

CAPITULO I: INTRODUCCION

1 - DEFINICION

2 - PASOS A SEGUIR EN LA APLICACION DEL MEF.

3 -TIPOS DE ELEMENTOS

1. INTRODUCCION

1.1 DEFINICION

Podría decirse que casi todos los fenómenos de la naturaleza, tanto biológica, geológica o mecánica, pueden describirse por medio de leyes de la física bajo la forma de ecuaciones algebraicas, ecuaciones diferenciales o integrales; involucrando algunas constantes. Algunos ejemplos pueden ser:

- a) encontrar la distribución de tensiones en una pieza mecánica sometida a cargas mecánicas, térmicas o aerodinámicas.
- b) encontrar el grado de polución de las aguas del mar o de la atmósfera.
- c) simulación de climas para recrear tornados o tormentas.
- d) etc..

En algunos casos encontrar la solución exacta es una tarea muy tediosa o hasta imposible. Ante esta situación, surgen los métodos aproximados los cuales proveen una alternativa viable para encontrar al menos una solución aproximada válida.-

Entre los métodos de aproximación más difundidos podemos citar al Método de las Diferencias Finitas y a los Métodos Variacionales.-

El primero de ellos (MDF) consiste en reemplazar las derivadas por diferencias finitas lo cual implica que la solución debe asociarse a un conjunto de puntos (entre los que se plantean las diferencias) que en definitiva forman una malla dentro del dominio. Una vez planteadas las condiciones de borde en el sistema de ecuaciones emergente, se obtiene la solución discretizada en los puntos de la malla. Como se ve, lo que en realidad se efectúa es una discretización matemática de la ecuación que rige el problema donde las tangentes trigonométricas a la tangente geométrica a la curva incógnita, se reemplazan por las tangentes trigonométricas a segmentos secantes a la curva (esto es para las derivadas primeras). Esta práctica adolece de muchas desventajas, entre las cuales las más importantes son:

- a) Aún en mallas muy densificadas, la discretización es muy grosera e inexacta.
- b) La imposición de condiciones de borde
- c) No es posible emplear mallas irregulares o no rectangulares (para el caso de MDF en coordenadas cartesianas).

En los Métodos Variacionales, a los cuales nos referiremos solo tangencialmente pese a ser la verdadera justificación del método que se pretende abordar aquí, se realizan dos tareas básicas:

- 1) Mediante procedimientos matemáticos fuera del alcance de esta publicación se disminuye el grado de diferenciación máximo que aparece en la ecuación diferencial que se pretende solucionar lo máximo posible. Este proceso es llamado relajamiento de la ecuación diferencial o debilitamiento.
- 2) Una vez complementado lo anterior, se reemplaza la función incógnita por una función aproximada generalmente algebraica polinómica. Este reemplazo convierte la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones algebraicas donde las incógnitas son los paráme-

tros arbitrarios que forman parte de los polinomios. Como ejemplo, una función de reemplazo podría ser:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y$$

Donde u sería la incógnita que aparece en la ecuación diferencial del problema. El sistema de ecuaciones del que se ha hablado resolvería el valor de los α_i , y así se conocería la solución del problema.

Es clara ahora la necesidad del primer paso pues es evidente que cuanto más alto sea el grado de derivación máximo que tenga la ecuación diferencial, más términos deberá tener el polinomio reemplazante (es decir términos cuadráticos, cúbicos, etc.) para poder ser derivado y que aún permanezcan dichos términos. Esto, a su vez, trae aparejado una mayor cantidad de incógnitas a resolver para obtener la solución.

El método en sí no presentaría mayores problemas de no ser porque es realmente muy complicado encontrar funciones aproximadas que reemplacen a la real cuando los contornos del continuo en el que es válida la ecuación diferencial son muy irregulares, o bien, sus propiedades varían de una porción a otra del mismo.-

Para superar esta dificultad aparece la idea de subdividir el todo en partes geoméricamente sencillas de modo tal que ni sus propiedades, ni sus contornos, sean arbitrarios. Así, la obtención rápida de la función aproximada estaría asegurada aún cuando, como contrapartida, en vez de tener solo un número n de parámetros desconocidos para todo el continuo tendremos un número n de parámetros desconocidos para cada una de esas porciones.

Y es justamente a cada una de esas partes a las que se le da el nombre de **Elementos Finitos** y al mecanismo de resolución **Método de los Elementos Finitos** (MEF).

Ampliando un poco lo comentado, puede decirse que este método posee dos ventajas fundamentales que lo han convertido en uno de los más populares, estas son:

*a) Dominios geométricos complejos se pueden particionar en subdominios simples (triángulos, rectángulos, etc.) llamados **Elementos Finitos**.*

b) Las funciones aproximadas para cada uno de estos elementos (triángulos, rectángulos, etc.) pueden estandarizarse dado la estandarización del dominio.

*Esto se logra partiendo de la idea de que cualquier función continua, que será la incógnita básica (por ej. función desplazamiento), puede representarse (o reemplazarse) por medio de un conjunto de funciones algebraicas polinómicas deducidas de la teoría de interpolación; llamadas **funciones de Interpolación**. El nombre de estas funciones se debe a que, en el MEF, los parámetros desconocidos de la función aproximada sustituta de la incógnita básica, se calculan interpolando entre valores determinados que esa misma incógnita toma en ciertos lugares especiales. A su vez, estos valores son también desconocidos y pasarán a ser los objetos de la solución.*

En general y según lo revelado, la forma que adoptaremos en el MEF para las incógnitas del problema será:

$$u^{(e)} \approx u_h^{(e)} = \sum_{i=1}^n u_i * N_i$$

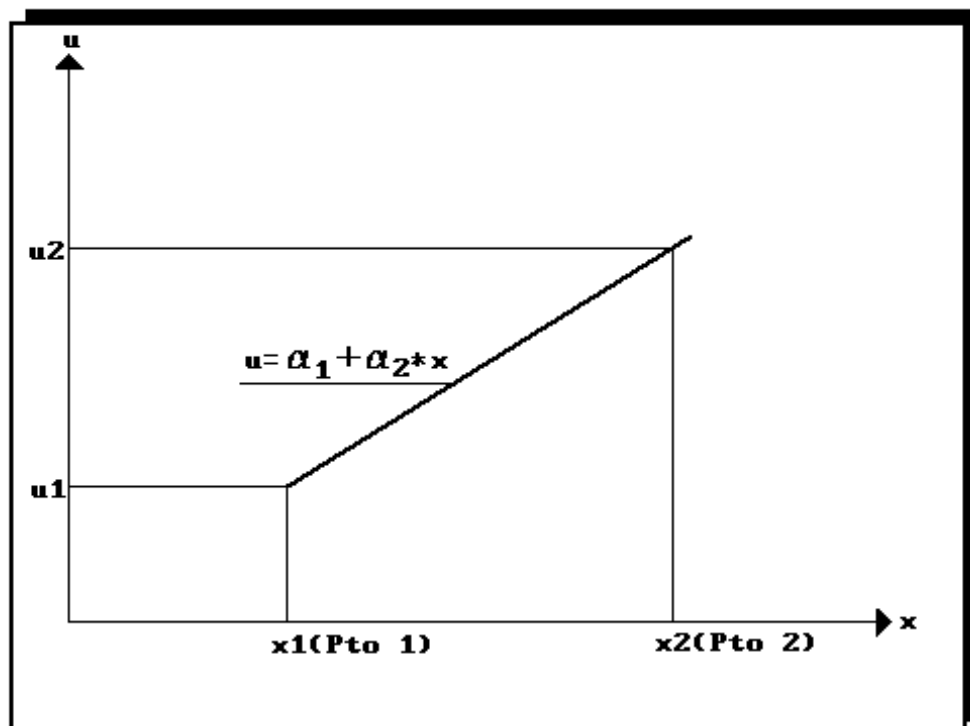
En la anterior $u_h^{(e)}$ es la función incógnita dentro del elemento, u_i es el valor de la función incógnita en los lugares especiales (nodos) y N_i son las funciones de interpolación. Esta forma, aparentemente muy distante a un polinomio, será desarrollada con posterioridad.

Para aclarar ideas, veamos el siguiente ejemplo:

Supongamos que la curva de la figura siguiente se usa como reemplazo de la elástica de un cierto cuerpo sometido a ciertas cargas. Entonces, la ecuación sustituta será:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 * x \quad (4-1)$$

Donde: $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ son los parámetros desconocidos de la ecuación sustituta.



Se puede plantear el sistema de ecuaciones siguiente:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_1$$

$$u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 * x_2$$

Donde x_1, x_2 son las coordenadas x de los puntos donde la incógnita u es especificada y u_1, u_2 son los valores que toma la incógnita (Ej: elástica) u en los puntos anteriores.

INTRODUCCION

En este sistema de ecuaciones es factible despejar los parámetros $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ en función de u_1, u_2 quedando finalmente:

$$\alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad \alpha_1 = \frac{u_1 * x_2 - u_2 * x_1}{x_2 - x_1}$$

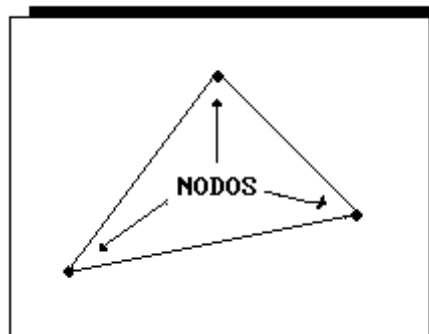
De esta manera se podría expresar la ecuación sustituta en términos de estos valores, para que estos pasen a ser las incógnitas. Es evidente que el lugar donde se desee tomar a u_1 y u_2 es absolutamente arbitrario.

$$u = \frac{u_1 * x_2 - u_2 * x_1}{x_2 - x_1} + \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} * x \text{ o bien } u = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} * u_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} * u_2 \quad (5-1)$$

Esta nueva forma de expresar la incógnita es equivalente a haber **interpolado** a u entre u_1 y u_2 .

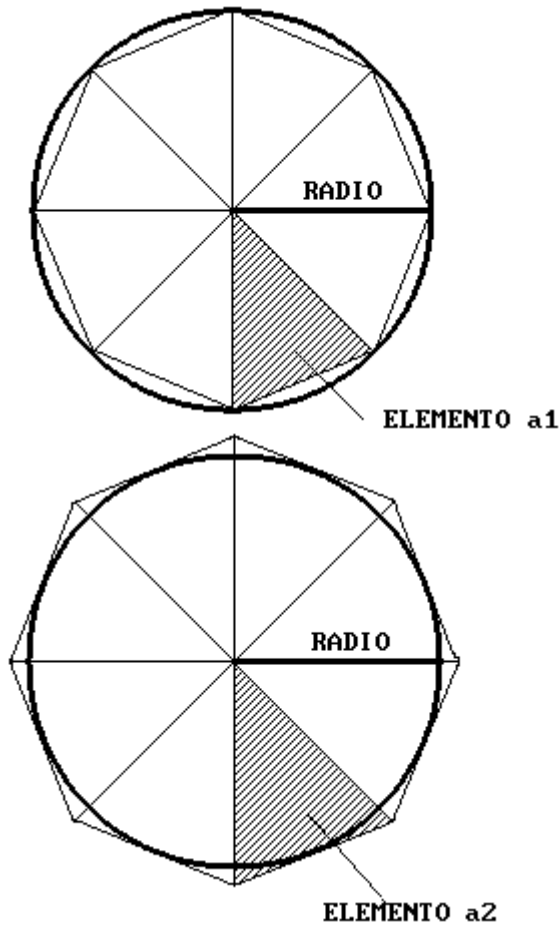
En el MEF se intentará repetir, con algunos cambios, lo realizado en el ejemplo dentro de cada elemento llegando finalmente a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas serán todos los u_1, u_2 en ciertos puntos de cada elemento, sistema válido para todos ellos, que será resuelto con ayuda de un ordenador.

*Es importante destacar que, en el Método de los Elementos Finitos y por practicidad, los puntos especiales que se toman como referencia se denominan **nodos** y los valores de la incógnita en ese lugar se llaman **incógnitas nodales**.*



1.2 PASOS A SEGUIR EN LA APLICACION DEL MEF

Tomaremos un ejemplo que ilustre los pasos a seguir para la aplicación del MEF. Si bien los conceptos que involucra el MEF son mucho más profundos que los que pretende mostrar el ejemplo, la idea básica del mismo puede verse clarificada en un sentido general:



Supongamos un círculo cuya área deseamos determinar. Admitamos desconocer por un momento la ecuación $\pi \cdot r^2$ y pretendamos resolver el problema con un conjunto de triángulos:

Paso 1) Discretización del Dominio: Consiste en dividir el área (dominio) del círculo en n subdominios, en este caso triángulos, lo cual puede hacerse de varias maneras de las que se ejemplifican (ver figura).

Cada triángulo es llamado elemento. El conjunto de triángulos se denomina **Malla de Elementos Finitos**.

Paso 2) Ecuación del elemento: En este caso la ecuación de cada elemento es el área del mismo.

$$a_1 = \frac{R^2}{2} * \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) ; a_2 = R^2 * \text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Como puede apreciarse, estas ecuaciones involucran características

propias del elemento. En este caso, dada la sencillez del ejemplo, las ecuaciones propias del elemento son exactas, no requieren simplificación alguna.

Paso 3) Ensamblaje: A través de este procedimiento se hace colaborar a la totalidad de los elementos siguiendo alguna ley. En este caso es simplemente que el área del círculo es la suma del área de todos los elementos en que se subdividió el dominio.

$$A_1 = \sum_{i=1}^n a_1 ; A_2 = \sum_{i=1}^n a_2 ; A_1 = n \frac{R^2}{2} \text{sen} \frac{2\pi}{n} \text{ y } A_2 = n * R^2 * \text{tg}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Paso 4) Convergencia y verificación error: No siempre es posible tener una real idea del error cometido porque rara vez se cuenta con los suficientes datos. Sin embargo para este caso, como se conoce el área del círculo podemos decir:

$$e_1 = \frac{\pi * R^2}{n} - \frac{R^2}{2} * \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) \implies e_1 = R^2 * \text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \frac{\pi * R^2}{n}$$

El error total es n veces el error por elemento:

$$E_1 = n * e_1 = \pi * R^2 - A_1$$

$$E_2 = n * e_2 = A_2 - \pi * R^2$$

Para verificar la tendencia del error debemos analizar el valor de A_1 o A_2 en el límite de $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_1 = n * \frac{R^2}{2} * \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Si hacemos un cambio de variable $x = 2/n$

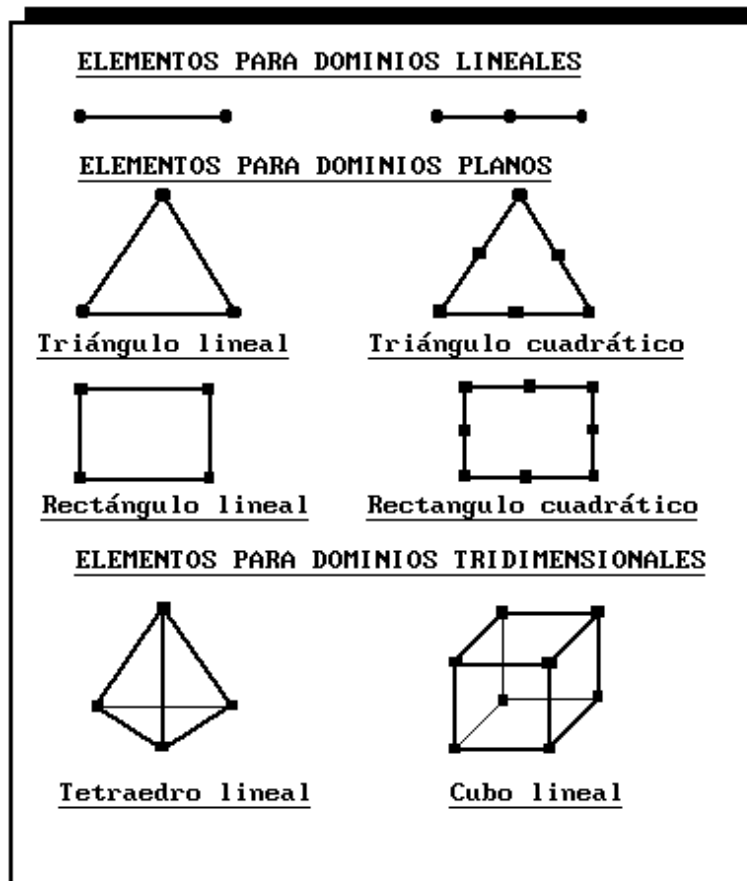
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R^2 * \text{sen}(x * \pi)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi * R^2 * \cos(x * \pi)}{1} = \pi * R^2$$

Lo mismo sería si tratáramos con A_2 .

Como se ve si tomamos más elementos ("n" mayor) la solución tiende al valor exacto. El ejemplo tomado sirve como una muestra de la mecánica general del método, pero cada uno de los pasos descritos arriba se hacen tanto más complicados como más complicado sea el problema. Solo por citar, el primer paso generalmente se realiza en forma automática a través de programas que se encargan de trazar la malla acorde a las condiciones del problema; el segundo paso generalmente involucra ecuaciones diferenciales que deben ser reemplazadas por formulaciones aproximadas lo cual induce a un error extra además del de discretización; el tercer paso quizá sea el más mecánico pero debe llevar en cuenta la posición de cada nodo de la malla y el cuarto paso muchas veces requiere de complejos planteos matemáticos para estimarlo.

1.3 TIPOS DE ELEMENTOS

Como se ha comentado, la subdivisión del continuo en porciones llamadas elementos finitos, nos plantea la cuestión de que tipo de elemento usar.



En sí y por definición, los elementos son simplemente porciones del dominio total formado por lados y vértices que se denominan nodos. Pueden ser lineales (barras), planos (triángulos, rectángulos), espaciales (poliedros en general), de revolución, etc.

Cualquiera de ellos tiene la particularidad de que, como su forma es perfectamente definida, las funciones incógnitas dentro de él pueden reemplazarse por funciones de interpolación, también perfectamente definidas, que se apoyen en los nodos, es decir, que usen los valores de la incógnita en los nodos para obtener el valor de ésta en cualquier lugar del elemento (esto es nuevamente interpolar).

En cuanto a la elección del elemento, esta se hará de acuerdo a las condiciones de admisibilidad

del problema (esto es, tener en cuenta si el elemento será capaz de representar la incógnita). Una vez elegido, todo estará en función de su forma, coordenadas nodales, función de interpolación y su número de nodos.

2. APLICACION DEL MEF AL ESTADO PLANO

Como ya se ha mencionado, todo problema que presente ecuaciones diferenciales y dominio con contorno complicado es factible de ser atacado a través del MEF. Aunque el método presenta generalidades que permiten una cómoda implementación en ordenador, el problema se presenta cuando se desea obtener la ecuación discretizada por elemento.

En efecto, dependiendo del problema, se puede optar por elementos barra, triángulos, rectángulos, etc. Además, un mismo elemento puede tener diferente cantidad de nodos. En cada uno de los casos, el planteo varía según el grado de complejidad que el mismo elemento representa.

El problema del estado plano involucra, como luego se verá, ecuaciones diferenciales de primer orden. Esto equivale a decir que solo se derivará a la incógnita básica una sola vez. Así, podríamos intentar modelar la incógnita con una función lineal pues esta admite perfectamente una derivada. Debe sin embargo, aclararse que ciertos estados de carga pueden llevar hacia la necesidad de usar elementos de mayor orden que el mencionado (más nodos).

Todo lo dicho permite el uso de triángulos de tres nodos los cuales proveen una representación (interpolación) lineal de la incógnita desplazamiento, además de una considerable sencillez operativa.

2.1 PLANTEO GENERAL DEL MEF PARA MODELO COMPATIBLE

En el presente curso sólo se abordará la aplicación del MEF a la mecánica de los sólidos y dentro de este campo nos interesará el caso particular llamado "Modelo Compatible", basado en el principio de la energía potencial mínima. El problema se planteará a través del principio de los trabajos virtuales (sin entrar a Métodos Variacionales, que son los que realmente justifican plenamente el MEF) y la incógnita básica a considerar será la función desplazamiento (u).

Esta función desplazamiento entonces deberá ser reemplazada (de ahora en más modelada) dentro de cada elemento finito por una función polinómica con parámetros desconocidos. Es práctica común no tomar como incógnitas los parámetros indeterminados.

CAPITULO 2

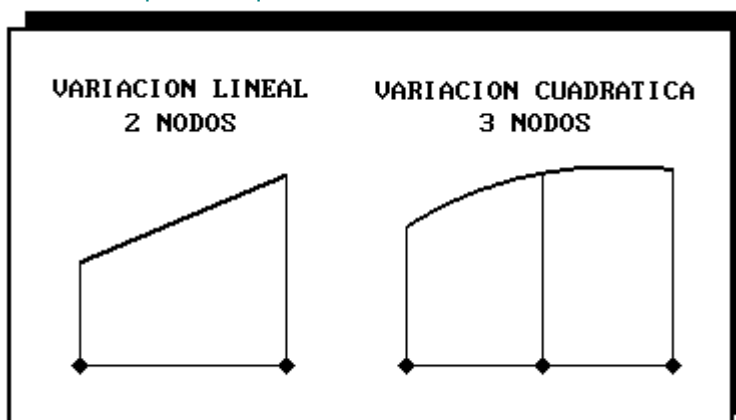
nados ($\tilde{\alpha}_1$ y $\tilde{\alpha}_2$ del ejemplo 4-I) sino los valores que toma la función desplazamiento u en los nodos (u_1 y u_2 del ejemplo 4-I) .

Estos desplazamientos nodales pasan ahora a ser las incógnitas del problema, y se obtienen por resolución de un sistema de ecuaciones válido para todo el dominio, es decir donde intervienen todos los elementos finitos que representan el dominio, armado partiendo simplemente de que el desplazamiento de un nodo común a dos elementos es el mismo. (continuidad); además de aplicar condiciones de contorno.

Se tiene entonces como resultado de la aplicación del MEF que una ecuación diferencial, la del Principio de los Trabajos Virtuales, se transformó en un sistema de ecuaciones algebraicas simplemente reemplazando la función original desplazamiento u por una aproximación basada en los desplazamientos nodales (u_1 y u_2).

Puede intuirse hasta este momento:

a) El hecho de que en cada elemento se plantee una función aproximada (interpolación) que *reemplaza* a la real hace pensar que si se desea una función de primer grado (recta) se necesite distinto número de nodos que si se desea una de segundo (parábola) pues cuanto mayor sea el grado deseado para la función mayor es el número de puntos necesarios para poder representarla. Para el caso de elementos finitos, la cantidad de puntos equivale a cantidad de nodos.



Para ilustrar lo anteriormente explicado, en la figura puede apreciarse que para definir los parámetros desconocidos de una recta se necesitan 2 nodos

(que es lo que se hizo en 4-I)

Para definirlos en cambio en una función cuadrática que tiene ya tres parámetros desconocidos, se necesitarán 3 nodos o el equivalente a tomar tres valores de la incógnita para realizar el deseado reemplazo.

Se conviene entonces que, por ejemplo, un elemento triangular con tres nodos (uno en cada esquina) me servirá para representar una función lineal de dos variables. Un elemento triangular de 6 nodos (3 por cada lado) me permitirá una representación cuadrática de dos variables pues cada nodo provee simplemente un lugar de referencia para deducir la ecuación de la incógnita.

b) Cuanto más simple sea el elemento (menos nodos tenga) mayor debe ser su número para poder representar a las incógnitas reales con buena aproximación. (dado que estas rara vez son lineales). Entonces es de esperar, que elementos más complejos den mayor trabajo pero con un número menor se logren mejores resultados (esto redundará en menor cantidad de ecuaciones pero más complejas cada una de ellas)

c) Ahora bien, debemos recordar que no es solo una cuestión de exactitud la que induce a emplear mayor cantidad de nodos. Según lo visto al plantear el método, la función de reemplazo será derivada todo lo que la ecuación diferencial imperante lo exija. Entonces si la máxima derivada de la ecuación debilitada es 2, no podrán usarse elementos que puedan desarrollar solo funciones de primer grado (lineales) como por ejemplo el triángulo de tres nodos.

d) Como lo que realmente se hace es repetir la tarea de reemplazar la ecuación original en cada elemento hasta llegar al sistema de ecuaciones, y a su vez la resolución de este implica nuevamente reiteración en los procedimientos (por ejemplo eliminación Gaussiana), la solución se adapta perfectamente a una implementación en ordenador

e) Existe un tipo especial de elemento denominado "Elemento barra" que posee dos nodos extremos. Como las estructuras de barra (pórticos, emparrillados) pueden descomponerse en este tipo de elementos sin error de discretización y además como los elementos contactan entre sí solo en los nodos, el elemento reemplaza en forma exacta a la barra y por ende las incógnitas se calculan en todo momento donde se necesitan (los nodos son realmente materializables).

El MEF, en este caso, conduce a resultados exactos y su planteo y resolución se puede asemejar a los conocidos **MÉTODOS MATRICIALES**.

f) Como extensión del punto anterior, importante destacar que los elementos finitos hacen siempre contacto a lo largo de todo su contorno (exceptuando la barra), pero todo el sistema se refiere a los nodos. Sin

embargo debido a la forma de elegir la funciones sustitutas, la continuidad se extiende a todo el borde de contacto si de incógnitas primarias hablamos, ya que son funciones deducidas a partir de los mismos parámetros pues ambos elementos tienen, en el lado de contacto, **los mismos nodos** (idénticas incógnitas) y así como hay una sola recta que pasa por dos puntos, hay una sola parábola que pasa por tres.

