Cours de statistiques descriptive

Rédiger par Djiazet Aliphe.G

Tél : 698443166 e-mail : aliphedjiazet@yahoo.fr

Bibliographie

[1] J. Blard-Laborderie, *L'essentiel des outils de statistique descriptive pour aborder des études en sciences humaines et sociales, 2015.*
[2] G. Calot, *Cours de statistique descriptive, Dunod, 1969.*
[3] G. Chauvat and J.-P. Reau, *Statistiques descriptives, Armand Colin, 2002.*
[4] M. Tenenhaus, *statistique : Méthodes pour décrire, expliquer et prévoir, Dunod, 2006.*
[5] J.-J. Droesbeke, *Éléments de statistiques, Ellipses, 2001.*
[6] L. Leboucher and M.-J. Voisin, *Introduction à la statistique descriptive, 2013.*
[7] F. Mazerolle, *Statistique descriptive, 2009.*
[8] B. Oukacha and M. Benmessaoud, *Statistique descriptive et calcul des probabilités, 2013.*
[9] J.-Y. Ouvrard, *Probabilités : Tome 1, 2001.*
[10] P. Roger, *Probabilités, statistique et processus stochastiques, Pearson Education,2004.*
[11] J. Vaillant, *Eléments de Statistique descriptive, 2015.*

<u>Préambule</u>

Le cours a pour but d'initier les étudiants aux principes de base de la statistique.

Le cours vise principalement à introduire et faire méditer les concepts fondamentaux et méthodes élémentaires de la statistique pour permettre un apprentissage autonome ultérieur de méthodes complémentaires.

On veut développer le sens critique nécessaire lors de la mise en œuvre et de l'interprétation d'un traitement statistique. Pour cela, on introduira et utilisera un cadre mathématique rigoureux. Nous fournirons autant d'exemples et de figures nécessaires afin d'obtenir une meilleure compréhension du cours.

La statistique descriptive a pour but d'étudier un phénomène à partir de données. Cette description se fait à travers la présentation des données (la plus synthétique possible), leur représentation graphique et le calcul de résumés numériques.

Présenter les données statistiques ...

Savoir calculer et interpréter les différentes paramètres statistiques

Mots clés
distribution statistique, diagramme en barre, histogramme, moyenne, médiane, mode, variance, écart type

La place de ce cours permet aux étudiants dans leur futur métier:

– D'analyse des données (outils scientifiques permettant de résumer un ensemble de données afin de mettre en évidence l'information).
– Simulations (processus stochastique - variable temporelle)
– Prédiction et décisions (probabilités de risque ou d'occurrence)

Introduction générale

La statistique est l'étude de la collecte de données, leur analyse, leur traitement, l'interprétation des résultats et leur présentation afin de rendre les données compréhensibles par tous. C'est à la fois une science, une méthode et un ensemble de techniques.

L'analyse des données est utilisée pour d'écrire les phénomènes étudiés, faire des prévisions et prendre des décisions à leur sujet.

Les données étudiées peuvent être de toute nature, ce qui rend la statistique utile dans tous les champs disciplinaires et explique pourquoi elle est enseignée dans toutes les filières universitaires, de l'économie à la biologie en passant par la psychologie et bien sûr les sciences de l'ingénieur. La statistique consiste à :

– Recueillir des données.

– Présenter et résumer ces données.

– Tirer des conclusions sur la population étudiée et d'aider à la prise de décision.

1 Généralités sur la statistique

1.1 Vocabulaire

1.1.1 Épreuve statistique

Définition1 *L'épreuve statistique est une expérience que l'on provoque*.

L'expérience est l'étape préliminaire à toute étude statistique. Il s'agit de prendre "contact" avec les observations.

<u>Exemple 1</u> (La durée de vie des lampes)

Imaginons le cas suivant : un fabricant d'ampoules électriques ayant le choix entre 4 types de filaments, se propose d'étudier l'influence de la nature du filament sur la durée de vie des ampoules fabriquées. Pour ce faire, il va faire fabriquer 4 échantillons d'ampoules identiques, sauf en ce qui concerne le filament, faire brûler les ampoules jusqu'à extinction, puis comparer les résultats obtenus.

1.1.2 Population

En statistique, le terme de population s'applique à tout objet statistique étudié, qu'il s'agisse d'étudiants (d'une université ou d'un pays), de ménages ou de n'importe quel autre ensemble sur lequel on fait des observations statistiques.

Définition2 *On appelle population l'ensemble sur lequel porte notre étude statistique. Cet ensemble sera noté* Ω.

Exemple 2

– On considère l'ensemble des étudiants de la section A. On s'intéresse aux nombre de frères et sœurs de chaque étudiant. Dans ce cas Ω*= ensemble des étudiants de la section A.*

– Si l'on s'intéresse maintenant à la marque automobile circulant dans Libreville, la population est alors constituée de l'ensemble des véhicules susceptibles de circuler dans Libreville.

1.1.3 Individu (unité statistique)

Une population est composée d'individus. Les individus qui composent une population statistique sont appelés unités statistiques.

Définition3 *On appelle individu tout élément de la population* Ω*, il est noté* ω.

Exemple 3

– Dans l'exemple indiqué ci-dessus, un individu est tout étudiant de la section A.

– Si on étudie la production annuelle d'une usine de boîtes de boisson en métal (canettes). La population est l'ensemble des boîtes produites durant l'année et une boîte constitue un individu.

1.1.4 Caractère (variable statistique)

La statistique « descriptive », comme son nom l'indique cherche à décrire une population donnée. Nous nous intéressons à la caractéristique des unités qui peuvent prendre différentes valeurs.

Définition4 *On appelle caractère (ou variable statistique) la caractéristique d'un individu ou de la population.*

Exemple 4

Taille, nationalité, couleur des yeux, type de Bac, nombre d'enfant,…

Remarque 1 : La taille de la population est égale au nombre d'individus on note $\text{card}\Omega = N$

1.1.5 Modalités

Les modalités d'une variable statistique sont les différentes valeurs que peut prendre celle-ci.

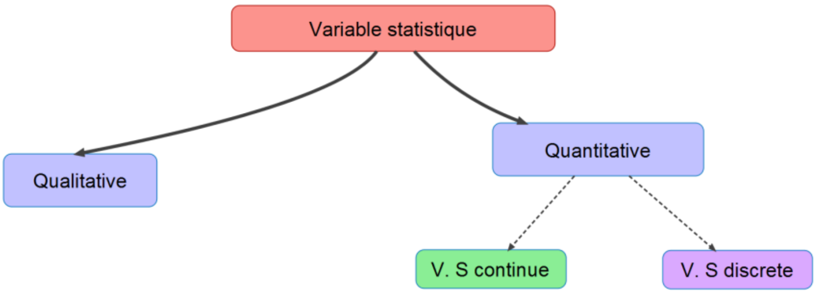
Exemple 5

- *Variable « situation familiale » peut avoir pour Modalités « célibataire, marié, divorcé »*
- La variable « type de bac » peut avoir pour les modalités sont « A, B, C,D, G »

Les modalités sont les différentes situations dans lesquelles les individus peuvent se trouver à l'égard du caractère considéré.

1.2 Type des caractères

Nous distinguons deux catégories de caractères : les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.



1.2.1 Caractère qualitatif

Lorsque la variable ne se prête pas à des valeurs numériques, elle est dite qualitative

Par exemple : opinions politiques, couleurs des yeux...

