E}e^{-v(Y_t - Y_s)} = e^{(t-s)g(v)}, \text{ где } g(v) = \lambda(\psi(v) - 1) - vc. \quad (4)$$

Подставляя в (4)  $Y_0 = y_0$ , получаем:

$$0 < \mathbb{E}e^{-vY_t} = e^{tg(v) - vy_0} < +\infty, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Введем процесс  $Z_t$ :

$$Z_t = e^{-vY_t - g(v)t} \quad (6)$$

и покажем, что он является мартингалом относительно естественной фильтрации  $\mathbb{F}^Y$  процесса  $Y_t$ . Понятно, что он будет согласован с  $\mathbb{F}^Y - Z_t$  явно выражается через  $Y_t$ . То, что  $Z_t$  является  $L_1$ -процессом, мы показали ранее (5). Осталось посчитать условное математическое ожидание при  $t > s$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_t | \mathcal{F}_s^Y) &= \mathbb{E}(e^{-vY_t - g(v)t} | \mathcal{F}_s^Y) = \mathbb{E}(e^{-v(Y_t - Y_s) - vY_s - g(v)t} | \mathcal{F}_s^Y) = \\ &= e^{-vY_s - g(v)t} \mathbb{E}(e^{-v(Y_t - Y_s)} | \mathcal{F}_s^Y) = e^{-vY_s - g(v)t} \mathbb{E}(e^{-v(Y_t - Y_s)}) = \\ &= e^{-vY_s - g(v)t} \cdot e^{(t-s)g(v)} = e^{-vY_s - g(v)s} = Z_s. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее вводим момент разорения:

$$\tau = \inf\{t > 0 : Y_t < 0\}. \quad (8)$$

По построению видно, что он является марковским моментом относительно фильтрации  $\mathbb{F}^Y$ . Для применения теоремы об остановке нам нужны ограниченные марковские моменты. Поэтому будем рассматривать момент  $\min(\tau, t)$ . Применим теорему об остановке для процесса  $Z_t$  и данного марковского момента:

$$\begin{aligned} e^{-vy_0} = \mathbb{E}Z_0 &= \mathbb{E}Z_{\min(\tau, t)} \geq \mathbb{E}e^{-vY_{\min(\tau, t)} - g(v) \cdot \min(\tau, t)} \mathbf{I}(\tau \leq t) = \mathbb{E}e^{-vY_\tau - g(v)\tau} \mathbf{I}(\tau \leq t) \geq \\ &\geq |Y_\tau \leq 0 \text{ п.н. в силу непр. траекторий}| \geq \mathbb{E}e^{-g(v)\tau} \mathbf{I}(\tau \leq t) \geq \inf_{0 \leq s \leq t} e^{-g(v)s} \cdot \mathbb{P}(\tau \leq t). \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом,

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq e^{-vy_0} \sup_{0 \leq s \leq t} e^{g(v)s}. \quad (10)$$

Изучив функцию  $g(v)$ , введенную в (4), и предположив, что  $c - \lambda\mathbb{E}\eta_1 > 0$  можно понять, что у уравнения  $g(v) = 0$  существует единственный положительный корень  $v_0$ ,  $g(v_0) = 0$ . Отсюда заключаем, что

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) \leq e^{-v_0 y_0} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \implies \mathbb{P}(\tau < \infty) \leq e^{-v_0 y_0}. \quad (11)$$

## 4.2 Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями

Без углубления в доказательство опишем аналогичный результат, полученный Бойковым А.В. для модели Крамера-Лундберга со стохастическими премиями [3].

Данная модель описывается следующим образом. Пусть у нас заданы два независимых пуассоновских процесса  $N(t)$  и  $N_1(t)$  с интенсивностями  $\lambda$  и  $\lambda_1$  соответственно, а также два

набора случайных величин  $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$  и  $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$  с функциями распределения  $F(u)$ ,  $F(0) = 0$  и  $G(v)$ ,  $G(0) = 0$  – так определяются размеры выплат по страховым случаям и размеры стохастических премий соответственно, причем случайные величины в каждом из наборов распределены одинаково, все случайные величины независимы в совокупности,  $x$  – размер стартового капитала. Тогда под моделью Крамера-Лундберга со стохастическими премиями понимают процесс эволюцию капитала согласно процессу  $X(t)$ :

$$X(t) = x + \sum_{i=1}^{N_1(t)} c_i - \sum_{i=1}^{N(t)} y_i. \quad (12)$$

Данная модель более актуальна с точки зрения реального мира: доход страховой компании, как правило, не постоянен и зависит от множества факторов. Более того, доход обычно поступает не непрерывно, а так же, как и выплаты по страховым случаям – частями.

