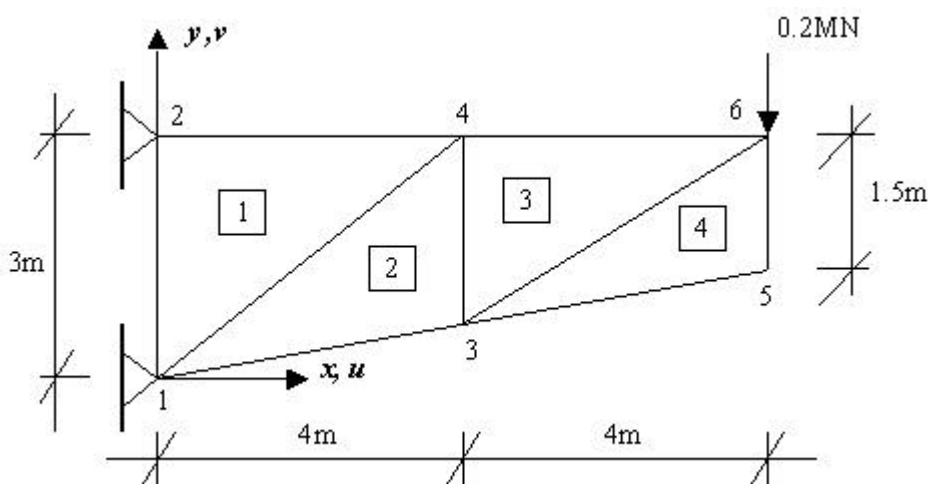


## Ejemplo 4-1: Análisis paso a paso por el MEF de una viga en voladizo bajo carga puntual.

Calcular matricialmente la siguiente estructura de hormigón en estado de tensión plana. Obtener los desplazamientos de los nodos y las tensiones principales de cada elemento.



Material  
Hormigón  
 $E=30000\text{MN/m}^2$   
 $\nu=0.2$   
 $t=0.5\text{m}$

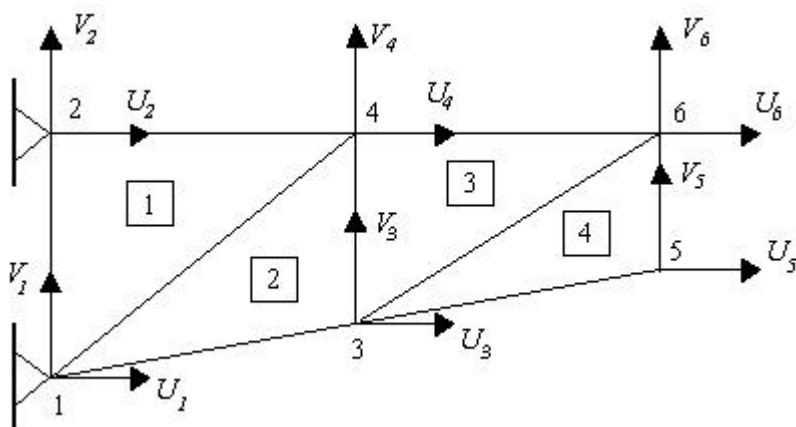
### Solución:

#### i) Definición de la geometría

En la tabla siguiente se indica la topología de la malla.

Elementos	Conexiones Nodales		
	Nodo Local 1	Nodo Local 2	Nodo Local 3
1	1	4	2
2	1	3	4
3	3	6	4
4	3	5	6

#### ii) Descripción de los grados de libertad de la estructura



### iii) Cálculo de las matrices de rigidez elementales

#### Elemento 1

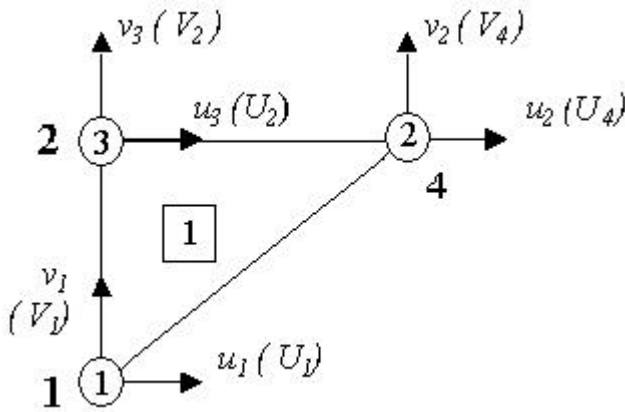


Tabla de correspondencia

G. L. LOCAL	G. L. GLOBAL
u <sub>1</sub>	U <sub>1</sub>
v <sub>1</sub>	V <sub>1</sub>
u <sub>2</sub>	U <sub>4</sub>
v <sub>2</sub>	V <sub>4</sub>
u <sub>3</sub>	U <sub>2</sub>
v <sub>3</sub>	V <sub>2</sub>

La matriz de rigidez del elemento 1 se obtiene a partir de la expresión (4.44) de los apuntes del curso,

$$K^{(1)} = \iint_{A^{(1)}} B^T D B t dA \quad (E4.1.1)$$

donde la matriz constitutiva  $D$  se determina a partir de las ecs. (4.6) y (4.7)

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu^2)}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31250 & 6250 & 0 \\ 6250 & 31250 & 0 \\ 0 & 0 & 12500 \end{bmatrix} \text{ (Unidades } \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \text{)} \quad (E4.1.2)$$

y la matriz de deformación  $B$  se determina a partir de la ec. (4.31)

$$B = \frac{1}{2A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (E4.1.3)$$

la cual a su vez, se determina teniendo en cuenta la ec. (4.24)