Por ejemplo, hemos hablado del triángulo de seis nodos, con tres por lado pudiéndose desarrollar una función cuadrática de dos variables por cada uno de esos lados. Podríamos suponer que un hexágono, que también tiene seis nodos, podría permitirnos obtener, tomando nodos de tres en tres, también funciones cuadráticas. El problema radicaría para este último cuando tengamos dos elementos contiguos, es decir, haciendo contacto por un lado. Como para formar la función de segundo grado en uno de los elementos necesito tres nodos, tendré que tomar uno que no pertenezca al lado común. Como en el otro elemento ocurrirá lo mismo, en el lado común no puede asegurarse que no haya una discontinuidad ya que se tomaron distintos nodos para representar la incógnita con lo que es casi seguro que las funciones serán distintas (lo contrario sería una casualidad) viniendo de uno u otro elemento.

2.2 BREVES CONCEPTOS SOBRE DISCRETIZACION DEL CONTINUO

Es conveniente enfatizar la idea de que la discretización del continuo no es un problema trivial, sino que existen extensos estudios dedicados solamente a la obtención de la malla, sobre todo cuando se trata de contornos muy irregulares.

El elemento que vamos a tratar tiene la ventaja de ser muy adaptable aún a bordes muy irregulares, lo cual lo hace muy popular a pesar de las inexactitudes que su simplicidad introduce.-

Es imposible enunciar un método a seguir para efectuar la discretización del continuo, sin embargo se pueden citar ciertas reglas o pautas a tener en cuenta, estas son:

- a) Al dividir el continuo se debe procurar que todos los elementos tengan forma regular.-
- b) En zonas donde se estime que se tendrá un mayor gradiente de las incógnitas, conviene densificar la malla (tomar mayor número de elementos).-

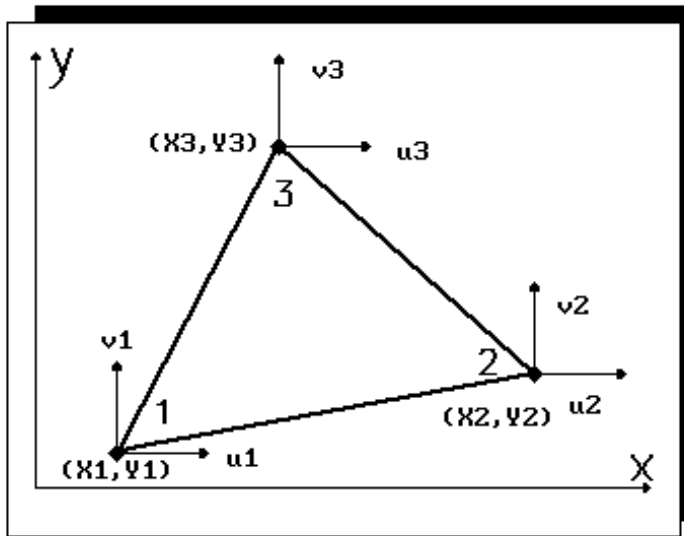
c) Un mismo problema debe resolverse varias veces variando la malla, esto a fin de comparar y validar resultados (especialmente en problemas donde se desconoce el rango de valores en que podrían estar contenidos los resultados).-

2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO TRIANGULO LINEAL

Cuando estamos tratando un problema de mecánica del sólido, es común llamar "Matriz de Rigidez" a la ecuación que gobierna el cálculo de los desplazamientos de los puntos de este elemento bajo un estado de cargas determinado. Ahora bien, esta definición no se puede extrapolar a cualquier otro problema; por ejemplo, en un problema de transferencia de calor sobre una pieza plana se puede emplear el elemento triángulo lineal, sin embargo, a pesar de que los procedimientos pueden ser similares (solo cambia la ecuación) no se puede hablar de matriz de rigidez, sino simplemente de "ecuación discretizada para ese elemento". Este concepto se ampliará más adelante con un ejemplo comparativo.

2.4 MODELADO DEL DESPLAZAMIENTO

Considerando que la característica del método es realizar el análisis dentro de un elemento de forma conocida para facilitar el estudio de las incógnitas, vamos a estudiar las posibilidades de desplazamiento dentro de uno de esos triángulos en los que dividimos el continuo para luego extender las conclusiones a todo el medio.

2.4.1 COORDENADAS GLOBALES

Abordando concretamente el tema, tomamos un elemento finito cualquiera del cual conocemos las coordenadas de los nodos referidas a un sistema global de ejes:

Como estamos ante un estado plano de tensiones tenemos dos posibles desplazamientos por nodo.

Definimos matricialmente el desplazamiento de un nodo de ese elemento de la siguiente manera:

$$\tilde{\delta}_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}$$

Que es el vector incógnita, uno por cada nodo de cada elemento.

Aunque todavía no plantearemos la ecuación que permitirá resolver el problema (PTV), esta es diferencial y por lo tanto debemos reemplazar a la función desplazamiento real por una que sea sencilla de diferenciar y luego integrar. Usaremos una función polinómica para describir los desplazamientos dentro del elemento.

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 * x + \alpha_6 * y \end{aligned} \quad (15-I)$$

Como veremos son dos funciones lineales, por ende la variación de $\tilde{\delta}$ dentro del elemento la hemos asumido lineal.

Es claro que podríamos aumentar el grado de estas funciones incorporando términos al cuadrado en X o Y, o bien productos entre las variables. El problema es que con solo tres nodos, que es el elemento elegido, no será posible la representación de estas funciones de orden superior debiendo entonces cambiar el elemento lo cual esta fuera del alcance de este tratado.

$$\tilde{\delta}(x,y) = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \tilde{\delta}(x,y) = \tilde{f}(x,y) * \tilde{\alpha}$$

Para poder re-formular la función desplazamiento, evaluamos la ecuación anterior en cada nodo:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{implica}} \tilde{\delta}^e = \tilde{A} * \tilde{\alpha}$$

La matriz de coeficientes \tilde{A} puede expresarse en función de las incógnitas nodales de la siguiente forma:

$$\tilde{\alpha} = \tilde{A}^{-1} * \tilde{\delta}^e$$

Aquí volvemos al concepto que esta transformación en el conjunto de las incógnitas es una característica del método, pero existen otros métodos (variacionales) que mantienen a los coeficientes $\tilde{\alpha}$ como incógnitas del problema.

Ahora es factible expresar los corrimientos de cualquier punto dentro del elemento en función de las incógnitas nodales.

$$\tilde{\delta}(x,y) = \underbrace{\tilde{f}(x,y) * A^{-1}}_{16-1} * \delta^e$$

Las ecuaciones (15-I) son equivalentes a las planteadas en (3-I) donde los $\tilde{\alpha}_i$ encuentran su semejante en $\tilde{\alpha}_1$, y $\tilde{\alpha}_2$ de aquel ejemplo, por supuesto, teniendo en cuenta que ahora tenemos dos dimensiones.

*Por otro lado, lo marcado en (16-I) no es otra cosa que las funciones de interpolación semejantes a las obtenidas en (5-I) y que hemos mencionado anteriormente. En especial, pertenecen al grupo denominado "**funciones de la familia de Lagrange**".*

Se debe recordar que si tomáramos funciones aproximadas de más alto orden (cuadrática o mayores) necesitaríamos mayor cantidad de nodos (son seis incógnitas $\tilde{\alpha}$ que fueron reemplazadas por seis corrimientos de nodos, o sea dos por cada uno) para poder expresar las incógnitas en función de ellos. Esto establece una relación directa entre el grado de la función y el número de nodos del elemento siempre que trabajemos con la mencionada familia de funciones. Se recomienda consultar, en una segunda lectura, el apartado **Otras funciones sustitutas** en el que se trata las funciones semejantes a (15-I) para otros elementos.

Como puede apreciarse, x e y son coordenadas globales de los nodos. Esto por si mismo no representa un problema pero, al trabajar con ellas para elementos mas complejos, se deriva en un conjunto de integrales, algunas complicadas, que deben ser resueltas para encontrar la solución por lo que trabajar con este sistema de referencia puede resultar muy engorroso. Como alternativas de solución ante este problema se puede trabajar con métodos numéricos para resolver las integrales. Existe otro sistema de coordenadas, llamado **coordenadas naturales**., que se adapta mejor tanto para la resolución numérica, como para la directa y que veremos a continuación.-

2.4.2 COORDENADAS NATURALES

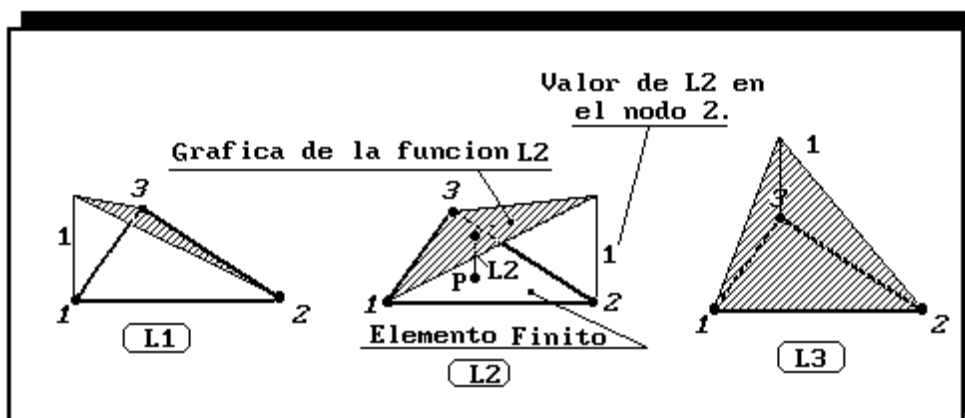
Las coordenadas naturales son un sistema local de coordenadas que permite encontrar más fácilmente la solución (especialmente en este tipo de elemento).

Estas pueden ser elegidas de diversas maneras, pero en general deberán cumplir ciertos requisitos que se irán aclarando más adelante. En el caso del triángulo lineal, puede escogerse un tipo de coordenadas naturales llamadas **coordenadas triangulares** que poseen ventajosas características extras con respecto a las otras coordenadas naturales a la hora de integrar ante ciertas situaciones. Es cierto que para el tipo de elemento que estamos abordando esta característica no será aprovechada, no obstan-

te debe siempre tenérsela en cuenta a la hora de elegir el sistema a usar. Mejor panorama sobre el tema, se puede formar tras lectura del apartado "Modelado de la Geometría y la Integración Numérica".

Las incógnitas básicas pueden entonces expresarse en función de ellas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u &= L_1 * u_1 + L_2 * u_2 + L_3 * u_3 \\ v &= L_1 * v_1 + L_2 * v_2 + L_3 * v_3 \end{aligned} \quad (17-1)$$

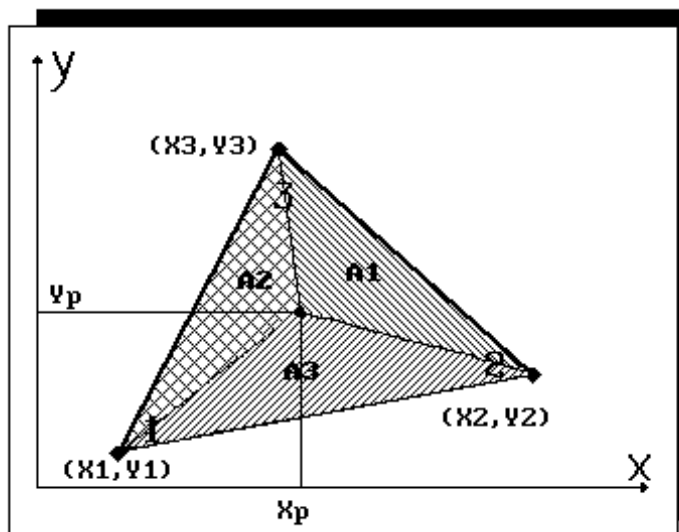


En la figura anterior se ha realizado la representación gráfica de las coordenadas L_i , con lo que se puede apreciar que cada una de ellas representa un plano. La ecuación (17-1) entonces, no es otra cosa que la combinación lineal de tres planos multiplicados cada uno de ellos por un valor incógnita a fin de que esa combinación lineal de por resultado la incógnita desplazamiento que, por extensión, también será otro plano. La idea es entonces, determinar esos valores u_1, v_1 , etc., de forma tal que esa **sumatoria de planos** determine la función desplazamiento que se está buscando y que, por supuesto y como ya se mencionó, también será plana.

Para deducir el valor de las L_i , tomemos un punto P que pertenece al elemento y que tiene coordenadas globales x_p e y_p . Llamando A_i (A_1, A_2, A_3) a las áreas que sur-

gen de dividir el elemento como indica la figura, se pueden definir un conjunto de coordenadas L_i en función de dichas áreas, a saber:

$$L_1 = \frac{A_1}{A}; L_2 = \frac{A_2}{A}; L_3 = \frac{A_3}{A}$$



Estas coordenadas tienen ciertas particularidades:

a) $L_1 + L_2 + L_3 = 1$. Esta condición es de fundamental importancia pues permite la representación, si así fuera necesario, de un estado constante de la incógnita básica:

Si $u_1 = u_2 = u_3 = u_c$; $u = u_c \cdot (L_1 + L_2 + L_3)$ donde el paréntesis debe ser la unidad. Esto a su vez es requerido para la convergencia del método pues, en el límite de dividir el continuo en infinitas elementos, los desplazamientos de cada triángulito deben ser únicos y constantes (el triángulo ahora es simplemente un punto).

b) Cualquier coordenada vale uno en el nodo con igual número (es decir, si el punto está por ejemplo sobre el nodo 2, entonces $A_2 = A$ y $L_2 = 1$)

c) Cualquier coordenada vale cero cuando es evaluado un punto nodal que no coincide con ese número, en el ejemplo del punto (b) $L_1 = L_3 = 0$

Los puntos b) y c) son características de los polinomios de Lagrange y provocan que las L_i sean linealmente independientes.

La relación entre estas coordenadas y las globales "x" e "y"

$$\begin{aligned}L_1 &= \frac{1}{2A} * (a_1 + x * b_1 + y * c_1) \\L_2 &= \frac{1}{2A} * (a_2 + x * b_2 + y * c_2) \\L_3 &= \frac{1}{2A} * (a_3 + x * b_3 + y * c_3)\end{aligned}$$

genéricamente

$$L_i = \frac{1}{2A} * (a_i + x * b_i + y * c_i); i = 1, 2, 3$$

Además a_i , b_i , c_i se deducen de las coordenadas nodales; por ejemplo

$$a_1 = x_2.y_3 - x_3.y_2$$

genéricamente, debemos permutar en un orden natural para obtener las distintas constantes:

$$a_i = x_j.y_k - x_k.y_j \quad b_i = y_j - y_k \quad c_i = x_k - x_j$$

Si $i=1$ entonces $j=2$, $k=3$

Si $i=2$ entonces $j=3$, $k=1$

Si $i=3$ entonces $j=1$, $k=2$

Todas estas ecuaciones se deducen a partir del calculo de A_1 , A_2 , A_3 y A en función de las coordenadas nodales, lo cual puede hacerse sin problemas; sin embargo no vale la pena exponerlo aquí.

Hemos logrado, entonces, un doble propósito:

a) Los desplazamientos fueron puestos en función de los desplazamientos nodales:

$$\tilde{\delta} = \tilde{N} * \tilde{\delta}^e$$

Al no aparecer la matriz \tilde{A}^{-1} ya no es necesario invertir la matriz \tilde{A} , que requiere un gran esfuerzo computacional, quedando una matriz \tilde{N} que es función de L_i

$$\tilde{N} = \begin{vmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{vmatrix} * \rightarrow L_i = f(x, y)$$

Es decir, tenemos funciones de interpolación más sencillas.

b) Al no aparecer x e y en las matrices, las futuras integraciones se harán en función de L_1, L_2, L_3 a través de fórmulas como:

$$\int_A L_1^i * L_2^j * L_3^k * dA = \frac{i! * j! * k!}{(i + j + k + 2)!} * 2 * A \quad ; \text{si } A = \text{Area elemento} \quad (21-I)$$

$$\int_S L_1^i * L_2^j * dS = \frac{i! * j!}{(i + j + 1)!} * S_{1-2} \quad ; \text{si } S = \text{Longitud contorno} \quad (21-II)$$

Resultara sumamente sencillo aplicar fórmulas como las anteriores en la que solo habrá que tener en cuenta el exponente con el que aparecen los L_i

2.4.3 RESOLUCION CON AMBAS COORDENADAS

Resumiendo, tenemos dos situaciones a partir de las cuales seguiremos el desarrollo:

$$a) \quad \tilde{\delta} = \tilde{f} * \tilde{A}^{-1} * \tilde{\delta}^e$$

$$b) \quad \tilde{\delta} = \tilde{N} * \tilde{\delta}^e$$

En ambos casos se han colocado los desplazamientos de cualquier punto del elemento en función de los desplazamientos nodales a través de una función lineal. Con esto hemos logrado trasladar el problema de la función desplazamiento del elemento, que por ahora es desconocida, hasta los nodos, que también son desconocidos. Tenemos ahora la posibilidad de plantear un sistema discreto, es decir, con un número cierto de incógnitas (los corrimientos nodales) .

Como intuirá el lector, al no conocer u en ningún punto, mal podemos conocer su distribución verdadera. Por lo tanto, la forma lineal propuesta puede no ser real constituyendo esto último una simplificación que va en detrimento de la exactitud. Pero sin embargo, la situación puede paliarse discretizando el continuo con un mayor número de elementos, sobre todo en las zonas donde se estima pueden darse mayores gradientes en las incógnitas.

EL modelado del desplazamiento para este caso y de la incógnita para el caso general, constituye el primer paso importante en la formulación del MEF. Inclusive el mismo planteo que ha sido llevado hasta aquí da un nombre especial a este tipo de aplicación llamado "Método de los Desplazamientos"; pues la incógnita básica del problema son los desplazamientos u y su variación a lo largo del elemento es llamada "Campo de Desplazamientos"

El hecho de usar un campo de desplazamientos lineal torna sencilla la obtención de la ecuación por elemento como se verá luego. Sin embargo, en otros problemas de la mecánica puede no ser suficiente tomar una función lineal puesto que de involucrar la solución alguna derivada segunda de la incógnita, esta sería cero (la función es de primer orden). En esos casos se hace necesario tomar elementos más complejos (que usen funciones de interpolación de más alto orden) que podrán ser cuadriláteros, etc, o bien mayor cantidad de nodos, teniendo en cuenta la vinculación directa que existe entre el grado de las funciones y el N^o de nodos según se ha mencionado anteriormente.

Existen además situaciones en que problemas sencillos y con derivadas de primer orden solamente, también requieren de funciones de interpolación más complejas, o sea elementos más complejos, debido a que están sometidos a tipos especiales de sollicitaciones de difícil reproducción.

2.5 MODELADO DE DEFORMACIONES Y TENSIONES

En adelante, usaremos las ecuaciones clásicas de la mecánica para continuar la formulación, pero debe tenerse presente que la mayor carga conceptual ya ha sido tratada.

Recordemos que para el estado plano tenemos:

$$\tilde{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix} \quad \tilde{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} \quad \tilde{\delta} = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}$$

No entraremos en detalle con la relación tensión-deformación, sabemos que tanto en estado plano de tensiones como de deformaciones la diferencia es simplemente el orden en que aparecen en las operaciones matemáticas **E y ν**. En general podemos decir:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D} * \tilde{\varepsilon} \quad (23-I)$$

para estado plano de tensiones:

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu * E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu * E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 * (1+\nu)} \end{vmatrix}$$

para estado plano de deformaciones:

$$\tilde{D} = \begin{vmatrix} \frac{E * (1-\nu)}{(1+\nu) * (1-2\nu)} & \frac{E * \nu}{(1+\nu) * (1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E * \nu}{(1+\nu) * (1-2\nu)} & \frac{E * (1-\nu)}{(1+\nu) * (1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2 * (1+\nu)} \end{vmatrix}$$

Las relaciones geométricas entre desplazamientos y deformaciones son las siguientes:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathfrak{S}} \cdot \tilde{\delta} \quad \text{donde} \quad \tilde{\mathfrak{S}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad \text{quedando:}$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Si ahora reemplazamos $\tilde{\delta}$ en la ecuación anterior tenemos las deformaciones específicas en función de los desplazamientos nodales:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathfrak{S}} \cdot \tilde{f} \cdot \tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{\delta}^e$$

o bien:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathfrak{S}} \cdot \tilde{N} \cdot \tilde{\delta}^e$$

expresando lo anterior en forma simplificada:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}^{-1} \cdot \tilde{\delta}^e$$

o bien:

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{B} \cdot \tilde{\delta}^e$$

En estas expresiones, la matriz \tilde{B} para el elemento triángulo lineal se obtendría:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}_{2 \times 6} \Rightarrow \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 6}$$

o bien:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{vmatrix}_{3 \times 2} * \begin{vmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{vmatrix}_{2 \times 6}$$

$$L_i = 1/(2 * A) * (a_i + x * b_i + y * c_i)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial x} = b_i / (2 * A) ; \quad \frac{\partial L_i}{\partial y} = c_i / (2 * A) \quad \text{con } y=1,2,3$$

Reemplazando:

$$\tilde{\mathbf{B}} = 1/(2 * A) \begin{vmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}_{3 \times 6}$$

Como una primera conclusión podríamos decir que como la matriz $\tilde{\mathbf{B}}$ es constante (en un caso son ceros y unos, y en el otro coeficientes que dependen de las coordenadas de los nodos) y los desplazamientos nodales son números, las deformaciones dentro de un elemento serán constantes.

Esto sin duda se presenta como una fuerte simplificación que , si bien desde el punto de vista matemático facilita enormemente las cosas (las integrales, que luego veremos son triviales), introduce una gran inexactitud si consideramos que en la mayoría de las ocasiones estas deformaciones tendrán leyes de variación no constantes y este elemento no tiene posibilidades de representarlas. La única chance a la que puede recurrirse es aumentar la cantidad de elementos usados para representar el continuo, con lo que se lograría que los escalones de discontinuidad estuvieran mucho más próximos.

Esta es la razón de mayor peso por lo cual se suelen utilizar elementos de mayor complejidad (diferente geometría o mayor cantidad de nodos) para atacar estos problemas, logrando así que con una menor cantidad tengamos mayor capacidad de representar más fácilmente los fenómenos estudiados (en este caso las deformaciones)

Conocidas las deformaciones, podemos calcular tensiones con la ecuación (23-I)

$$\tilde{\sigma} = \tilde{D} * \tilde{B} * \tilde{A}^{-1} * \tilde{\delta}^e \quad \text{o bien} \quad \tilde{\sigma} = \tilde{D} * \tilde{B} * \tilde{\delta}^e$$

2.6 OBTENCION DE LA ECUACION QUE RIGE EL PROBLEMA

2.6.1 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Hasta ahora contamos con varias piezas sueltas, como ser deformaciones en función de desplazamientos nodales y tensiones en función de esos desplazamientos nodales. Resta aún vincular ambos campos buscando la solución del problema.

En algunos comentarios previos, hicimos referencia al enfoque energético que le daríamos a la solución para tratar de escapar al planteo variacional del problema que, en realidad, podría haberse enfocado a través de las ecuaciones del equilibrio colocadas en función de los desplazamientos u y v , y a partir de ese sistema de ecuaciones y por métodos variacionales, llegar a la solución del problema (se verá más adelante).

En rigor, este debería haber sido el camino seguido, pero para esto se requieren fuertes fundamentos matemáticos que debieran repasarse antes de ser aplicados.

El enfoque al que nos referimos no es otro que el **Principio de los Trabajos Virtuales (PTV)**. Para aplicarlo vamos a dar un desplazamiento virtual al elemento en equilibrio. El trabajo realizado por las cargas a lo largo de ese desplazamiento virtual $\tilde{\delta}^{*e}$, debe ser el mismo que el realizado por las tensiones a lo largo de la deformación virtual $\tilde{\delta}^*$ originada por dicho desplazamiento virtual. La e como supraíndice indica que es válida la expresión dentro del elemento y la T como supraíndice indica traspuesto.

Si denominamos con \tilde{F}^e al vector de fuerzas nodales:

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \begin{Bmatrix} \tilde{F}_1^e \\ \tilde{F}_2^e \\ \tilde{F}_3^e \end{Bmatrix}$$

$$W_{ext} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*eT} * \tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\delta}_1^{*e} * \tilde{F}_1^e + \tilde{\delta}_2^{*e} * \tilde{F}_2^e + \tilde{\delta}_3^{*e} * \tilde{F}_3^e$$

A su vez, las tensiones que se encuentran en equilibrio con este vector de cargas nodales, realizan un trabajo por unidad de volumen a lo largo de las deformaciones:

$$dW_{int} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*T} * \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(x, y)$$

Pero tanto las deformaciones como las tensiones pueden ponerse en función de los desplazamientos nodales. Para el caso de las deformaciones estas serán las virtuales pero para las tensiones serán los desplazamientos reales (desplazamientos virtuales de piezas en equilibrio no generan tensiones).