Вероятность неразорения для стартового капитала  $x$  определяется как  $\varphi(x) = P(X(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}_+)$ . В этом случае данная вероятность оценивается согласно теореме:

**Теорема 4.1** ([3], теорема 1). *Вероятность неразорения  $\varphi(x)$  удовлетворяет интегральному уравнению*

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(x) = \lambda \int_0^x \varphi(x-u) dF(u) + \lambda_1 \int_0^\infty \varphi(x+v) dG(v). \quad (13)$$

Если  $R$  – положительное решение характеристического уравнения

$$\lambda_1(\mathbb{E}e^{-Rc_i} - 1) + \lambda(\mathbb{E}e^{-Ry_i} - 1) = 0, \quad (14)$$

то  $e^{-R(\Pi(t)-R(t))}$  – мартингал и  $\varphi(x) \geq 1 - e^{-Rx}$ .

### 4.3 Модель акционерной страховой компании в рамках модели Спарре-Андерсена

Муромская А.А. [4] рассматривает модель Спарре-Андерсена (2) в связке с барьерной стратегией выплат дивидендов, описанной в разделе 3. В качестве барьерной функции берется линейная. На процесс  $N_t$  накладываются дополнительные ограничения: интервалы между моментами выплат  $\{T_i\}$  имеют гамма-распределение с плотностью

$$g(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad \alpha > 1, \quad \lambda > 0. \quad (15)$$

В процессе описания полученных результатов также рассматриваются характеристические уравнения ( $G(t)$  – функция распределения случайных величин  $\{T_i\}$ ):

$$\int_0^\infty e^{ry} dF(y) \int_0^\infty e^{-crt} dG(t) = 1 \quad (16)$$

и

$$\int_0^\infty e^{-qy} dF(y) \int_0^\infty e^{-t(Ra+qa-qc)} dG(t) = 1. \quad (17)$$

Доказывается, что данные уравнения имеют единственные положительные корни –  $R$  и  $Q$  соответственно. Тогда для вероятности разорения страховой компании  $\varphi(x, b)$  в зависимости от начального капитала  $x$  и барьерной функции  $b_t = b + at$  можно выписать оценку:

$$\psi(x, b) \leq e^{-Rx} + K e^{-(R+Q)b} e^{Qx}, \quad (18)$$

где

$$K = \frac{2^{\alpha-1}(\lambda + Rc)^{\alpha-1}R}{(\lambda + Ra + Qa - Qc)^{\alpha-1}Q} + \frac{2^{\alpha-1}\left((\lambda + Rc)^\alpha - (\lambda + Ra)^\alpha\right)}{(\lambda + Ra)^\alpha - (\lambda + Ra + Qa - Qc)^\alpha}. \quad (19)$$

#### 4.4 Модель акционерной страховой компании в рамках модели Крамера-Лундберга

Теперь перейдем к задаче, поставленной в разделе 3. Заметим, что времена между моментами скачков пуассоновского процесса интенсивности  $\lambda$  имеют экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Экспоненциальное распределение в свою очередь является частным случаем гамма-распределения:  $\text{Exp}(\lambda) \equiv \Gamma(1, 1/\lambda)$ . Это означает, что наша модель сводится к модели, рассмотренной Муромской А.А. в своей работе [4] и можем применить результат, описанный в подразделе 4.3.