Nodo	x	y
1	0.00	0.00
2	4.00	3.00
3	0.00	3.00

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = 0 & b_2 &= y_3 - y_1 = 3\text{m} & b_3 &= y_1 - y_2 = -3\text{m} \\ c_1 &= x_3 - x_2 = -4\text{m} & c_2 &= x_1 - x_3 = 0 & c_3 &= x_2 - x_1 = -4\text{m} \end{aligned} \quad (E4.1.4)$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 6\text{m}^2 \quad (E4.1.5)$$

A partir de las dos últimas expresiones se deduce la matriz **B**,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 & 0.333 \\ -0.333 & 0 & 0 & 0.25 & 0.333 & -0.25 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.6})$$

Teniendo en cuenta que las matrices **B** y **D** son constantes, se obtiene operando sobre la ec (E4.1.1), la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t A^{(1)} \quad (\text{E4.1.7})$$

Por último, a partir de las ecs. (E4.1.6), (E4.1.2) y (E4.1.5), recordando que el espesor  $t=0.5\text{m}$ , se obtiene tras remplazar en la ec. (E4.1.7) la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento 1.

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (U_1) & (V_1) & (U_4) & (V_4) & (U_2) & (V_2) \\ K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} \\ K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} \\ K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)} \end{matrix} & \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_4) \\ (V_4) \\ (U_2) \\ (V_2) \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4166.67 & 0 & 0 & 3125 & -4166.67 & 3125 \\ 0 & 10416.67 & -1562.5 & 0 & 1562.5 & -10416.67 \\ 0 & -1562.5 & 5859.38 & 0 & -5859.38 & 1562.5 \\ -3125 & 0 & 0 & 2343.75 & 3125 & -2343.75 \\ -4166.67 & 1562.5 & -5859.38 & 3125 & 10026.04 & -4687.5 \\ 3125 & -10416.67 & 1562.5 & -2343.75 & -4687.5 & 12760.42 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.8})$$

Los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(1)}$  ocuparán las siguientes posiciones en la matriz de rigidez global.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\ K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} & - & - & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & - & - & - & - \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} & - & - & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & - & - & - & - \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} & - & - & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & - & - & - & - \\ K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} & - & - & K_{43}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ K_{51}^{(1)} & K_{52}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} & - & - & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & - & - & - & - \\ K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)} & - & - & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ K_{71}^{(1)} & K_{72}^{(1)} & K_{75}^{(1)} & K_{76}^{(1)} & - & - & K_{73}^{(1)} & K_{74}^{(1)} & - & - & - & - \\ K_{81}^{(1)} & K_{82}^{(1)} & K_{85}^{(1)} & K_{86}^{(1)} & - & - & K_{83}^{(1)} & K_{84}^{(1)} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{matrix} & \begin{matrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \\ (U_5) \\ (V_5) \\ (U_6) \\ (V_6) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.1. Ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento 1.

## Elemento 2

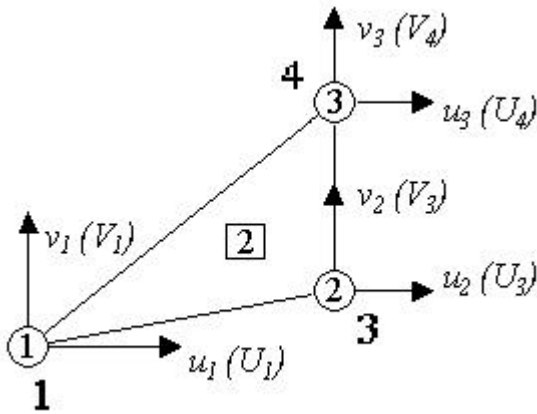


Tabla de correspondencia

G. L. LOCAL	G. L. GLOBAL
$u_1$	$U_1$
$v_1$	$V_1$
$u_2$	$U_3$
$v_2$	$V_3$
$u_3$	$U_4$
$v_3$	$V_4$

La matriz de rigidez del elemento 2 se obtiene a partir de la expresión (4.44) de los apuntes del curso.

$$\mathbf{K}^{(2)} = \iint_{A^{(2)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (\text{E4.1.9})$$

donde la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  tiene la misma expresión que en la ec. (E4.1.2). Asimismo la matriz de deformación  $\mathbf{B}$  se determina con la ec. (E4.1.3), pero con los siguientes valores de sus componentes

Nodo	x	y
1	0.00	0.00
2	4.00	0.75
3	4.00	3.00

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -2.25\text{m} & b_2 &= y_3 - y_1 = 3\text{m} & b_3 &= y_1 - y_2 = -0.75\text{m} \\ c_1 &= x_3 - x_2 = 0 & c_2 &= x_1 - x_3 = -4\text{m} & c_3 &= x_2 - x_1 = 4\text{m} \end{aligned} \quad (\text{E4.1.10})$$

$$A^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 4.5\text{m}^2 \quad (\text{E4.1.11})$$

A partir de las ecs. (E4.1.10) y (E4.1.11) se deduce la matriz  $\mathbf{B}$  como,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.333 & 0 & -0.083 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.444 & 0 & 0.444 \\ 0 & -0.25 & -0.444 & 0.333 & 0.444 & -0.083 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.12})$$

Teniendo en cuenta que las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  son constantes, se obtiene operando sobre la ec. (E4.1.9), la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t A^{(2)} \quad (\text{E4.1.13})$$

Por último, a partir de las ecs. (E4.1.12), (E4.1.2) y (E4.1.11), recordando que el espesor  $t=0.5\text{m}$ , se obtiene tras remplazar en la ec. (E4.1.13) la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento 2