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\mathbf{A}}^{-1} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*e} \quad \text{o bien} \quad \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^* = \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*e}$$

$$dW_{int} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*eT} * \tilde{\mathbf{A}}^{-1T} * \tilde{\mathbf{B}}^T * \tilde{\mathbf{D}} * \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\mathbf{A}}^{-1} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e \quad \text{o bien}$$

$$dW_{int} = \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*eT} * \tilde{\mathbf{B}}^T * \tilde{\mathbf{D}} * \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e$$

El trabajo total se obtiene integrando lo anterior en todo el volumen $t * dA$, donde t es espesor del elemento. Cabe además aclarar que como $\tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*e}$ es cte., junto con su traspuesto pueden extraerse del símbolo integral:

$$W_{int} = t * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*eT} * \tilde{\mathbf{A}}^{-1T} * \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T * \tilde{\mathbf{D}} * \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\mathbf{A}}^{-1} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e * d\Omega \quad \text{si } t \text{ es espesor}$$

o bien:

$$W_{int} = t * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^{*eT} * \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T * \tilde{\mathbf{D}} * \tilde{\mathbf{B}} * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e * d\Omega \quad \text{si } t \text{ es espesor.}$$

Considerando la conservación de energía:

$$Wext = W int$$

$$\tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{F}^e = t * \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{A}^{-1T} * \int_{\Omega} \tilde{B}^T * \tilde{D} * \tilde{B} * \tilde{A}^{-1} * \tilde{\delta}^e * d\Omega$$

$$\tilde{F}^e = \tilde{K}^e * \tilde{\delta}^e .. donde .. \tilde{K}^e = t * \int_{\Omega} \tilde{B}^T * \tilde{D} * \tilde{B} * \tilde{A}^{-1} * d\Omega$$

o bien:

$$\tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{F}^e = t * \tilde{\delta}^{*eT} * \int_{\Omega} \tilde{B}^T * \tilde{D} * \tilde{B} * \tilde{\delta}^e * d\Omega$$

$$\tilde{F}^e = \tilde{K}^e * \tilde{\delta}^e .. donde .. \tilde{K}^e = t * \int_{\Omega} \tilde{B}^T * \tilde{D} * \tilde{B} * d\Omega$$

La expresión $F^e = K^e. \tilde{\delta}^e$

representa un sistema de ecuaciones que desarrollado sería:

$$\begin{bmatrix} F_{x1}^e \\ F_{y1}^e \\ F_{x2}^e \\ F_{y2}^e \\ F_{x3}^e \\ F_{y3}^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e \end{bmatrix}_{6 \times 6} * \begin{bmatrix} u_1^e \\ v_1^e \\ u_2^e \\ v_2^e \\ u_3^e \\ v_3^e \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

Como puede observarse se trata de un sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que aisladamente no podrá ser resuelto por carecer de las condiciones de sustentación suficientes.

Es importante realizar un análisis de las expresiones a las que hemos arribado:

2.6.1.1 CONSIDERACIONES IMPORTANTES EN EL P.T.V.:

Primero: Tal cual lo comentáramos, la matriz del elemento se obtiene por integración. En la mayor parte de los casos esta integral envuelve ecuaciones de cierta complejidad que requiere recurrir a la integración numérica. En el caso de usar coordenadas globales a la complejidad que significa invertir la matriz \tilde{A} que ya fue comentada, se agrega el hecho de que la integración debe realizarse sobre el dominio "x,y" (porque la matriz

$\tilde{\mathbf{B}}$ es una función de "x e y") y numéricamente esto es difícil de implementar. Mediante el uso de coordenadas naturales, desaparece la matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ y la integración se realiza sobre un dominio diferente más adecuado a la realización de dichos procedimientos numéricos. Como ya se ha planteado, para el elemento triangular en general y si se opta por coordenadas triangulares, la integración se limita a la aplicación de fórmulas (21-I) o (21-II) .

Segundo: Dentro de la matriz $\tilde{\mathbf{K}}^e$ podemos distinguir cada una de sus componentes:

$\tilde{\mathbf{B}} =$ es la matriz que resulta de aplicar la ecuación diferencial correspondiente a la función de interpolación elegida.

$\tilde{\mathbf{D}} =$ es una matriz que relaciona tensiones y deformaciones.

Tercero: Es común encontrar en la bibliografía nombres como Matriz de Rigidez del Elemento para el término $\tilde{\mathbf{K}}^e$ recientemente obtenido. Si bien esto es correcto pues relaciona desplazamientos con cargas nodales, es más conveniente llamar a esta matriz, *Matriz del elemento*. Esto se debe a que, si tratamos de resolver un problema que escape al campo de la Mecánica del Sólido Continuo la ecuación diferencial a considerar no será la correspondiente a la formulación del Principio de los trabajos virtuales, y la expresión final a la que llegaremos será también del tipo :

$$\tilde{\mathbf{F}}^e = \tilde{\mathbf{K}}^e * \tilde{\boldsymbol{\delta}}^e$$

Donde el significado de la matriz $\tilde{\mathbf{K}}^e$ es totalmente ajeno al concepto de rigidez. Si tomamos como ejemplo problemas de transferencia de calor, torsión, etc.; que son gobernados por la ecuación de Campo, tendremos:

Ecuación a tratar (ecuación de Poisson):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[K_x * \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_y * \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z * \frac{\partial \phi}{\partial z} \right] = Q$$

Incógnita: $\tilde{\phi}$

Expresión final: $\tilde{\mathbf{K}}^e . \tilde{\boldsymbol{\phi}}^e = \tilde{\mathbf{P}}^e$

Matriz del elemento:

$$K^e = \int_{\Omega} \left[K_x * \frac{\partial N^T}{\partial x} * \frac{\partial N}{\partial x} + K_y * \frac{\partial N^T}{\partial y} * \frac{\partial N}{\partial y} + K_z * \frac{\partial N^T}{\partial z} * \frac{\partial N}{\partial z} \right] d\Omega$$

donde:

\tilde{K}_i ($i = x, y, z$) son coeficientes, por ejemplo en el caso de transferencia de calor son coeficientes de conductividad térmica en las distintas direcciones.

\tilde{N} es una matriz que involucra a las funciones de interpolación L_i , además aparecen derivadas parciales de \tilde{N} , que, estableciendo una comparación con PTV, son las que realmente forman la matriz \tilde{B} a la que habíamos arribado anteriormente.

Puede comprenderse entonces, que la matriz obtenida no es una matriz de rigidez pues no relaciona cargas o tensiones con desplazamientos o deformaciones.

Cuarto: Hasta ahora hemos tratado al vector cargas como un conjunto de valores numéricos asignados a cada nudo.

Esto es válido cuando la malla es adaptada de forma que la totalidad de las cargas estén aplicadas en los nodos y estas a su vez sean números.

En el caso de cargas linealmente distribuidas o cargas de superficies la situación es totalmente distinta:

Si denominamos a las cargas:

\tilde{b} = por unidad de superficie y \tilde{P} = por unidad de longitud.

Aquí debe aclararse que las cargas por unidad de superficie, son las cargas de masa previamente multiplicadas por el espesor y a su vez las lineales cargas de sup, igualmente multiplicadas por el mismo valor.

El trabajo externo será:

$$dW_{ext} = \tilde{\delta}^{*T} * \tilde{b} * d\Omega + \tilde{\delta}^{*T} * \tilde{P} * dl$$

Considerar, en la expresión anterior, que como en el EPT y EPD todas las cargas quedan divididas por el espesor, no debe multiplicarse por este a las cargas aquí tratadas.

$$dW_{ext} = \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{A}^{-1T} * \tilde{b} * \tilde{f} * d\Omega + \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{A}^{-1T} * \tilde{P} * \tilde{f} * dl$$

o bien:

$$dW_{ext} = \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{N}^T * \tilde{b} * d\Omega + \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{N}^T * \tilde{P} * dl$$

Donde integrando:

$$W_{ext} = \tilde{\delta}^{*eT} * F^e = \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{A}^{-1T} * \int_{\Omega} \tilde{b} * \tilde{f} * d\Omega + \tilde{\delta}^{*eT} * \tilde{A}^{-1T} * \int_I \tilde{P} * \tilde{f} * dl$$

$$F^e = \tilde{A}^{-1T} * \int_{\Omega} \tilde{f}^T * \tilde{b} * d\Omega + \tilde{A}^{-1T} * \int_I \tilde{f}^T * \tilde{P} * dl \quad (30-I)$$

o bien:

$$W_{ext} = \tilde{\delta}^{*eT} * F^e = \tilde{\delta}^{*eT} * \int_{\Omega} \tilde{N}^T * \tilde{b} * d\Omega + \tilde{\delta}^{*eT} * \int_I \tilde{N}^T * \tilde{P} * dl$$

$$\tilde{F}^e = \int_{\Omega} \tilde{N}^T * \tilde{b} * d\Omega + \int_I \tilde{N}^T * \tilde{P} * dl \quad (31-I)$$

Tanto las ecuaciones (30-I) como (31-I) sirven para trasladar el efecto de cargas no concentradas hacia los nodos, siguiendo una ley de invariabilidad de la energía, es decir cargas nodales equivalentes que produzcan igual trabajo que las continuas. En ambos casos son las mismas funciones que interpolan desplazamientos las que llevan las cargas a los nodos.

Es importante aclarar que las fuerzas deberán referirse a ejes globales en cualquiera de los casos citados.

En realidad, el concepto **carga** es mucho más profundo que lo visto hasta aquí, pues en general esta ligado a la idea de condición de contorno o condición de borde cuando se le da al problema un enfoque matemático formal. En general, deberíamos separar las:

Cargas de masa o fuente: Afecta a todos y cada uno de los nodos y nada tiene que ver con los bordes.

Cargas de contorno: Afectan solo a los nodos de los elementos del contorno y son en realidad una condición de contorno, como luego se verá. En general son cargas aplicadas a uno o más lados de esos elementos.

En el vector \tilde{F}^e al que se arribó en el anterior desarrollo, en su primer término englobaría las cargas de masa mientras que el segundo las de contorno.

A modo de ejemplo, resolveremos la ecuación (31-I) para el triángulo lineal y usando funciones de interpolación en coordenadas locales:

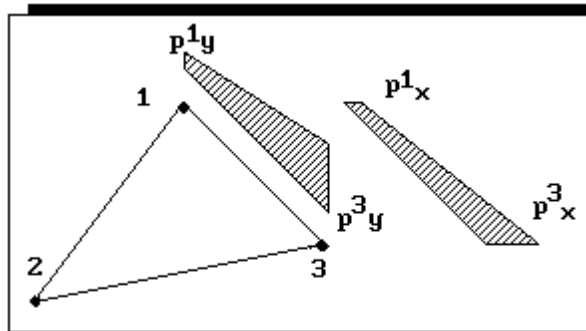
Tomemos primeramente, la porción de la integral que involucra las cargas de masa:

$$\tilde{F}^e = \int_{\Omega} \tilde{N}^T * \tilde{b} * d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ L_3 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} * d\Omega = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} L_1 * b_x \\ L_1 * b_y \\ L_2 * b_x \\ L_2 * b_y \\ L_3 * b_x \\ L_3 * b_y \end{bmatrix} * d\Omega$$

Distribuyendo el símbolo Integral en todas las componentes del vector recién obtenido, y aplicando la fórmula (21-I) teniendo en cuenta que se colocará exponente cero a las funciones de interpolación que no aparezcan en los productos y que b_x y b_y son ctes., se obtiene para todas las integrales un factor común $A/3$:

$$\tilde{F}^e = \frac{A}{3} * \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \\ b_x \\ b_y \end{bmatrix} \text{ si } A \text{ es area del triángulo}$$

La segunda parte de la integral, se obtiene de manera similar pero considerando que las cargas distribuidas pueden tener una ley de variación lineal como máximo.



Esto último se debe a que, por tratarse de una carga distribuida según una cierta ley, se necesitarán un conjunto de puntos sobre el contorno en el que actúa la carga para realizar la descripción matemática de dicha ley. Como sobre un cierto lado solo contamos con dos puntos (los nodos), es obvio que solo podrá describirse una recta. Veamos entonces:

$$\tilde{F}_D^e = \int_I \tilde{N}^T * \tilde{P} * dl, .pero. \tilde{P} = \tilde{N} * \tilde{P}^e ..y.. \tilde{P}^e = \begin{pmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El análisis realizado al conformar el vector de carga fue el siguiente: Simplemente se llama con 1 y 2 a los nodos que definen el lado del triángulo afectado por una cierta carga distribuida. El nodo 3 es aquel que no será afectado por la carga repartida que como se indica, puede tener componente en ambos ejes.

Luego reemplazando todo:

$$\tilde{F}_D^e = \int_I \begin{vmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ L_3 & 0 \\ 0 & L_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} * dl =$$

Resolviendo los productos arriba involucrados:

$$\tilde{F}_D^e = \int_I \begin{vmatrix} L_1^2 & 0 & L_1 * L_2 & 0 & L_1 * L_3 & 0 \\ 0 & L_1^2 & 0 & L_1 * L_2 & 0 & L_1 * L_3 \\ L_1 * L_2 & 0 & L_2^2 & 0 & L_2 * L_3 & 0 \\ 0 & L_1 * L_2 & 0 & L_2^2 & 0 & L_2 * L_3 \\ L_1 * L_3 & 0 & L_2 * L_3 & 0 & L_3^2 & 0 \\ 0 & L_1 * L_3 & 0 & L_2 * L_3 & 0 & L_3^2 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_x^2 \\ p_y^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} * dl =$$

$$\tilde{F}_D^e = \int_I * \begin{vmatrix} L_1^2 p_x^1 + L_1 * L_2 * p_x^2 \\ L_1^2 p_y^1 + L_1 * L_2 * p_y^2 \\ L_1 * L_2 * p_x^1 + L_2^2 p_x^2 \\ L_1 * L_2 * p_y^1 + L_2^2 p_y^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} * dl =$$

Los dos últimos términos son cero, porque involucran a L_3 que es cero sobre el lado en cuestión. Finalmente, trasladamos la integral a cada término del vector y aplicamos la **21-II** considerando el exponente de L_1 y L_2 según cada caso:

$$\tilde{F}_D^e = \int_I^* \begin{bmatrix} \frac{p_x^1}{3} + \frac{p_x^2}{6} \\ \frac{p_y^1}{3} + \frac{p_y^2}{6} \\ \frac{p_x^1}{6} + \frac{p_x^2}{3} \\ \frac{p_y^1}{6} + \frac{p_y^2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} * dl =$$

Tanto \tilde{F}_M^e como \tilde{F}_D^e fueron incluidas en el programa **EFEPET**.

Quinto: El planteo del estado plano a través del PTV no es la única forma de llegar a la solución y quizás no sea siquiera la más directa. Podríamos haber partido de las ecuaciones del equilibrio y poner estas en función de los desplazamientos llegando a las conocidas ecuaciones de Lamé o también Navier-Cauchy.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2*\mu} * \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \quad \text{si } e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2*\mu} * \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \quad \text{si } e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Sistema de ecuaciones visto durante el curso de elasticidad. A partir de estas ecuaciones puede aplicarse la teoría variacional que permitirá reducir el grado de derivación en una unidad, obteniendo ecuaciones hasta la derivada primera (como en el caso de PTV). Finalmente se arriba al mismo sistema de ecuaciones al que habíamos llegado antes pero siguiendo un camino mucho más general.

Sexto: Para los casos de flexión en general, sea de vigas o placas, encontramos dificultades para plantearlo en forma directa debido a que no obedecen a los mismos principios que hemos venido sobrellevando. Simplemente y a modo de comentario, debemos decir que en esos casos las condiciones de contorno y la naturaleza del problema obligan al modelado de, no solo la incógnita primaria desplazamiento, sino también de sus derivadas pues recordemos que en flexión no solo se plantean condiciones de desplazamiento sino también de rotación en los puntos restringidos.

Esto lleva a que se pueda encarar la solución a través de dos caminos diferentes:

Por medio del primero, en un elemento de viga de dos nodos, por ejemplo, se modela los descensos por medio de una función de grado cuarto y no lineal como habíamos venido sosteniendo hasta ahora para esa cantidad de nodos. Esto se debe a la necesidad de representar a las derivadas de la flecha también, según se comentó.

En el segundo en cambio, la ecuación del problema se particiona y se realiza el modelado de los descensos en forma totalmente independiente de las rotaciones pudiendo usar elementos de dos, tres o más nodos según el grado de aproximación deseado, tal como era antes para u y v .

Esta segunda formulación, llamada también **Formulación con penalidades**, parece ser más semejante a la ya visto para estado plano, pero el hecho de modelar por separado incógnita y rotaciones, trae algunos problemas en casos especiales de carga.

Se llega de esta manera, a la creación de elementos especiales llamados elemento de viga o elemento de placa para poder solucionar la ecuación diferencial de cuarto orden que gobierna este problema.

En el apartado **4.1**, trataremos otras funciones de interpolación usadas y entre ellas están las dos modalidades descritas para los casos de flexión aplicado a placas.

3. ANALISIS DEL DOMINIO

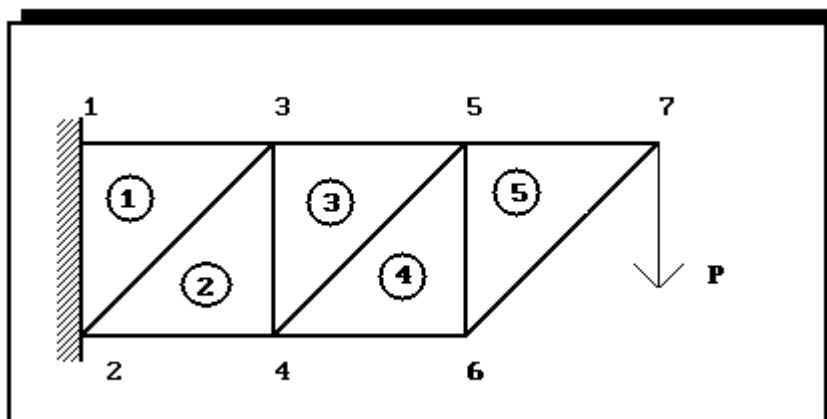
En este capítulo se tratará la manera de obtener un sistema de ecuaciones semejante al hallado para un elemento, pero válido para todo el dominio que estamos analizando. Esto es, realizar la unión de esas porciones del continuo siguiendo una cierta regla dada a continuación.

3.1 MECANICA DE RESOLUCION

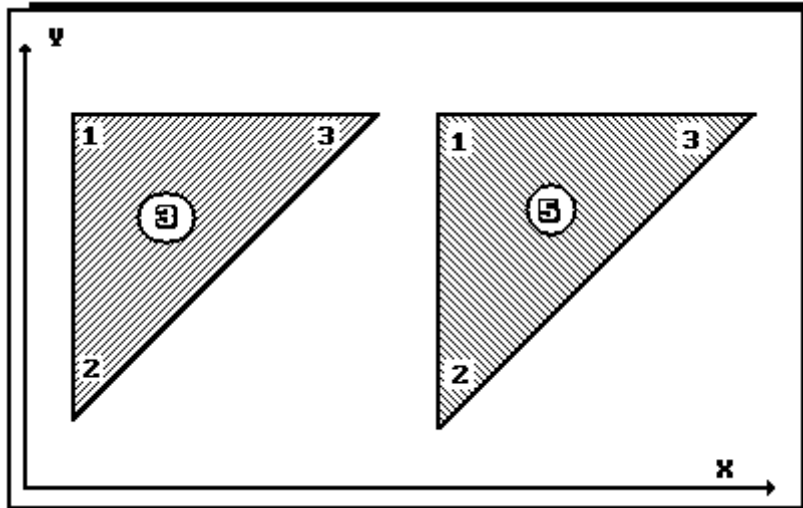
3.1.1 ENSAMBLAJE

Una vez obtenida la ecuación del elemento ($\tilde{\mathbf{K}}^e$) y llevadas las cargas a los nodos, hemos alcanzado el punto en el que se hace necesario considerar el dominio en todo su contexto, es decir, los N elementos que lo conforman.

Para ello será necesario realizar una numeración, tanto de los elementos que conforman la estructura, como de los nodos que surgen luego de realizada la discretización. Es común también, realizar una tabla en la que se detalle el número asignado a cada nodo y su respectiva coordenada en X e Y. Tomemos el siguiente ejemplo:



En general, cada elemento es resuelto en forma separada del resto hasta obtener su matriz $\tilde{\mathbf{K}}^e$. Debido a esto, es corriente realizar una numeración interna de sus nodos en forma independiente de la realizada para toda la estructura pues así se obtienen ventajas computacionales. Por ejemplo, si tomamos los elementos n°3 y n°5:



En la figura superior se observa la numeración interna que, al igual que la externa, es totalmente arbitraria en cuanto al nodo del cual se ha de partir. Debe sin embargo prestarse atención al hecho que siempre se haga la numeración en el sentido contrario a las agujas del reloj para evitar problemas al usar las coordenadas nodales en el cálculo de áreas, funciones de interpolación, etc.

La solución del problema requiere que se pongan de manifiesto dos cosas:

- a) la relación entre elementos, lo cual da la continuidad del medio estudiado.
- b) las condiciones de contorno que le darán unicidad a las soluciones (dejamos de lado por el momento los problemas de valores iniciales o problemas dependientes del tiempo).

El punto a) se consigue estableciendo una vinculación entre los distintos elementos en los que se subdividió el dominio considerado. Es evidente que el nodo n°3 del elemento n°3 es el mismo que el nodo n°1 del elemento n°5. Además, en la estructura este mismo nodo recibe el número n°5. Se deberá verificar entonces, que si existe continuidad, se cumple que los vectores desplazamientos $\tilde{\delta}^3_3$ y $\tilde{\delta}^5_1$ ($\tilde{\delta}^i_j$, donde i indica número de elemento y j número de nodo local), son iguales. A esta condición, que pue-

de generalizarse a cualquier problema atacado por una malla de elementos finitos, se la llama **condiciones de continuidad interelementos**. Esta situación, que se intuye físicamente, debe ser llevada al sistema de ecuaciones que esperamos nos conduzca a la solución de nuestro problema, es decir, debería lograrse la manifestación matemática de esta continuidad.

Hemos visto que la expresión

$$\tilde{F}^e = \tilde{K}^e * \tilde{\delta}^e$$

conforma un sistema de ecuaciones que, para el estado plano, involucra los tres nodos del elemento y los dos desplazamientos (grados de libertad u y v) por nodo y de allí que el sistema tenga 6 incógnitas (3 nodos * 2 desp./nodo).

Ahora bien, para la estructura del ejemplo o para cualquier otra debe existir una expresión semejante a la del elemento solo, dado que el PTV, que sirvió de base para la formulación, es válido para toda ella:

$$\tilde{F} = \tilde{K} * \tilde{\delta}$$

Esto representa un sistema de ecuaciones de 14 incógnitas ya que tiene 7 nodos con 2 grados de libertad cada uno. La matriz \tilde{K} de toda la estructura tendrá una dimensión entonces de 14*14. La mayor dificultad es la obtención de esa matriz, denominada **matriz global**, pues surge de una combinación de la de cada elemento que conforma la estructura. Pero aún debe hallarse la ley que rijas esa combinación y precisamente la condición de continuidad interelementos es esa ley y la formación de \tilde{K} su descripción matemática.

Para describir entonces matemáticamente la continuidad tomemos nuevamente los elementos aislados. Estos tendrán cada uno, 6 incógnitas propias que serán:

$$\tilde{\delta}^3 = \begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ u_2^L \\ v_2^L \\ u_3^L \\ v_3^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_3^G \\ v_3^G \\ u_4^G \\ v_4^G \\ u_5^G \\ v_5^G \end{Bmatrix} \qquad \tilde{\delta}^5 = \begin{Bmatrix} u_1^L \\ v_1^L \\ u_2^L \\ v_2^L \\ u_3^L \\ v_3^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_5^G \\ v_5^G \\ u_6^G \\ v_6^G \\ u_7^G \\ v_7^G \end{Bmatrix}$$

las cuales están expresadas según su numeración local (aquellas con la ^L de supraíndice) primero y global (aquellas con la ^G de supraíndice) después. Los coeficientes de las matrices de cada uno de estos elementos deben ser re-hubicados en la matriz de la estructura en correspondencia con los desplazamientos que directamente los involucra. Esto es, en el elemento nº3, todo coeficiente que multiplique a u_1 en su matriz local, debe multiplicar en la global a u_3 pues se trata del mismo desplazamiento. De igual manera con el resto de los desplazamientos de este elemento y con todos los del nº5.