Выпишем уравнение, аналогичное (16):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{r\eta_1} \cdot \mathbb{E}e^{-crT_1} &= 1 \\ \mathbb{E}e^{r\eta_1} &= \left(\mathbb{E}e^{-crT_1}\right)^{-1} = \frac{cr + \lambda}{\lambda}. \end{aligned} \quad (20)$$

В действительности мы уже работали с подобным уравнением в подразделе 4.1, когда изучали поведение функции  $g(v)$  из (4). Там мы сослались на работу Ширяева А.Н. [2], где он показывает, что это уравнение имеет единственный положительный корень. Обозначим за  $R$  корень (20). Далее также выпишем аналог уравнения (17):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{-q\eta_1} \cdot \mathbb{E}e^{-T_1(Ra+qa-qc)} &= 1 \\ \mathbb{E}e^{-q\eta_1} &= \left(\mathbb{E}e^{-T_1(Ra+qa-qc)}\right)^{-1} = \frac{\lambda + Ra + q(a - c)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (21)$$

Муромская А.А. доказывает ([4], лемма 1), что и это уравнением имеет единственный корень и обозначает его  $Q$ . Перепишем также выражение (19) в новых условиях:

$$K = \frac{R}{Q} + \frac{R(c - a)}{Q(c - a)} = \frac{2R}{Q}. \quad (22)$$

Итого, в соответствии с (18), получаем оценку на вероятность разорения:

$$\psi(x, b) \leq e^{-Rx} + \frac{2R \cdot e^{-(R+Q)b+Qx}}{Q}. \quad (23)$$

#### 4.5 Постановка задачи для программного кода

Сформулируем два утверждения, доказанных в работе Муромской А.А., которые могут нам пригодиться в дальнейшем исследовании.

**Утверждение 4.1.** *Корень уравнения (21) удовлетворяет неравенству:*

$$\frac{Ra}{c - a} < Q < \frac{Ra + \lambda}{c - a}. \quad (24)$$

**Утверждение 4.2.** *Если  $\psi_k^{div}(x, b)$  – вероятность разорения в предположении, что поступило не более чем  $k$  требований, то для нее также выполнена оценка:*

$$\psi_k^{div}(x, b) \leq e^{-Rx} + Ke^{-(R+Q)b}e^{Qx}. \quad (25)$$

В дальнейшем смоделируем работу акционерной страховой компании в соответствии с заданными ограничениями на языке Python. Используя метод Монте-Карло и утверждение 4.1 сравним вероятность дефолта в построенной модели с полученной оценкой. Корни  $R$  и  $Q$  будем вычислять с помощью метода градиентного спуска, используя в том числе результаты доказательства утверждения 4.2. После этого добавим в модель вариативности посредством введения возможности изменения стратегии выплат дивидендов и проведем эксперименты с различными барьерными функциями.

## 5 Результаты практической работы

В данном разделе отражены основные результаты практической работы, полученные в ходе написания jupyter-ноутбука [5].

В самом начале для удобства подсчетов мы зафиксировали параметры модели:

- $\lambda$  - интенсивность процесса Пуассона, в соответствии с которым возникают страховые случаи;
- $c$  - скорость поступления выплат;
- $x$  - начальный капитал компании;
- для простоты в качестве размера выплат по страховым случаям  $\eta_i$  взяли равномерное распределение на отрезке  $[m, M]$ :  $\eta_i \sim U[m, M]$ , соответственно  $m, M$  - параметры этого распределения;
- $b, a$  - параметры линейной барьерной функции, по которой определяется размер выплаты дивидендов.

Конкретные значения параметров модели можно найти непосредственно в коде программы [5].

### 5.1 Численное нахождение оценки вероятности разорения

Сперва нам нужно было получить численное представление оценки вероятности разорения, полученное в теоретических выкладках. Мы сделали это, применив функцию `minimize` из модуля `scipy.optimize` с указанием граничных условий на решение оптимизационной задачи – так мы нашли корни уравнений (16) и (17), учтя ограничения: корень первого уравнения должен быть положительным:  $R > 0$ , для корня второго уравнения  $Q$  должно выполняться утверждение 4.1.

Используя полученные значения  $R$  и  $Q$ , мы посчитали оценки вероятностей разорения для моделей Крамера-Лундберга с дивидендами и без дивидендов по неравенствам (23) и (11) соответственно.

Для начала мы взяли следующие значения параметров модели:  $\lambda = 2$ ,  $c = 25$ ,  $x = 20$ ,  $m = 2$ ,  $M = 12$ ,  $b = 25$ ,  $a = 12$  и изобразили на графиках (рис. 1) зависимость теоретических оценок вероятностей разорения от значения каждого из параметров при фиксированных значениях остальных. По данным графикам можно судить о том, как каждый из параметров модели влияет на вероятность дефолта. Далее нам пригодится данная информация для подбора подходящих параметров модели.

