TD 1 : Calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 1 (Mesure algébrique)

1. Rappeler la définition de la mesure algébrique d'un bipoint (A, B).

2. Soit A, B, et C 3 points d'un axe Δ. Montrer que

   (a) $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$.

   (b) $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$.

3. On se donne un axe Δ et un point A de Δ. Construire les points B et C tels que $\overline{AB} = -5$ et $\overline{BC} = \frac{3}{2}$ (l'unité de longueur est le centimètre). Calculer $\overline{AC}$ puis $d(A, C)$.

4. Soient A, B et C trois points d'un axe Δ tels que $\overline{AB} = -\frac{7}{2}$ et $\overline{BC} = 2$.

   (a) Pour tout M de Δ, montrer que
   $$\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} = -\frac{1}{2}.$$

   (b) Calculer de même $\overline{MA} - 3\overline{MB} + 2\overline{MC}$.

Exercice 2 (Repère d'une droite)

On appelle repère d'une droite $\mathcal{D}$ tout couple de points distincts de $\mathcal{D}$. Etant donné un point M de $\mathcal{D}$, on définit l'abscisse de M dans le repère (A, B) (A et B sont deux points distincts de $\mathcal{D}$) par le réel x tel que
$$x = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

1. Quelles sont les abscisses des points A et B dans le repère (A, B) ?

2. On se donne 3 points A, B, C sur un axe Δ tels que $\overline{AB} = -3$ et $\overline{BC} = 7$. Quelle est l'abscisse de C dans le repère (A, B) ? Celle de A dans le repère (B, C) ? Celle de B dans le repère (A, C) ?

3. Sur une droite $\mathcal{D}$ de repère (O, E), on considère deux points A et B. On note I le milieu du bipoint (A, B).

   (a) Montrer que $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$.

   (b) Montrer que
   $$\overline{OI} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

   (c) Etant donné un point M de $\mathcal{D}$, on note x_M son abscisse dans le repère (O, E). Déduire de la question précédente que
   $$x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_B).$$

Exercice 3

Sur une droite $\mathcal{D}$ de repère (A, B), on donne les points A' et B' d'abscisses respectives -1 et $\frac{1}{2}$. Soit M un point quelconque de $\mathcal{D}$, d'abscisse x dans (A, B) et x' dans (A', B').

1. Déterminer les réels a et b tels que $x' = ax + b$.

2. Montrer qu'il existe un unique point de $\mathcal{D}$ ayant même abscisse dans les repères (A, B) et (A', B').

Exercice 4

1. Donner la définition d'un vecteur.

2. Soient A, B et C 3 points du plan, représenter les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.

Exercice 5

Soit M et N les milieux des bipoints (A, B) et (A, C). Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Exercice 6

Soit A, A', D, D' quatre points du plan, I et J les milieux respectifs de (A, A') et (D, D').

1. Montrer que
   (a) $\overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'}$.
   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'D'} = 2\overrightarrow{IJ}$.

2. A quelle condition a-t-on $I = J$?

3. Montrer que, si $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes quelconques, les milieux respectifs I, J, K, L des bipoints $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$ sont les sommets d'un parallélogramme $IJKL$.

Exercice 7

Soit A, B, C, D 4 points du plan. On considère les points M et M' tels que

$$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{M'C} = k\overrightarrow{M'D}$$

où k est un réel différent de 1.

1. Etablir que $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M'C} = \overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{AC}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{BD} = (1 - k)\overrightarrow{MM'}$.

Exercice 8

Soit un parallélogramme $ABCD$. Placer les points M, N, P, Q tels que

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}.$$

1. Exprimer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{DP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Exercice 9

1. Rappeler la définition d'un repère et d'une base.

2. Expliquer l'intérêt des ces deux objets.

Dans les exercices suivants, on désigne par $\mathcal{R}$ un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{B}$ la base formée par les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 10

Soit A et B deux points de coordonnées $(3, 2)$ et $(-2, -1)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ dans $\mathcal{B}$.

2. En déduire les coordonnées dans $\mathcal{R}$ du point M défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 11

1. Construire dans le plan les points A, B, C, D tels que

vecteur	Coordonnées dans $\mathcal{B}$
$\overrightarrow{OA}$	(2,-1)
$\overrightarrow{OB}$	(0,-4)
$\overrightarrow{OC}$	(2,-2)
$\overrightarrow{OD}$	(1,3)

2. Construire dans le plan le point E tel que

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE}.$$

3. Trouver dans le plan les coordonnées de E dans $\mathcal{R}$. Vérifier par un calcul direct le résultat obtenu.

Exercice 12

Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées dans $\mathcal{R}$ $(-1,2), (-3,1), (2,1)$. On désigne par f l'application de l'ensemble des points du plan dans l'ensemble des vecteurs du plan par

$$\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}.$$

1. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction des coordonnées x et y de M dans $\mathcal{R}$.
2. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{f(M)}$.

Exercice 13

Soit A, B, C trois points du plan de coordonnées dans $\mathcal{R}$ $(2,3), (-1,2), (1,2)$. On désigne par f l'application de l'ensemble des points du plan dans l'ensemble des vecteurs du plan par

$$\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}.$$

1. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction des coordonnées x et y de M dans $\mathcal{R}$.
2. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}$ de $\overrightarrow{f(M)}$.
3. Quel est le point M tel que $\overrightarrow{f(M)} = \vec{0}$? On note G ce point.
4. Montrer que pour tout point M : $\overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MG}$.

Exercice 14

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ 3 vecteurs définis par

$$\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{v} = x\vec{i} + 4\vec{j}, \quad \vec{w} = 5\vec{i} + 3y\vec{j}$$

où x et y sont deux réels.

1. Déterminer x et y lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ d'une part, $\vec{u}$ et $\vec{w}$ d'autre part, sont colinéaires.
2. En déduire le réel k tel que $\vec{v} = k\vec{w}$.

Exercice 15

Soit A, B, C, D, E cinq points du plan de coordonnées dans $\mathcal{R}$ $(3,2), (-2,0), (0,5), (0,y), (x,0)$ où x et y sont deux réels.

1. Déterminer y pour que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ soient colinéaires.
2. Déterminer x pour que $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}$ soient colinéaires.
3. Calculer les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des milieux I, J, K de $(O, A), (E, D), (B, C)$.
4. Montrer que $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Exercice 16
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $(-2, 3)$ dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $(\vec{j}, \vec{i}), (-\vec{i}, \vec{j}), (\vec{i}, -\vec{j})$ et $(-\vec{i}, -\vec{j})$ sont des bases.
2. Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans chacune de ces bases.