Exemple 6

L'état d'une maison : on peut considérer les modalités suivantes

– Ancienne.

– Dégradée.

– Nouvelle

1.2.2 Caractère quantitatif

Lorsque la variable peut être exprimée numériquement, elle est dite quantitative (ou mesurable). Dans ce cas, elle peut être discrète ou continue.

- Une variable discrète prend que des valeurs entières isolées (exemple : nombre d'enfants d'une famille).
- Une variable est continue lorsqu'elle peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle fini ou infini (exemple : diamètre de pièces, salaires...).

1.3 Représentation graphique

On distingue les méthodes de représentation d'une variable statistique en fonction de la nature de cette variable (qualitative ou quantitative). Les représentations recommandées et les plus fréquentes sont les diagrammes (graphe).

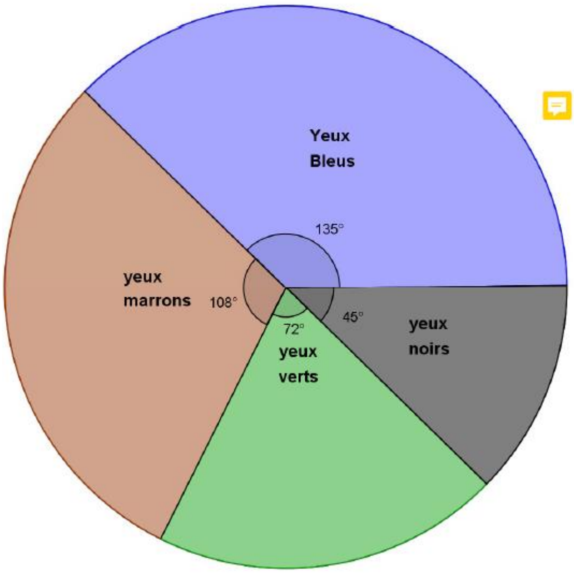
1.3.1 Diagramme circulaire

Le diagramme circulaire donne pour chaque fréquence un secteur angulaire bien évidemment proportionnel. Après avoir déterminé les fréquences, on construit un tableau de proportionnalité entre les fréquences et les angles (sachant que 1 correspond à 360°)

<u>Exemple7</u> : On étudie la couleur des yeux chez 40 étudiants de 1ère année.

Modalités	bleu	marron	vert	noir	total
Effectifs	15	12	8	5	40
Fréquences	0,375	0,3	0,2	0,125	1
Angle (en °)	135	108	72	35	360

X360



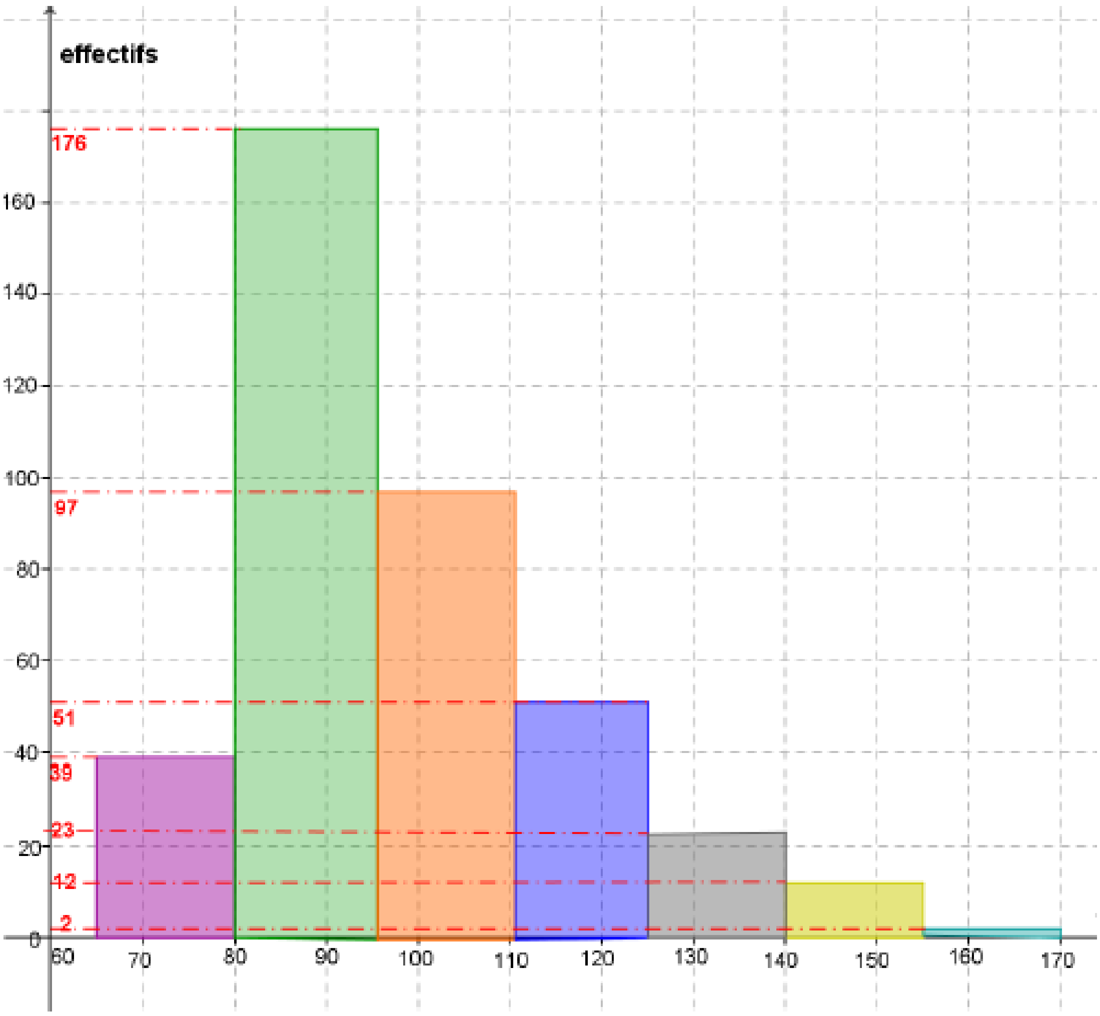
1.3.2 Histogramme

Pour représenter graphiquement une série statistique donnée par des classes, on utilise peut un histogramme, avec en abscisses les classes des valeurs du caractère.
Un histogramme est constitué de rectangles juxtaposés ; la largeur de chaque rectangle correspond à l'intervalle de la classe correspondante ; sa hauteur est telle que l'aire du rectangle est proportionnelle à l'effectif de la classe.

<u>Exemple8</u> :

On étudie les dépenses mensuelles effectuées par 400 clients enregistrés dans un supermarché.