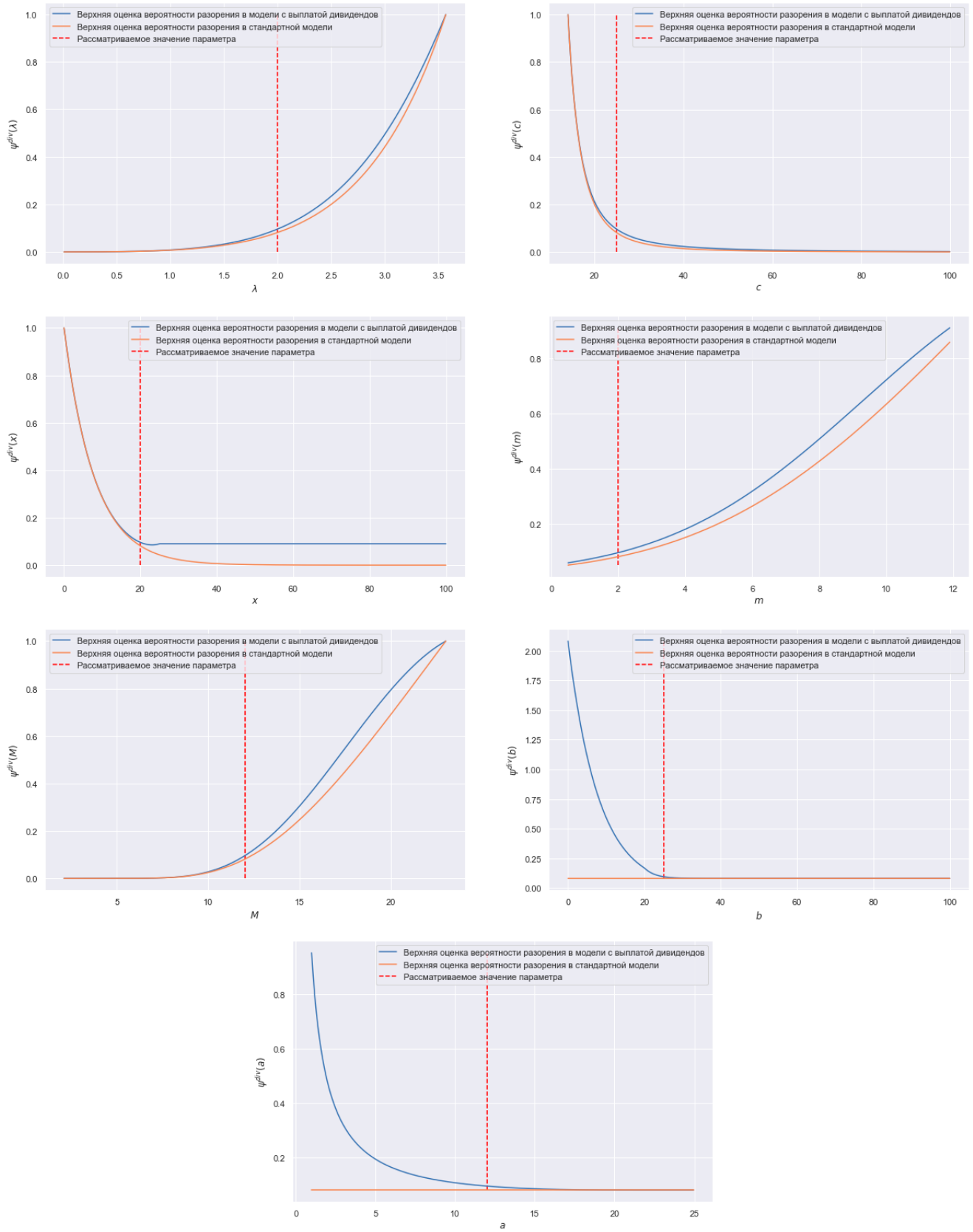


Рис. 1: Зависимость теоретических оценок вероятностей разорения от каждого из параметров  $\lambda$ ,  $c$ ,  $x$ ,  $m$ ,  $M$ ,  $b$ ,  $a$ .

## 5.2 Моделирование истории капитала акционерной страховой компании

Далее мы перешли непосредственно к моделированию с использованием установленных параметров модели. Мы реализовали интерфейсы для линейной барьерной функции и самой модели страховой компании: `LinearBarrier` и `KLStockInsuranceModel`. С помощью этих классов получили одну из реализаций случайного процесса, соответствующего капиталу страховой компании, и изобразили ее на графике (рис. 2).

