Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano
Campus Petrolina
Licenciatura em Física
Disciplina: Mecânica Estatística **Semestre:** 2022.2
Professor: Cícero Thiago Gomes dos Santos

— Soluções - Primeira Avaliação —

Nome: ______________________________ **Turno:** ______

1) (10 pts) No jogo roleta russa (*não* recomendado), insere-se um único cartucho no tambor de um revólver, deixando as outras cinco câmaras do tambor vazias. Então gira-se o tambor, aponta-se para a próprio cabeça e puxa-se o gatilho.
(a) (2 pts) Qual é a probabilidade de se estar vivo após jogar esse jogo N vezes?
(b) (2 pts) Qual é a probabilidade de sobreviver $(N-1)$ vezes nesse jogo e então ser baleado na N-ésima que se puxar o gatilho?
(c) (6 pts) Qual é o número médio de vezes que um jogador consegue puxar o gatilho neste jogo macabro?

Solução: Esse jogo é semelhante ao problema do passeio aleatório, em que há uma prob. de sucesso p (= estar vivo) e prob. de fracasso q e pergunta-se qual a prob. de obter N_1 sucessos (ou fracassos) em um total de N tentativas:

$$P(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}\, p^{N_1} q^{N-N_1}$$

(a) $N_1 = N$, $p = 5/6$ e $q = 1/6$ $\Longrightarrow$ $\boxed{P(N) = (5/6)^N}$
(b) (Prob. de ser baleado na N-ésima tentativa) = (prob. de sobreviver $N-1$ vezes seguidas)$\times$(prob. de ser baleado na N-ésima tentativa) $\Longrightarrow$ $\boxed{P(N) = (5/6)^{N-1}(1/6)}$
(c) O número médio de vezes que pode-se jogar antes da morte é dada por

$$\langle N_1\rangle = \sum_{N_1=0}^{\infty} N_1 P(N_1) = \sum_{N_1=0}^{\infty} N_1 \left(\frac{5}{6}\right)^{N_1-1}\left(\frac{1}{6}\right) = = \frac{1}{5}\sum_{N_1=0}^{\infty} N_1\left(\frac{5}{6}\right)^{N_1} = \frac{1}{5}\frac{5/6}{(1-5/6)^2} = \boxed{6}$$

2) (6 pts) Uma moeda (não viciada) é lançada 400 vezes. Calcule a probabilidade de se obter 215 caras. (Sugestão: use a aproximação gaussiana)

Solução: Com $N = 400$, $x = 215$, $\mu = \langle N\rangle = Np = 400\cdot(1/2) = 200$ e $\sigma^2 = Npq = 100$:

$$W(n=215) = \frac{1}{100\cdot\sqrt{2\pi}} e^{-(215-200)^2/2\cdot 100} = \boxed{0.13\,\%}$$

3) (12 pts) Suponha que a densidade de probabilidade para a velocidade s de um carro em uma rodovia é dada por

$$\rho(s) = A\, s \exp\left(-s/s_0\right)$$

em que $0 \leqslant s \leqslant \infty$, e A e s são constantes positivas. Mais explicitamente, $\rho(s)ds$ dá a probabilidade de que o carro esteja com uma velocidade entre s e $s + ds$.
(a) (2 pts) Determine A em termos de s_0.
(b) (2 pts) Qual é o valor médio da velocidade?
(c) (2 pts) Qual é a velocidade "mais provável": isto é, a velocidade para a qual a densidade de probabilidade tem um máximo.
(d) (6 pts) Qual é a probabilidade de que um carro tenha uma velocidade maior que três vezes o valor médio?

Solução:

(a) $\int_0^\infty \rho(s)ds = 1 \implies A\int_0^\infty se^{-s/s_0}ds = 1 \implies As_0^2 = 1 \implies \boxed{A = 1/s_0^2}$

(b) $\langle s\rangle = \int_0^\infty s\rho(s)ds \implies \langle s\rangle = A\int_0^\infty s^2e^{-s/s_0}ds \implies \langle s\rangle = A2s_0^3 \implies \boxed{\langle s\rangle = 2s_0}$

(c) $d\rho/ds = 0 \implies \frac{Ae^{-\frac{s}{s_0}}(s_0-s)}{s_0} = 0 \implies \boxed{s = s_0}$

(d) $P(s > 6s_0) = A\int_{6s_0}^\infty se^{-s/s_0}ds = A7s_0^2/e^6 \implies \boxed{P(s > 6s_0) = 0,017}$

4) (22 pts) Uma substância tem as seguintes propriedades:
(i) A temperatura constante T_0, o trabalho realizado pelo sistema em uma expansão de V_0 a V é

$$W = RT_0 \ln \frac{V}{V_0}$$

(ii) A entropia é dada por

$$S = R\,\frac{V}{V_0}\left(\frac{T}{T_0}\right)^a$$

em que V_0, T_0 e a são constantes.
(a) (18 pts) Obtenha a energia livre de Helmholtz.
(b) (2 pts) Obtenha a equação de estado.
(c) (2 pts) Obtenha o trabalho realizado a uma temperatura constante e arbitrária T.

Solução:

(a) Partindo de $dF = -SdT - PdV$ a integração pode ser feita pelo caminho: do ponto (V_0, T_0) isotermicamente até (V, T_0); depois isocoricamente até (V, T):

$$F(V,T_0) - F(V_0,T_0) = -\int_{V_0}^{V} PdV = -W = -RT_0 \ln\frac{V}{V_0}$$

e

$$F(V,T) - F(V,T_0) = -\int_{T_0}^{T} SdT = -\int_{T_0}^{T} R\,\frac{V}{V_0}\left(\frac{T'}{T_0'}\right)^a dT' = -R\,\frac{VT_0}{(a+1)V_0}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1} - 1\right]$$

Somando as duas expressões

$$\boxed{F(V,T) = -RT_0\ln\frac{V}{V_0} - R\,\frac{VT_0}{(a+1)V_0}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1} - 1\right] + F(V_0,T_0)}$$

(b)

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \boxed{-RT_0\left\{\frac{1}{V} + \frac{1}{(a+1)V_0}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1} - 1\right]\right\}}$$

(c)

$$W = -\int_{V_0}^{V} PdV = RT_0\int_{V_0}^{V}\left\{\frac{1}{V} + \frac{1}{(a+1)V_0}\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1} - 1\right]\right\}dV$$

$$\boxed{W = RT_0\left\{\ln\frac{V}{V_0} + \frac{1}{(a+1)}\left(\frac{V}{V_0}\right)\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1} - 1\right]\right\} + C(T)}$$

Fórmulas úteis:

$$W(N_1) = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!}\,p^{N_1}q^{N-N_1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$F = F(T,V,N) \qquad dF = -SdT - PdV$$