Sin embargo, algo especial ocurre con el nodo nº5 global en este caso. Ambos elementos aportan coeficientes y por continuidad interelementos, los desplazamientos incógnitas u_5 y v_5 serán iguales para ambos. Además, así como se suman los efectos de las cargas de los dos elementos en ese nodo (F_{x3}^{5+} F_{x1}^{5} y F_{y3}^{5+} F_{y1}^{5}), deben sumarse los segundos miembros y el desplazamiento nodal sería un factor común de algunos de los coeficientes de esas dos matrices. Por lo tanto es correcto especificar en estos lugares de la matriz global, la suma de dichos coeficientes. Veamos como quedaría la matriz en formación: (No debe perderse de vista que en el próximo ejemplo solo se han ubicado dos elementos. El proceso terminará cuando se haga lo mismo con todos los otros.)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 F_{x1} \\
 F_{y1} \\
 F_{x2} \\
 F_{y2} \\
 F_{x3} \\
 F_{y3} \\
 F_{x4} \\
 F_{y4} \\
 F_{x5} \\
 F_{y5} \\
 F_{x6} \\
 F_{y6} \\
 F_{x7} \\
 F_{y7}
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{cccccccccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^3 & k_{12}^3 & k_{13}^3 & k_{14}^3 & k_{15}^3 & k_{16}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & k_{23}^3 & k_{24}^3 & k_{25}^3 & k_{26}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^3 & k_{32}^3 & k_{33}^3 & k_{34}^3 & k_{35}^3 & k_{36}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^3 & k_{42}^3 & k_{43}^3 & k_{44}^3 & k_{45}^3 & k_{46}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^3 & k_{52}^3 & k_{53}^3 & k_{54}^3 & k_{55}^3 + k_{11}^5 & k_{56}^3 + k_{12}^5 & k_{23}^5 & k_{24}^5 & k_{25}^5 & k_{26}^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^3 & k_{62}^3 & k_{63}^3 & k_{64}^3 & k_{65}^3 + k_{21}^5 & k_{66}^3 + k_{22}^5 & k_{33}^5 & k_{34}^5 & k_{35}^5 & k_{36}^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^5 & k_{32}^5 & k_{33}^5 & k_{34}^5 & k_{35}^5 & k_{36}^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^5 & k_{42}^5 & k_{43}^5 & k_{44}^5 & k_{45}^5 & k_{46}^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^5 & k_{52}^5 & k_{53}^5 & k_{54}^5 & k_{55}^5 & k_{56}^5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^5 & k_{62}^5 & k_{63}^5 & k_{64}^5 & k_{65}^5 & k_{66}^5
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 u_5 \\
 v_5 \\
 u_6 \\
 v_6 \\
 u_7 \\
 v_7
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 * \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

En la medida que otros elementos concurren al nodo del ejemplo, debe seguir sumándose coeficientes en esos lugares de la matriz global.

En cuanto al vector global de cargas, este no presenta mayores problemas pues para su formación es preferible no considerar la suma de los vectores carga de cada elemento (aunque esto es perfectamente correcto) sino tomar directamente a la estructura como un gran elemento y localizar las cargas según el nodo en que se apliquen. Solo en casos de carga de masa, esto anterior no será posible y la sumatoria a todos los elementos llevando en consideración su numeración nodal local y global, será imprescindible (se procede semejante a $\tilde{\mathbf{K}}$).

Realizando el procedimiento indicado para estos dos elementos con el resto de ellos, o sea todos los que componen el sistema, cuidando siempre lo indicado, se realiza el denominado **ensamblaje de la matriz global**, que en definitiva materializa en forma matemática, la continuidad física que se menciona al comienzo.-

En cuanto al punto b), como ya se conoce, establecer condiciones de contorno es fijar el valor de la incógnita en ese punto del contorno o bien obtener alguna función de esa incógnita a lo largo del mismo. Decimos que a través de las condiciones de contorno hacemos soluble el sistema de ecuaciones, porque el conocer o suponer la variación de las mismas (que es lo hecho hasta ahora) puede servir como evaluación cualitativa del problema, pero serán infinitos los posibles valores que estas incógnitas pueden tomar ya que solo se ha establecido su modalidad de variación.-

Esta indeterminación en el valor real de las incógnitas, se ve reflejado matemáticamente en la imposibilidad de resolver el sistema de ecuaciones por ser la matriz global una **matriz singular**.

El problema podrá solucionarse una vez que se hayan introducido adecuadamente y en número suficiente las diferentes condiciones de contorno.-

Queda simplemente hacer mención a la metodología por la cual se nombra a los grados de libertad según una numeración corrida, muy útil a la hora de realizar la programación por ordenador de la solución a través de elementos finitos. Simplemente se establece el siguiente paralelo (aplicado al ejemplo):

Al referirnos entonces al desplazamiento v_3 , por ejemplo, podríamos hacerlo a través del sexto grado de libertad. Esto es muy práctico porque relaciona a través de un algoritmo matemático, al número de nodo con el grado de libertad buscado:

$$\tilde{\delta}_{\text{estructura}} = \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ . \\ u_7 \\ v_7 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ . \\ 13 \\ 14 \end{array}$$

$$\text{Grado de libertad.} = (N^{\circ} \text{ nodo} - 1) * NGL +$$

1 - desplazamiento x (u)
2 - desplazamiento y (v)

Con NGL como N° de grados de libertad, que para el caso de estado plano, será siempre 2 (dos). Como ejemplo, el desplazamiento en la dirección x (desplazamiento. u) del nodo 7 llevará el N° de grado de libertad: $(7-1) * 2 + 1 = 13$.

3.1.2 CONDICIONES DE CONTORNO

Las condiciones de contorno (C.C.) como un problema general de ecuaciones diferenciales, debe enfocarse de una manera diferente al caso presente. Sin embargo dejaremos ciertos conceptos que serán de utilidad a la hora de afrontar problemas de mayor envergadura. Las C.C. pueden clasificarse en:

Forzadas: Cuando se especifica una condición de la variable primaria, constituida en este caso por los desplazamientos en ciertos nodos.

Naturales: Cuando se especifica una condición de la variable secundaria, que en este caso equivale a especificar cargas distribuidas o cargas concentradas aplicadas a un lado o más de los elementos del contorno, en ciertos nodos.

El concepto de variable secundaria es difícil de introducir ya que no se ha realizado una exposición formal de los fundamentos variacionales del MEF. No obstante, se puede dejar la idea de que en el contorno deben cumplirse las ya vistas en el curso de elasticidad, condiciones de borde en tensiones:

$$T^K = \sigma_{ji}^K * n_j^K \quad (41-I) \text{ (se empleo notación indicial)}$$

Donde **T** serían las cargas (tensiones) aplicadas al contorno, **í** tensiones, **n** versor del plano considerado y **k** el punto analizado.

Las tensiones se obtienen de derivar la incógnita primaria desplazamiento y multiplicarla por constantes del material (Hooke) y en general se la denomina incógnita secundaria (estrictamente hablando, las incógnitas secundarias son las derivadas del desplazamiento). Como en esos puntos (nodos) se cumple la **(41-I)** (condición de borde), entonces las cargas son el equivalente a la variable secundaria en ese lugar por ser iguales a la tensión.

Debe tenerse presente que solo cuando las incógnitas primarias no se especifiquen, se podrá imponer condiciones (especificar) a las secundarias y viceversa puesto que siempre que alguna sea impuesta, la otra se transforma en incógnita.

En el caso de que no se de especificación alguna para nadie, entonces en esos nodos las condiciones de contorno naturales se cumplen automáticamente y las forzadas pasa a ser las únicas incógnitas.

En el caso concreto que nos ocupa, las condiciones de borde serán generalmente valores fijos establecidos o especificados de **u** y **v** en lugares determinados. Esto es equivalente a fijar la estructura espacialmente, acotando dentro de $\tilde{\delta}$ la porción que corresponde a un movimiento como rígido. Vemos que es una condición de contorno forzada, pues se fija la variable primaria (la condición secundaria aparece como vector de cargas).

Para la estructura discretizada del ejemplo, se conoce que $\tilde{\delta}_1$ y $\tilde{\delta}_2$ tienen valores nulos, lo cual deberá expresarse matemáticamente en la ecuación global (matriz global). Para implementar lo anterior se pueden citar 2 métodos:

a) Debemos diferenciar dos situaciones:

a-1) Si el desplazamiento restringido es nulo, se aumenta a un valor muy grande los K_{ij} si el $u_j = 0$. Por ejemplo:

$$F_{xi} = K_{i1} * u_1 + K_{i2} * v_1 + K_{i3} * u_2 + K_{i4} * v_2 + \dots + 10^{20} * K_{ij} * u_j + \dots + K_{in} * v_n$$

Si se despeja el desplazamiento impedido:

$$u_i = \frac{F_{xi} - (K_{i1} * u_1 + K_{i2} * v_1 + K_{i3} * u_2 + K_{i4} * v_2 + \dots + K_{in} * v_n)}{10^{20} * K_{ij}} \approx 0$$

En la ecuación anterior se refleja la condición de borde. Entonces, para cada grado de libertad totalmente impedido, deberán aumentarse los elementos de la diagonal principal que se corresponden con ellos, logrando así la modificación buscada en el sistema de ecuaciones.

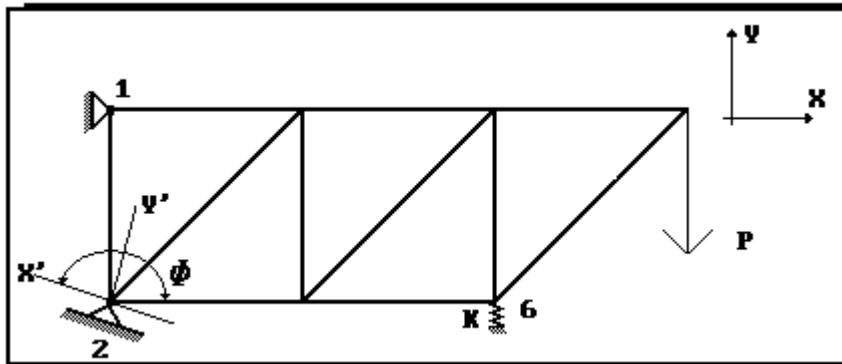
a-2) Si en vez de ser nulo un desplazamiento, este adquiere un valor finito y conocido, puede multiplicarse igualmente K_{ij} por un número grande y reemplazar la carga por este valor conocido multiplicado también por ese número grande. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} F_{x1} - K_{12} * \alpha &= K_{11} * u_1 + 0 + K_{13} * u_2 + K_{14} * v_2 + \dots + K_{1n} * v_n \\ \alpha &= v_1 \\ &\dots = \dots \\ F_{yn} - K_{n2} * \alpha &= K_{n1} * u_1 + 0 + K_{n3} * u_2 + K_{n4} * v_2 + \dots + K_{nn} * v_n \end{aligned}$$

Se deberá resolver entonces, este nuevo sistema de ecuaciones. El método es de fácil implementación computacional y específicamente es el que usaremos para el programa posteriormente mostrado, sin embargo no reduce el tamaño de la matriz y por lo tanto el consumo de memoria tampoco se reducirá.

3.1.3 CONDICIONES DE CONTORNO ESPECIALES

Debe distinguirse en forma especial, dos tipos de condiciones de contorno que deben tratarse particularmente y que se ilustran en la siguiente figura:



a) Apoyos Elásticos: Es el caso presentado en la figura anterior en el nodo n°6. Se trata de una restricción en el desplazamiento libre de un nodo que se debe al agregado en el mismo de un resorte o muelle que evite parcial o casi totalmente, el movimiento según ese grado de libertad.

Supongamos que se instala un resorte (ver figura) en concordancia con el desplazamiento v_6 , o lo que es igual, grado de libertad **N°12**. Es claro que se generará una fuerza reactiva contraria a la posible carga del nodo coincidente con el desplazamiento que será proporcional a v_6 y a la constante de resorte K .

$$F_{y6} - K * v_6 = K_{121} * u_1 + K_{122} * v_1 + \dots + K_{1211} * u_6 + K_{1212} * v_6 + \dots + K_{12n} * v_n$$

Realizando un pasaje de términos:

$$F_{y6} = K_{121} * u_1 + K_{122} * v_1 + \dots + K_{1211} * u_6 + (K + K_{1212}) * v_6 + \dots + K_{12n} * v_n$$

Con lo que, solamente, con aumentar el coeficiente coincidente con el grado de libertad restringido por resorte el valor de la constante del mismo, tenemos en cuenta su efecto.

Como se podrá apreciar, en realidad lo que se ha hecho es incrementar parcialmente la rigidez del elemento. Si el valor de **K** fuera muy grande, entonces tendería a cero el desplazamiento del nodo (sería como un apoyo rígido en esa dirección), así como si **K=0**, se trataría del equivalente a un nodo libre.

Estamos entonces en presencia de una condición de contorno natural, pues se está estableciendo en el fondo una restricción al estado tensional del nodo, condicionando el valor de la incógnita primaria al cumplimiento del mencionado impedimento.

b) Apoyo No Concordante: En este caso, mostrado en la figura en el nodo nº2, el apoyo restringe un grado de libertad que no coincide con los ejes del sistema ya que quedaría impedido el desplazamiento según **Y'**. Es claro que todo el sistema de ecuaciones esta referido a los ejes **generales X e Y**, y por lo tanto debemos hallar una relación entre los desplazamientos según esos ejes y según los locales **X'** e **Y'**.

Si se indica con ϕ al ángulo que forma el eje **X'** con el **X**, puede plantearse una matriz de rotación:

$$\tilde{R}_{\phi} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{vmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{con} \quad \tilde{\delta}_2 = R_{\phi} * \tilde{\delta}'_2 \quad \text{y} \quad \tilde{F}_2 = R_{\phi} * \tilde{F}'_2 \quad (45-I)$$

Donde se cumple que:

$$\tilde{\delta}_2 = \begin{vmatrix} u_2 \\ v_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{F}_2 = \begin{vmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{vmatrix}$$

Estos mismos desplazamientos y fuerzas, llevados a ejes locales, serían:

$$\tilde{\delta}'_2 = \begin{vmatrix} u'_2 \\ v'_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{F}'_2 = \begin{vmatrix} F'_{x2} \\ F'_{y2} \end{vmatrix}$$

CAPITULO 3

Es evidente que la condición de borde primaria, debería introducirse en el vector $\tilde{\delta}'_2$, pues se conoce el valor del desplazamiento restringido según los ejes locales .

La clave de la solución del problema será, simplemente, la siguiente: luego de encarar la solución haciendo caso omiso de la inclinación del apoyo en el nodo en que esta se presentase (Ej. el N° 2 de la figura anterior), reemplazamos los desplazamientos y cargas correspondientes con esos grados de libertad referidos a ejes generales, por los iguales referidos a ejes locales.

A modo de ejemplo, consideremos el sistema de la figura expresado en términos de cargas y desplazamientos nodales, en vez de los mismos expresados según los grados de libertad.

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &= \tilde{K}_{11} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{12} * \tilde{\delta}_2 + \tilde{K}_{13} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{1n} * \tilde{\delta}_n \\ \tilde{F}_2 &= \tilde{K}_{21} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{22} * \tilde{\delta}_2 + \tilde{K}_{23} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{2n} * \tilde{\delta}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{F}_n &= \tilde{K}_{n1} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{n2} * \tilde{\delta}_2 + \tilde{K}_{n3} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{nn} * \tilde{\delta}_n\end{aligned}$$

$$\tilde{K}_{22} = \begin{vmatrix} K_{33} & K_{34} \\ K_{43} & K_{44} \end{vmatrix}$$

La ultima expresión, considera los grados de libertad 3 y 4 que se asignan al nodo 2. Es evidente que el sistema anterior, esta referido a ejes globales y así es imposible establecer en el nodo 2, como lo veníamos haciendo hasta ahora, las restricciones a los movimientos pues estas se dan según ejes locales. Usando las relaciones (45-I), tenemos:

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &= \tilde{K}_{11} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{12} * \tilde{R}_\phi * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{K}_{13} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{1n} * \tilde{\delta}_n \\ \tilde{R}_\phi * \tilde{F}'_2 &= \tilde{K}_{21} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{22} * \tilde{R}_\phi * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{K}_{23} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{2n} * \tilde{\delta}_n \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{F}_n &= \tilde{K}_{n1} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{K}_{n2} * \tilde{R}_\phi * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{K}_{n3} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{K}_{nn} * \tilde{\delta}_n\end{aligned}$$

Si se premultiplica la segunda fila (es decir, la que corresponde al apoyo inclinado) por $\tilde{\mathbf{R}} \boldsymbol{\phi}^T$, quedaría:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_1 &= \tilde{\mathbf{K}}_{11} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{12} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{\mathbf{K}}_{13} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{\mathbf{K}}_{1n} * \tilde{\delta}_n \\ \tilde{\mathbf{F}}'_2 &= \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{21} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{22} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{23} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{2n} * \tilde{\delta}_n \\ &\dots = \dots \\ \tilde{\mathbf{F}}_n &= \tilde{\mathbf{K}}_{n1} * \tilde{\delta}_1 + \tilde{\mathbf{K}}_{n2} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} * \tilde{\delta}'_2 + \tilde{\mathbf{K}}_{n3} * \tilde{\delta}_3 + \dots + \tilde{\mathbf{K}}_{nn} * \tilde{\delta}_n\end{aligned}$$

Matricialmente, quedaría:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{F}}'_2 \\ . \\ \tilde{\mathbf{F}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} & \tilde{\mathbf{K}}_{13} & . & \tilde{\mathbf{K}}_{1n} \\ \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{22} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} & \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{23} & . & \tilde{\mathbf{R}}_{\phi}^T * \tilde{\mathbf{K}}_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ \tilde{\mathbf{K}}_{n1} & \tilde{\mathbf{K}}_{n2} * \tilde{\mathbf{R}}_{\phi} & \tilde{\mathbf{K}}_{n3} & . & \tilde{\mathbf{K}}_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \tilde{\delta}_1 \\ \tilde{\delta}'_2 \\ . \\ \tilde{\delta}_n \end{pmatrix}$$

Con lo que se ha logrado que las incógnitas y las cargas en el apoyo inclinado, se den en ejes locales. Así se facilita notablemente la introducción de las restricciones en el borde. Para el caso de la figura se cumple que $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{0}$ (segundo grado de libertad del nodo 2 en las coordenadas rotadas) y para el sistema de ecuaciones será simplemente el cuarto grado de libertad global igual a cero haciendo caso omiso de la inclinación gracias a la modificación de la matriz de la estructura.

3.2 OBTENCION DE LA INCOGNITA DESPLAZAMIENTO

Una vez armado el sistema de ecuaciones con las condiciones de contorno correspondientes, solo resta aplicar algún método de resolución del sistema de ecuaciones como Gauss, etc. Con los valores nodales $\tilde{\delta}_i^{(e)}$ obtenidos se puede reconstruir, a nivel de cada elemento, la función desplazamiento a fin de conocer como serán dichos valores en puntos del interior del mismo:

$$\tilde{\delta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})^e = \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^{(e)} * \tilde{\mathbf{N}}_i^{(e)}$$

Con lo que se comprueba el hecho que el MEF nos otorga no solo un análisis cuantitativo de la incógnita en ciertos puntos, sino también uno cualitativo a nivel de elemento.

3.3 OBTENCION DE LAS TENSIONES

A partir del cálculo de los desplazamientos nodales, es factible conocer la distribución de tensiones y el valor de las mismas en cualquier punto del elemento. Como el MEF provee además de la solución nodal, una ley de variación de la incógnita primaria, podemos evaluar las derivadas de esta, dentro de un elemento, de la siguiente manera:

$$\tilde{\delta}_{,x}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^{(e)} * \tilde{N}_{i,x}^{(e)} \quad y \quad \tilde{\delta}_{,y}^{(e)} = \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^{(e)} * \tilde{N}_{i,y}^{(e)}$$

Donde el subíndice indica derivada respecto a X o Y por lo que $\mathbf{N}_{i,x}^{(e)}$ y $\mathbf{N}_{i,y}^{(e)}$ son derivadas de las funciones respecto de las variables indicadas y n es número de nodos del elemento.

Desarrollando $\delta_{x}^{(e)}$ a modo de ejemplo, quedaría:

$$\tilde{\delta}_{,x}^{(e)} = \left| \begin{matrix} u_{,x} \\ v_{,x} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} \right| * L_{1,x} + \left| \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \right| * L_{2,x} + \left| \begin{matrix} u_3 \\ v_3 \end{matrix} \right| * L_{3,x}$$

Donde $L_{1,x}$ no es otra cosa que $b_1/2A$ y lo mismo para $L_{2,x}$ y $L_{3,x}$, poniéndose de manifiesto que la derivada del desplazamiento es constante dentro del elemento.

Como es sabido a partir del curso de elasticidad, y tomando como base lo obtenido en el paso anterior, se desprenden las ecuaciones de las deformaciones. Luego, mediante la ley de Hooke podemos obtener las mencionadas tensiones $\sigma(x,y)$.

$$\tilde{\sigma} = \left| \begin{matrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right| = \tilde{D} * \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{matrix} \right| = \tilde{D} * \left| \begin{matrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{matrix} \right|$$

Es evidente que el resultado de las derivadas, arriba indicadas para este elemento, serán constantes como se destacara oportunamente. Así podremos afirmar, que en un elemento triángulo de tres nodos la distribución de tensiones que arroja el análisis a través de este método será constante.

Esto es quizás el mayor inconveniente que presenta el uso de este tipo de forma y muchas veces esto lleva a tener que evaluar tensiones en puntos internos del elemento y no en los nodos. Esto es para evitar que se tenga que decidir en un punto por varios valores de tensiones. En el apartado siguiente, se vuelve sobre este tipo de problemas.

3.4 DISCUSION DE RESULTADOS

Es importante analizar el valor de los resultados obtenidos. En el apartado anterior se ha puesto de manifiesto quizás, una de las mayores ventajas que el MEF tiene por ejemplo, sobre el MDF y esta radica en que supongamos que ambas metodologías de resolución condujeran a idénticos valores nodales:

El MDF solo da eso, es decir, solo el valor en un conjunto de puntos discretos que constituyen la malla. Si a partir de estos deseamos saber que ocurre entre ellos, estamos absolutamente impedidos.

Además al momento de introducir las cargas, el valor nodal usado es el valor local de la misma en ese punto nodal.

En cambio en el MEF se parte de una ley de variación de la incógnita que si bien puede ser aproximada, nos permite el análisis hacia el interior del elemento, es decir, entre puntos discretos.

En cuanto a las cargas, están son pesadas analizando la influencia de las mismas sobre los nodos de la región de aplicación.

No debe por cierto, sobrestimarse el valor de la incógnita en los nodos. Si bien son el objeto del cálculo, no significa que allí el resultado sea más exacto que en cualquier otro lugar del elemento. De hecho estudios demuestran que existen otros puntos del interior del elemento donde son más fiables los valores de la incógnita.

A los efectos de justificar esto podemos decir, por ejemplo, que a través del MEF se ha asegurado una continuidad inter-elemento de las incógnitas primarias. Sin embargo esta continuidad de hecho no se extiende a las derivadas de estas que con seguridad darán distintos valores para el mismo nodo cuando se accede a él desde diferentes

elementos, constituyéndose esto en un motivo de sospecha con respecto a la veracidad de la solución en ese lugar.

Generalmente y a modo de paliativo, los valores nodales y sus derivadas son evaluados en otros puntos dentro del elemento donde se pueda tener mayor fiabilidad o bien sea menos trabajosa la evaluación de las derivadas. (Es común tomar como referencia los puntos de integración de GAUSS-LEGENDRE que más adelante se comentarán). Es más, de ser necesario conocer los valores de las incógnitas en los nodos, en algunos casos se descarta el valor nodal obtenido para reemplazarlo por el resultante de un promedio pesado, en ese punto, del valor de la misma incógnita tomando como base, para el promedio, el valor de la misma en puntos interiores de los elementos concurrentes al nodo (si bien estos puntos antes fueron evaluados a partir de la incógnita nodal posteriormente descartada).

3.5 ESTIMACION DEL ERROR EN EL MEF

El error introducido en el MEF, puede deberse a 3 situaciones principales:

1 - Error de contorno: Error debido a la aproximación del dominio, es decir en la discretización del mismo y puede no darse en algunos casos como por ejemplo en pórticos y/o dominios unidimensionales en general. En estos casos el elemento describe perfectamente el dominio y por lo tanto no se introduce error al representarlo. El caso de dominios bidimensionales o tridimensionales y cuando su forma no es regular, este error adquiere cierta importancia y puede vérselo como un **error de datos** pues se está resolviendo la ecuación diferencial dada en un continuo diferente. Un adecuado refinamiento del mallado y la utilización de elementos más complejos, puede reducir enormemente este error.

2 - Error de integración y de aritmética finita: Es debido al empleo de ordenadores en la resolución de las integrales que introducen errores de redondeo.

Además, al usar métodos numéricos para integrar (curvaturas) los valores de las integrales de por sí muchas veces no son exactos.

A pesar de lo dicho, en general no son errores muy importantes y son generalmente pequeños en comparación con los otros.

3 - Error de aproximación: Es el que surge de reemplazar la verdadera incógnita primaria por una aproximación dada por:

$$\tilde{\delta} \approx \tilde{\delta}_h = \sum_{e=1}^N \sum_{i=1}^n \tilde{\delta}_i^{(e)} * \tilde{N}^{(e)}$$

Donde N es el número de elementos y n el número de nodos por elementos.

La evaluación del error de aproximación se puede hacer de diversas maneras, y una de ellas es llamada **Norma L_2** , y viene dada por:

$$Abs(\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_h)_0 = \left[\int_{\Omega} |\tilde{\delta} - \tilde{\delta}_h|^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

Existen otras maneras de realizar la anterior evaluación, entre ellas la llamada norma de energía que usa el mismo grado de derivación que la ecuación del funcional cuadrático el cual representa, en muchos problemas de la mecánica del sólido, a la energía..