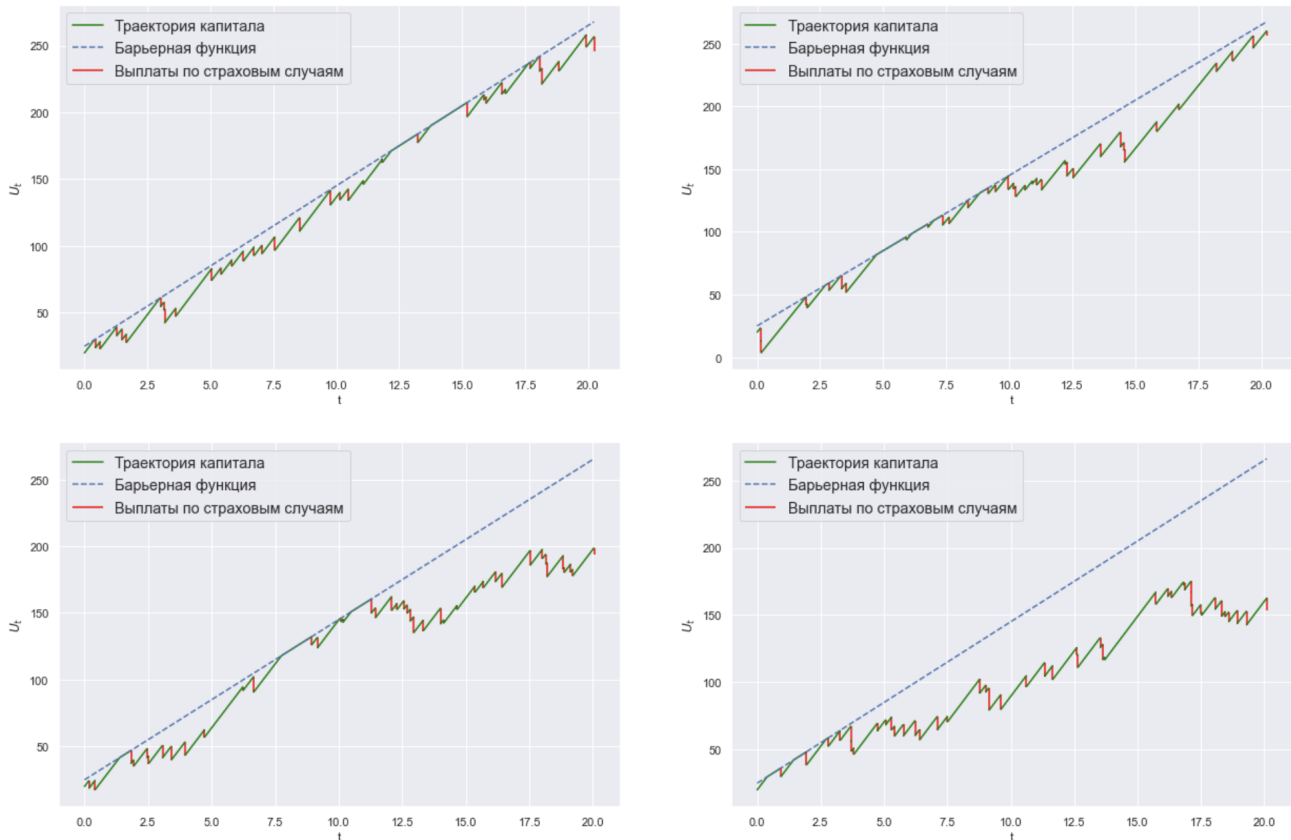


Рис. 2: Траектории капитала акционерной страховой компании с линейной стратегией выплаты дивидендов при  $\lambda = 2$ ,  $c = 25$ ,  $x = 20$ ,  $m = 2$ ,  $M = 12$ ,  $b = 25$ ,  $a = 12$ .

По графикам видно, что барьерная функция оказывает небольшое влияние на капитал страховой компании. Скорее всего это связано с установленными параметрами модели: оценка вероятности разорения относительно большая. Соответственно, и значение капитала компании как правило будет лежать ниже барьерной функции.

