Carátula de Examen Final

EXAMEN FINAL

INTEGRACIÓN DE LA CALIFICACIÓN

	Calificación	%	Calificación Final
Examen Parcial		40	
Examen Final		50	
Act. Aprendizaje		10	
		100	

EXAMEN FINAL DE: Cálculo Diferencial

Nombre de la materia

Nombre del alumno:

Grupo: TG01S **Fecha:** 20-abr-2017

Nombre del profesor: M. en C. Reinaldo Arturo Zapata Peña **AUTORIZÓ**

Instrucciones:

1. **Lee con atención todo el examen antes de resolverlo. Escribe todos los datos que se solicitan con tinta negra o azul. Solo hay una respuesta correcta por reactivo. No uses corrector, evita tachaduras, sobreponer letras y/o números; de lo contrario se anulará el reactivo.**
2. **El examen es un documento institucional por lo tanto no debes rayar, dibujar o realizar cualquier otro escrito ajeno a los contenidos del examen o que por instrucción no se te hayan solicitado; de lo contrario se ANULARA el examen**
3. **No se permite hablar, voltear o pedir algún material a compañeros y/o profesor durante el examen. No sacar celular, audífonos o cualquier aparato ajeno al examen; de no cumplir con lo especificado se ANULARÁ el examen.**
4. **Si se sorprende a un alumno (os) copiando bajo cualquier forma o medio se ANULA el examen**
5. **Los exámenes resueltos con lápiz no tienen derecho a revisión o aclaraciones.**
6. **Es importante anotar TODOS LOS PASOS o PROCEDIMIENTOS en todos los problemas y que estos sean lógicos y entendibles, no hacerlo anula la respuesta, aún si esta es correcta, se deberá remarcar el resultado con tinta negra o azul.**

LA ANULACIÓN DE EXAMEN EQUIVALE A CERO DE CALIFICACIÓN.

Instrucciones:

1) **Lea atentamente las indicaciones y conteste según le sea indicado.**
2) **Utilice el material permitido para contestar sus respuestas.**
3) **Escriba su nombre completo en cada hoja en la parte superior derecha.**
4) **Guarde silencio, orden y respeto antes, durante y después del examen.**
5) **Sólo usar lápiz, borrador y/o bolígrafo para contestar el examen y escriba sus respuestas con bolígrafo.**

1 Teoría

1. Explique matemáticamente qué es una función par e impar. **6 puntos.**
2. Haciendo uso de la figura 1, haga un bosquejo de las funciones $f(x) = \cos(2x)$ y $g(x) = 2\sin(x)$ para el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$. Identifica cada una de ellas etiquetándolas. **6 puntos.**
3. Explique con sus palabras que interpretación geométrica y matemática tiene la derivada de una función. **6 puntos.**
4. Si para una recta tangencial a una función $f(x)$ se conoce el punto $(a,f(a))$ y la pendiente de la recta tangente $m_{\tan}$, escriba el procedimiento para encontrar la recta perpendicular a la función en dicho punto. **6 puntos.**
5. Explique con sus palabras que establece el teorema de l'Hôpital y las situaciones en las que se puede utilizar. **6 puntos.**

2 Problemas

1. Sea la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$ encuentre las rectas tangente y perpendicular a dicha función en el punto $x = 4$. Determine para ambos casos si la recta forma un ángulo mayor o menor a $90°$ respecto al eje de las x midiendo en sentido contrario a las manecillas del reloj. **9 puntos.**
2. Dadas las siguientes funciones, **9 puntos.**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}, \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2 - 25}, \tag{2}$$

   encuentre los puntos para los cuales estas funciones son indeterminadas.

3. Utilizando las funciones del inciso anterior, determine si existe el límite para la Ec. (1) cuando $x \to 2$ y el límite para la Ec. (2) cuando $x \to 5$. **9 puntos.**

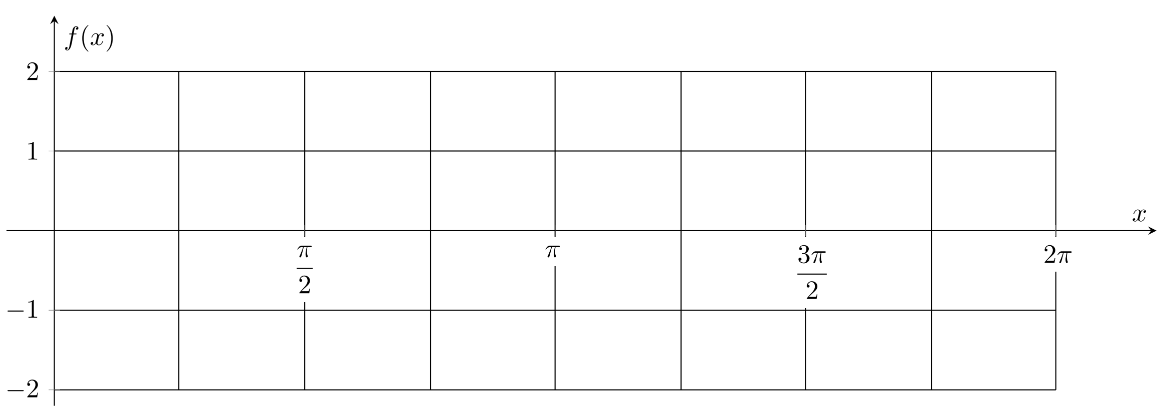


Figure 1: especio para graficar funciones.