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} (U_1) & (V_1) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) \\ K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & K_{15}^{(2)} & K_{16}^{(2)} \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{25}^{(2)} & K_{26}^{(2)} \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} \\ K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(2)} & K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(2)} & K_{55}^{(2)} & K_{56}^{(2)} \\ K_{61}^{(2)} & K_{62}^{(2)} & K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(2)} & K_{65}^{(2)} & K_{66}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4394.53 & 0 & -5859.38 & 1562.5 & -1464.84 & -1562.5 \\ 0 & 1757.81 & 3125 & -2343.75 & -3125 & 585.94 \\ -5859.38 & 3125 & 13368.06 & -6250 & -7508.68 & 3125 \\ 1562.5 & -2343.75 & -6250 & 17013.8 & 4687.5 & -14670.14 \\ 1464.84 & -3125 & -7508.68 & 4687.5 & 6043.84 & -1562.5 \\ -1562.5 & 585.94 & 3125 & -14670.14 & -1562.5 & 14084.20 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. E4.1.14})$$

Los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(2)}$  ocuparán las siguientes posiciones en la matriz de rigidez global.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\ K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & - & - & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} & K_{15}^{(2)} & K_{16}^{(2)} & - & - & - & - \\ K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & - & - & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{25}^{(2)} & K_{26}^{(2)} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & - & - & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{35}^{(2)} & K_{36}^{(2)} & - & - & - & - \\ K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & - & - & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & K_{45}^{(2)} & K_{46}^{(2)} & - & - & - & - \\ K_{51}^{(2)} & K_{52}^{(2)} & - & - & K_{53}^{(2)} & K_{54}^{(2)} & K_{55}^{(2)} & K_{56}^{(2)} & - & - & - & - \\ K_{61}^{(2)} & K_{62}^{(2)} & - & - & K_{63}^{(2)} & K_{64}^{(2)} & K_{65}^{(2)} & K_{66}^{(2)} & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \\ (U_5) \\ (V_5) \\ (U_6) \\ (V_6) \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.2. Ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento 2.

### Elemento 3

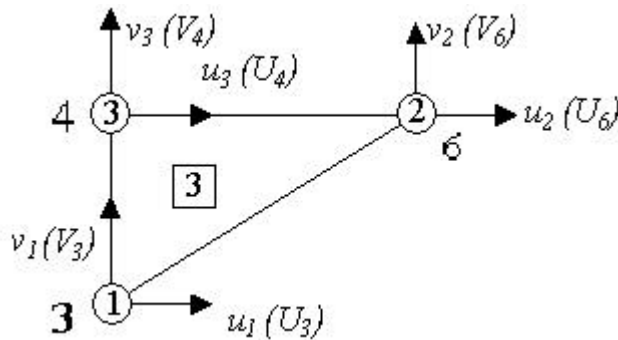


Tabla de correspondencia

G. L. LOCAL	G. L. GLOBAL
$u_1$	$U_3$
$v_1$	$V_3$
$u_2$	$U_6$
$v_2$	$V_6$
$u_3$	$U_4$
$v_3$	$V_4$

La matriz de rigidez del Elemento 3 se obtiene a partir de la expresión (4.44) de los apuntes del curso

$$\mathbf{K}^{(3)} = \iint_{A^{(3)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t dA \quad (\text{E4.1.15})$$

donde la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  tiene la misma expresión que la ec. (E4.1.2). Asimismo la matriz de deformación  $\mathbf{B}$  se determina por la expresión de la ec. (E4.1.3), pero con los siguientes valores de sus componentes

Nodo	x	y
1	4.00	0.75
2	8.00	3.00
3	4.00	3.00

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = 0 & b_2 &= y_3 - y_1 = 2.25\text{m} & b_3 &= y_1 - y_2 = -2.25\text{m} \\ c_1 &= x_3 - x_2 = -4\text{m} & c_2 &= x_1 - x_3 = 0 & c_3 &= x_2 - x_1 = 4\text{m} \end{aligned} \quad (\text{E4.1.16})$$

$$A^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 4.5\text{m}^2 \quad (\text{E4.1.17})$$

A partir de las ecs. (E4.1.16) y (E4.1.17) se deduce la matriz  $\mathbf{B}$  como,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.444 & 0 & 0 & 0 & 0.444 \\ -0.444 & 0 & 0 & 0.25 & 0.444 & -0.25 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.18})$$

Teniendo en cuenta que las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  son constantes, se obtiene operando sobre la ec. (E4.1.9), la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^{(3)} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} t A^{(3)} \quad (\text{E4.1.19})$$

Por último, a partir de las ecs. (E4.1.18), (E4.1.2) y (E4.1.17), recordando que el espesor  $t=0.5\text{m}$ , se obtiene tras remplazar en la ec. (E4.1.19) la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento 3

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} (U_3) & (V_3) & (U_6) & (V_6) & (U_4) & (V_4) \\ K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} & K_{15}^{(3)} & K_{16}^{(3)} \\ K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} & K_{25}^{(3)} & K_{26}^{(3)} \\ K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{36}^{(3)} \\ K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{46}^{(3)} \\ K_{51}^{(3)} & K_{52}^{(3)} & K_{53}^{(3)} & K_{54}^{(3)} & K_{55}^{(3)} & K_{56}^{(3)} \\ K_{61}^{(3)} & K_{62}^{(3)} & K_{63}^{(3)} & K_{64}^{(3)} & K_{65}^{(3)} & K_{66}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_3) \\ (V_3) \\ (U_6) \\ (V_6) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5555.55 & 0 & 0 & -3125 & -5555.5 & 3125 \\ 0 & 13888.8 & -1562.5 & 0 & 1562.5 & -13888.8 \\ 0 & -1562.5 & 4394.53 & 0 & -4394.53 & 1562.5 \\ -3125 & 0 & 0 & 1757.81 & 3125 & -1757.81 \\ -5555.5 & 1562.5 & -4394.53 & 3125 & 9950.09 & -4687.5 \\ 3125 & -13888.8 & 1562.5 & -1757.81 & -4687.5 & 15646.70 \end{bmatrix} \quad (E4.1.20)$$