Dépense en millier de FCFA	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95;110[	[110;125[	[125;140[	[140; 155[	[155 ;170[
Effectif	39	176	97	51	23	12	2



1.3.3 Courbe des effectifs cumulés

Pour tracer la courbe des effectifs cumulés croissants (ou décroissants):

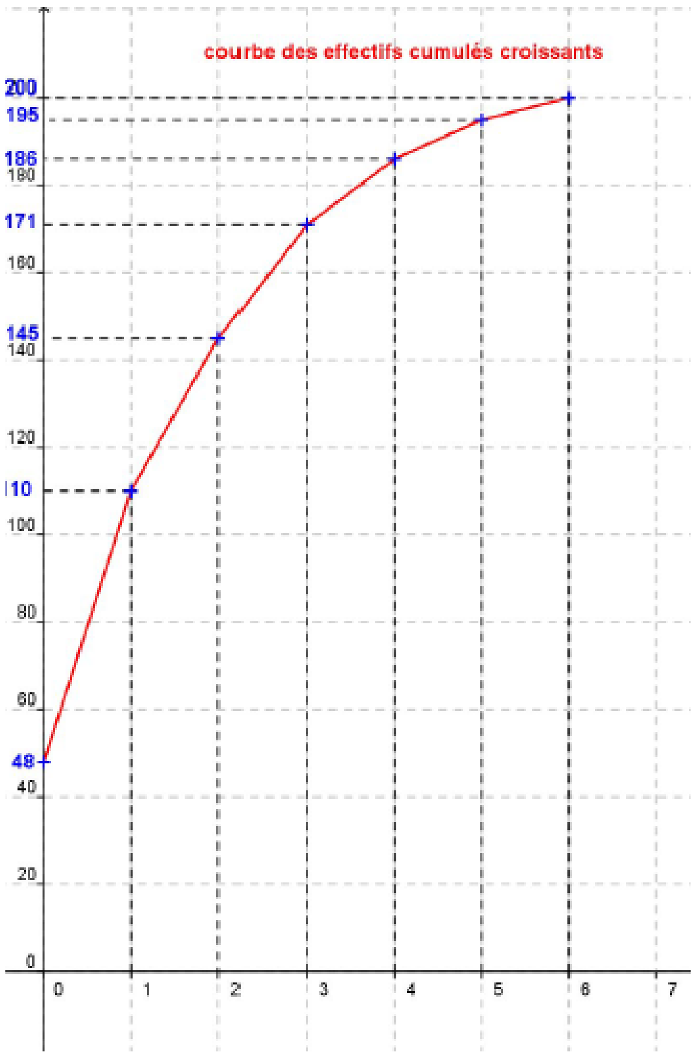
On complète le tableau en calculant les effectifs cumulés croissants (ou décroissants)

On trace dans un repère le point dont l'abscisse est la modalité et l'ordonnée l'effectif cumulé qui lui correspond.

On trace les segments qui relient chaque point du plan

Exemple 9: On étudie le nombre d'enfants dans 200 familles d'un village. On regroupe les résultats dans le tableau ci-dessous :

Modalité	0	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Effectifs	48	62	35	26	15	9	5

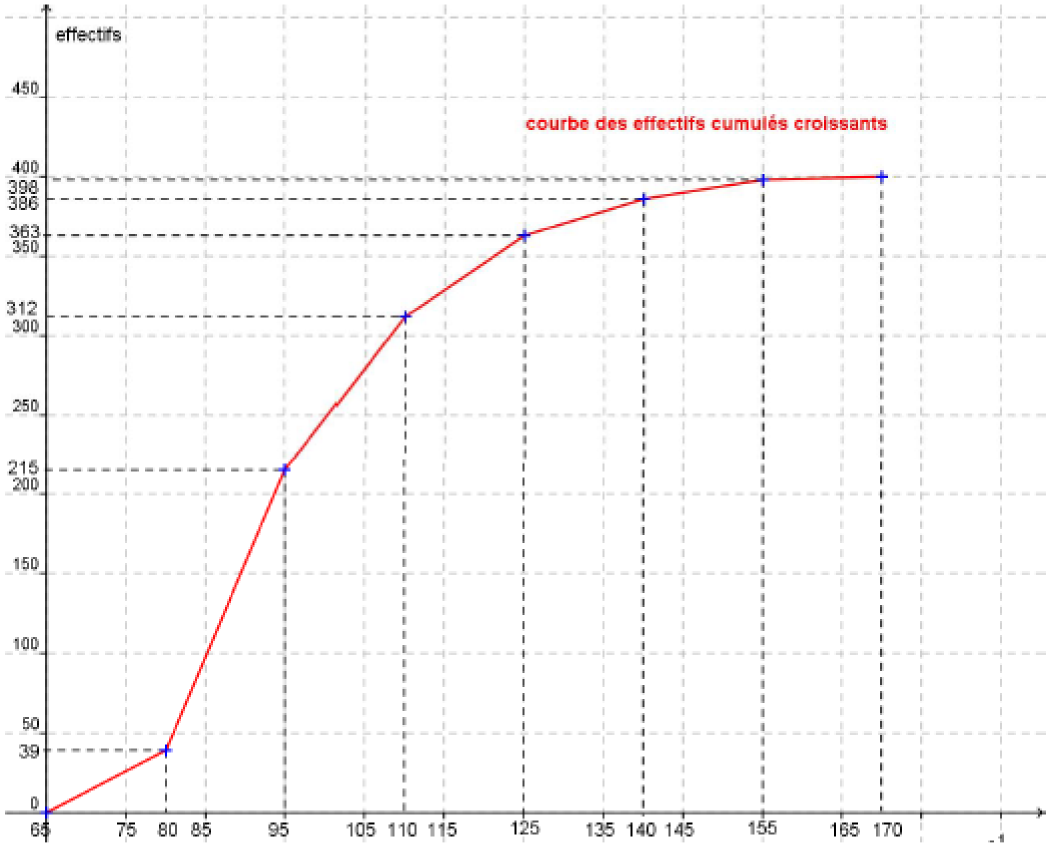


Exemple 10 : Cas où les données sont regroupées en classe :

Reprenons l'exemple 8) où l'on étudie les dépenses mensuelles effectuées par 400 clients enregistrés dans un supermarché.

Dépense en millier de FCFA	[65 ; 80[	[80 ; 95[	[95;110[	[110;125[	[125;140[	[140; 155[	[155 ;170[
Effectif	39	176	97	51	23	12	2
ECC	39	215	312	363	386	398	400

aliphedjiazet@yahoo.fr



Remarque : on dresse de la même façon la courbe des fréquences cumulées

1.4 Exercices d'applications

Exercice 1

- *La variable statistique "couleur de maisons d'un quartier" est-elle :*

  ⊙ *Qualitative* ⊙ *quantitative*

  ⊙ *Discrète* ⊙ *continue*

- *La variable statistique "revenu brut" est-elle :*

  ⊙ *qualitative* ⊙ *quantitative*

  ⊙ *discrète* ⊙ *continue*

- *La variable statistique "nombre de maisons vendues par ville" est-elle :*

  ⊙ *qualitative* ⊙ *quantitative*

  ⊙ *discrète* ⊙ *continue*

Exercice 2

- Parmi ces assertions, préciser celles qui sont vraies, celles qui sont fausses.

1. On appelle variable, une caractéristique que l'on étudie.

2. La tâche de la statistique descriptive est de recueillir des données.

3. La tâche de la statistique descriptive est de présenter les données sous forme de tableaux, de graphiques et d'indicateurs statistiques.

4. En Statistique, on classe les variables selon différents types.

5. Les valeurs des variables sont aussi appelées modalités.

6. Pour une variable qualitative, chaque individu statistique ne peut avoir qu'une seule modalité.

7. Pour faire des traitements statistiques, il arrive qu'on transforme une variable quantitative en variable qualitative.

8. La variable quantitative poids d'automobile peut être reclassée en compacte, intermédiaire et grosse.
9. En pratique, lorsqu'une variable quantitative discrète prend un grand nombre de valeurs distinctes, on la traite comme continue.