4. TOPICOS ESPECIALES

La visión superficial hasta aquí llevada del MEF, ha dejado fuera del tratamiento una gran cantidad de particularidades que requerirían una mucho más detallada descripción y que están más allá del objetivo de este tratado.


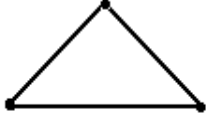
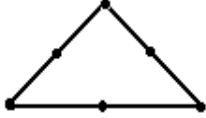


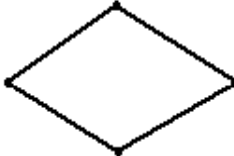
No obstante se realizará a continuación, una breve introducción a otras funciones de interpolación o lo que es lo mismo, a otras formas geométricas también muy usadas cuando el problema a resolver así lo requiera. Además se dejarán sentadas las bases para realizar una mejor aproximación a la geometría real del dominio, mediante la **distorsión** de los elementos cuando por supuesto, la complejidad de los contornos del continuo lo justifiquen.

De ninguna manera se pretenderá agotar las diferentes formas geométricas abordables en el MEF, sin embargo pese a que potencialmente cualquier tipo de función puede ser desarrollada y aún hoy se siguen buscando nuevas formas geométricas, es de común aceptación en los medios científicos, que el desarrollo de nuevos elementos poco pueden ya aportar a esta mecánica de resolución y se cuenta hoy con una variedad lo suficientemente amplia como para abordar casi cualquier problema ingenieril.

Actualmente, los principales esfuerzos de desarrollo están orientados a nuevas técnicas como **elementos de contorno** y su combinación con el MEF.

4.1 OTRAS FUNCIONES SUSTITUTAS

Contando ahora con un panorama más amplio respecto a la relación existente entre las funciones sustitutas y el número de nodos del elemento o el tipo de elemento, podemos realizar una mención de las funciones más comúnmente usadas para los tipos más corrientes de elementos:

	ELEMENTO	FUNCION SUTITUTA
ELEMENTO BARRA (1)		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X$ $V = \alpha_3 + \alpha_4 * X + \alpha_5 * X^2 + \alpha_6 * X^2$
ELEMENTO PARA ELASTICI. PLANA (2)		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X + \alpha_3 * Y$ $V = \alpha_4 + \alpha_5 * X + \alpha_6 * Y$
		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X + \alpha_3 * Y + \alpha_4 * X^2 + \alpha_5 * X * Y + \alpha_6 * Y^2$ $V = \alpha_7 + \alpha_8 * X + \alpha_9 * Y + \alpha_{10} * X^2 + \alpha_{11} * X * Y + \alpha_{12} * Y^2$
		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X + \alpha_3 * Y + \alpha_4 * X * Y$ $V = \alpha_5 + \alpha_6 * X + \alpha_7 * Y + \alpha_8 * X * Y$
		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X + \alpha_3 * Y + \alpha_4 * X^2 + \alpha_5 * X * Y + \alpha_6 * Y^2 + \alpha_7 * X^3 + \alpha_8 * Y^3$ $V = \alpha_9 + \alpha_{10} * X + \alpha_{11} * Y + \alpha_{12} * X^2 + \alpha_{13} * X * Y + \alpha_{14} * Y^2 + \alpha_{15} * X^3 + \alpha_{16} * Y^3$
ELEMENTO PARA PLACAS (3)		$U = \alpha_1 + \alpha_2 * X + \alpha_3 * Y + \alpha_4 * X^2 + \alpha_5 * X * Y + \alpha_6 * Y^2 + \alpha_7 * X^3 + \alpha_8 * Y * X^2 + \alpha_9 * X * Y^2 + \alpha_{10} * Y^3 + \alpha_{11} * X^3 * Y + \alpha_{12} * Y^3 * X$

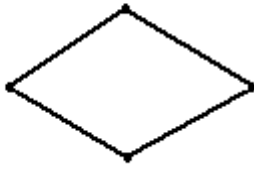
En la figura anterior se muestran funciones polinómicas que podrían servir, tanto para determinar el valor nodal así como la variación en el interior del elemento de la incógnita.

Las funciones fueron agrupadas y signadas con un numero indicativo del grupo. El número 1 es el grupo de funciones usadas cuando se presenta en elementos unidireccionales, el problema de flexión sumada a esfuerzo axil. Como puede apreciarse, el polinomio que describe a v no guarda la relación mencionada entre número de nodo y grado del polinomio. Esto se debe a que es necesario modelar también con él, las rotaciones o derivadas de v , con lo que una función lineal no hubiese sido de utilidad. En el caso de u , a diferencia, el polinomio solo debe representar al corrimiento, por ello entonces vuelve a cumplirse todo lo dicho para los triángulos.

El grupo número 2, representa el grupo de funciones usadas para elasticidad plana, donde como se ve, se cumple estrictamente la relación número de nodos y grado de la función sustituta.

El grupo número 3, es el usado para flexión en placas, donde se ve nuevamente aquello mencionado para la barra, es decir, que pese a tener solo cuatro nodos el elemento, el polinomio es de grado 3 con 12 incógnitas. Estas luego serán sustituidas por un descenso y dos rotaciones por cada nodo, que en definitiva será el vector incógnita.

Existe sin embargo, una manera de modelar la flexión que ya ha sido mencionada, que es la formulación con penalidades, donde la sustitución se haría así:

ELEMENTO		FUNCION SUTITUTA	
ELEMENTO PARA PLACAS (4)		$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n u_i * \psi_i$ $\mathbf{S_y} = \sum_{i=1}^n S_y^i * \psi_i$	$\mathbf{S_x} = \sum_{i=1}^n S_x^i * \psi_i$

En este caso se modela por separado la flecha **W** y las rotaciones del plano medio **Sx** y **Sy**.

4.2 EI MODELADO DE LA GEOMETRIA Y LA INTEGRACION NUMERICA

Si bien durante el curso solo se han usado elementos triangulares simples, es importante tener un conocimiento de las posibilidades que presentan otro tipo de elementos como los triángulos cuadráticos, rectángulos etc.

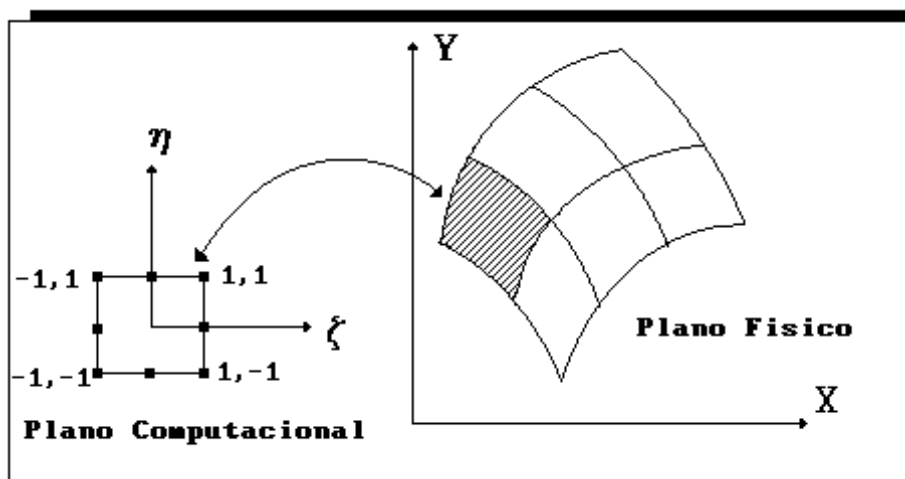
Hemos discutido el error de representación del dominio por parte de los elementos de lados rectos y/u ortogonales (caso rectángulo), cuando deben modelarse contornos curvos y/o no ortogonales. El problema puede subsanarse tomando elementos que tengan formas más generales (curvas y ángulos internos varios) que permitan una más fiel representación del contorno del sólido modelado. Esto se logra simplemente, indicando adecuadamente las coordenadas nodales al computador teniendo en cuenta al igual que como se hizo con la función incógnita, que si se desea una curva de segundo

grado para algún lado del elemento, deben indicarse por lo menos tres nodos en ese lado. Más adelante se regresará sobre estos conceptos.

Por supuesto que la idea expresada de usar elementos de forma general, trae aparejado una gran complicación a la hora de fijar cuales serán las funciones de interpolación de la incógnita, pues las reglas hasta ahora establecidas para los polinomios de Lagrange o coordenadas triangulares eran válidas si los lados permanecían rectos. Además, cuanto más complicadas se presenten las formas, más nos estaremos alejando de la idea original del MEF que consistía en subdividir el todo a fin de que cada porción sea de fácil modelado cosa que sin lugar a dudas no estamos cumpliendo al aceptar formas generales.

Ateniéndose a lo indicado, se debe buscar la manera de que ese elemento de difícil geometría general y consecuentemente de complejo análisis, pueda ser tratado igual o semejante que las formas clásicas vistas. En otras palabras, mediante algún argumento matemático transformar al elemento en cuestión en uno de geometría sencilla por más compleja que esta sea en realidad. Esto lleva a lo que se conoce como **modelado de la geometría del elemento** pues en esencia se trata de reemplazar la incertidumbre de una forma no común por la confiabilidad que ofrece alguna de las standard. Concretamente, esto se consigue a través de la reformulación de las características geométricas de los elementos en un nuevo sistema de coordenadas. También se conoce a este procedimiento como *cambio de planos de referencia* pasando desde el (a) hacia el (b) siendo cada uno:

- a) El plano físico, o plano real que es donde el elemento toma la forma que realmente tiene, con base en las coordenadas X e Y .
- b) El plano computacional, donde el elemento es llevado a una de las formas clásicas para poder usar las funciones de interpolación ya vis-



tas, con coordenadas η y ζ

Es claro que si deseamos trabajar con el elemento con una forma clásica inalterada, debemos hacerlo en el plano computacional y definir allí las funciones de interpolación que tendrán ahora a η y ζ como variables, o sea serán funciones de ellas, ya que nos hemos apartado del plano X, Y físico que era donde veníamos trabajando hasta ahora. Sin embargo, en las ecuaciones del problema, las derivadas de esas mismas funciones serán referidas a X e Y pues son las variables reales. Esto último es, en realidad, el principal escollo que debe salvarse pues se ha de lograr que las derivadas con respecto al plano real puedan aplicarse al físico. Estamos hablando entonces de que debería existir una relación entre ambos sistemas de referencia a fin de poder transferir diferenciales como funciones de funciones de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\quad (56-I)$$

La mencionada relación deberá ser biunívoca y debe establecerse entre los sistemas de coordenadas X, Y y η, ζ .

$$\begin{aligned}X &= X(\zeta, \eta) \\ Y &= Y(\zeta, \eta)\end{aligned}\quad \text{y } \textit{viceversa}$$

Este puente establecido, puede ser efectivamente materializado mediante la elección de alguna forma matemática sencilla. Pero sin embargo la transformación debe ser punto a punto, es decir, cada punto en el plano X, Y debe tener su igual en el η, ζ . A esto se refiere cuando se habla de **relación biunívoca** y genera restricciones a aquellas formas generales mencionadas las que deberán evitar en lo posible ángulos internos muy agudos entre las curvas que constituyen sus lados y nunca generar elementos cuyos ángulos internos sean mayores de 180° . De no prestar atención a esta última recomendación, podrían aparecer conjuntos de puntos en los cuales el vínculo entre ambas referencias escape al campo de los números reales.

Dejando por un momento pendiente la forma que definitivamente se adoptará para la vinculación interplanos y retomando ahora el desarrollo, si se define como **Jacobiano** a :

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Aplicando esto a (56-I):

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{vmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Con lo cual se ha realizado el cambio de planos, pues derivadas respecto de las variables originales se pueden cambiar por las mismas del plano computacional. Pero aún debemos obtener el valor de ese jacobiano. Para ello debemos establecer la relación entre ambos sistemas de coordenadas que habíamos dejado en suspenso y una manera sería hacerlo a modo de funciones de interpolación semejantes a las usadas para la incógnita:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i^{(e)} * \phi_i^{(e)}; y = \sum_{i=1}^n y_i^{(e)} * \phi_i^{(e)}$$

Donde x_i e y_i son las coordenadas globales de los nodos y las ϕ_i son funciones de interpolación dependientes de η, ζ que pueden adoptarse como:

- 1 - Si se usan las mismas funciones que las usadas para las incógnitas, el elemento se llama **isoparamétrico**.
- 2 - Si las funciones son de menor grado que las usadas para las incógnitas, se llaman **subparamétrico**.
- 3 - Si son de mayor grado que las usadas para las incógnitas, se llaman **superparamétricos**

Reemplazando esto en el jacobiano se tiene:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^{(e)} * \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} & \sum_{i=1}^n y_i^{(e)} * \frac{\partial \phi_i}{\partial \zeta} \\ \sum_{i=1}^n x_i^{(e)} * \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n y_i^{(e)} * \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Si las ϕ_i son funciones no lineales, entonces los elementos tendrán lados curvos o de forma general (algo semejante a lo que ocurría al modelar la incógnita) y el jacobiano será función de η y ζ . Esto lleva a que las integrales a las que la resolución del problema por Elementos Finitos conduce a nivel de cada elemento, sea de alta complejidad y ya no polinómicas. Para ilustrar mejor veamos un ejemplo :

Tenemos en general que la forma tomada por estas integrales es:

$$\tilde{K}_{11} = \int_{\Omega} \left[D_{11} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \mathbf{x}} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{x}} + D_{33} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \mathbf{y}} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \mathbf{y}} \right] * d\Omega$$

$$\text{con } \tilde{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} \quad \text{y la matriz constitutiva} \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix}$$

Aunque la comparación sea difícil de establecerse a simple vista, la anterior es solo una porción de la indicada abajo:

$$\tilde{K}^e = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}^T * \tilde{\mathbf{D}} * \tilde{\mathbf{B}} * d\Omega$$

Aquí las derivadas de $\tilde{\mathbf{Z}}$ son parte de $\tilde{\mathbf{B}}^T$. $\tilde{\mathbf{B}}$ por ser $\tilde{\mathbf{Z}}$ submatriz de $\tilde{\mathbf{N}}$.

Esta integral llevada al plano computacional, queda:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{11} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} & \left[D_{11} * (J'_{11} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \zeta} + J'_{12} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \eta}) * (J'_{11} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} + J'_{12} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \eta}) + \right. \\ & \left. + D_{22} * (J'_{21} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \zeta} + J'_{22} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}^T}{\partial \eta}) * (J'_{21} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \zeta} + J'_{22} * \frac{\partial \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \eta}) \right] * d\zeta * d\eta * [J] \end{aligned}$$

Donde $\tilde{\mathbf{J}}$ es el JACOBIANO de la transformación y

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{vmatrix} J'_{11} & J'_{12} \\ J'_{21} & J'_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y } [J] \text{ como determinante de } J.$$

Al realizar la inversa del jacobiano aparecen cocientes con polinomios en los denominadores que al multiplicarse por otros con polinomios en el numerador, darán ecuaciones no polinómicas obligando a realizar integración numérica.

De ser necesarios entonces, uno de los métodos de integración numérica más usado es la cuadratura de **Gauss-Legendre** y quizás esto se deba a dos razones:

- a) El mismo requiere de un cambio de variable que haga que la nueva varíe solo entre -1 y +1. Justamente es la condición que reúne el plano computacional y por ende es factible aplicar allí el método.
- b) El proceso emplea puntos en el interior del elemento (están tabulados) y no los nodales y generalmente con menos puntos se obtiene una gran precisión.
- c) Estos puntos interiores son luego adoptados para el cálculo de las derivadas de la incógnita por comodidad y confiabilidad.

Expresada entonces la integral en el plano computacional, bastará con reemplazar los símbolos integrales por dobles sumatorias en los puntos internos mencionados y mediante la aplicación de la tabla de Gauss-Legendre se obtiene el valor de la integral. Existe extensa bibliografía al respecto.

Debemos destacar que no es necesario el empleo de integración numérica por este u otros métodos cuando el jacobiano es constante (es fácil integrar directamente un polinomio) o bien cuando se usan triángulos y no se desea modelar la geometría, podemos usar entonces las largamente expuestas en este tratado coordenadas triangulares L_1 , L_2 y L_3 en vez de las η y ζ .

Cualquiera sea el grado usado para interpolar la incógnita, siempre las integrales podrán resolverse con las **(21-I)**: o las **(21-II)**. Esto último las hace preferibles a la hora de decidir que funciones usar cuando los elementos sean triángulos. En vista a lo expuesto podemos resumir que:

Se trata en esencia de un doble modelado, por un lado el ya conocido de la incógnita y por otro el de la forma. Este último logrado en base a las coordenadas de los nodos del elemento.

Podría profundizarse mucho más en el tema abordado en este capítulo. Sin embargo y a los efectos de realizar solo una ponderación de la potencia del método motivo de nuestro estudio, se cree suficiente el tratamiento dado hasta aquí al modelado de geometría y variable dentro de un elemento finito.

5. ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL MEF

A través de las siguientes secciones, iremos analizando las subrutinas que posibilitan abordar el problema de la solución de una ecuación diferencial por el MEF.

Los diferentes diagramas de flujo se adaptan principalmente a una codificación con QBASIC o FORTRAN y tienen por objeto prestar un servicio académico, permitiendo una mejor asimilación de los procedimientos descritos en las secciones precedentes. Además permitirán resolver ejercicios sencillos (pues no se adjunta un generador de mallas) que auxiliarán al lector en la solución del estado plano.

Es importante aclarar sin embargo, que como no se trata de un programa comercial, sus entradas y salidas de datos son rígidas y solo aquellos familiarizados con su funcionamiento y estructura del método, estarán en condiciones de realizar su implementación.

Para aprovechar al máximo la capacidad de los PC, en cuanto a memoria se refiere, se ha optado por realizar un almacenamiento parcial de la matriz de rigidez total ensamblada aprovechando dos características de dicha matriz:

a) **Simetría:** Como consecuencia del teorema de Betty, tanto las matrices de rigidez de cada elemento como la ensamblada, cumplen con el hecho de ser simétricas. Esto permite realizar el almacenamiento de solo el triángulo superior más la diagonal ppal. Cada vez que se desea acceder a algún elemento que estuviera por debajo de dicha diagonal, se deberá recurrir al simétrico.

b) **Banda:** Antes de realizar el ensamblaje, se debe numerar los nodos de la estructura buscando siempre que en un mismo elemento, la diferencia en valor absoluto en la numeración de sus nodos sea la menor posible. La razón de esta precaución encuentra justificación al analizar la ubicación que se les da a los coeficientes de cada matriz individual en la global. Cuando la diferencia mencionada se agranda, entonces se agranda la dispersión, dentro de la matriz ensamblada, de los coeficientes k_{ij} con $i < j$, siendo i, j números globales de nodos. La agrupación de los coeficientes cerca de la diagonal ppal., será el resultado de una buena numeración y redundará en el beneficio de tener triángulos de ceros abajo y arriba de dicho agrupamiento que no requieren ser almacenados. Al número de columnas con números significativos, se lo llama semiancho de ban-

da (NHBW) y debe ser calculado antes de iniciar la resolución con la fórmula:

$$\text{Semi Ancho de banda (NHBW)} =$$

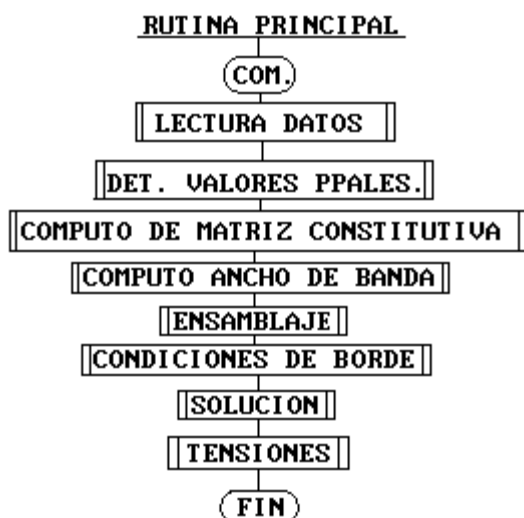
$$= (\text{MAX. DIFERENCIA. NUMERO. NODO DEL ELEMENTO} + 1) * \text{NDF}$$

Conocido el semiancho de banda, se puede almacenar ahora solo la porción simétrica excluyendo el conjunto de ceros agrupados creando una nueva matriz con NHBW columnas e igual cantidad de filas que la original. Un elemento de fila FIL y columna COL en la original, tendrá en la compactada (matriz banda):

$$\text{FILBAND} = \text{FIL} ; \quad \text{COLBAND} = \text{COL} - \text{FIL} + 1$$

$$\begin{array}{l} \text{Mat. original} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & 0 \\ 0 & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ 0 & 0 & 0 & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{array} \right] \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Mat. banda} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{55} & k_{56} & 0 \\ k_{66} & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \text{NHBW} \end{array}$$

5.1 SUBROUTINAS BASE PARA EL PROGRAMA EFEPET.EXE



5.1.1 RUTINA PRINCIPAL

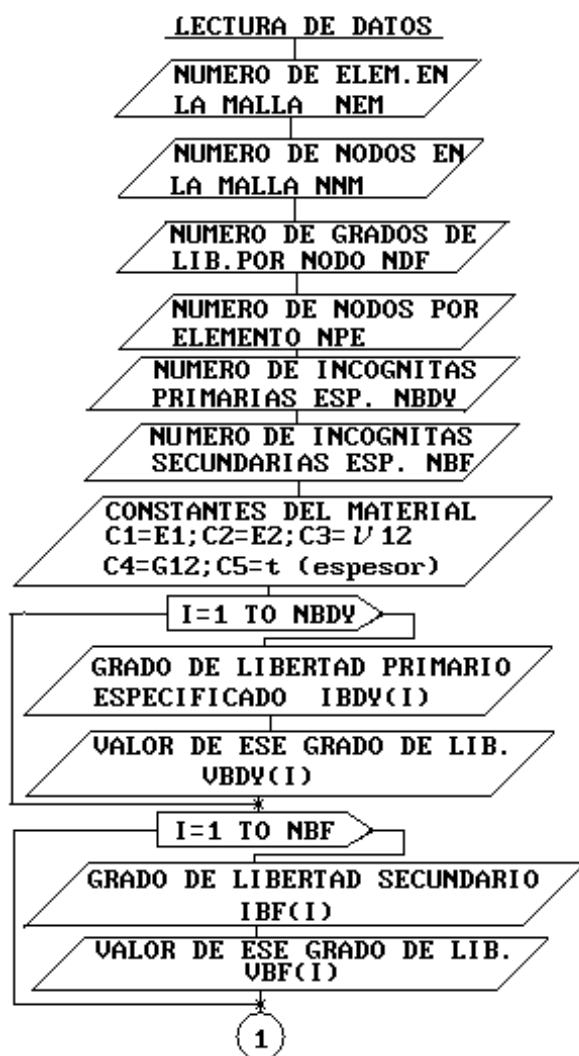
Se describe en la misma la estructura general del programa.

5.1.2 SUBROUTINA INGRESO DE DATOS Y VALORES PRINCIPALES

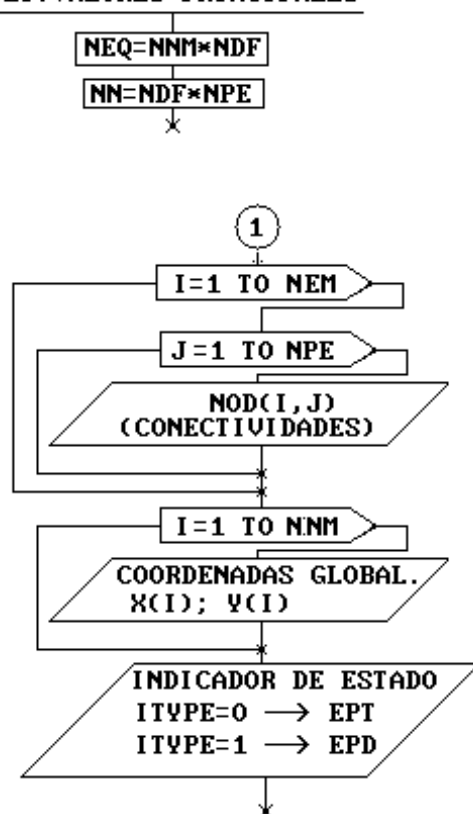
La entrada de datos se realiza por medio de archivos de texto ASCII tal como es usual cuando la programación se codifica en FORTRAN. Como usaremos BASIC, bien podría realizarse un ingreso interactivo pero la inclusión de cada coordenada nodal además de sus conectividades, torna de difícil control dicho ingreso y por ende aumenta el riesgo de error.

La nomenclatura usada es:

- a) **NEQ**: número de ecuaciones para el problema.
- b) **NDF**: N° de grados de libertad en c/nodo (aquí $n=2$).
- c) **NPE**: número de nodos por elemento (3 para nuestro problema).
- d) **NN**: número de grados de libertad por elemento.
- e) **NOD(I,J)** es la matriz de conectividades, donde la fila indica el número del elemento y la columna el número de local de nodo. Por ejemplo: **NOD(2,3)** es el número global que recibe el nodo 3 del elemento 2.
- f) **X(I),Y(I)** son coordenadas globales de nodos (I numeración global).