Los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(3)}$  ocuparán las siguientes posiciones en la matriz de rigidez global.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & K_{11}^{(3)} & K_{12}^{(3)} & K_{15}^{(3)} & K_{16}^{(3)} & - & - & K_{13}^{(3)} & K_{14}^{(3)} \\ - & - & - & - & K_{21}^{(3)} & K_{22}^{(3)} & K_{25}^{(3)} & K_{26}^{(3)} & - & - & K_{23}^{(3)} & K_{24}^{(3)} \\ - & - & - & - & K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{36}^{(3)} & - & - & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ - & - & - & - & K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{46}^{(3)} & - & - & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & K_{51}^{(3)} & K_{52}^{(3)} & K_{55}^{(3)} & K_{56}^{(3)} & - & - & K_{53}^{(3)} & K_{54}^{(3)} \\ - & - & - & - & K_{61}^{(3)} & K_{62}^{(3)} & K_{65}^{(3)} & K_{66}^{(3)} & - & - & K_{63}^{(3)} & K_{64}^{(3)} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & K_{31}^{(3)} & K_{32}^{(3)} & K_{35}^{(3)} & K_{36}^{(3)} & - & - & K_{33}^{(3)} & K_{34}^{(3)} \\ - & - & - & - & K_{41}^{(3)} & K_{42}^{(3)} & K_{45}^{(3)} & K_{46}^{(3)} & - & - & K_{43}^{(3)} & K_{44}^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \\ (U_5) \\ (V_5) \\ (U_6) \\ (V_6) \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.3. Ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento 3.

#### Elemento 4

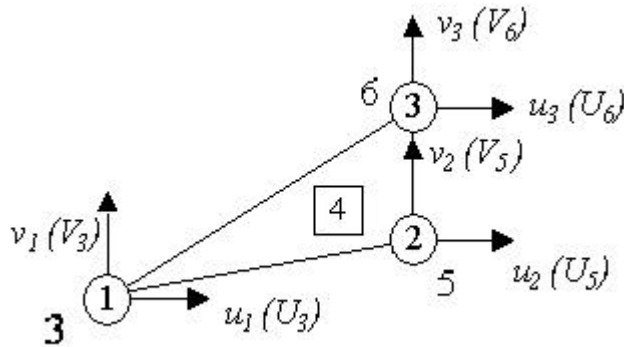


Tabla de correspondencia

G. L. LOCAL	G. L. GLOBAL
$u_1$	$U_3$
$v_1$	$V_3$
$u_2$	$U_5$
$v_2$	$V_5$
$u_3$	$U_6$
$v_3$	$V_6$

La matriz de rigidez del elemento 4 se obtiene a partir de la expresión (4.44) de los apuntes del curso.

$$\mathbf{K}^{(4)} = \iint_{A^{(3)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, t dA \quad (\text{E4.1.21})$$

donde la matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  posee la misma expresión que la ec. (E4.1.2). Asimismo la matriz de deformación  $\mathbf{B}$  se determina con la expresión de la ec. (E4.1.3), pero con los siguientes valores de sus componentes

Nodo	x	y
1	4.00	0.75
2	8.00	1.50
3	8.00	3.00

$$\begin{aligned} b_1 &= y_2 - y_3 = -1.5\text{m} & b_2 &= y_3 - y_1 = 2.25\text{m} & b_3 &= y_1 - y_2 = -0.75\text{m} \\ c_1 &= x_3 - x_2 = 0 & c_2 &= x_1 - x_3 = -4\text{m} & c_3 &= x_2 - x_1 = 4\text{m} \end{aligned} \quad (\text{E4.1.22})$$

$$A^{(4)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 3\text{m}^2 \quad (\text{E4.1.23})$$

A partir de las ecs. (E4.1.16) y (E4.1.17) se deduce la matriz  $\mathbf{B}$  como,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0.375 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.667 & 0 & 0.667 \\ 0 & -0.25 & -0.667 & 0.375 & 0.667 & -0.125 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.24})$$

Teniendo en cuenta que las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{D}$  son constantes, se obtiene operando sobre la ec. (E4.1.15), la siguiente expresión

$$\mathbf{K}^{(4)} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, t \, A^{(4)} \quad (\text{E4.1.25})$$

Por último, a partir de las ecs. (E4.1.24), (E4.1.2) y (E4.1.23), recordando que el espesor  $t=0.5\text{m}$ , se obtiene tras remplazar en la ec. (E4.1.19) la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento 4



$$\mathbf{K}^{(4)} = \begin{pmatrix} (U_3) & (V_3) & (U_5) & (V_5) & (U_4) & (V_4) \\ K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} & K_{13}^{(4)} & K_{14}^{(4)} & K_{15}^{(4)} & K_{16}^{(4)} \\ K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} & K_{23}^{(4)} & K_{24}^{(4)} & K_{25}^{(4)} & K_{26}^{(4)} \\ K_{31}^{(4)} & K_{32}^{(4)} & K_{33}^{(4)} & K_{34}^{(4)} & K_{35}^{(4)} & K_{36}^{(4)} \\ K_{41}^{(4)} & K_{42}^{(4)} & K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ K_{51}^{(4)} & K_{52}^{(4)} & K_{53}^{(4)} & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ K_{61}^{(4)} & K_{62}^{(4)} & K_{63}^{(4)} & K_{64}^{(4)} & K_{65}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_3) \\ (V_3) \\ (U_5) \\ (V_5) \\ (U_4) \\ (V_4) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2929.69 & 0 & -4394.53 & 1562.5 & 1464.84 & -1562.5 \\ 0 & 1171.88 & 3125 & -1757.81 & -3125 & 585.94 \\ -4394.53 & 3125 & 14925.13 & -7031.25 & -10530.6 & 3906.25 \\ 1562.5 & -1757.81 & -7031.25 & 23470.05 & 5468.75 & -21712.24 \\ 1464.84 & -3125 & -10530.6 & 5468.75 & 9065.76 & -2343.75 \\ -1562.5 & 585.94 & 3906.25 & -21712.24 & -2343.75 & 21126.30 \end{bmatrix} \quad (E4.1.26)$$

Los elementos de la matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(4)}$  ocuparán las siguientes posiciones en la matriz de rigidez global.