Exercice 3
- Proposer des exemples de variable quantitative transformée en variable qualitative. Préciser les modalités de cette dernière.
Exercice 4
- Pour les sujets d'étude qui suivent, spécifier : l'unité statistique, la variable statistique et son type,
1. Étude du temps de validité des lampes électriques.
2. Étude de l'absentéisme des ouvriers, en jours, dans une usine.
3. Répartition des étudiants d'une promotion selon la mention obtenue sur le diplôme du Bac.
4. On cherche à modéliser le nombre de collisions impliquant deux voitures sur un ensemble de 100 *intersections routières choisies au hasard dans une ville. Les données sont collectées sur une période d'un an et le nombre d'accidents pour chaque intersection est ainsi mesuré.*
Exercice5

Le tableau suivant donne la répartition selon le groupe sanguin de 40 individus pris au hasard dans une population,

Groupes sanguins	*A*	*B*	*AB*	*O*
L'effectif	*20*	*10*	$n3$	*5*

1. Déterminer la variable statistique et son type.
2. Déterminer l'effectif des personnes ayant un groupe sanguin AB.
3. Donner toutes les représentations graphiques possibles de cette distribution.

2 Caractéristiques d'une distribution

2.1 Paramètres de position (caractéristique de tendance centrale)

Les indicateurs statistiques de tendance centrale (dits aussi de position) considérés fréquemment sont la moyenne, la médiane et le mode.

2.1.1 Le mode

Le mode d'une V.S est la valeur qui a le plus grand effectif (ou la plus grande fréquence) et il est noté parM_0.

Remarque2 : Mode parfois appelé "valeur dominante" il *peut avoir plus d'un mode ou rien.*

- **Cas d'une variable *discrète*** :

Le mode se détermine facilement et avec précision.
Exemple 1 :
Taille des logements (résidences principales) dans une ville en 2018

Nombre de pièces	1	2	3	4	total
Nbre de logements,	1 589	3 178	5 418	15 862	26 046
En %	*6,1%*	*12,2%*	*20,8%*	*60,9%*	*100%*

Mo = 4 pièces   i.e. les résidences principales les plus nombreuses en 2018 comptaient au moins 4 pièces.

- **Cas d'une variable *continue* :**

Détermination moins précise du mode car les valeurs sont regroupées en classes.

Classe modale : classe qui a le plus grand effectif ou la plus grande fréquence..

Ici le mode est le centre de la classe modale

Exemple

- **Intérêt du mode**

Très simple à calculer et à comprendre.

Donne une 1ère idée de la tendance centrale de la série.

2.1.2 La médiane

Médiane, notée **Me** : valeur de la variable telle qu'il y a **autant d'individus** ayant une valeur **inférieure** que **d'individus** ayant une valeur **supérieure**.

Elle s'obtient à partir de la Fréquence cumulée (F) ou de l'effectif cumulé (N)

Me est telle que F(Me)=$\frac{1}{2} = 50\% \iff$ N$(Me) = \frac{N}{2}$

<u>Détermination de la médiane</u>

- **Cas d'une variable *discrète*** :

Étant donnée une variable quantitative discrète sur une population de taille N, la Médiane est la donnée dont le rang est $\frac{N+1}{2}$ **si N impair** ou la <u>moyenne arithmétique</u> des données de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ **si N pair**, dans la liste des données écrites par ordre croissant.

<u>**Exemple2**</u>

Premier cas.

On considère une population composée de 11 personnes et la variable âge qui associe à chaque individu son âge en nombre d'années révolues.

Voici la liste des âges : 8 ; 9 ; 15 ; 20 ; 21 ; 12 ; 15 ; 16 ; 22 ; 25 ; 13

Il suffit donc pour déterminer cet âge (appelé âge médian), d'écrire la liste des données par ordre croissant : 8 9 12 13 15 **15** 16 20 21 22 25

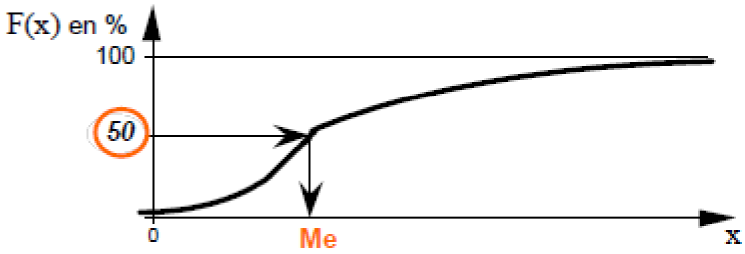
Deuxième cas.

On considère maintenant une population composée de 12 personnes et toujours la même variable âge. Voici la liste des données (des âges) écrites par ordre croissant :

8 12 14 15 16 **17 18** 18 19 19 20 20 ici la médiane est **17.5**

- **Médiane d'une variable continue**
  - On peut toujours définir strictement la médiane d'une variable continue.

Graphiquement à partir du polygone des fréquences ou effectifs cumulés,



- On peut procéder par **interpolation linéaire** (règle de trois).

On commence par identifier la **classe médiane** :

classe [i ; j] telle que $F_i < 50 < F_j$ (F est le fréquence cumulée en pourcentage)

Pour estimer la valeur de la médiane, on suppose que les individus se répartissent uniformément à l'intérieur de la classe médiane.

On a : $\begin{cases} \boldsymbol{i < Me < j} \\ F_i < 50 < F_j \end{cases}$

Donc $\frac{\boldsymbol{Me-i}}{50-F_i} = \frac{\boldsymbol{j-i}}{F_j-F_i}$

<u>Exemple3</u> :

Ancienneté des ménages dans la résidence principale en 2018.

Années d'anncienneté	**[0, 5[**	**[5,10[**	**[10, 20[**	**[20, 30[**	**[30, 50[**
Fréquence	***33,5%***	***18,6%***	***18,3%***	***13,9%***	***15,7%***
Fréqu. cumulées	**33,5%**	**52,1%**	**70,4%**	**84,3%**	**100,0%**

33,5% $<$ 50% $<$52,1% donc 5$<$ $\boldsymbol{Me}$ $<$10

Ainsi $\frac{\boldsymbol{Me-5}}{\boldsymbol{50-33.5}} = \frac{\boldsymbol{10-5}}{\boldsymbol{52.1-33.5}} \Leftrightarrow \boldsymbol{Me = 9,43}$ années

. <u>Intérêt de la médiane</u>

- Se calcule rapidement et sa signification est claire.
- Elle n'est pas affectée par des observations aberrantes.

2.1.3 La moyenne

Le plus souvent, la moyenne pertinente est la moyenne **arithmétique**.

- **Cas d'une variable *discrète*** :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{N}} \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x_i n_i} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x_i f_i}$$

La moyenne ne correspond généralement pas à une valeur observée de la variable.

- **Cas d'une variable *discrète*** :

On détermine le *centre de chaque classe* et,

aliphedjiazet@yahoo.fr

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} c_i n_i = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i$$

La moyenne arithmétique est dite moyenne pondérée; cela signifie que chaque valeur de la variable est multipliée (pondérée) par un coefficient, ici par l'effectif *ni* qui lui correspond. Dans ce cas, chaque valeur *xi* de la variable intervient dans le calcul de la moyenne autant de fois qu'elle a été observée. On parle de moyenne arithmétique simple quand on n'effectue pas de pondération. Par exemple, si 5 étudiants ont pour âge respectif 18, 19, 20, 21 et 22 ans, leur âge moyen est donné par

(18 + 19 + 20 + 21 + 22)/5 = 20 ans.