## 5.3 Сравнение оценки вероятности разорения с эвристической оценкой вероятности, полученной с помощью метода Монте-Карло

После того, как мы получили численное представление оценки вероятности разорения и научились моделировать изменение капитала страховой компании с течением времени, мы смогли приступить к сравнению вычисленной оценки с результатами реального моделирования.

Для получения эмпирической оценки вероятности разорения мы использовали метод Монте-Карло: для разных временных огарничений мы 5000 раз запускали моделирование и считали, сколько раз модель приходила к разорению. Таким образом, мы проверяли справед-



ливость утверждения 4.2 на ограниченном временном отрезке. Результаты первого эксперимента отразили на графике (рис. 3).



Рис. 3: Сравнение теоретических и эмпирических оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для стандартной модели Крамера-Лундберга и модели акционерной страховой компании при  $\lambda = 2$ ,  $c = 25$ ,  $x = 20$ ,  $m = 2$ ,  $M = 12$ ,  $b = 25$ ,  $a = 12$ .

Из графика видно, что вероятность разорения акционерной страховой компании как правило выше – это ожидаемый результат, ведь выплата дивидендов негативно влияет на размер капитала компании. Вместе с этим ни одна из эмпирических оценок не превосходит своей верхней теоретической оценки. Тем не менее, оценка вероятности разорения для модели с выплатой дивидендов кажется избыточной, ведь даже значение стандартной оценки вероятности лежит выше графика эмпирической оценки. Мы предположили, что это может быть также связано с неудачным выбором параметров модели: чем менее благоприятными они являются, тем более модели с выплатой дивидендов и без выплаты дивидендов становятся друг на друга похожи. Поэтому при выборе более благоприятных параметров модели разница может быть существеннее. Это также подтверждается графиками на рис. 1: отличия в теоретических оценках при заданных параметрах несущественны.

Чтобы получить более наглядную картину, мы изменили параметры модели и повторили эксперимент (рис. 4) для  $\lambda = 2$ ,  $c = 35$ ,  $x = 15$ ,  $m = 2$ ,  $M = 12$ ,  $b = 18$ ,  $a = 7$ . По рис. 1 видно, что наибольшие отличия в моделях наблюдаются при меньших значениях  $a$  и  $b$  – именно эти параметры барьерной функции мы поменяли в первую очередь. В действительности, мы также изменили параметры  $x$  и  $c$ , отвечающие за начальный капитал и поступления средств в него соответственно, – это было сделано для того, чтобы выполнялось начальное условие  $x < b$ , а также для того, чтобы скорректировать увеличение вероятности разорения за счет ускорения поступления средств в капитал.

График существенно изменился. Эмпирическая оценка вероятности разорения теперь лежит между двумя теоретическими оценками. Это означает, что оценка вероятности разоре-



Рис. 4: Сравнение теоретических и эмпирических оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для стандартной модели Крамера-Лундберга и модели акционерной страховой компании с альтернативными параметрами  $\lambda = 2$ ,  $c = 35$ ,  $x = 15$ ,  $m = 2$ ,  $M = 12$ ,  $b = 18$ ,  $a = 7$ .

ния стандартной модели Крамера-Лундберга для модели акционерной компании не работает, а наша полученная оценка является правильной.

#### 5.4 Эксперименты с нелинейной барьерной функцией

В заключительном этапе практической работы мы решили убедиться, что построенная модель может работать и с другой барьерной функцией, отличной от линейной. В качестве примера мы взяли функцию вида  $b_t = b + a\sqrt[4]{t}$ . На следующих графиках (рис. 5, 6) изображены соответственно история изменения капитала страховой компании при единичном запуске моделирования и график эмпирической оценки вероятности разорения в зависимости от временного ограничения, полученный по аналогичному методу Монте-Карло.

На рис. 6 мы для наглядности оставили уровень верхней оценки для схожей модели с линейной стратегией выплаты дивидендов, чтобы показать, что при сублинейной барьерной функции полученная оценка не справедлива.