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & K_{11}^{(4)} & K_{12}^{(4)} & - & - & K_{13}^{(4)} & K_{14}^{(1)} & K_{15}^{(4)} & K_{16}^{(4)} \\ - & - & - & - & K_{21}^{(4)} & K_{22}^{(4)} & - & - & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{25}^{(3)} & K_{26}^{(3)} \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & K_{31}^{(4)} & K_{32}^{(4)} & - & - & K_{33}^{(4)} & K_{34}^{(4)} & K_{35}^{(4)} & K_{36}^{(4)} \\ - & - & - & - & K_{41}^{(4)} & K_{42}^{(4)} & - & - & K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\ - & - & - & - & K_{51}^{(4)} & K_{52}^{(3)} & - & - & K_{53}^{(4)} & K_{54}^{(4)} & K_{55}^{(4)} & K_{56}^{(4)} \\ - & - & - & - & K_{61}^{(4)} & K_{62}^{(4)} & - & - & K_{63}^{(4)} & K_{64}^{(4)} & K_{65}^{(4)} & K_{66}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_1) \\ (V_1) \\ (U_2) \\ (V_2) \\ (U_3) \\ (V_3) \\ (U_4) \\ (V_4) \\ (U_5) \\ (V_5) \\ (U_6) \\ (V_6) \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.4. Ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento 4.

#### iv) Cálculo del vector de fuerzas nodales equivalentes

Particularizando el vector de fuerzas puntuales exteriores de la ec. (4.50) de los apuntes del curso para el caso de un problema en estado plano se tendrá la siguiente expresión.

$$\mathbf{p}_i = \begin{bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.27})$$

En el caso de la estructura analizada, los vectores de fuerzas puntuales exteriores aplicados en cada nodo tendrán la siguiente expresión.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad p_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -200 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.28})$$

#### iv) Ensamblaje y solución del sistema

Se procede al ensamblaje de las matrices de rigidez de cada uno de los elementos en la matriz de rigidez global. Para ello, se toma como base los esquemas de ensamblaje de las Figuras 1, 2, 3 y 4. Asimismo se procede al ensamblaje de las fuerzas nodales. En la Figura E4.1.5 se indica un esquema del sistema que se forma tras el ensamble.

Remplazando las ecs.(E4.1.8), (E4.1.14), (E4.1.20) y (E4.1.26) en las componentes del sistema de la Figura E4.1.5 queda planteado el sistema de ecuaciones lineales que se indica en la Figura E4.1.6.

$$K.a = f$$

$$\begin{pmatrix}
 (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\
 K_{11}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(1)} + K_{12}^{(2)} & K_{15}^{(1)} & K_{16}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(2)} & K_{13}^{(1)} + K_{15}^{(2)} & K_{14}^{(1)} + K_{16}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} + K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(1)} + K_{22}^{(2)} & K_{25}^{(1)} & K_{26}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{25}^{(2)} & K_{24}^{(1)} + K_{26}^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{51}^{(1)} & K_{51}^{(1)} & K_{55}^{(1)} & K_{56}^{(1)} & 0 & 0 & K_{53}^{(1)} & K_{54}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{61}^{(1)} & K_{62}^{(1)} & K_{65}^{(1)} & K_{66}^{(1)} & 0 & 0 & K_{63}^{(1)} & K_{64}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^{(2)} & K_{31}^{(2)} & 0 & 0 & K_{33}^{(2)} + K_{11}^{(3)} + K_{11}^{(4)} & K_{34}^{(2)} + K_{12}^{(3)} + K_{12}^{(4)} & K_{35}^{(2)} + K_{15}^{(3)} & K_{36}^{(2)} + K_{16}^{(3)} & K_{13}^{(4)} & K_{14}^{(4)} & K_{13}^{(3)} + K_{15}^{(4)} & K_{14}^{(3)} + K_{16}^{(4)} \\
 K_{41}^{(2)} & K_{41}^{(2)} & 0 & 0 & K_{43}^{(2)} + K_{21}^{(3)} + K_{21}^{(4)} & K_{44}^{(2)} + K_{22}^{(3)} + K_{22}^{(4)} & K_{45}^{(2)} + K_{25}^{(3)} & K_{46}^{(2)} + K_{26}^{(3)} & K_{23}^{(4)} & K_{24}^{(4)} & K_{23}^{(3)} + K_{25}^{(4)} & K_{24}^{(3)} + K_{26}^{(4)} \\
 K_{31}^{(1)} + K_{51}^{(2)} & K_{32}^{(1)} + K_{52}^{(2)} & K_{35}^{(1)} & K_{36}^{(1)} & K_{53}^{(2)} + K_{51}^{(3)} & K_{54}^{(2)} + K_{52}^{(3)} & K_{33}^{(1)} + K_{55}^{(2)} + K_{55}^{(3)} & K_{34}^{(1)} + K_{56}^{(2)} + K_{56}^{(3)} & 0 & 0 & K_{53}^{(3)} & K_{54}^{(3)} \\
 K_{41}^{(1)} + K_{61}^{(2)} & K_{42}^{(1)} + K_{62}^{(2)} & K_{45}^{(1)} & K_{46}^{(1)} & K_{63}^{(2)} + K_{61}^{(3)} & K_{64}^{(2)} + K_{62}^{(3)} & K_{43}^{(1)} + K_{65}^{(2)} + K_{65}^{(3)} & K_{44}^{(1)} + K_{66}^{(2)} + K_{66}^{(3)} & 0 & 0 & K_{63}^{(3)} & K_{64}^{(3)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(4)} & K_{32}^{(4)} & 0 & 0 & K_{33}^{(4)} & K_{34}^{(4)} & K_{35}^{(4)} & K_{36}^{(4)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^{(4)} & K_{42}^{(4)} & 0 & 0 & K_{43}^{(4)} & K_{44}^{(4)} & K_{45}^{(4)} & K_{46}^{(4)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^{(3)} + K_{51}^{(4)} & K_{32}^{(3)} + K_{52}^{(4)} & K_{35}^{(3)} & K_{36}^{(3)} & K_{53}^{(4)} & K_{54}^{(4)} & K_{33}^{(3)} + K_{55}^{(4)} & K_{34}^{(3)} + K_{56}^{(4)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^{(3)} + K_{61}^{(4)} & K_{42}^{(3)} + K_{62}^{(4)} & K_{45}^{(3)} & K_{46}^{(3)} & K_{63}^{(4)} & K_{64}^{(4)} & K_{43}^{(3)} + K_{65}^{(4)} & K_{44}^{(3)} + K_{66}^{(4)}
 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1x} + r_{1x} \\ p_{1y} + r_{1y} \\ p_{2x} + r_{2x} \\ p_{2y} + r_{2y} \\ p_{3x} \\ p_{3y} \\ p_{4x} \\ p_{4y} \\ p_{5x} \\ p_{51y} \\ p_{6x} \\ p_{6y} \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.5 . Esquema del sistema ensamblado.