Remarque :

Nous mentionnons qu'il existe d'autres moyennes que la moyenne arithmétique

2.2 Les caractéristiques de dispersion (variabilité)

Dispersion Mesure dans laquelle les valeurs de la variable se distinguent les unes des autres.

Les caractéristiques de dispersion les plus utilisées sont l'*étendue*, les *rapports interquantiles*, l'*écart absolu moyen* et, surtout, l'*écart-type*.

2.2.1 L'étendue

La différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère, donnée par la quantité

$$e = x_{max} - x_{min}$$

Le calcul de l'étendue est très simple. Il donne une première idée de la dispersion des observations. C'est un indicateur très rudimentaire et il existe des indicateurs de dispersion plus élaborés.

2.2.2 Intervalles et rapports interquantiles

Se déterminent à partir des quantiles.

Détermination des quantiles

Quantile = caractéristique de position ; même nature que la médiane.

- Les **quartiles** sont les valeurs de la variable qui partagent la série en **4** sous-ensembles de même effectif.

3 quartiles : Q_1 Q_2 Q_3 avec F(Q_1) = 25% ; F(Q) = 50% ; F(Q_3) = 75%

$$N(Q_1) = \frac{N}{4};\ N(Q) = \frac{N}{2}\ ;\ N(Q_3) = \frac{3N}{4}$$

Remarque: Q2 = Me

- Les **déciles** sont les valeurs de la variable qui partagent la série en **10** sous-ensembles de même effectif.

⇒ 9 déciles: **D1**, **D2**,…, **D9** avec F(D1)= 10% F(D2)= 20% etc.. Jusqu'à F(D9)=90%

Remarque: D5 = Me

- Les (per)**centiles** sont les valeurs de la variable qui partagent la série

en **100** sous-ensembles de même effectif.

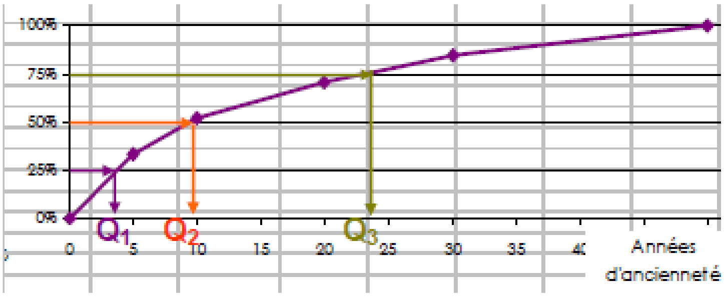
⇒ 99 centiles: **P1**, **P2**,…, **P99** avec F(D1)= 1% F(D2)= 2% etc.. Jusqu'à F(D99)=9%

Remarque : P50 = Me

Les quantiles se déterminent de la même façon que la médiane.

Graphiquement à partir de la courbe cumulative.

Ancienneté dans le logement



Algébriquement (variable continue), même type de formule que pour la médiane.

Illustration avec les *quartiles*.

On détermine les classes qui contiennent chaque quartile.

Si $F_i < 25 < F_j$ alors Q1∈[i ; j] donc $\frac{Q1-i}{25-F_i} = \frac{j-i}{F_j-F_i}$

Si $F_k < 75 < F_t$ alors Q3∈[k ; t] donc $\frac{Q3-k}{75-F_k} = \frac{t-k}{F_t-F_k}$

Exemple 4:

Ancienneté des ménages dans la résidence principale en 2018.

Années d'anncienneté	**[0, 5[**	**[5,10[**	**[10, 20[**	**[20, 30[**	**[30, 50[**
Fréquence	***33,5%***	***18,6%***	***18,3%***	***13,9%***	***15,7%***
Fréqu. cumulées	**33,5%**	**52,1%**	**70,4%**	**84,3%**	**100,0%**

Q1= 3,7années et Q3= 23.3 années

- **Intervalle interquantile**
  - Intervalle interquantile = [1er quantile, dernier quantile[
  - Distance interquantile = dernier quantile – 1er quantile

Plus l'intervalle interquantile est réduit,

i.e. plus la distance interquantile est faible, **moins la dispersion est forte**.

Exemple : intervalle inter**quartile = [Q1, Q3[**

2.2.3 La variance- écart type

On appelle variance de la série statistique *X*, le nombre

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2 \quad = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2$$

On dit que la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne *x*.

L'écart-type σx est la **racine carrée de la variance** : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

- L'écart-type est une **moyenne quadratique** ⇒ Parfois appelé *écart quadratique moyen*.
- Pour simplifier le calcul de la variance, on utilise sa ***formule*** König-Huygens :

$$V(X) = \ = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i}^2 - (\overline{x})^2$$

➢ La variance est la *moyenne des carrés des valeurs* diminuée du *carré de la moyenne de la série*.

Exemple6: On vérifiera que l'écart-type de l'ancienneté dans le logement est de **13,3 années.**

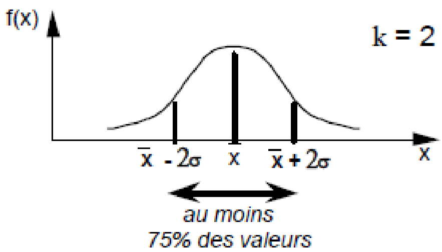
Pour simplifier encore les calculs (notamment quand valeurs numériques élevées), on peut opérer un *changement de variable*. On définit une *variable auxiliaire* x', transformation linéaire de la variable x :

$x'_i = \frac{x_i - b}{a}$ et on aura $\overline{x'_\iota} = \frac{\overline{x} - b}{a}$ ***et*** $V(x') = \frac{V(x)}{a^2}$ ainsi $\bar{x} = a\,\overline{x'_\iota}$ +b et $V(x) = a^2 V(x')$

. Intérêt de l'écart-type

- Mesure de dispersion très utilisée. Cependant, interprétation pas très claire, beaucoup moins claire que celle de l'écart absolu moyen. il lui est donc toujours supérieur.
- *Plus il est petit, plus les caractères sont concentrés autour de la moyenne (on dit que la série est homogène).*
- *Plus il est grand, plus les caractères sont dispersés autour de la moyenne (on dit que la série est hétérogène).*
- L'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev** permet d'éclairer la signification de l'écart-type.

Soit k un nombre positif, l'intervalle $[\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma]$ contient une proportion des valeurs au moins égale à $\mathbf{1} - \frac{1}{k^2}$



2.2.4 Décomposition de la variance

Considérons une population statistique P composée de deux sous populations,

P1 et P2, d'effectifs respectifs n1 et n2, avec n1 + n2 = N (effectif de la population totale).

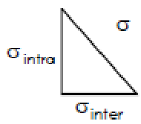
Notons **V1(x)** la variance étudiée sur la sous-population P1 et $\bar{x}_1$ sa moyenne,

V2(x) la variance de la variable étudiée sur la sous-population P2 et $\overline{x_2}$ sa moyenne.