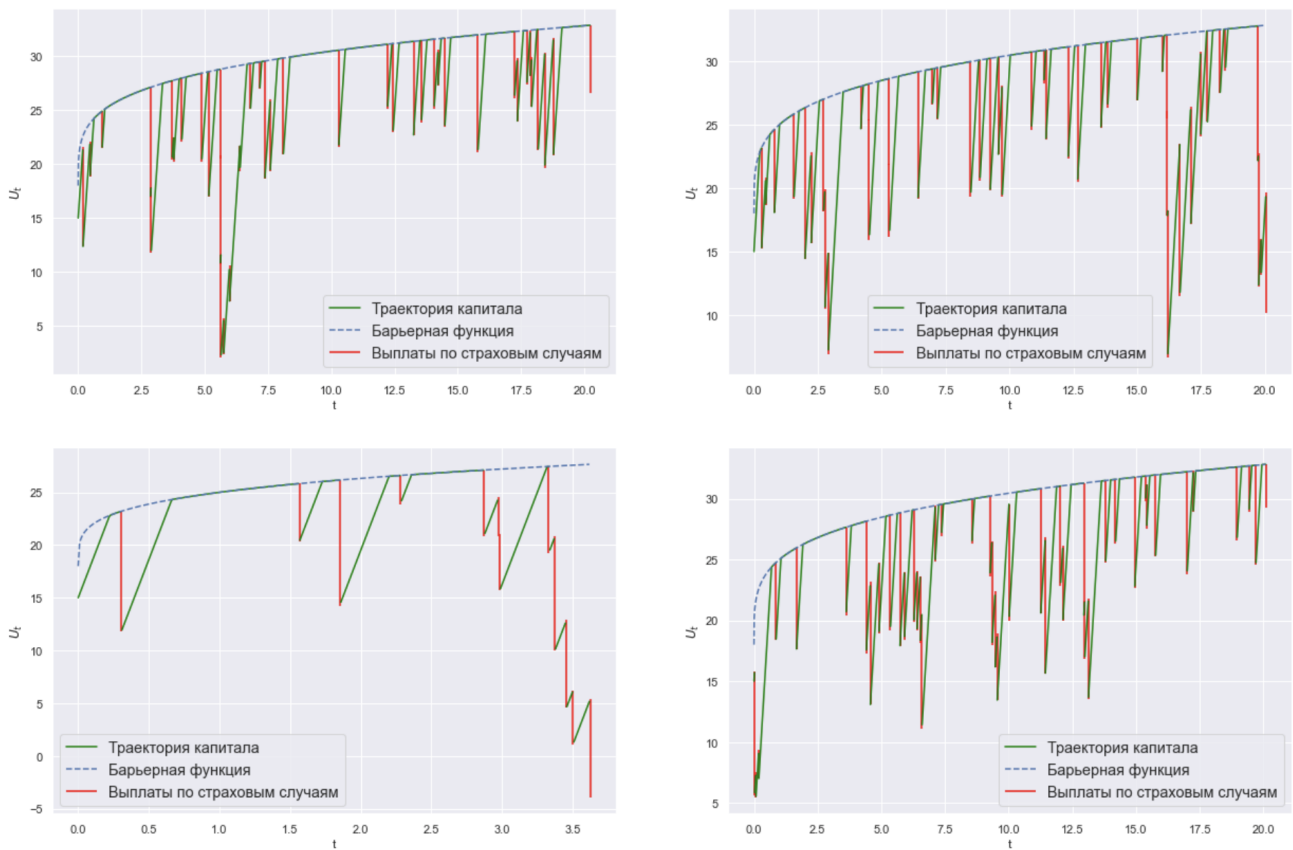


Рис. 5: Траектории капитала акционерной страховой компании с нелинейной стратегией выплаты дивидендов.

