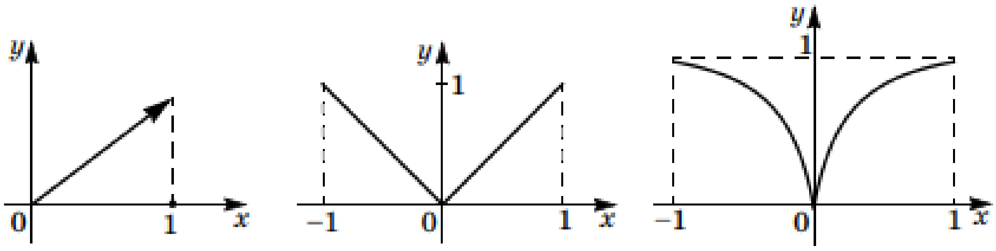

Рис. 52 Рис. 53 Рис. 54

такой, что $f'(\xi) = 0$.(При этом, в силу условия 3, в котором говорится о значениях функции в концевых точках промежутка, следует рассматривать лишь функции, определенные на отрезках.)

Функция $f(x)$, определенная на отрезке [0, 1] и равная x, если $0 \le x < 1$, и 0, если $x = 1$, удовлетворяет условиям 2 и 3, и 3, но не удовлетворяет условию 1 (рис. 52).

Функция $f(x) = |x|$, $x \in [0; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2 (рис. 53).

Наконец, функция $f(x) = x$, $x \in [-1; 1]$ удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 (см. рис. 50).

Для всех этих функций не существует точки, в которой их производная обращалась бы в нуль.

Обратим внимание на то, что по условиям теоремы Ролля отрезок [a, b] может содержать точки, в которых функция имеет определенного знака бесконечную производную, т.е. в которых $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$. Это требование нельзя ослабить, заменив его условием $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$. Например, для функции $f(x) = \sqrt{|x|}$, $-1 \le x \le 1$, не существует точки $\xi = [-1, +1]$, в которой производная этой функции обращалась бы в нуль. Вместе с тем функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля на отрезке [-1, 1], за исключением того, что в точке x = 0 эта функция не имеет ни конечной, ни определенного знака бесконечной производной (рис. 54).

В самом деле, для этой точки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, причем этот предел не является бесконечностью определенного знака.