On montre que

$$\textbf{V(x)} = \frac{1}{N}[n_1 V_1(x) + n_2 V_2(x)] + \frac{1}{N}[n_1(\overline{x_1} - \overline{x})^2 - n_2(\overline{x_2} - \overline{x})^2]$$

= Moyenne des variances (Variance ***intra***population)+ Variance des moyennes(Variance ***inter***populations)



2.2.5 Le coefficient de variation.

Le coef. de variation est égal au **rapport de l'écart-type à la moyenne** :

CV=$\frac{\sigma_x}{\bar{X}}$

Exemple . : Ecart-type de l'ancienneté dans le logement = 13,3 années

Ancienneté moyenne = 14,7 années

CV = 13,3/14,7 = 0,905 = 90,5%

2.3 Exercices d'applications

Exercice 2.1

Classer ces statistiques selon leurs natures (indicateur de position ou de dispersion)

	Minimum	Moyenne	Écart-type	Mode	Médiane	intervalle inter**quartile**
Position						
Dispersion						

Exercice 2.2

- Le gérant d'un magasin vendant des articles de consommation courante a relevé pour un article particulier qui semble connaître une très forte popularité, le nombre d'articles vendus par jour. Son relevé a porté sur les ventes des mois de Mars et Avril, ce qui correspond à

52 jours de vente. Le relevé des observations se présente comme suit :

13 8 10 9 12 10 8 9 10 6 14 7 15 9 11 12 11 12 5 14 11 8 10 14 12 8

5 7 13 12 16 11 9 11 11 12 12 15 14 5 14 9 9 14 13 11 10 11 12 9 15.

1. Quel type est la variable statistique étudiée.
2. Déterminer le tableau statistique en fonction des effectifs, des fréquences, des effectifs cumulés et des fréquences cumulés.
3. construire le polygone des fréquences cumulées
4. *Calculer le mode Mo et la moyenne arithmétique $\bar{x}$.*
5. *Déterminer à partir du tableau puis à partir du graphe, la valeur de la médiane Me.*
6. *Calculer la variance et l'écart-type.*

Exercice2.3

On considère deux groupes d'étudiants. Nous relevons leurs notes d'examens dans les deux tableaux suivants :

Note (groupe A)	8	9	*10*	*11*
Effectif	*2*	*2*	*1*	*1*

Note (groupe B)	6	8	*9*	*13*	*14*
Effectif	*2*	*2*		*1*	*1*

1. *Calculer la moyenne et l'écart type de chaque groupe. Comparer les deux groupes.*
2. *Calculer les variances intra et inter population puis l'écart type des notes de tous les étudiants.*

3. *Donner le pourcentage des étudiants donc la note appartient à l'intervalle* $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$

Exercice 2.4

Un quartier résidentiel comprend 99 unités d'habitation ayant une valeur locative moyenne de 10000 ha. Deux nouvelles unités d'habitation sont construites dans le quartier: l'une a une valeur locative de 7000 ha et l'autre, une villa luxueuse, a une valeur locative de 114000 ha.

– Quelle est la nouvelle moyenne de valeur locative pour le quartier ?

Exercice2.5

- Une étude sur le budget journalière auprès des étudiants de première année a donné les résultats suivants

Budget X	Fréquence cumulée	Fréquences
[800, 1000[	0.08	
[1000, 1400[	0.18	
[1400, 1600[	0.34	
[1600, β[	0.64	
[β, 2400[	0.73	
[2400, α[	1	

Le travail demandé :

– Certaines données sont manquantes. Calculer la borne manquante α sachant que l'étendue de la série est égale à 3200*.*

– Calculer les fréquences dans le tableau.

– Calculer la borne manquante β dans les deux cas suivants :

1. Le budget moyen est égal à 1995*.*

2. Le budget médian est égal à 1920*.*

Exercice 2.6

- On considère la variable "temps vécu dans le logement" pour laquelle on a obtenu le tableau d'effectifs suivants :

xi	[0, 1[	[1, 2[	[2, 3[	[3, 5[	[5, 11[	[11, 16[	[16, 21[	[21, 26[
ni	*35*	*36*	*32*	*25*	*20*	*18*	*16*	*7*

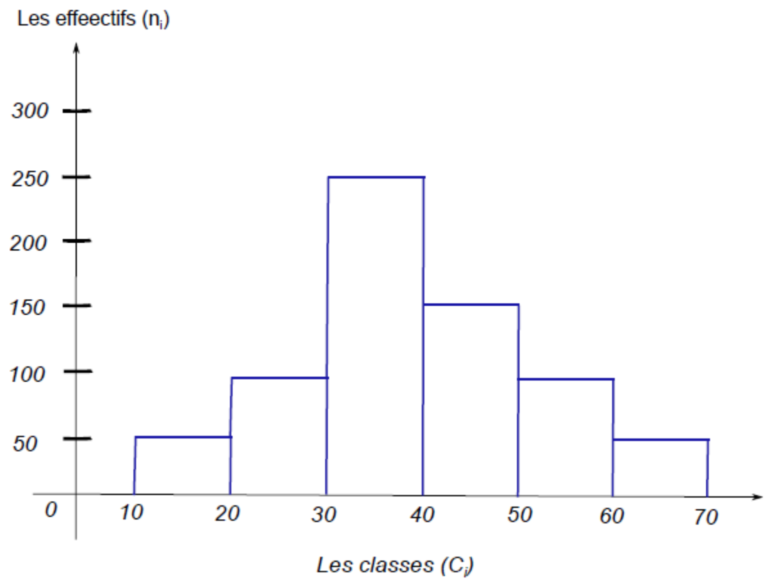
1. Quel est le type de cette variable ?

2. Déterminer la médiane ainsi que les 1*er et* 3*ème quartiles. Interpréter ces différents indices de position.*

3. A cause d'une erreur de saisie, la borne supérieure 26 a été remplacée par 66*, cela a-t-il un impact sur la détermination de la médiane ?*

Exercice 2.6

- Dans une gare routière, on évalue le temps d'attente des voyageurs en minutes. Voici l'histogramme des fréquences absolues de cette variable.



1. Déterminer la variable statistique X et son type et sa population.

2. Déterminer le nombre de voyageurs.

3. Depuis le graphe, déterminer le tableau statistique.

4. Tracer la fonction cumulative.

5. Déterminer le mode graphiquement et dire ce que représente cette valeur par rapport à notre étude.

6. Calculer la médiane à partir du graphe de la fonction cumulative.

7. Calculer la moyenne et l'écart type.

Exercice 2.7

- Le traitement de l'information sur un caractère X a permis de dresser sa fonction cumulative (fonction de répartition dans la figure ci-dessous).

