1 - Mostre que a afirmativa $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ é válida.

Provaremos por demonstração direta:
$(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \alpha \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \alpha) \vee \neg\beta \Leftrightarrow \top \vee \neg\beta \Leftrightarrow \top$
Provamos assim que $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$ é equivalente ao verum e portanto uma tautologia.

2 - Sejam os conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 8\}$ e $B = \{n \in \mathbb{Z} | -5 \leq n \leq 5\}$. Liste os elementos do conjunto: $D = (A - B) \cup (B - A)$

Pela definição, temos que A={0,1,2,3,4,5,6,7,8} e B={-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5} ,logo A – B ={6,7,8} e B – A = {-5,-4,-3,-2,-1} e portanto (A – B)∩(B – A)= {-5,-4,-3,-2,-1,6,7,8}.

3 - Diga que propriedades, dentre reflexividade, simetria e transitividade, tem a relação: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y^2\}$

A relação não é reflexiva pois, como contra exemplo, temos que $2 \neq 2^2 = 4$..

A relação não é simétrica pois, como contra exemplo, temos que $4 = 2^2$,mas $2 \neq 4^2 = 16$.

A relação não é transitiva pois, como contra exemplo, temos que $16 = 4^2$ e que $4 = 2^2$,mas $16 \neq 2^2$.

4 - Verifique se a seguinte função é injetora, sobrejetora e/ou bijetora e, se possível, determine a sua função inversa: $f: N \rightarrow N$ tal que $f(n) = n \div 2$, onde ``÷" e divisao inteira.

f(n) não é injetora,pois, por contra exemplo, temos que $0 = x1 \neq x2 = 1$ mas f(0)=f(1)=0.

f(n) é sobrejetora pois para todo y∈ N,temos encontrar f(n)=y:

$y = f(n) \Leftrightarrow y = n \div 2 \Leftrightarrow 2 * y = n$

Assim, qualquer y∈ N possui um n tal que f(n)=y.

f(n) não é bijetora pois não é simultaneamente injetora e sobrejetora,logo sua função inversa não existe.

5 - De uma definicao recursiva de $f: N \rightarrow N$, onde $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k$.

Vamos provar por indução que a hipótese de que f(n)= f(n-1)+n, f(0)=0 é uma definição recursiva para a fórmula f(n)=(∑k, k=1→n) é verdadeira:

Para n=0, temos que f(0)=0 e que (∑k, k=1→n) = 0, logo o passa base é valido.

Suponha que f(n)= f(n-1)+n=(∑k, k=1→n). Vamos provar que a igualdade é válida também para f(n+1):

f(n+1)=(∑k, k=1→n)+1=(∑k, k=1→n)+n=f(n)+n

Logo, pelo passo da indução provamos nossa hipótese.

6 - Prove por indução que, para todo numero natural $n \geq 0, \sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Para n=0 a afirmação é válida, pois temos que $(\sum k^2, k=1\to 0)=0$ e que $0*(0+1)*(2*0+1)/6=0$.

Suponha que $(\sum k^2, k=1\to n)= n*(n+1)*(2n+1)/6$ é valida para n. Quermos provar que é válida também para n+1:

$(\sum k^2, k=1\to n+1)$ <=> $(\sum k^2, k=1\to n)+(n+1)^2$ <=> $n*(n+1)*(2n+1)/6+(n+1)^2$ <=> $(n*(n+1)*(2n+1)+6*(n+1)^2)/6$ <=>$(n+1)*(n*(2n+1)+6(n+1)/6$ <=> $(n+1)*(2n^2+7n+6)/6$

<=>$(n+1)*((n+2)*(2n+3))/6$ <=> $(n+1)*((n+1)+1)*(2*(n+1)+1)/6$.

Provamos que a afirmação é valida para n=0 e que se n é válida para n é valida para n+1. Logo pelo processo indutivo provamos que a afirmação é válida para $n \in N$.

7 - Descreva formalmente a linguagem sobre o alfabeto $\Sigma=\{0,1\}$: O conjunto das palavras com, no mínimo, um 0.

A linguagem acima pode ser formalizada como $L=\{\lambda,0,1\}^*\{0\}\{\lambda,0,1\}^*$. Podemos ver que independentemente de $\{\lambda,0,1\}^*$,as palavras sempre terão {0}, logo possuem,no mínimo, um 0.

8 - Construa gramatica para a linguagem: $\{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$

Seja a gramática ({A}, {a, b}, R, A} em que R contem as duas regras $A \to aAb \mid \lambda$. Temos que a linguagem gerada pela gramática é $L=\{ A=^{n}> a^{n} b^{n} \mid n\in N\}$ que é equivalente a $L=\{a^{n} b^{n} \mid n\in N\}$.