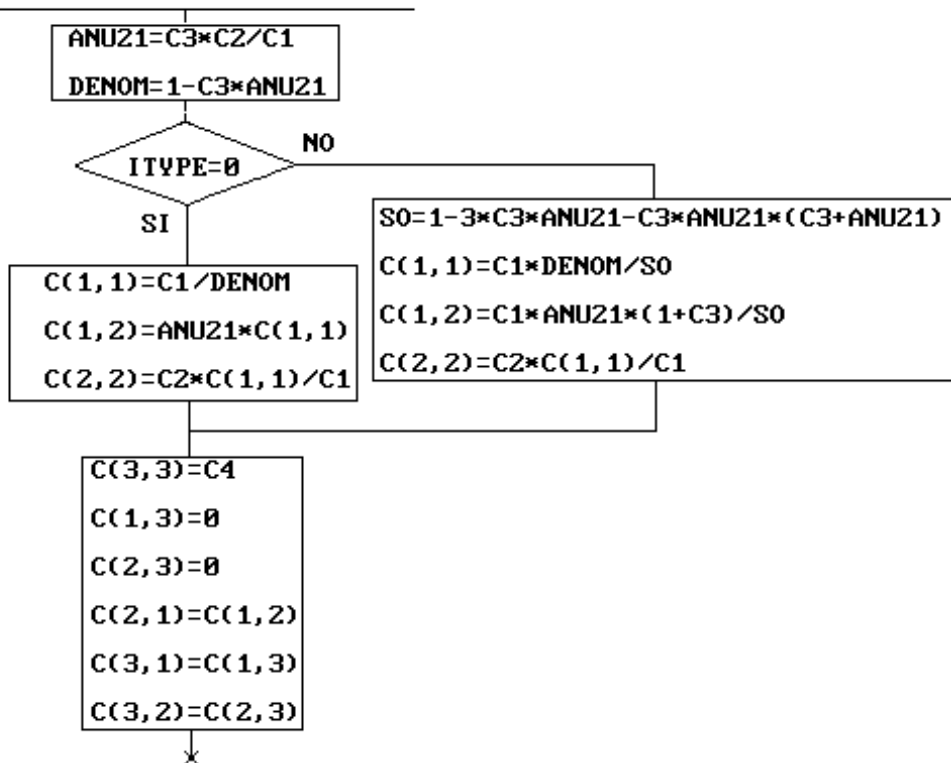
DET. VALORES PRINCIPALES



5.1.3 SUBROUTINA COMPUTO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES

Con esta rutina se calculan las relaciones entre tensiones y deformaciones. Cabe aclarar que no se ha incorporado la posibilidad de que existan en la malla elementos con constantes de material diferentes entre sí. Esto obligaría a recalcular para cada elemento la propia matriz constitutiva lo cual, si bien no es una gran complicación pues solo requeriría de un bucle sobre el total de elementos, se ha preferido evitar.

COMPUTO MATRIZ CONSTITUTIVA



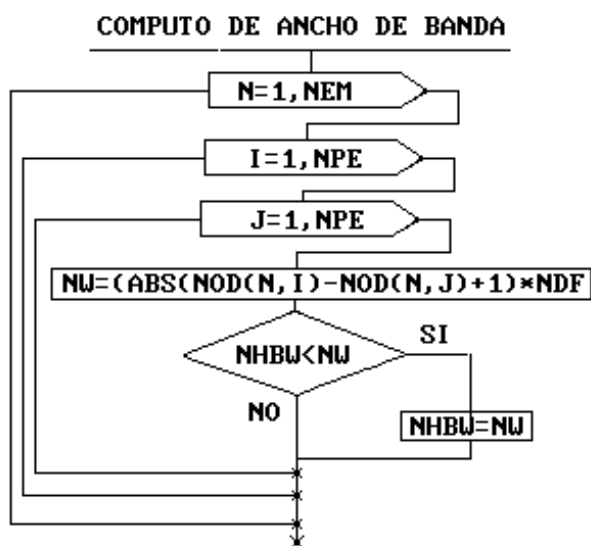
5.1.4 SUBROUTINA COMPUTO ANCHO BANDA

Como se ha mencionado, la matriz global resultará del tipo banda, es decir, con gran cantidad de ceros en los coeficientes alejados de la diagonal principal y con valores significativos en las proximidades de esta. El ancho de esta zona de valores significativos dependerá de la forma de numerar los nodos y por supuesto que será tanto más conveniente cuanto más angosta sea esta faja.

Además por propiedades energéticas (como se comentara oportunamente) presentará simetría respecto a la mencionada diagonal.

Lo anterior posibilita entonces, que podamos almacenar solamente una parte de esa matriz con lo que se lograría no solo una mayor velocidad de proceso al evitar algunas

operaciones repetitivas, sino que también y principalmente se consigue un ahorro sustancial de memoria con lo que pueden tratarse mayor cantidad de elementos con computadores más pequeños. En esta sección se muestra como calcular ese ancho de banda.



grados de libertad.

d) **NOD(I,J)**: Matriz de conectividades.

e) **NHBW**: Ancho de banda.

Las variables usadas son:

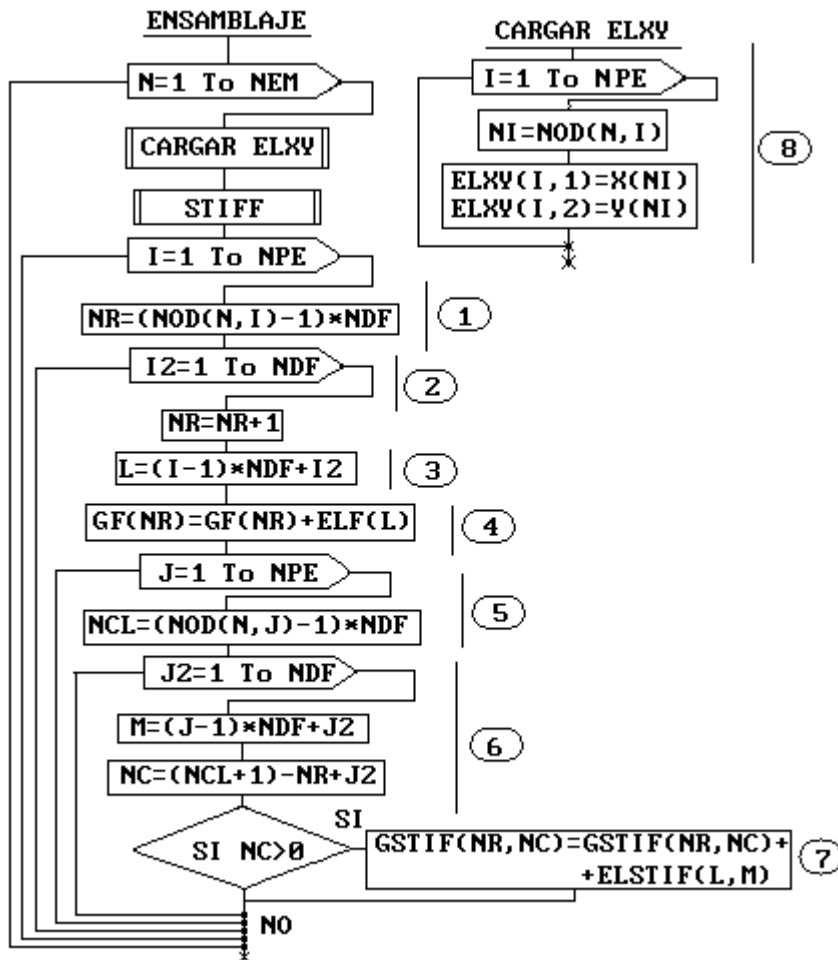
a) **NEM**: N° de elementos en la malla.

b) **NPE**: N° de nodos por elemento.

c) **NDF**: N° de

5.1.5 SUBROUTINA ENSAMBLAJE MATRIZ GLOBAL

A continuación se describe los pasos a seguir para realizar el ensamblado de la matriz total de la estructura. Esta en sí no sería de complejidad alguna si el almacenamiento fuera ordinario, sin embargo el hecho de pretender uno tipo banda incorpora ciertos cuidados en la elaboración de la rutina que se han destacado a partir de numeraciones en el diagrama. La matriz reducida será de NHBW columnas por NEQ filas.



En el diagrama de ensamblaje, el detalle de variables usadas es:

- a) NEM, NPE, NDF, NOD(I,J): Ídem anterior
- b) GF(I): Vector de variables secundarias especificadas más cargas de masa, ensamblado.
- c) ELF(I): Vector cargas de masa (Fuente en general).

- d) **NR**: Numero de línea en la matriz global.
- e) **NC**: Columna en la matriz global.
- f) **L**: Marca la fila de la matriz del elemento.
- g) **M**: Marca la columna de la matriz del elemento
- h) **ELXY(I,J)**: Indica, referido a un cierto elemento, la coordenada global del nodo I local ($I \leq 3$ para triángulo) en X si $J=1$, en Y si $J=2$
- i) **GSTIF(I,J)** y **ELSTIF(I,J)**: Son matrices de rigidez ensamblada y local respectivamente.

5.1.6 Indicaciones dentro del diagrama de ensamblaje

Antes de entrar en las marcas de referencia, se debe tener claro que la numeración local de nodos de un cierto elemento, va siempre de 1 a 3 para estos elementos. A su vez, a esos nodos les corresponde un número global dado por $NOD(I,J)$.

1) Aquí se inicia el bucle sobre cada nodo de cada elemento. Primero se determina la fila de la matriz global a la que irá el nodo I del elemento N. La fórmula permite considerar el grado de libertad que debemos agregar. Por ejemplo supongamos que el nodo 3 del elemento 5 tenga 8 de numeración global. Si el grado de libertad por nodo fuera 1, entonces todos los coeficientes de la matriz del elemento relacionados con el nodo 3 sumarían a la posición 8 de la global tanto el fila como en columna, según el caso. Ahora bien, como el grado $NDF=2$, entonces las posiciones a las que suma las da: $(8-1)*NDF+1$ ó 2 que es lo que indica NR.

2) Aquí se inicia el bucle sobre los grados de libertad de un cierto nodo, siempre para la determinación de las filas de la matriz global.

3) L indica el grado de libertad local en el elemento ($1 \leq L \leq 6$) pero aplicado a determinar la fila de la matriz local. Su formula es idéntica a la de NR.

4) Este paso permitiría agregar al vector de variables secundarias la influencia de las fuentes o cargas de masa. Aquí $ELF(L)=0$

5) Se inicia el bucle sobre los nodos pero para recorrer las columnas de las matrices locales y la ensamblada. Todo esto se hará para cada fila y respetando también los grados de libertad. NCL marca ahora lo que antes NR.

6) Este es el bucle sobre los grados de libertad de los nodos para las columnas. M es lo que antes L. Ahora bien, en el almacenamiento banda, las columnas son las encargadas de restringir la selección de ele-

mentos y no las filas. Por ello aparece en escena el NC y reemplaza al NCL. Este debe cumplir con el requisito de almacenar todo lo que este **en** y **por encima** de la diagonal principal lo que es controlado con la ecuación de NC. Este algoritmo, fue preparado para que de 1 si el elemento cae en la diag. ppal. y esto ocurre si $NCL+J2=NR$, entonces $NC=1+NCL+J2-NR$. Como consecuencia de lo anterior, este algoritmo rehubica a las columnas de manera que la última coincida con NHBW sirviéndose de la pregunta posterior para desechar todo lo que cae por debajo de la diagonal principal.

7) Debe prestarse atención al hecho que GSITF(I,J) tiene NHBW columnas y que la primer columna es la diagonal principal de la matriz global completa (fila y columna igual).

8) Rutina formadora de ELXY(I,J).

5.1.7 SUBROUTINA CONDICIONES DE BORDE

Al introducir las condiciones de borde, se debe tener en cuenta tanto a la incógnita primaria desplazamiento, como a la secundaria carga. Donde se restrinja una no podrá fijarse la otra. Además la dificultad se plantea por lo que los grados restringidos que

IBDY() e IBF() dan, pues marcan filas de la matriz ensamblada pero no columnas. El método usado para introducir las condiciones es el citado bajo (b-1) del apartado 3.1.2

En el diagrama de condiciones de borde, el detalle de variables usadas es:

a) GF(I), NHBW:

Ídem anterior

b) S(I): Equivale a GSTIF() del anterior (pasa como referencia).

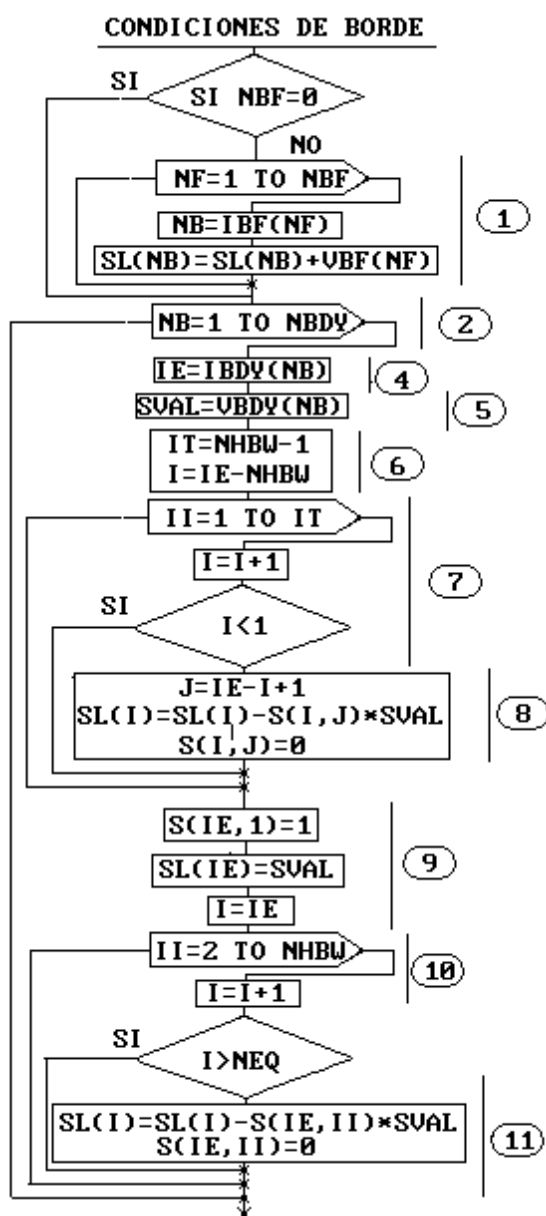
c) SL(I): Equivale a GF() (pasa como referencia).

d) NBF(I): N° de grados de libertad secundarios especificados.

e) VBF(I): Valor de los grados de libertad secundarios especificados.

f) IBF(I): Grado de libertad con especi. de variable secundaria.

g) NBDI(I): N° de grados de libertad primarios



especificados.

h) **IBDY(I)**: Grado de libertad con especi. de variable primaria.

i) **VBDY(I)**: Valor de los grados de libertad primarios especifi.

5.1.8 Indicaciones dentro del diagrama de condiciones de borde

1) En esta rutina se realiza un control de la existencia de cargas de borde o restricciones a la variable secundaria (ya que se podría tener solo condiciones de borde primarias). De haber dichas restricciones, el bucle se realiza sobre la cantidad de fuerzas especificadas y debe prestarse atención al hecho que **IBF()** devuelve fila de matriz global (determinado por el grado de libertad).

2) Aquí comienza el bucle sobre la cantidad de desplazamientos impedidos.

3) **IE** toma el valor del grado de libertad o línea de la matriz global

4) **SVAL** el valor de esa imposición (es cero para apoyos fijos).

5) Debe recordarse que como la matriz almacenada es banda, entonces aquel aceramiento de la columna correspondiente al grado de libertad restringido y aquella modificación de los términos independientes, deben hacerse en las líneas que están por encima de la correspondiente al grado de libertad y dentro del ancho de banda, debido a que las otras no fueron cargadas por estar bajo la diagonal ppal. o por ser cero, según el caso. Para salvar el problema nos valemos de la simetría de la matriz y con modificar los términos independientes que quedan tomando de base la línea correspondiente al grado restringido y luego acerarla (excepto el término que coincide con la diagonal ppal.) estaremos logrando la modificación buscada.

Todo lo comentado se logra con una combinación de variables. La cantidad de líneas a modificar es **IE-1**, pero como debo excluir aquellas que no estén en la banda, se usa la variable **I** que permite comenzar las modificaciones de los términos independientes a partir de los términos nulos de la matriz global original (en esencia los que están en la banda). La pregunta por **I<1** tiene su justificación cuando el grado de libertad a tratar es menor que el ancho de banda (cae en la parte incompleta superior de la banda)

6) El control se hará por bucle por medio de **II** y se usará la variable **IT** que limita la búsqueda al ancho de banda-1 (excluyo la diagonal princi-

pal). Además se agrega una pregunta que sirve para saltar iteraciones cuando la cantidad de filas a modificar es menor que el NHBW.

7) Este proceso engloba al algoritmo de conversión del N° de la columna en la matriz global original IE, al N° de la misma en la matriz reducida dado por J.

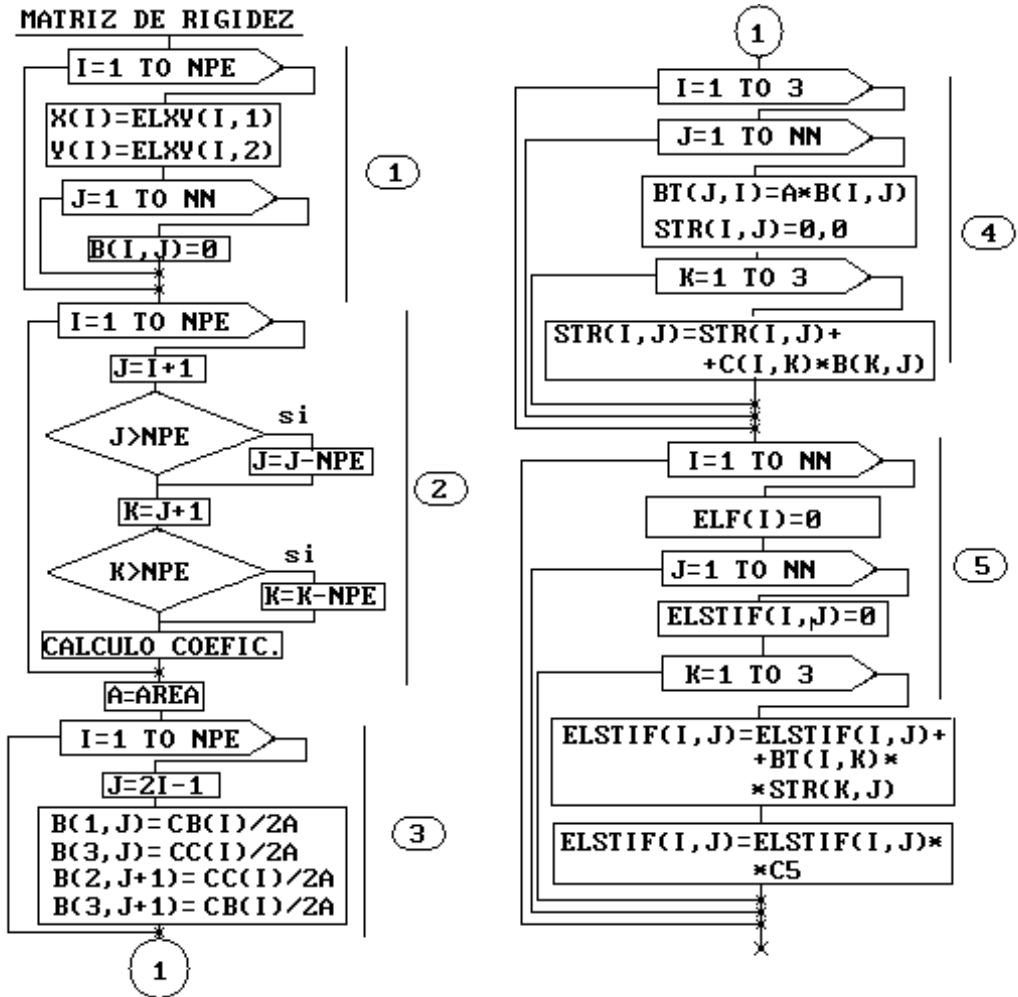
8) En este paso se introduce un 1 en el término de la diagonal principal que coincide con el grado de libertad que, para la matriz reducida, es la primer columna y la fila IE. También se modifica el término independiente correspondiente a IE igualándolo al desplazamiento impedido según lo indicado en el apartado.

9) Se inicia aquí el bucle que modificará aquellos términos independientes cuyas líneas tienen N° mayores que el grado restringido y que por lo tanto no están explícitos en la matriz reducida por estar bajo la diagonal Ppal. Entonces se hace uso de la simetría ya que, debido a ella, los términos de la línea coincidente con el grado de libertad restringido desde la columna 2 en adelante, son idénticos a los de la columna que corresponde al grado restringido por debajo de la diagonal y a su vez son justamente los que estamos buscando. Así que simplemente recorriendo la fila mencionada y controlando no superar el ancho de banda (ancho de la matriz reducida) controlado por II, ni el número de ecuaciones (esto es para cuando se cae en el triangulito inferior desperdiciado de la matriz reducida) lo cual lo regula I.

10) Finalmente se realiza se realiza la modificación de términos independientes y el acerado de la matriz global reducida donde corresponda.

5.1.9 SUBROUTINA MATRIZ DE RIGIDEZ

Debido al tipo de elemento usado, la matriz de rigidez es relativamente sencilla pues no es necesario recurrir a rutinas de integración numérica.



En el diagrama de la matriz de rigidez, el detalle de variables usadas es:

- a) NEM, NPE, NDF, NOD(I,J), ELXY(I,J), ELSTIF(I,J), ELF(I) :Ídem anteriores
- b) B(I,J): Matriz que contiene las derivadas de las funciones interpoladoras. Para este caso es Cte.
- c) BT(I,J): Matriz B () traspuesta.

- d) **CA(I)**: Coeficiente de la función de interpolación (a en la teoría).
- e) **CB(I)**: Coeficiente de la función de interpolación (b en la teoría).
- f) **CC(I)**: Coeficiente de la función de interpolación (c en la teoría).

5.1.10 Indicaciones dentro del diagrama matriz de rigidez

1) Bucle para tomar las coordenadas globales de cada nodo del elemento. Además, aprovechando que $NPE=3$, acerca la matriz $B()$ que es de tres filas x 6 columnas.

2) Este bucle se encarga de la evaluación de los tres coeficientes de las funciones de interpolación de todos los nodos, tomando como base las coordenadas nodales introducidas antes (no se explicito las ecuaciones de cada coeficiente).

3) Calculo de la matriz $B()$ la cual, como ya se comentó, es constante por el tipo de elemento usado y el tipo de problema. Se realiza solamente un bucle sobre los nodos, desplazando el puntero sobre las columnas de la matriz ya que las filas son tres sin depender del tipo de elemento (las filas dependen del problema abordado). Cabe solo aclarar que el número de columnas depende del grado de libertad ($NDF=2$) y este está considerado en el algoritmo de J.

4) El conjunto de bucles que ahora aparecen, sirven para realizar el producto entre la matriz constitutiva (la cual ya fue multiplicada por el espesor del elemento) y la matriz $B()$, además se realiza ya el producto por el área que resulta luego de integrar.

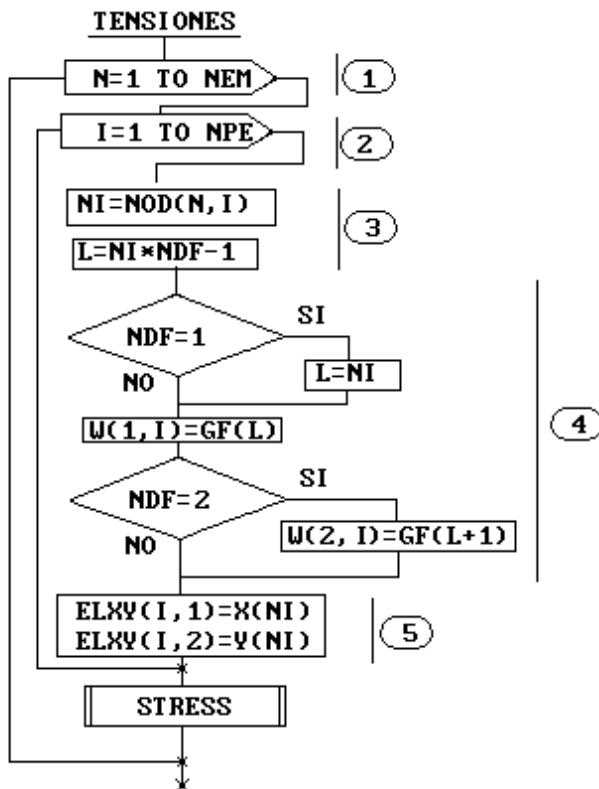
5) Semejante a los anteriores y termina el producto de matrices multiplicando $(D*B)$ por B^T cuyo resultado es almacenado en $ELSTIF()$. Para que esta ultima se ala matriz de rigidez del elemento, además es preciso realizar producto de la misma por el espesor.

5.1.11 SUBROUTINA SOLUCION

No se hará comentario alguno sobre esta subrutina por considerarla conocida a partir de cualquier curso de Métodos Numéricos.