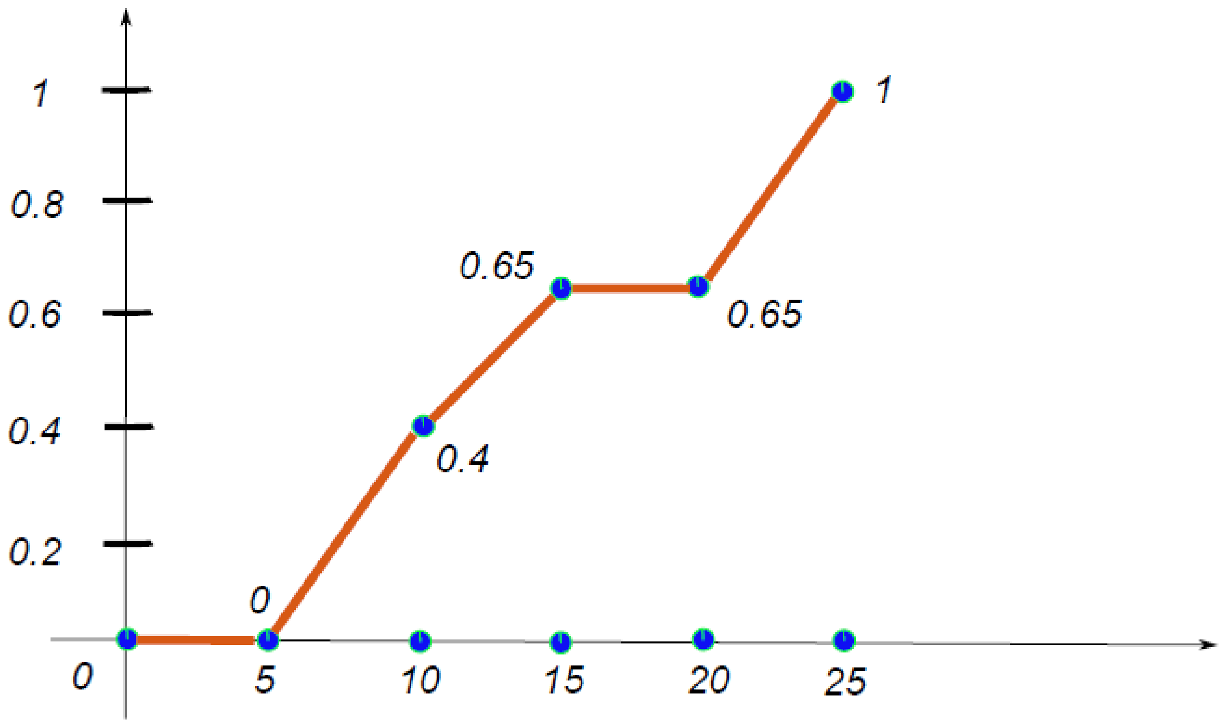
1. Dresser le tableau statistique du caractère X.

2. Tracer l'histogramme du caractère X.

3. Calculer la moyenne et l'écart type.

4. Déduire graphiquement la médiane.

5. Déduire graphiquement le mode.



Fonction cumulative ou fonction de répartition

3 Les indices statistiques

Pré requis:

La fonction linéaire

Les pourcentages

Calcul numérique : le coefficient multiplicateur.

Introduction :

La notion d'indices statistiques apparaît chaque fois que l'on doit comparer deux grandeurs dans l'espace ou dans le temps à travers leur rapport.

L'indice : l'indice est un nombre (supérieur à 0) qui a pour but de traduire de l'évolution dans le temps d'une grandeur mesurable :

" évolution des prix, de la bourse , d'une production , de l'évolution en terme d'emplois (indice du chômage)" .

3.1 Les indices élémentaires ou indice simples

Activité 1: *une* entreprise a payé à l'époque t_0 une matière première "x" à 3000F le kg; trois ans plus tard (en t_3) elle la paye 3600F le kg.

Ces deux prix peuvent être comparés selon trois procédés:

a) soit en faisant leur différence. En trois ans, le prix de la matière première "x" a augmenté en **valeur absolue** de 3600F – 3000F = 600F le kg. On notera que ce procédé ne donne qu'une information imparfaite sur cette augmentation. En effet, elle ne tient pas compte de l'importance du prix à l'instant t_o . En d'autres termes, nous aurions eu le même résultat avec des prix différents, par exemple 2300F et 2900F le kg .

b) soit en estimant l'accroissement de prix en **valeur relative** :

$\frac{3600-3000}{3000} = 0{,}2$ ou 0,2 fois 100 = 20 %

c) soit en faisant le rapport suivant : donnant un "Indice" :

$\frac{3600}{3000} \times 100 = 120$

Nous avons pris comme base de calcul le nombre "100" ; par convention, nous prendrons une base "100" pour les calculs d'indices.

Ce rapport « $\frac{3600}{3000} \times 100$ » soit « 120 » est appelé " **indice simple " , ou "indice analytique" , ou "indice élémentaire" , "indice particulier".**

3.1.1 Résumé:

L'indice simple traduit l'évolution dans le temps d'une grandeur mesurable. Il n'a pas d'unité.

Attention l'indice simple ne s'exprime pas en « % »!!!!

Si l'on appelle « V_0 » la valeur d'une grandeur à l'époque t_0 et « V_j » la valeur de cette grandeur à l'époque t_j

L'indice de la grandeur à l'époque t_j par rapport à l'époque t_0 est un nombre, sans unité, tel que :

$$\boldsymbol{I_{j/0} = \frac{V_j}{V_0} \times 100}$$

Commentaire :

Si $I_{j/0} > 100$ il y a une augmentation entre les époques t_0 et t_j.

Si $I_{j/0} < 100$ il y a une diminution entre les époques t_0 et t_j.

Exemple 3.1

A une date donnée (t_0), un objet était vendu 3020F.

Un objet de même type vaut 2490F. 8 ans plus tard (t_2) .Donner l'indice d'évolution du prix (diminution ou augmentation)

Solution :

L'objet est vendu moins cher !

On ne cherche pas la valeur de diminution !

Si l'on fait la division du prix payé 2490 F. en t_2 par 3020 F. en t_1 on trouve un nombre : $\frac{2490}{3020} \approx 0{,}8245$

Ce nombre de « 0,8245 » s'appelle « coefficient multiplicateur » associé à la « diminution » .

La diminution est de 1 – 0,8245 = 0,1755

Cette diminution peut s 'exprimer en pourcentage.

Pour ce faire on multipliera le nombre par 100; ainsi le taux de diminution est de 0,175 × 100 = 17,55; soit 17,55 %

Donc un bien valant 100 F, subissant la même variation, vaudrait 82,45F. 8 ans plus tard.

Le nombre « 82,45 » représente l'indice du prix de l'objet (ou du bien) au temps t_2, (*8 ans plus tard)*, si l'on prend 100 pour indice du prix au temps t_1.

Et 17,55 % le taux de diminution du prix de l'objet depuis le date t_1.

Exercice:

En 1998, le prix d'un poste de télévision était 320000F. Le prix en 2001 est de 332800F. En prenant pour base 100 l'année 1998, chercher l'indice du prix en 2001.

3.2 Les indices composés ou synthétiques.

Introduction :

Les indices simples, que nous venons de définir, ne prennent en compte que la variation d'une seule composante d'un phénomène. (Exemple le prix du litre d'essence). Or il est très rare qu'une composante explique , à elle seule , l'évolution d'un phénomène économique complexe : (par exemple l'évolution du prix du baril de pétrole, n'est pas seulement la conséquence de la variation du prix du litre de super, mais aussi celle des variations de prix d'autres produits et services) Il faut donc disposer d'outils statistiques permettant de tenir compte de plusieurs composantes .

On fera appelle aux indices synthétiques, ces indices répondent permettent de tenir compte de plusieurs composantes, en combinant l'évolution simultanée de plusieurs phénomènes, chacun d'eux étant mesuré par un indice simple.

Cette procédure (synthétique) pose différents problèmes:

- celui du choix de la moyenne utilisée ;
- celui de la pondération, c'est à dire de la "charge" (ou coefficient) relative de chaque composante dans l'ensemble.