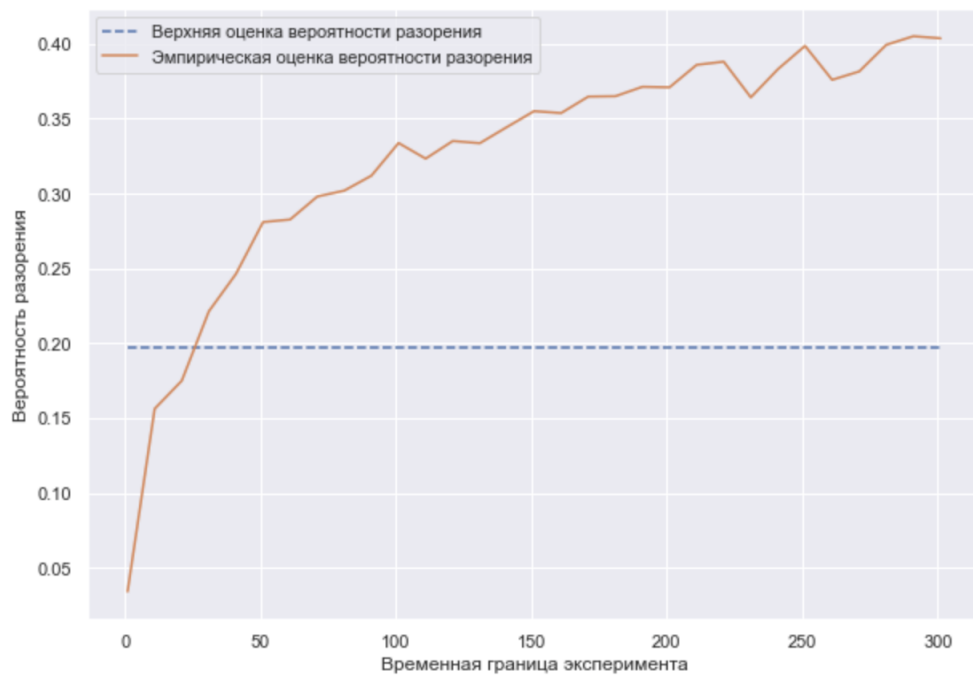


Рис. 6: Сравнение теоретической и эмпирической оценок вероятности разорения, полученных при помощи метода Монте-Карло для модели акционерной страховой компании нелинейной стратегией выплаты дивидендов.

## 6 Результаты

В ходе работы над проектом мы углубились в проблему моделирования капитала страховых компаний и получили ряд полезных результатов по этой теме:

- рассмотрели различные подходы к описанию моделей страховых компаний, мы изучили работы по следующим темам: стандартные модели Крамера-Лундберга и Спарре-Андерсена, модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями, а также модель акционерной страховой компании в рамках модели Спарре-Андерсена;
- реализовали нахождение верхней оценки вероятности разорения акционерной страховой компании в рамках модели Крамера-Лундберга с линейной стратегией выплаты дивидендов;
- создали интерфейсы для стандартной и акционерной моделей страховых компаний с возможностью задания произвольной барьерной стратегии выплаты дивидендов;
- провели моделирование траекторий капитала акционерной страховой компании;
- нашли эмпирические оценки вероятностей разорения на ограниченном временном интервале с применением метода Монте-Карло.

## 7 Выводы

После проведения экспериментов мы убедились, что их результаты соответствуют теоретическим выкладкам: эмпирические оценки вероятности разорения не превосходят своих верхних оценок. Мы также показали, что выплаты дивидендов могут существенно влиять на вероятность разорения компании – при определенных параметрах модели ее эмпирическая оценка превосходит верхнюю оценку вероятности разорения в стандартной модели Крамера-Лундберга с теми же параметрами без выплаты дивидендов.

В конце концов, мы убедились, что наша реализация модели акционерной страховой компании может работать с различными барьерными функциями, и показали, что для сублинейных барьерных функций полученная оценка может не выполняться.

Результаты данной работы могут быть полезны для прогнозирования работы страховой компании, а также для подбора подходящей стратегии выплат дивидендов и получения нужного уровня вероятности разорения. Программный код проекта способен предоставить удобный интерфейс для получения наглядных графиков с возможными траекториями капитала компании и может быть использован для будущих исследований.

При инвестировании или учреждении страховой компании важно оценивать возможные риски, и данная работа может стать отправной точкой для дальнейшего прогнозирования.

## Список литературы

- [1] E. Sparre Andersen. n the collective theory of risk in case of contagion between claims. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 2(6), 1957.
- [2] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
- [3] Бойков А.В. Модель Крамера-Лундберга со стохастическими премиями. *Теория вероятностей и ее применения*, 47(3):549–553, 2002.
- [4] Муромская А.А. Оценка вероятности разорения акционерной страховой компании в рамках модели риска Спарре Андерсена. *Фундаментальная и прикладная математика*, 22(3):179–189, 2018.
- [5] Код проекта, оформленный в виде jupyter-ноутбука. [https://colab.research.google.com/github/regulyar/kl-stock-model/blob/main/kl\\_stock\\_model.ipynb](https://colab.research.google.com/github/regulyar/kl-stock-model/blob/main/kl_stock_model.ipynb).