$$K.a = f$$

$$\begin{pmatrix} (U_1) & (V_1) & (U_2) & (V_2) & (U_3) & (V_3) & (U_4) & (V_4) & (U_5) & (V_5) & (U_6) & (V_6) \\ 8561.2 & 0 & -4166.67 & 3125 & -5859.38 & 1562.5 & 1464.84 & -4687.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12174.48 & 1562.5 & -10416.67 & 3125 & -2343.75 & -4687.5 & 585.94 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4166.67 & 1562.5 & 10026.04 & -4687.5 & 0 & 0 & -5859.38 & 3125 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3125 & -10416.67 & -4687.5 & 12760.42 & 0 & 0 & 1562.5 & -2343.75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5859.38 & 3125 & 0 & 0 & 21853.3 & -6250 & -13064.24 & 6250 & -4394.53 & 1562.5 & 1464.84 & -4687.5 \\ 1562.5 & -2343.75 & 0 & 0 & -6250 & 32074.65 & 6250 & -28559.03 & 3125 & -1757.81 & -4687.5 & 585.94 \\ 1464.84 & -4687.5 & -5859.38 & 1562.5 & -13064.24 & 6250 & 21853.3 & -6250 & 0 & 0 & -4394.53 & 3125 \\ -4687.5 & 585.94 & 3125 & -2343.8 & 6250 & -28559.03 & -6250 & 32074.65 & 0 & 0 & 1562.5 & -1757.81 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4394.53 & 3125 & 0 & 0 & 14925.13 & -7031.25 & -10530.6 & 3906.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1562.5 & -1757.81 & 0 & 0 & -7031.25 & 23470.05 & 5468.75 & -21712.24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1464.84 & -4687.5 & -4394.53 & 1562.5 & -10530.6 & 5468.75 & 13460.28 & -2343.75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4687.5 & 585.94 & 3125 & -1757.81 & 3906.25 & -21712.24 & -2343.75 & 22884.11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x} \\ r_{2y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix}$$

Figura E4.1.6 . Sistema de Ecuaciones.

El sistema de ecuaciones que se presenta en la Figura E4.1.6 no puede ser resuelto tal como se muestra. Necesita para ello que se le impongan las condiciones de contorno del problema. Teniendo en cuenta que en los nodos 1 y 2 se encuentran apoyos fijos, que restringen los desplazamientos en la dirección  $x$  e  $y$ , se deduce que

$$U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0 \quad (\text{E4.1.29})$$

Eliminando por tanto las filas y columnas relacionadas con los desplazamientos  $U_1, V_1, U_2, V_2$  del sistema de la Figura E4.1.6, quedará planteado el siguiente de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} U_3 & V_3 & U_4 & V_4 & U_5 & V_5 & U_6 & V_6 \\ 21853.3 & -6250 & -13064.24 & 6250 & -4394.53 & 1562.5 & 1464.84 & -4687.5 \\ -6250 & 32074.65 & 6250 & -28559.03 & 3125 & -1757.81 & -4687.5 & 585.94 \\ -13064.24 & 6250 & 21853.3 & -6250 & 0 & 0 & -4394.53 & 3125 \\ 6250 & -28559.03 & -6250 & 32074.65 & 0 & 0 & 1562.5 & -1757.81 \\ -4394.53 & 3125 & 0 & 0 & 14925.13 & -7031.25 & -10530.6 & 3906.25 \\ 1562.5 & -1757.81 & 0 & 0 & -7031.25 & 23470.05 & 5468.75 & -21712.24 \\ 1464.84 & -4687.5 & -4394.53 & 1562.5 & -10530.6 & 5468.75 & 13460.28 & -2343.75 \\ 1562.5 & 585.94 & 3125 & -1757.81 & 3906.25 & -21712.24 & -2343.75 & 22884.11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \\ U_5 \\ V_5 \\ U_6 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -200 \end{pmatrix} \quad (\text{E4.1.30})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, se calculan los siguientes valores de las incógnitas

$$\begin{aligned} U_3 &= -0.302664 \times 10^{-4} \text{ m} & V_3 &= -0.103360 \times 10^{-3} \text{ m} \\ U_4 &= 0.385719 \times 10^{-4} \text{ m} & V_4 &= -0.983442 \times 10^{-4} \text{ m} \\ U_5 &= -0.169057 \times 10^{-4} \text{ m} & V_5 &= -0.313866 \times 10^{-3} \text{ m} \\ U_6 &= 0.507842 \times 10^{-4} \text{ m} & V_6 &= -0.314820 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned} \quad (\text{E4.1.31})$$