5.1.12 SUBROUTINA TENSIONES

Se realiza en la presente rutina la evaluación de las tensiones en cada nodo de cada uno de los elementos. Existen ocasiones en que se prefiere evaluar tensiones en puntos internos del elemento debido a que generalmente obtendremos resultados diferentes tras evaluar el mismo nodo desde dos elementos diferentes contiguos.



En el diagrama de tensiones, el detalle de variables usadas es:

a) **NEM**,
NPE, **NDF**,
ELXY(I,J) Ídem
anteriores

b) **GF(I)** y
W(I,J): Vector y
matriz que con-
tienen el valor de
la incógnita pri-
maria calculada
en el modulo
anterior. Para W(
) , la I indica 1 o 2
según sea el
desplazamiento x
o y.

c) **BT(I,J)**:
Matriz B() tras-

puesta.

5.1.13 Indicaciones dentro del diagrama de tensiones

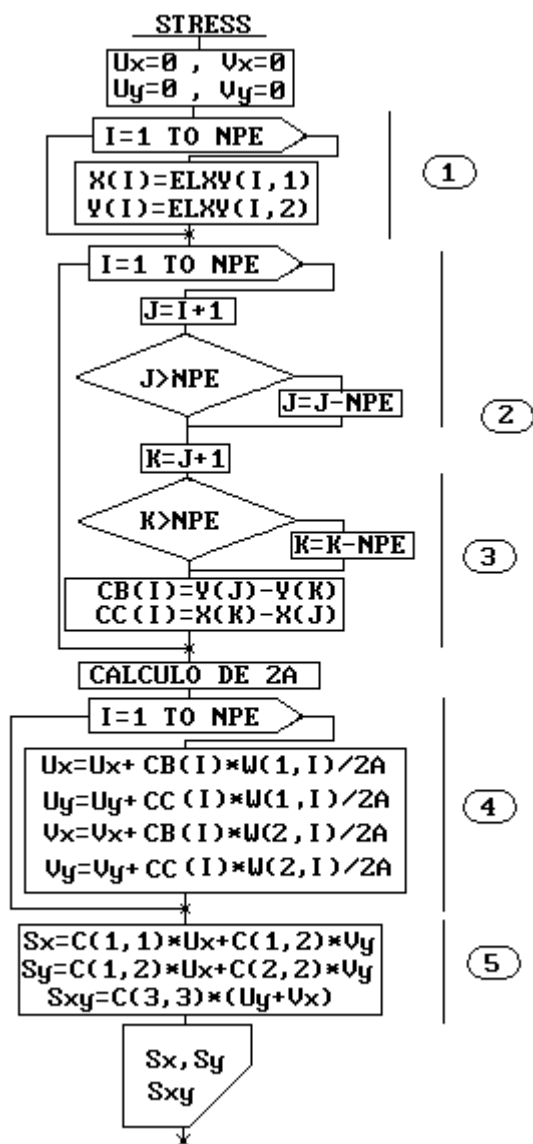
1) Este primer bucle es el que recorrerá las totalidad de los elementos, obteniendo las tensiones para cada nodo de los mismos al llamar a la subrutina STRESS que en definitiva realizará la tarea. Aquí podría intercarse alguna subrutina selectora que permita calcular las tensiones solo en algunos elementos según el operador los considere necesario.

2) Este bucle es el que recorre cada nodo de un cierto elemento realizando la tarea básica de cargar la matriz ELXY()(paso 5) para cada uno de ellos.

3) y 4) Se realizan procesos intermedios como la obtención de los grados de libertad global del nodo en cuestión y luego ir al vector solución a fin de utilizar el valor de la incógnita calculada coincidente con ese grado de libertad para almacenarla en $W()$.

5.1.14 SUBROUTINA STRESS

Este bloque determina para cada nodo de cada elemento, el valor de las tensiones pasando inicialmente por el cálculo de las deformaciones.



En el diagrama STRESS, el detalle de variables usadas es:

- a) **NPE**, **ELXY(I,J)**, **C(I,J)**, **CB(I)**, **CC(I)** Ídem anteriores
- b) **Ux**: Derivada del desplazamiento en x según x.
- c) **Uy**: Derivada del desplazamiento en x según y.
- d) **Vx**: Derivada del desplazamiento en y según x.
- e) **Vy**: Derivada del desplazamiento en y según y.
- f) **Sx**: Valor de la tensión según x (Normal).
- g) **Sy**: Valor de la tensión según y (Normal).
- h) **Sxy**: Valor de la tensión según x,y (Tangencial).

5.1.15 Indicaciones dentro del diagrama STRESS

1) Bucle que realiza una transferencia del valor del ELXY() hacia dos vectores para obtener de una forma más similar a teoría el valor de los coeficientes de las funciones de interpolación y el área.

2) Cálculo de los coeficientes de las funciones de interpolación para cada nodo del elemento. Se obvió el cálculo de $CA()$ debido a que solo usaremos las derivadas de dichas funciones y por lo tanto no se empleará el nombrado.

3) Se hace simplemente una aplicación de las fórmulas de teoría para la obtención de las deformaciones para cada nodo del elemento. Vemos que cada tensión es calculada con la influencia de solo un desplazamiento (el de ese nodo), esto es porque las mismas se calculan en los nodos y allí solo tiene incidencia la incógnita de ese nodo.

4) Por aplicación de la ley de HOOKE, obtenemos las tensiones.

5.2 CODIFICACION EN BASIC**5.2.1 RUTINA PRINCIPAL**

```

DECLARE SUB MSG2 (Dato$, E1!, E2!, Ancho!, Largo!)
DECLARE SUB ENSAMB (NEM!, NPE!, NDF!, BX!, BY!, NN!, C5!, NEQ!, NHBW!, GSTIF(), GF!())
DECLARE SUB LEEDATOS (C1!, C2!, C3!, C4!, C5!, BX!, BY!, ITYPE!, NEM!, NNM!, NPE!, NDF!)
DECLARE SUB CARATEXT ()
DECLARE SUB CARAGRAF ()
DECLARE SUB CARATULA ()
DECLARE SUB MSG1 (Dato$, E1!, E2!, Ancho!, Largo!, Resp$)
DECLARE SUB SIREN (HI%, LOW%)
DECLARE SUB SOLUCION (NDF!, NEQ!, NHBW!, GSITF(), GF!())
DECLARE SUB TENSION (NEM!, C5!, NPE!, NDF!, GF!())
DECLARE SUB BOUND (NEQ!, NDF!, NHBW!, S!(), SL!())
DECLARE SUB VALPRINC (NPE!, NDF!, NNM!, NEQ!, NN!)
DECLARE SUB MATCOEF (C!(), C1!, C2!, C3!, C4!, C5!, ITYPE!)
DECLARE SUB ANCHOBAN (NEM!, NPE!, NDF!, NOD!(), NHBW!)
COMMON NBDY, NBDS, NBF, NBDF, IBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(), VBDF(), X(), Y(),
NOD(), C()

```

```

ON ERROR GOTO RutinaError
COLOR 0, 7
CLS
CALL CARAGRAF
DIM C(3, 3)

```

```

CALL MSG2("LECTURA DE DATOS", 10, 22, 30, 4)
CALL LEEDATOS(C1, C2, C3, C4, C5, BX, BY, ITYPE, NEM, NNM, NPE, NDF)
CALL VALPRINC(NPE, NDF, NNM, NEQ, NN)
DIM GF(NEQ)
CALL MSG2("CALCULO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES", 10, 18, 38, 4)
CALL MATCOEF(C(), C1, C2, C3, C4, C5, ITYPE)
CALL ANCHOBAN(NEM, NPE, NDF, NOD(), NHBW)
DIM GSTIF(NEQ, NHBW)
CALL MSG2("MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA", 10, 18, 38, 4)
CALL ENSAMB(NEM, NPE, NDF, BX, BY, NN, C5, NEQ, NHBW, GSTIF(), GF())
CALL BOUND(NEQ, NDF, NHBW, GSTIF(), GF())
CALL MSG2("SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES", 10, 18, 38, 4)
CALL SOLUCION(NDF, NEQ, NHBW, GSTIF(), GF())
CALL MSG2("CALCULO DE DEFORMACIONES Y TENSIONES", 10, 17, 40, 4)
CALL TENSION(NEM, C5, NPE, NDF, GF())
CALL SIREN(500, 50)
CALL SIREN(2000, 200)
CALL MSG1("PROCESO TERMINADO. RESULTADOS EN FILE1.DAT !!!!!", 10, 14, 51, 4, Nulo$)
COLOR 7, 0
CLS
END

```

RutinaError:

```

IF ERR = 53 THEN 'OPEN SIN ARCHIVO EXISTENTE
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
CALL MSG1("ARCHIVO NO ENCONTRADO,DEBERA REINICIAR !!", 10, 18, 41, 4, Nulo$)
CLS

```

```
END
ELSEIF ERR = 62 THEN 'INPUT PAST EOF
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
CALL MSG1("DATOS MAL INTRODUCIDOS,DEBERA REINICIAR !", 10, 18, 41, 4, Nulo$)
CLS
END
ELSEIF ERR = 5 THEN 'ILEGAL FUNCTION CALL
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
SCREEN 0
CALL CARATEXT
RESUME NEXT
ELSEIF ERR = 200 THEN ' PARA SALIR SI NO ES EL ARCHIVO DE DATOS DE EFEPET.
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
CALL MSG1("ARCHIVO DE DATOS NO ES PARA EFEPET2 !!!!", 10, 18, 41, 4, Nulo$)
CLS
END
ELSEIF ERR = 210 THEN ' PARA SALIR SI EL SISTEMA ES MAL CONDICIONADO.
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
CALL MSG1("ABORTO DESDE TECLADO. SE REINICIALIZA EL PROGRAMA", 10, 14, 51, 4,
Nulo$)
CLS
END

ELSE 'OTRO ERROR
CALL SIREN(500, 10)
CALL SIREN(2000, 20)
CALL MSG1("HA OCURRIDO UN ERROR, SE REINICIALIZA EL PROGRAMA", 10, 14, 51, 4,
Nulo$)
CLS
END

END IF

SUB MARCO (E1, E2, Ancho, Largo)
COLOR 0, 7
LOCATE E1, E2, 0
PRINT CHR$(201);
PRINT STRING$(Ancho, "ë");
PRINT CHR$(187)
FOR I = (E1 + 1) TO (E1 + Largo - 1) 'raya vertical
LOCATE I, E2
PRINT CHR$(186)
LOCATE I, (E2 + Ancho + 1), 0
PRINT CHR$(186)
NEXT
COLOR 3, 7
FOR I = (E1 + 1) TO (E1 + Largo - 1) 'borra adentro
FOR J = E2 + 1 TO E2 + Ancho
LOCATE I, J
PRINT CHR$(32)
NEXT
NEXT
COLOR 0, 7
FOR I = E1 + 1 TO E1 + Largo + 1 'sombra vertical
LOCATE I, E2 + Ancho + 2
PRINT CHR$(178)
NEXT
FOR I = E2 + 1 TO E2 + Ancho + 2 'sombra horizontal
LOCATE E1 + Largo + 1, I
```



```
PRINT CHR$(178)
NEXT
```

```
COLOR 0, 7
LOCATE (E1 + Largo), E2, 0
PRINT CHR$(200);
PRINT STRING$(Ancho, "ë");
PRINT CHR$(188)
END SUB
```

```
SUB VALPRINC (NPE, NDF, NNM, NEQ, NN)
NEQ = NNM * NDF
NN = NDF * NPE
END SUB
```

5.2.2 RUTINA LECTORA DE DATOS

```
DECLARE SUB MSG1 (Dato$, E1!, E2!, Ancho!, Largo!, Resp$)
DECLARE SUB SIREN (HI%, LOW%)
COMMON SHARED NBDY, NBDS, NBF, NBDF, IBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(), VBDF(),
X(), Y(), NOD(), C()
SUB LEEDATOS (C1, C2, C3, C4, C5, BX, BY, ITYPE, NEM, NNM, NPE, NDF)
OPEN "DATOS.DAT" FOR INPUT AS #1
INPUT #1, VERIFICA$
IF VERIFICA$ = "EFEPET2" THEN
INPUT #1, TITULO$
INPUT #1, NEM, NNM, NDF, NPE
INPUT #1, NBDY, NBDS, NBF, NBDF
INPUT #1, C1, C2, C3, C4, C5
INPUT #1, BX, BY
DIM IBDY(NBDY)
DIM VBDY(NBDY)
DIM IBDS(NBDS)
DIM VBDS(NBDS)
DIM NOD(NEM, NPE)
DIM X(NNM)
DIM Y(NNM)
DIM IBF(NBF)
DIM VBF(NBF)
DIM VBDF(NBDF, 6)
'TOMA DE LOS GRADOS DE LIBERTAD PRIMARIOS RESTRINGIDOS
FOR I = 1 TO NBDY
INPUT #1, IBDY(I), VBDY(I)
NEXT

'TOMA DE LOS GRADOS DE LIBERTAD PRIMARIOS BAJO RESORTE
FOR I = 1 TO NBDS
INPUT #1, IBDS(I), VBDS(I)
NEXT

'TOMA DE LOS GRADOS DE LIBERTAD SECUNDARIOS CONCENTRADOS RESTRINGIDOS
FOR I = 1 TO NBF
INPUT #1, IBF(I), VBF(I)
NEXT
'TOMA CARGAS DISTRIBUIDAS ESPECIFICADOS Y NODOS
FOR I = 1 TO NBDF ' CANTIDAD DE CARGAS DISTRIBUIDAS
FOR J = 1 TO 6 ' RECORRE VALORES DE 1 CARGA EN X e Y ; Y LOS NODOS
INPUT #1, VBDF(I, J)
NEXT
NEXT
```

```
FOR I = 1 TO NEM
  FOR J = 1 TO NPE
    INPUT #1, NOD(I, J)
  NEXT
NEXT
FOR I = 1 TO NNM
  INPUT #1, X(I), Y(I)
NEXT
INPUT #1, ITYPE
CLOSE
  REM IMPRESION

OPEN "FILE1.DAT" FOR OUTPUT AS #1
PRINT #1, "** EJEMPLO.": TITULO$
WRITE #1,
PRINT #1, "** FECHA.": DATE$; TAB(50); "HORA.": TIME$

WRITE #1,
PRINT #1, "** ELEM. EN LA MALLA, NODOS EN LA MALLA, GRADO DE LIB., NODOS
  P/ELEM."
PRINT #1, "** NEM,NNM,NDF,NPE"
PRINT #1, "======"
WRITE #1, NEM, NNM, NDF, NPE

WRITE #1,
PRINT #1, "** N° ESPEC. PRIM., N°RESORTES, N° ESPEC. SECUN., N° ESPEC. SECUN.
  DISTR."
PRINT #1, "** NBDY,NBDS,NBF,NBDF"
PRINT #1, "======"
WRITE #1, NBDY, NBDS, NBF, NBDF

WRITE #1,
PRINT #1, "** COSTANTES E1,E2,NU,G12,ESPESOR."
PRINT #1, "** C1,C2,C3,C4,C5"
PRINT #1, "======"
WRITE #1, C1, C2, C3, C4, C5

WRITE #1,
PRINT #1, "** CARGAS DE MASA EN X E Y."
PRINT #1, "======"
WRITE #1, BX, BY

WRITE #1,
PRINT #1, "** GRADO DE LIB. PRIMARIO ESPECIFICADO Y VALOR DE ESE ° DE LIB."
PRINT #1, "** IBDY , VBDY"
PRINT #1, "======"
FOR I = 1 TO NBDY
  WRITE #1, IBDY(I), VBDY(I)
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** GRADO DE LIB. PRIM. RESTRINGIDO POR RESORTE Y CONSTANTE DE
  RESORTE."
PRINT #1, "** IBDS , VBDS"
PRINT #1, "======"
FOR I = 1 TO NBDS
  WRITE #1, IBDS(I), VBDS(I)
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** GRADOS DE LIB. SECUNDARIO CONCENTRADO ESPECIF. Y VALOR DEL
```

```

        MISMO"
PRINT #1, "** IBF , VBF"
PRINT #1, "======"
FOR I = 1 TO NBF
    WRITE #1, IBF(I), VBF(I)
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** CARGAS DISTRIBUIDAS ESPECIFICADOS Y NODOS"
PRINT #1, "** q1X, q1Y, N1, q2X, q2Y, N2"
PRINT #1, "======"
FOR I = 1 TO NBDF
    FOR J = 1 TO 6
        PRINT #1, VBDF(I, J);
    NEXT
WRITE #1,
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** CONECTIVIDADES"
PRINT #1, "======"
FOR I = 1 TO NEM
    WRITE #1, NOD(I, 1), NOD(I, 2), NOD(I, 3)
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** COORDENADAS"
PRINT #1, "NUMERO DE NODO"; TAB(20); "COORD. X "; TAB(40); "COORD. Y"
PRINT #1, STRING$(50, "=")
FOR I = 1 TO NNM
    PRINT #1, I; TAB(20); X(I); TAB(40); Y(I)
NEXT

WRITE #1,
PRINT #1, "** TIPO DE ANALISIS: ITYPE: 0=EST. PLANO TENS.; 1=EST. PLANO DEF."
WRITE #1, ITYPE
CLOSE
ELSE
    ERROR 200 ' CODIGO DE ERROR SIMULADO PARA SALIR
END IF
END SUB

```

5.2.3 RUTINA MATRIZ DE COEFICIENTES

```

SUB MATCOEF (C(), C1, C2, C3, C4, C5, ITYPE)

ANU21 = C3 * C2 / C1
DENOM = 1 - C3 * ANU21
IF ITYPE = 0 THEN
    REM EPT
    C(1, 1) = C1 / DENOM
    C(1, 2) = ANU21 * C(1, 1)
    C(2, 2) = C2 * C(1, 1) / C1
ELSE
    REM EPD
    S0 = (1 - 3 * C3 * ANU21 - C3 * ANU21 * (C3 + ANU21))
    C(1, 1) = C1 * DENOM / S0
    C(1, 2) = C1 * ANU21 * (1 + C3) / S0
    C(2, 2) = C2 * C(1, 1) / C1
END IF

```

CAPITULO 5

```
C(3, 3) = C4  
C(1, 3) = 0: C(2, 3) = 0  
C(2, 1) = C(1, 2): C(3, 1) = C(1, 3): C(3, 2) = C(2, 3)
```

```
END SUB
```

5.2.4 RUTINA DE ANCHO DE BANDA

```
SUB ANCHOBAN (NEM, NPE, NDF, NOD(), NHBW)  
  NHBW = 0  
  FOR N = 1 TO NEM  
    FOR I = 1 TO NPE  
      FOR J = 1 TO NPE  
        NW = (ABS(NOD(N, I) - NOD(N, J)) + 1) * NDF  
        IF NHBW < NW THEN  
          NHBW = NW  
        END IF  
      NEXT J  
    NEXT I  
  NEXT N  
END SUB
```

5.2.5 RUTINA DE ENSAMBLAJE

```
DECLARE SUB STIFF (NPE!, ELXY!(), NN!, BX!, BY!, C5!, C!(), ELSTIF!(), ELF!())  
DECLARE SUB IMPRSTIF (NN!, ELSTIF!())  
DECLARE SUB VELXY (NPE!, N!, NOD!(), X!(), Y!(), ELXY!())  
COMMON SHARED NBDY, NBDS, NBF, NBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(), VBDF(),  
X(), Y(), NOD(), C()  
SUB ENSAMB (NEM, NPE, NDF, BX, BY, NN, C5, NEQ, NHBW, GSTIF(), GF())  
  DIM ELSTIF(NN, NN)  
  DIM ELF(NN)  
  DIM ELXY(NPE, 2)
```

```
  FOR N = 1 TO NEM  
    CALL VELXY(NPE, N, NOD(), X(), Y(), ELXY())  
    CALL STIFF(NPE, ELXY(), NN, BX, BY, C5, C(), ELSTIF(), ELF())  
    FOR I = 1 TO NPE  
      NR = (NOD(N, I) - 1) * NDF  
      FOR I2 = 1 TO NDF  
        NR = NR + 1  
        L = (I - 1) * NDF + I2  
        GF(NR) = GF(NR) + ELF(L)  
        FOR J = 1 TO NPE  
          NCL = (NOD(N, J) - 1) * NDF  
          FOR J2 = 1 TO NDF  
            M = (J - 1) * NDF + J2  
            NC = NCL - NR + J2 + 1  
            IF NC > 0 THEN  
              GSTIF(NR, NC) = GSTIF(NR, NC) + ELSTIF(L, M)  
            END IF  
          NEXT J2  
        NEXT J  
      NEXT I2  
    NEXT I  
  NEXT N  
END SUB
```

```
END SUB

SUB VELXY (NPE, N, NOD(), X(), Y(), ELXY())
  FOR I = 1 TO NPE
    NI = NOD(N, I)
    ELXY(I, 1) = X(NI)
    ELXY(I, 2) = Y(NI)
  NEXT
END SUB
```

5.2.6 RUTINA MATRIZ DE RIGIDEZ

```
SUB STIFF (NPE, ELXY(), NN, BX, BY, C5, C(), ELSTIF(), ELF())
  DIM X(NPE)
  DIM Y(NPE)
  DIM B(3, NN)
  DIM STR(3, NN)
  DIM CA(NPE)
  DIM CB(NPE)
  DIM CC(NPE)
  DIM BT(NN, 3)
  FOR I = 1 TO NPE
    X(I) = ELXY(I, 1)
    Y(I) = ELXY(I, 2)
    FOR J = 1 TO NN
      B(I, J) = 0
    NEXT
  NEXT
  J = 0
  FOR I = 1 TO NPE
    J = I + 1
    IF J > NPE THEN J = J - NPE
    K = J + 1
    IF K > NPE THEN K = K - NPE
    CA(I) = X(J) * Y(K) - X(K) * Y(J)
    CB(I) = Y(J) - Y(K)
    CC(I) = X(K) - X(J)
  NEXT
  DET = X(1) * (Y(2) - Y(3)) + X(2) * (Y(3) - Y(1)) + X(3) *
    (Y(1) - Y(2))
  FOR I = 1 TO NPE
    J = 2 * I - 1

    B(1, J) = CB(I) / DET
    B(3, J) = CC(I) / DET
    B(2, J + 1) = CC(I) / DET
    B(3, J + 1) = CB(I) / DET
  NEXT
  FOR I = 1 TO 3
    FOR J = 1 TO NN
      BT(J, I) = .5 * DET * B(I, J)
      STR(I, J) = 0
      FOR K = 1 TO 3
        STR(I, J) = STR(I, J) + C(I, K) * B(K, J)
      NEXT
    NEXT
  NEXT
  FOR I = 1 TO NN
```

```
FOR J = 1 TO NN
  ELSTIF(I, J) = 0
  FOR K = 1 TO 3
    ELSTIF(I, J) = ELSTIF(I, J) + BT(I, K) * STR(K, J)
  NEXT
  ELSTIF(I, J) = ELSTIF(I, J) * C5
NEXT
NEXT

'TOMA CARGAS DE MASA
IF BX <> 0 OR BY <> 0 THEN
  NDF = NN / NPE
  FOR I = 1 TO NPE
    DF = (I - 1) * NDF + 1
    ELF(DF) = BX * DET / 2 * 1 / 3
    IF NDF <> 1 THEN ' P/QUE NO SOBREPASE LA DIMENSION DE ELF SI NDF=1
      ELF(DF + 1) = BY * DET / 2 * 1 / 3
    END IF
  NEXT
END IF
END SUB
```

5.2.7 RUTINA DE CONDICIONES DE BORDE

```
COMMON SHARED NBDY, NBDS, NBF, NBDF, IBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(), VBDF(),
X(), Y(), NOD(), C()
SUB BOUND (NEQ, NDF, NHBW, S(), SL())
'TOMA CARGAS CONCENTRADAS
IF NBF <> 0 THEN
  FOR NF = 1 TO NBF
    NB = IBF(NF)
    SL(NB) = SL(NB) + VBF(NF)
  NEXT
END IF

'TOMA CARGAS DISTRIBUIDAS
IF NBDF <> 0 THEN
  FOR IDF = 1 TO NBDF
    BL = ((X(VBDF(IDF, 6)) - X(VBDF(IDF, 3))) ^ 2 +
      (Y(VBDF(IDF, 6)) - Y(VBDF(IDF, 3))) ^ 2) ^ (1 / 2)
    FOR I = 1 TO 2 'bucle sobre los nodos que definen la carga.
      DF1 = ((VBDF(IDF, 3 * I) - 1) * NDF) + 1
      DF2 = ((VBDF(IDF, 3 * I) - 1) * NDF) + 2
      SL(DF1) = SL(DF1) + (2 / 6 * 1 / I * VBDF(IDF, 1) + 1
        / 6 * I * VBDF(IDF, 4)) * BL
      IF NDF <> 1 THEN
        SL(DF2) = SL(DF2) + (2 / 6 * 1 / I * VBDF(IDF, 2) +
          1 / 6 * I * VBDF(IDF, 5)) * BL
      END IF
    NEXT
  NEXT
END IF

'MODIFICA LA MATRIZ SEGUN LOS GRADOS PRIMARIOS RESTRINGIDOS
FOR NB = 1 TO NBDY
  IE = IBDY(NB)
  SVAL = VBDY(NB)
  IT = NHBW - 1
  I = IE - NHBW
```

```

FOR II = 1 TO IT
  I = I + 1
  IF I < 1 THEN
    ELSE
      J = IE - I + 1
      SL(I) = SL(I) - S(I, J) * SVAL
      S(I, J) = 0
    END IF
  NEXT
  S(IE, 1) = 1
  SL(IE) = SVAL
  I = IE
  FOR II = 2 TO NHBW
    I = I + 1
    IF I > NEQ THEN
      ELSE
        SL(I) = SL(I) - S(IE, II) * SVAL
        S(IE, II) = 0
      END IF
    NEXT
  NEXT
'MODIFICA LA MATRIZ SEGUN LOS RESORTES
FOR NS = 1 TO NBDS
  IE = IBDS(NS)
  KSTRING = VBDS(NS)
  S(IE, 1) = S(IE, 1) + KSTRING
NEXT
END SUB