4. Utilizando la regla de l'Hôpital, determine el límite de las siguientes funciones **9 puntos.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} \tag{3}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(x)}{e^x} \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} \tag{5}$$

5. Usando la regla de la cadena y las reglas de derivación encuentre la derivada de las siguientes funciones. **9 puntos.**

$$f(x) = \tan(x) \tag{6}$$

$$g(x) = \ln(x^2)e^{2x^3} \tag{7}$$

$$h(x) = \frac{\sin(2x)}{e^x} \tag{8}$$

$$i(x) = 3x^5\cos(2x) \tag{9}$$

$$j(x) = \sin^3(2x^2) \tag{10}$$

$$k(x) = \frac{1}{e^{2x^5}} \tag{11}$$

6. Si la posición de un sistema en movimiento está dada por la función **8 puntos.**

$$x(t) = 5t^2 - 6t + 8 \tag{12}$$

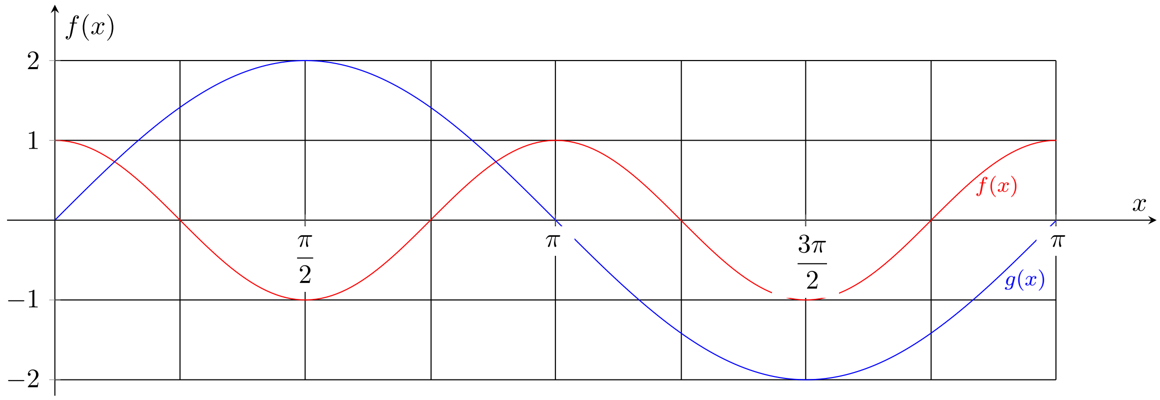
determine la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo.

7. Encuentre la tercera derivada de la Ec. (11). **9 puntos.**

Respuestas

1 Teoria

1. Función par: $f(-x) = f(x)$. Función impar: $f(-x) = -f(x)$.
2. Gráfica: $f(x) = \cos(2x)$; $g(x) = 2\sin(x)$.



3. La derivada de una función evaluada en un punto a da como resultado la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese mismo punto. La derivada de una función respecto a una de sus variables puede ser interpretada como la razón de cambio de la función respecto a dicha variable.
4. La recta perpendicular está dada por la ecuación

$$m_\perp = -\frac{1}{m_{\tan}}$$
$$y - f(a) = m_\perp(x - a)$$

5. La regla o teorema de l'Hôpital establece que el límite del cociente de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ cuando x tiende a un valor dado a, se puede obtener mediante

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre y cuando se cumpla uno de los siguientes criterios

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$$

2 Problemas

1. Ecuación de la recta tangente:

$$P(x, y) = (4, f(4)) = (4, 28)$$
$$m_{\tan} = f'(4) = 13$$
$$y - 28 = 13(x - 4)$$
$$y = 13x - 28$$

Ecuación de la recta perpendicular:

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= (4, f(4)) = (4, 28) \\
m_{\perp} &= -\frac{1}{f'(4)} = -\frac{1}{13} \\
y - 28 &= -\frac{1}{13}(x-4) \\
y &= -\frac{x}{13} + \frac{368}{13}
\end{aligned}
$$

2. Puntos de indeterminación:

   Para la Eq. (1): $x = -5$
   Para la Eq. (2): $x = \pm 5$

3. Límites:

   Para la Eq. (1): $\lim_{x \to 2} f(x) = 0$
   Para la Eq. (2): No existe el límite.

4. Regla de l'Hôpital:

   Para la Eq. (3): lím = $\frac{1}{2}$
   Para la Eq. (4): lím = 0
   Para la Eq. (5): lím = -1

5. Derivadas:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \csc^2(x) \\
g'(x) &= \ln(x^2)e2x^3(6x) + \frac{e^{2x^3}}{x^2}(2x) \\
&= 6x\ln(x^2)e^{2x^3} + \frac{2e^{2x^3}}{x^2} \\
h'(x) &= -\sin(2x)e^{-x} + 2e^{-x}\cos(2x) \\
i'(x) &= 15x^4\cos(2x) - 6x^5 sin(2x) \\
j'(x) &= 12x\sin^2(2x^2)\cos(2x^2) \\
k'(x) &= -10x^4e^{-2x^5}
\end{aligned}
$$

6. Velocidad y aceleración:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \frac{dx}{dt} = 10t - 6 \\
a(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = 10
\end{aligned}
$$

7. Tercera derivada

$$
\begin{aligned}
k''(x) &= 100x^4e^{2x^5} - 40x^3e^{2x^5} \\
k'''(x) &= -1000x^4e^{2x^5} + 400x^7e^{2x^5} + 400x^3e^{2x^5} - 120x^2e^{2x^5} \\
&= (-1000x^4 + 400x^7 + 400x^3 - 120x^2)e^{2x^5}
\end{aligned}
$$