Reemplazando las expresiones anteriores en el sistema de ecuaciones de la Figura E4.1.6 se obtienen las reacciones en los nodos 1 y 2:

$$\begin{aligned} r_{1x} &= 0.5333 \text{ MN} & r_{1y} &= -0.0908 \text{ MN} \\ r_{2x} &= -0.5333 \text{ MN} & r_{2y} &= 0.2908 \text{ MN} \end{aligned} \quad (\text{E4.1.32})$$

#### v) Cálculo de las tensiones en los elementos

Combinando las ecs. (4.5) y (4.28) se obtiene la siguiente expresión de las tensiones en los elementos

$$\mathbf{s}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{bmatrix}^{(e)} = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \quad (\text{E4.1.33})$$

donde el vector  $\mathbf{a}^{(e)}$  es el vector de desplazamientos en los nodos del elemento.

A partir de la ec. (E4.1.33) se calculan las tensiones en cada uno de los elementos,

#### Elemento 1

Teniendo en cuenta las ec. (E4.1.29) y (E4.1.31) se calcula el vector de desplazamientos de los nodos del elemento 1

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.385719 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.983442 \times 10^{-4} \text{ m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.34})$$

Reemplazando las ecs. (E4.1.2), (E4.1.6) y (E4.1.34) en la ec. (E4.1.33), se obtiene la siguiente expresión de las tensiones en el elemento 1

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.30134 \\ 0.06027 \\ -0.3073 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right) \quad (\text{E4.1.35})$$

#### Elemento 2

Teniendo en cuenta las ec. (E4.1.29) y (E4.1.31) se calcula el vector de desplazamientos de los nodos del elemento 2

$$\mathbf{a}^{(2)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.302664 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.103360 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.385719 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.983442 \times 10^{-4} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.36})$$

Reemplazando las ecs. (E4.1.2), (E4.1.12) y (E4.1.36) en la ec. (E4.1.33) se obtiene la siguiente expresión de las tensiones en el elemento 1

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.40179 \\ -0.01348 \\ 0.05421 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right) \quad (\text{E4.1.37})$$

#### Elemento 3

Teniendo en cuenta las ec. (E4.1.29) y (E4.1.31) se calcula el vector de desplazamientos de los nodos del elemento 3

$$\mathbf{a}^{(3)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} -0.302664 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.103360 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.507842 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.314820 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.385719 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.983442 \times 10^{-4} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.38})$$

Reemplazando las ecs. (E4.1.2), (E4.1.18) y (E4.1.38) en la ec. (E4.1.33) se obtiene la siguiente expresión de las tensiones en el elemento 3

$$\mathbf{s}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{bmatrix}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.10934 \\ 0.08874 \\ -0.29405 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right) \quad (\text{E4.1.39})$$

#### Elemento 4

Teniendo en cuenta las ec. (E4.1.29) y (E4.1.31) se calcula el vector de desplazamientos de los nodos del elemento 4

$$\mathbf{a}^{(4)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.302664 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.103360 \times 10^{-3} \text{ m} \\ -0.169057 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.313866 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 0.507842 \times 10^{-4} \text{ m} \\ -0.314820 \times 10^{-3} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (\text{E4.1.40})$$

Luego reemplazando las ecs. (E4.1.2), (E4.1.24) y (E4.1.40) en la ec. (E4.1.33) se obtiene la siguiente expresión de las tensiones en el elemento 4

$$\mathbf{s}^{(4)} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{bmatrix}^{(4)} = \begin{bmatrix} -0.1640 \\ -0.05189 \\ -0.09225 \end{bmatrix} \left( \frac{\text{MN}}{\text{m}^2} \right) \quad (\text{E4.1.41})$$

En las Figuras E4.1.7, E4.1.8 y E4.1.9 se muestran mapa de colores de las tensiones  $S_x$ ,  $S_y$  y  $t_{xy}$  respectivamente. En la Figura E4.1.10 se muestra un diagrama de las direcciones de las tensiones principales