```

5.2.8 RUTINA DE SOLUCION SISTEMA

```

DECLARE SUB MSG1 (Dato$, E1!, E2!, Ancho!, Largo!, Resp$)
DECLARE SUB Siren (HI%, LOW%)
COMMON SHARED NBDY, NBDS, NBF, NBDF, IBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(), VBDF(),
X(), Y(), NOD(), C()
SUB SOLUCION (NDF, NEQ, NHBW, GSTIF(), GF())
  IRES = 0
  'MODIFICACION DE GSTIF
  MEQ = NEQ - 1
  IF IRES <= 0 THEN
    FOR NPIV = 1 TO MEQ
      NPIVOT = NPIV + 1
      LSTSUB = NPIV + NHBW - 1
      IF LSTSUB > NEQ THEN LSTSUB = NEQ
      FOR NROW = NPIVOT TO LSTSUB
        'INVIERTE FILA Y COLUMNA PARA EL FACTOR-COLUMNA
        NCOL = NROW - NPIV + 1
        FACTOR = GSTIF(NPIV, NCOL) / GSTIF(NPIV, 1)
        'TRIANGULA LA MATRIZ
        FOR NCOL = NROW TO LSTSUB
          ICOL = NCOL - NROW + 1
          JCOL = NCOL - NPIV + 1
          GSTIF(NROW, ICOL) = GSTIF(NROW, ICOL) - FACTOR *
            GSTIF(NPIV, JCOL)
        NEXT
        'MODIFICA EL VECTOR CARGA
        GF(NROW) = GF(NROW) - FACTOR * GF(NPIV)
      NEXT
    NEXT
  ELSE

```

```
'PARA CUANDO CAMBIA SOLO EL VECTOR CARGA.
FOR NPIV = 1 TO MEQ
  NPIVOT = NPIV + 1
  LSTSUB = NPIV + NHBW - 1
  IF LSTSUB > NEQ THEN LSTSUB = NEQ
  FOR NROW = NPIVOT TO LSTSUB
    NCOL = NROW - NPIV + 1
    FACTOR = GSTIF(NPIV, NCOL) / GSTIF(NPIV, 1)
    GF(NROW) = GF(NROW) - FACTOR * GF(NPIV)
  NEXT
NEXT
END IF

'EVALUACION DEL CONDICIONAMIENTO DEL SISTEMA
'1) BUSQUEDA DEL ELEMENTO MENOR Y MAYOR DE LA DIAGONAL DE
  LA MATRIZ TRIANGULARIZADA
BIG = 0
SMALL = ABS(GSTIF(1, 1)) * 100000
FOR I = 1 TO NEQ
  SEARCH$ = "YES"
  FOR J = 1 TO NBDY
    IF I = IBDY(J) THEN
      SEARCH$ = "NO"
      EXIT FOR
    END IF
  NEXT
  IF SEARCH$ = "YES" THEN
    IF ABS(GSTIF(I, 1)) < SMALL THEN
      SMALL = ABS(GSTIF(I, 1))
    END IF
    IF ABS(GSTIF(I, 1)) > BIG THEN
      BIG = ABS(GSTIF(I, 1))
    END IF
  END IF
NEXT

'2) VERIFICACION QUE EL MENOR NO SEA 10000 VECES MAS CHICO
  QUE EL MAYOR
SIST$ = "BC"
IF BIG / SMALL > 10000 THEN
  SIST$ = "MC"
END IF

'RETROSUSTITUCION
FOR IJK = 2 TO NEQ
  NPIV = NEQ - IJK + 2
  GF(NPIV) = GF(NPIV) / GSTIF(NPIV, 1)
  LSTSUB = NPIV - NHBW + 1
  IF LSTSUB < 1 THEN LSTSUB = 1
  NPIVOT = NPIV - 1
  FOR JKI = LSTSUB TO NPIVOT
    NROW = NPIVOT - JKI + LSTSUB
    NCOL = NPIV - NROW + 1
    FACTOR = GSTIF(NROW, NCOL)
    GF(NROW) = GF(NROW) - FACTOR * GF(NPIV)
  NEXT
NEXT
GF(1) = GF(1) / GSTIF(1, 1)

'IMPRESION
OPEN "FILE1.DAT" FOR APPEND AS #1

IF SIST$ = "MC" THEN
```



```
FOR I = 1 TO 4
  CALL Siren(600, 10)
  CALL Siren(1000, 200)
NEXT
CALL MSG1("SISTEMA MAL CONDICIONADO !! (<C>
  P/CONTINUAR)", 11, 13, 57, 4, Resp$)
CLS
PRINT #1,
PRINT #1, STRING$(70, "=")
FOR I = 1 TO 7
  PRINT #1, "ATENCION!!";
NEXT
PRINT #1,
PRINT #1, STRING$(70, "=")
PRINT #1, "EL SISTEMA RESULTA MAL CONDICIONADO!!!"
PRINT #1, "PUEDE DEBERSE A MALA COLOCACION DE VINCULO O
  FALTA DE ELLOS."
PRINT #1, STRING$(70, "=")
FOR I = 1 TO 7
  PRINT #1, "ATENCION!!";
NEXT
PRINT #1,
PRINT #1, STRING$(70, "=")
IF Resp$ <> "C" THEN ERROR 210

END IF
WRITE #1,
PRINT #1, "** VALORES DE LOS DESPLAZAMIENTOS"
WRITE #1,
PRINT #1, "NODO GLOBAL"; TAB(20); "DESPLAZ. X"; TAB(40); "DESPLAZ. Y"
PRINT #1, STRING$(60, "=")
FOR I = 1 TO NEQ / NDF
  PRINT #1,
  PRINT #1, I;
  FOR J = 1 TO NDF
    PRINT #1, TAB(20 * J);
    PRINT #1, GF((I - 1) * NDF + J);
  NEXT
NEXT
CLOSE
END SUB
```

5.2.9 RUTINA DE TENSIONES

```
DECLARE SUB STRESS (NPE!, C5!, N!, ELXY!(), W!())
COMMON NBDY, NBDS, NBF, NBDY(), IBDS(), IBF(), VBDY(), VBDS(), VBF(),
  VBDF(), X(), Y(), NOD(), C()
SUB STRESS (NPE, C5, N, ELXY(), W())
  SHARED NOD(), C() 'POR QUE NO QUIERO COMPARTIR EL X() Y EL
    Y()
  DIM X(NPE)
  DIM Y(NPE)
  DIM CB(NPE)
  DIM CC(NPE)

  Ux = 0
  Uy = 0
  Vx = 0
  Vy = 0
```

CAPITULO 5

```
FOR I = 1 TO NPE
  X(I) = ELXY(I, 1)
  Y(I) = ELXY(I, 2)
NEXT
FOR I = 1 TO NPE
  J = I + 1
  IF J > NPE THEN J = J - NPE
  K = J + 1
  IF K > NPE THEN K = K - NPE
  CB(I) = Y(J) - Y(K)
  CC(I) = X(K) - X(J)
NEXT
DET = X(1) * (Y(2) - Y(3)) + X(2) * (Y(3) - Y(1)) + X(3) * (Y(1) - Y(2))
FOR I = 1 TO NPE
  Ux = Ux + CB(I) * W(1, I) / DET
  Uy = Uy + CC(I) * W(1, I) / DET
  Vx = Vx + CB(I) * W(2, I) / DET
  Vy = Vy + CC(I) * W(2, I) / DET
NEXT
SX = C(1, 1) * Ux + C(1, 2) * Vy
SY = C(2, 1) * Ux + C(2, 2) * Vy
SXY = C(3, 3) * (Uy + Vx)

'IMPRESION EN ARCHIVO SALIDA
PRINT #1, N; TAB(17); SX; TAB(34); SY; TAB(51); SXY

END SUB

SUB TENSION (NEM, C5, NPE, NDF, GF())
  SHARED X(), Y(), C(), NOD()
  DIM W(NDF, NPE)
  DIM ELXY(NPE, 2)
  OPEN "FILE1.DAT" FOR APPEND AS #1
  WRITE #1,
  PRINT #1,
  PRINT #1, "** VALORES DE LAS TENSIONES"
  WRITE #1,
  PRINT #1, "ELEMENTO"; TAB(18); "SIGMA X"; TAB(35); "SIGMA Y"; TAB(52); "TAO XY"
  PRINT #1, STRING$(65, "=")
  FOR N = 1 TO NEM
    FOR I = 1 TO NPE
      NI = NOD(N, I)
      L = NI * NDF - 1
      IF NDF = 1 THEN L = NI
      W(1, I) = GF(L)
      IF NDF = 2 THEN W(2, I) = GF(L + 1)
      ELXY(I, 1) = X(NI)
      ELXY(I, 2) = Y(NI)
    NEXT
    CALL STRESS(NPE, C5, N, ELXY(), W())
  NEXT
  CLOSE #1
END SUB
```

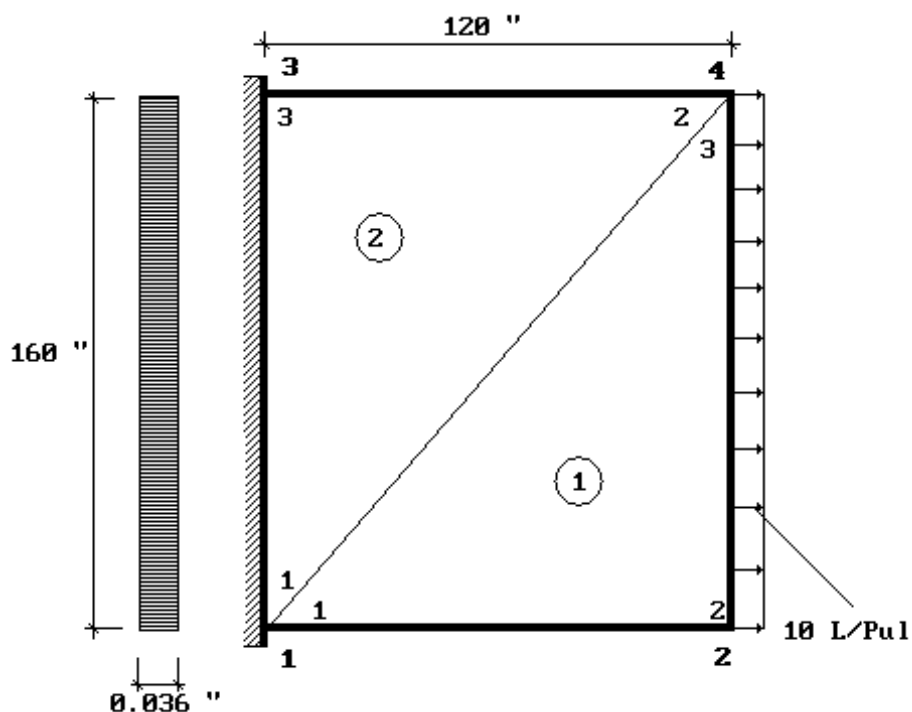
5.3 EJEMPLO RESUELTO CON PROGRAMA EFEPET.EXE

5.3.1 ENTRADA DE DATOS: ARCHIVO DATOS.DAT

El ejemplo de la figura consiste en una pieza traccionada cuyas características están indicadas en el archivo de salida denominado FILE1.DAT que se adjunta. La entrada de datos se realiza como se indica inmediatamente debajo y en el archivo DATOS.DAT

Para verificar resultados, se optó por un ejemplo tomado del libro AN INTRODUCTION TO THE FINITE ELEMENT METHOD de REDDY.

EFEPET2.....	° <u>Referencias:</u>
EJEMPLO 4.8 - REDDY PAG.274-353 Y 361	°
2,4,2,3	° NEM, NNM, NDF, NPE.
4,0,0,1	° NBDY,NBDS,NBF,NBDF
3000,3000,0.25,1200,0.036	° E ₁ ,E ₂ ,NU,G
0,0	° Cargas de masa Gx,Gy
1,0	° Grado de libertad primario restrin-
gido	
2,0	° y valor de esa restricción.
5,0	°
6,0	°
10,0,2,10,0,4	° CD: Qx,Qy,Nodo1,Qx,Qy,Nodo2.
1,2,4	° Conectividades: 1 linea por cada
1,4,3	° elemento.
0,0	° Coordenadas nodales: 1 linea por
120,0	° cada nodo.
0,160	°
120,160	°
0	° Tipo de analisis: 0, EPT y 1, EPD.



Aclaración:

1) Las referencias a un costado de la entrada de datos y las líneas de puntos, **NO** deben incluirse a la hora de confeccionar DATOS.DAT con un editor de líneas.

2) **NBDS:** número de apoyos con resortes.

NBDF: número de cargas distribuidas.

CD: descripción de cada carga distribuidas.

5.3.2 SALIDA DE RESULTADOS: ARCHIVO FILE1.DAT

* EJEMPLO:EJEMPLO REDDY

* FECHA:02-14-1994

HORA:19:02:41

* ELEM. EN LA MALLA, NODOS EN LA MALLA, GRADO DE LIB., NODOS P/ELEM.

* NEM,NNM,NDF,NPE

=====
2,4,2,3

* N° ESPEC. PRIM., N°RESORTES, N° ESPEC. SECUN., N° ESPEC. SECUN. DISTR.

* NBDY,NBDS,NBF,NBDF

=====
4,0,0,1

* COSTANTES E1,E2,NU,G12,ESPESOR.

* C1,C2,C3,C4,C5

=====
3000,3000,.25,1200,.036

* CARGAS DE MASA EN X E Y.

=====
0,0

* GRADO DE LIB. PRIMARIO ESPECIFICADO Y VALOR DE ESE ° DE LIB.

* IBDY , VBDY

=====
1,0
2,0
5,0
6,0

* GRADO DE LIB. PRIM. RESTRINGIDO POR RESORTE Y CONSTANTE DE RESORTE.

* IBDS , VBDS

=====

* GRADOS DE LIB. SECUNDARIO CONCENTRADO ESPECIF. Y VALOR DEL MISMO

* IBF , VBF

=====

* CARGAS DISTRIBUIDAS ESPECIFICADOS Y NODOS

* q1X, q1Y, N1, q2X, q2Y, N2

=====
10 0 2 10 0 4

* CONECTIVIDADES

=====
1,2,4
1,4,3

* COORDENADAS

NUMERO DE NODO COORD. X COORD. Y

=====

CAPITULO 5

1	0	0
2	120	0
3	0	160
4	120	160

* TIPO DE ANALISIS: ITYPE: 0=EST. PLANO TENS.; 1=EST. PLANO DEF.
0

* VALORES DE LOS DESPLAZAMIENTOS

NODO GLOBAL	DESPLAZ. X	DESPLAZ. Y
=====	=====	=====
1	0	0
2	11.29111	1.963671
3	0	0
4	10.11291	-1.08002

* VALORES DE LAS TENSIONES

ELEMENTO	SIGMA X	SIGMA Y	TAO XY
=====	=====	=====	=====
1	285.8779	14.40027	10.8002
2	269.6776	67.41941	-10.8002

6. BIBLIOGRAFIA

- 1** - AN INTRODUCTION TO DE FINITE ELEMENT METHOD. - J.N.REDDY - Mc.Graw Hill
- 2** - ELEMENTOS FINITOS. - R.K.LIVESLEY - Editorial Limusa.
- 3** - FINITE ELEMENT PROGRAMMING. - HINTON and OWEN - Academic Press.
- 4** - CALCULO DE ESTRUCTURAS. - ARGUELLES ALVAREZ - Publicación Universitaria.
- 5** - PAPER SOBRE ESTADO PLANO. CAPITULO 3. - C. BREBBIA.
- 6** - INTRODUCCION AL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS. - ARMANDO AWRUCH.- Fac.Ing. UNNE.
- 7** - FORTRAN PARA INGENIERIA. - SCHICK and MERZ - Mc.Graw Hill
- 8** - THE FINITE ELEMENT METHOD 3ra EDICION. - ZIENKIEWICZ, OC - Mc.Graw Hill
- 9** - THEORY OF ELASTICITY. - TIMOSHENKO and GOODIER - Mc.Graw Hill
- 10**- FUNDAMENTOS DE LA ELASTICIDAD Y SU PROGRAMACION POR ELEMENTOS FINITOS - ARGUELLES ALVAREZ - Bellisco Madrid.
- 11**- METODOS NUMERICOS PARA INGENIEROS - CHAPRA y CANALE - Mc.Graw Hill
- 12**- MICROCOMPUTEERS IN NUMERICAL ANALYSIS - LINDFIELD and PENNY - Ellis Horwood Limited.

7. TABLA DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCION	1
1.1 DEFINICION	2
1.2 PASOS A SEGUIR EN LA APLICACION DEL MEF	5
1.3 TIPOS DE ELEMENTOS	7
2. APLICACION DEL MEF AL ESTADO PLANO	9
2.1 PLANTEO GENERAL DEL MEF PARA MODELO COMPATIBLE	9
2.2 BREVES CONCEPTOS SOBRE DISCRETIZACION DEL CONTINUO	12
2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO TRIANGULO LINEAL	13
2.4 MODELADO DEL DESPLAZAMIENTO	13
2.4.1 COORDENADAS GLOBALES	14
2.4.2 COORDENADAS NATURALES	16
2.4.3 RESOLUCION CON AMBAS COORDENADAS	20
2.5 MODELADO DE DEFORMACIONES Y TENSIONES	22
2.6 OBTENCION DE LA ECUACION QUE RIGE EL PROBLEMA	25
2.6.1 EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	25
2.6.1.1 CONSIDERACIONES IMPORTANTES EN EL P.T.V.:	27
3. ANALISIS DEL DOMINIO	36
3.1 MECANICA DE RESOLUCION	36
3.1.1 ENSAMBLAJE	36
3.1.2 CONDICIONES DE CONTORNO	41
3.1.3 CONDICIONES DE CONTORNO ESPECIALES	44
3.2 OBTENCION DE LA INCOGNITA DESPLAZAMIENTO	47
3.3 OBTENCION DE LAS TENSIONES	48
3.4 DISCUSION DE RESULTADOS	49
3.5 ESTIMACION DEL ERROR EN EL MEF	50
4. TOPICOS ESPECIALES	52
4.1 OTRAS FUNCIONES SUTITUTAS	52
4.2 EL MODELADO DE LA GEOMETRIA Y LA INTEGRACION NUMERICA	54

5. ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL MEF	61
5.1 SUBROUTINAS BASE PARA EL PROGRAMA EFEPET.EXE	62
5.1.1 RUTINA PRINCIPAL	62
5.1.2 SUBROUTINA INGRESO DE DATOS Y VALORES PRINCIPALES	63
5.1.3 SUBROUTINA COMPUTO DE LA MATRIZ DE COEFICIENTES	65
5.1.4 SUBROUTINA COMPUTO ANCHO BANDA	66
5.1.5 SUBROUTINA ENSAMBLAJE MATRIZ GLOBAL	67
5.1.6 INDICACIONES DENTRO DEL DIAGRAMA DE ENSAMBLAJE	68
5.1.7 SUBROUTINA CONDICIONES DE BORDE	70
5.1.8 INDICACIONES DENTRO DEL DIAGRAMA DE CONDICIONES DE BORDE	71
5.1.9 SUBROUTINA MATRIZ DE RIGIDEZ	73
5.1.10 INDICACIONES DENTRO DEL DIAGRAMA MATRIZ DE RIGIDEZ	74
5.1.11 SUBROUTINA SOLUCION	75
5.1.12 SUBROUTINA TENSIONES	75
5.1.13 INDICACIONES DENTRO DEL DIAGRAMA DE TENSIONES	76
5.1.14 SUBROUTINA STRESS	77
5.1.15 INDICACIONES DENTRO DEL DIAGRAMA STRESS	77
5.2 CODIFICACION EN BASIC	79
5.2.1 RUTINA PRINCIPAL	79
5.2.2 RUTINA LECTORA DE DATOS	81
5.2.3 RUTINA MATRIZ DE COEFICIENTES	83
5.2.4 RUTINA DE ANCHO DE BANDA	84
5.2.5 RUTINA DE ENSAMBLAJE	84
5.2.6 RUTINA MATRIZ DE RIGIDEZ	85
5.2.7 RUTINA DE CONDICIONES DE BORDE	86
5.2.8 RUTINA DE SOLUCION SISTEMA	87
5.2.9 RUTINA DE TENSIONES	89
5.3 EJEMPLO RESUELTO CON PROGRAMA EFEPET.EXE	91
5.3.1 ENTRADA DE DATOS: ARCHIVO DATOS.DAT	91
5.3.2 SALIDA DE RESULTADOS: ARCHIVO FILE1.DAT	93
6. BIBLIOGRAFIA	95
7. TABLA DE CONTENIDOS	96

PROLOGO

El presente trabajo fue concebido a partir de las necesidades académicas de la **Facultad de Ingeniería** perteneciente a la Universidad Nacional del Nordeste, sirviendo de base para el dictado del curso de **Elementos Finitos** que forma parte del programa de la materia **Estructuras II** de dicha carrera.

Debido a la gran cantidad de bibliografía, casi toda en idioma extranjero, referente al tema y considerando que gran parte de ellas presentan enfoques dispares a la hora de enfrentar la resolución de problemas de ingeniería por Elementos Finitos, se evaluó la posibilidad de desarrollar material de estudio y consulta que, partiendo de los mas básicos conceptos y sin profundizar demasiado en la fundamentación matemática del método pero sí ahondando en sus posibilidades y limitaciones, permitiera una comprensión general de esta técnica de resolución.

Se entendió además que, por tratarse de un primer curso, el caso quedara reducido al estudio del Estado Plano y en particular por medio de **Elementos Finitos Triangulares de Tres Nodos**. Lo primero se debe a que dicho caso particular de la mecánica del sólido es en primera medida bastante común en problemas prácticos, además lo suficientemente compleja como para reflejar las dificultades del método pero a la vez no conduce a un gran número de ecuaciones cuando son pocos los elementos empleados. La elección de triángulos de tres nodos fundamentalmente se debió a la posibilidad de no incorporar a la integración numérica como problema en sí, si bien se realiza un extenso comentario sobre la misma.

El primer capítulo sirve como una introducción al concepto de la subdivisión del todo en porciones (Elementos Finitos) para las cuales sea más fácil la resolución de la ecuación diferencial que gobierna el problema.

En el segundo, además de refrescar tanto los conceptos que definen el Estado Plano como aquellos referentes al principio de los trabajos virtuales, se incorpora a los polinomios de Lagrange como una factible aproximación a la solución para la incógnita desplazamiento y aplicada a un Elemento Triangular aislado.

En el tercero se introduce el concepto de la continuidad como medio de vinculación de los Elementos aislados y se estudian casos especiales en las condiciones de contorno.

El cuarto avanza sobre conceptos mas complejos como lo son el modelado de la geometría conjuntamente con la incógnita y con esto, la presentación de las funciones sustitutas para otros elementos.

Finalmente, el quinto capítulo abarca tópicos computacionales del problema a partir del desarrollo de un programa didáctico en **BASIC** que resuelve el problema del Estado Plano con controles sobre el condicionamiento del sistema, apoyos comunes y con resortes, cargas concentradas y distribuidas, siempre para materiales elásticos. El capítulo queda dividido en dos partes, la primera con desarrollo de diagramas de flujo de las partes principales y la segunda con la codificación completa.

AGRADECIMIENTOS

Por mas simple que pudiera ser el cometido, concretar los objetivos prefijados difícilmente pueda ser tarea unipersonal. Han sido muchas las adhesiones desinteresadas recibidas tanto durante la confección de los diferentes temarios como en el procesamiento de los mismos.

Aún cuando las menciones deberían ir mucho mas allá de las que pueden realizarse a través de este breve recordatorio, es menester destacar a aquellas personas cuyo aporte de una u otra manera ha sido fundamental y sin el cual no habría sido posible la concreción de este modesto emprendimiento.

Vaya entonces, mi mas sincero agradecimiento al Ing. Ricardo Barrios D'ambra por su aporte en la elaboración del programa de informática, al Ing. Marcelo Aguirre por lo propio en el procesamiento de los temarios y al Ing. Gustavo Di Rado en la confección de la presentación.

A los Ing. Jorge Guinea, Armando Awruch y Mario Favretto que permanentemente brindaron apoyo y estímulo para la tarea emprendida.

Finalmente, al personal del Laboratorio de Mecánica de Suelos de La UNNE que facilitó el soporte técnico y cedió gentilmente gran parte de sus atareadas horas.

H. A. Di Rado.