DEDUÇÃO DA HAMILTONEANA RELATIVÍSTICA

"$H = m_0 \gamma c^2$"

SABENDO QUE O MOMENTO RELATIVÍSTICO É DADO POR $P = m_0 v \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ E QUE O MOMENTO CONJUGADO DA LAGRANGEANA É DADO POR $\partial_{\dot q}\mathcal{L}$ SENDO $\mathcal{L} = T - V$. PODEMOS ENTÃO, ENCONTRAR $\mathcal{L}$ APARTIR DE p, E APARTIR DISSO, ENCONTRAR A HAMILTONEANA RELATIVÍSTICA.

Sendo $\partial_{\dot q}\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}\{q, \dot q, t\}$, então, pelo método de ~~EUL~~ EULER

$$d\mathcal{L} = \partial_q \mathcal{L}\, dq + \partial_{\dot q}\mathcal{L}\, d\dot q$$

(NÃO tem sentido colocar $\partial_t \mathcal{L}$)

Como estamos trabalhando com uma partícula livre, então seu potencial $V(q) = 0$, com isso, $\partial_q \mathcal{L} = 0$, logo temos

$$d\mathcal{L} = \partial_{\dot q}\mathcal{L}\, d\dot q \Rightarrow d\mathcal{L} = mv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, dv$$

, agora, vamos integrar e encontrar $\mathcal{L}$.

$$\int d\mathcal{L} = m \int \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, dv$$

, colocando $\beta = \frac{v}{c} \Rightarrow d\beta = \frac{dv}{c} \Rightarrow dv = c\, d\beta$

$\hookrightarrow v = c\beta$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = mc^2 \int \frac{\beta\, d\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

; $u = 1 - \beta^2 \Rightarrow du = -2\beta\, d\beta \Rightarrow d\beta = \frac{-du}{2\beta}$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = -\frac{mc^2}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{mc^2}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}}\right] = -mc^2\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] + cte$$

com isso, colocando $cte = 0^*$, temos (* = hipótese)

$$\mathcal{L} = -mc^2\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] = -\frac{mc^2}{\gamma}$$

, com $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

SABENDO QUE A HAMILTONIANA SE CARACTERIZA PELA ENERGIA TOTAL DA PARTÍCULA, ELA PODE SER ENCONTRADA POR MEIO DE

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} p_i v_i - \mathcal{L}$$; N = dimensões do espaço, como só estamos em x, só temos 1, com p sendo relativístico

$$\mathcal{H} = m\gamma v^2 - \left(-\frac{mc^2}{\gamma}\right) + V = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} + V$$

DISSO, SABENDO QUE

$$v^2 = c^2 - \frac{c^2}{\gamma^2} ; \quad E_c = mc^2\gamma - mc^2$$

COLOCANDO*

ENCONTRAMOS

$$\mathcal{H} = m\gamma\left(c^2 - \cancel{\frac{c^2}{\gamma^2}}\right) + \cancel{\frac{mc^2}{\gamma}} + V = E_c + mc^2 + V = m\gamma c^2 + V$$

$$\boxed{\mathcal{H} = E_c + E_0 + V}$$

OU

$$\boxed{\mathcal{H} = m\gamma c^2 + V} \rightarrow \begin{matrix} m = m_0\gamma \Rightarrow \\ V = 0 \text{ (LIVRE)} \end{matrix} \boxed{\mathcal{H} = mc^2}$$

A ENERGIA TOTAL DE UMA PARTÍCULA LIVRE COM MASSA, É IGUAL À "mc^2"

PODEMOS IR ALÉM, SABENDO QUE

$$\gamma c = \sqrt{\gamma^2 v^2 + c^2}$$

$$\mathcal{H} = m\gamma c^2 + V = mc\sqrt{\gamma^2 v^2 + c^2} + V$$

$$\mathcal{H} = \sqrt{c^2(m^2\gamma^2) + m^2c^4} + V$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \sqrt{p^2c^2 + E_0^2} + V}$$

→ É PROVA, DA EXISTÊNCIA DE MASSA COM ENERGIA NEGATIVA (ANTI-MATÉRIA)

QUANDO A PARTÍCULA NÃO TEM MASSA → $E_0 = 0$

$$\boxed{\mathcal{H} = pc + V}$$

→ PROVA DA EXISTÊNCIA DE PARTÍCULAS COM MOMENTO, PORÉM SEM MASSA. EX: FÓTON