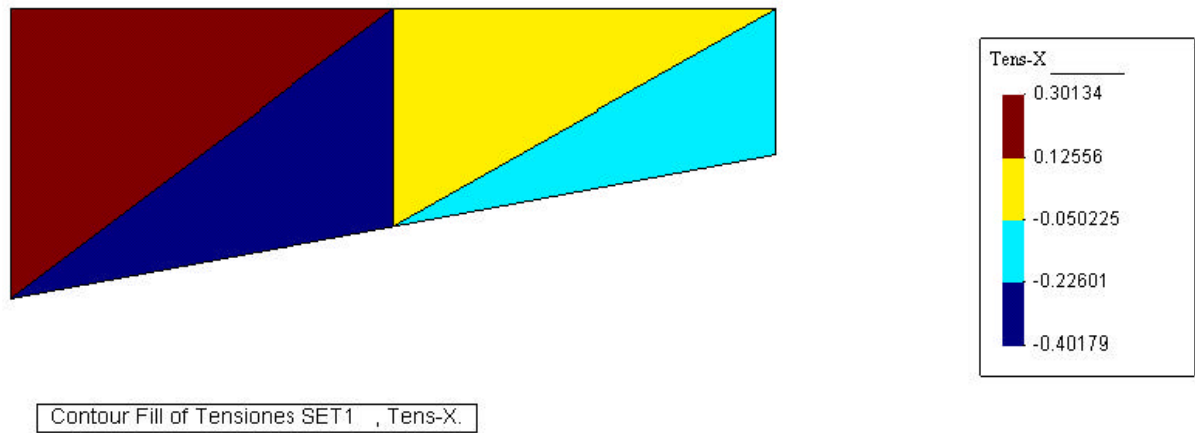


Figura E4.1.7 . Mapa de las tensiones  $S_x$

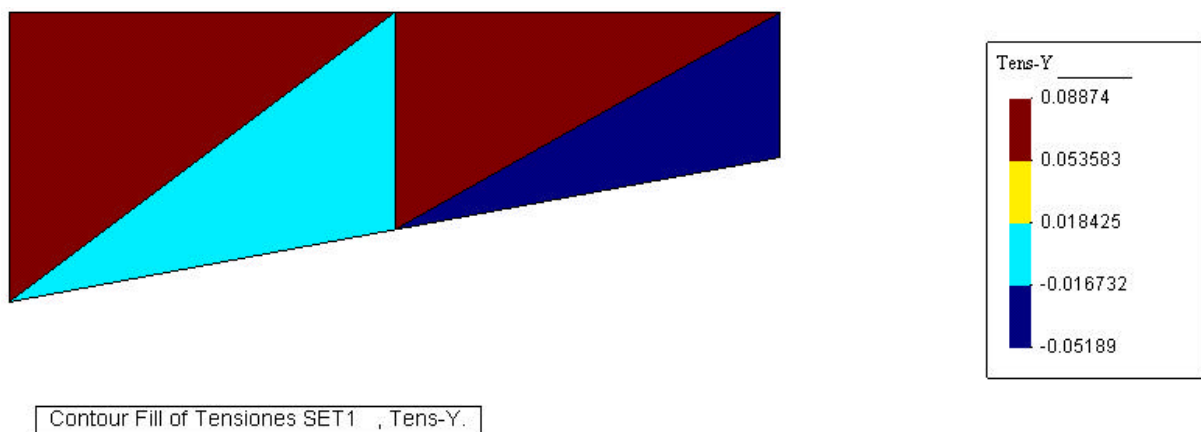


Figura E4.1.8 . Mapa de las tensiones  $S_y$ .



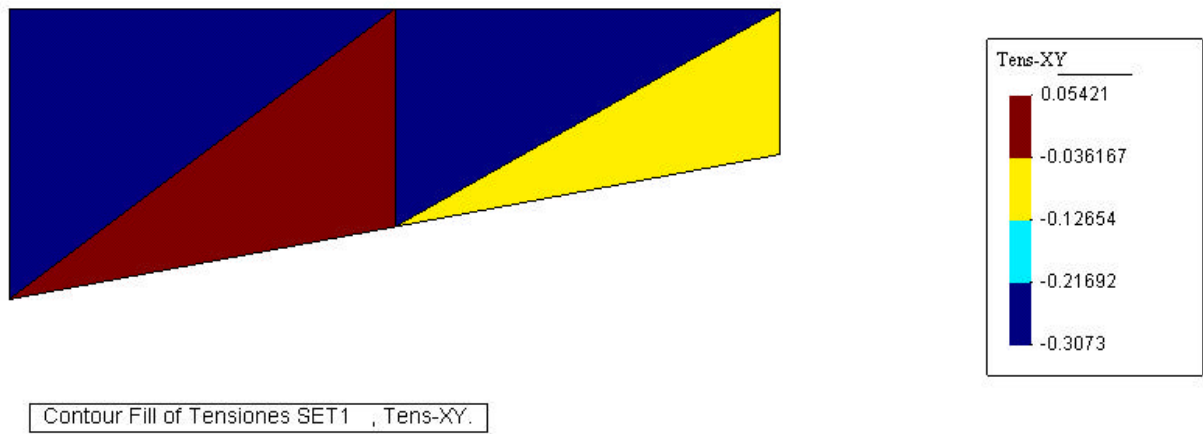


Figura E4.1.9 . Mapa de las tensiones  $t_{xy}$ .

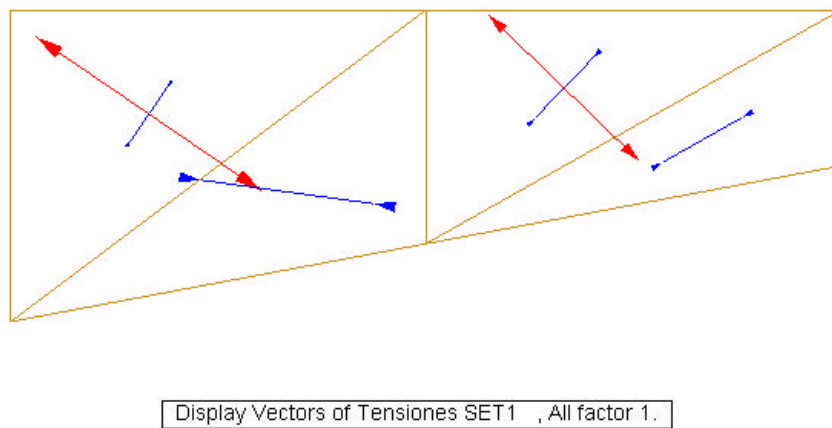


Figura E4.1.10 . Tensiones principales.