Exemple 3.2

une entreprise dispose, au cours du premier trimestre de l'époque t_3 d'un stock de produits répartis en quatre catégories A , B , C , D , dont les quantités exprimées en tonnes , sont les suivantes :

Mois	Catégorie A	Catégorie B	Catégorie C	Catégorie D
Janvier	1780	654	1120	542
Février	1975	745	1380	586
Mars	2146	962	1456	634

Il faut effectuer le calcul des indices simples par catégories de produits, puis en faire **une moyenne**.

3.2.1 Utilisation de la moyenne:

Exemple3.3

une entreprise dispose, au cours du premier trimestre de l'époque t_3 d'un stock de tablettes tactile répartis en quatre catégories A, B , C , D , dont les quantités exprimées « millier » , sont les suivantes :

Mois	Catégorie A	Catégorie B	Catégorie C	Catégorie D
Janvier	1750	625	1120	535
Février	1915	712	1302	576
Mars	2112	945	1416	628

Nous allons calculer la moyenne arithmétique des indices simples des éléments qui composent l'indice.

Mois	Indice de la catégorie « A »	Indice de la catégorie « B »	Indice de la catégorie « C »	Indice de la catégorie « D »
Janvier	$\frac{1750}{1750}\times 100 =$ 100	$\frac{625}{625}\times 100 =$ 100	$\frac{1120}{1120}\times 100 =$ 100	$\frac{535}{535}\times 100 =$ 100
Février	$\frac{1915}{1750}\times 100 =$ 109,42	$\frac{712}{625}\times 100 =$ 11 3,92	$\frac{1302}{1120}\times 100 =$ 116,25	$\frac{576}{535}\times 100 =$ 108,03
Mars	$\frac{2112}{1750}\times 100 =$ 120,68	$\frac{945}{625}\times 100 =$ 151,20	$\frac{1416}{1120}\times 100 =$ 126,42	$\frac{628}{535}\times 100 =$ 117,38

Le mois de janvier est choisi comme base = 100.

Déterminons, mois par mois, la moyenne des indices.

Janvier : $\frac{100+100+100+100}{4} = \frac{400}{4}$ = 100

Février : $\frac{109{,}42+113{,}92+116{,}25+108{,}3}{4} = \frac{447{,}62}{4}$ = 111,90

Mars : $\dfrac{120{,}68 + 151{,}20 + 126{,}42 + 117{,}38}{4} = \dfrac{515{,}68}{4}$ = 128,92

Nous pouvons généraliser, en considérant « n » indices simples :

$$\overset{A}{I}_k = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k}{n}$$

Remarque : il est possible de faire ce type de calcul à partir des autres moyennes. (exemples: moyenne géométrique, moyenne harmonique ;..)

L'indice composé permet d'étudier les prix de plusieurs grandeurs entre deux périodes (période 0 et période t).

3.3 Les indices de la vie économique

Activités 2

Considérons une entreprise qui vend les produits b_1, b_2, b_3, b_4 . On veut expliquer l'évolution du chiffre d'affaires réalisé entre 2 dates 0 et t à partir de l'évolution des prix pratiques et celle des quantités vendues. Les données sont consignées dans le tableau suivant :

Compléter le tableau suivant

produit	P_{i0}	Q_{i0}	P_{it}	Q_{it}	$V_{i0} = P_{i0} \times Q_{i0}$	$V_{it} = P_{it} \times Q_{it}$	$V_{i0}^{*} = P_{it} \times Q_{i0}$	$V_{it}^{0} = P_{i0} \times Q_{it}$
b_1	5	20	8	15				
b_2	6	30	7	20				
b_3	8	40	9	30				
b_4	10	10	11	20				
					$V_0 = \sum_{i=1}^{4} V_{i0} = 700$	$V_t = \sum_{i=1}^{4} V_{it} = 750$	$V_0^{*} = \sum_{i=1}^{4} V_{i0}^{*} = 840$	$V_{it}^{*} = \sum_{i=1}^{4} V_{it}^{*} = 635$

a) Calculer $I_{t/0}(V)$ et interpréter le résultat

b) Pour un bien b_i , on calculer l'indice d'affaires réalisé sur ce bien.

3.3.1 Problème posé par la pondération et calculs de l'indice des prix

Il existe deux méthodes de calculs.

a) **Méthode de Laspeyres** :

on appelle indice des prix de Laspeyres, l'indice synthétique des prix noté $L_{t/0}(P)$ et défini par :

$$L_{t/0}(P)=\frac{\sum_{i=1}^{r}P_{it}\times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{r}P_{i0}\times Q_{i0}}.$$

Autrement on calcule les prix des articles en fonction des quantités de référence à l'époque 0. Puis on calcule les prix de ces articles pour les mêmes quantités qu'à l'époque 0 pour l'époque t.
On fait ensuite la somme des prix pour l'époque 0 et la somme des prix pour l'époque 1, et on calcule $\boldsymbol{L_{t/0}}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{L_{t/0}(P)} = \frac{\textbf{\textit{somme des prix pour la période t}}}{\textbf{\textit{somme des prix pour la période 0}}} \times \mathbf{100}$$

- De même, l'indice de quantité de **Laspeyres** est l'indice synthétique noté $L_{t/0}(Q)$, défini par : $$L_{t/0}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{r}P_{i0}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{r}P_{i0}\times Q_{i0}}$$

b) Méthode de Paasche

- On appelle indice de prix de Paasche l'indice synthétique des prix et des quantités et défini par :

$$\sigma_{t/0}(P) = \frac{\sum \ P_{it}\times Q_{it}}{\sum \ P_{i0}\times Q_{it}} \qquad \sigma_{t/0}(Q)=\frac{\sum_{i=1}^{r}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{r}P_{it}\times Q_{i0}}.$$

On appelle indice de Fisher des prix et des quantités : $F_{t/0}(P)=\sqrt{L_{t/0}(P)\times\sigma_{t/0}(P)}$ et $F_{t/0}(Q)=\sqrt{L_{t/0}(Q)\times\sigma_{t/0}(Q)}$.

Etude n° 1 d'un exemple

Une entreprise de restauration rapide a enregistré ces dernières années le coût de revient du menu type le plus demandé.
Les résultats donnés dans le tableau ci-dessous précisent pour les principaux constituants du menu :

- Les quantités nécessaires à la réalisation du menu
- Le coût unitaire de chacun des constituants du menu

	2010		**2012**	
Menu	**Q_0**	**P_0**	**Q_1**	**P_1**
Hamburger	0,120 kg	8,40 F/kg	0,130 kg	9,31 F/kg
Frites	0,110 kg	3,82 F/kg	0,090 kg	4,12 F/kg
Boisson Gazeuse	0,30 L	0,17 F/L	0,50 L	0,20 F/L

Calcul de l'indice composé suivant la méthode de Laspeyres

On tient compte ici des quantités à l'époque 0.

Coût d'un menu à l'époque 0 (2010) : 0,120×8,40 + 0,110×3,82 + 0,30×0,17 = 1,48 F

Coût d'un menu à l'époque 1 (2012) : 0,120×9,31 + 0,110×4,12+ 0,30×0,20 = 1,63 F

Ainsi $$I_L = \frac{1,63}{1,48} \times 100 \approx 110,1$$

Calcul de l'indice composé suivant la méthode de Paasche

On tient compte ici des quantités à l'époque 1.

Coût d'un menu à l'époque 0 (2010) : 0,130×8,40 + 0,090×3,82 + 0,50×0,17 =1,52

Coût d'un menu à l'époque 1 (2012) : 0,130×9,31 + 0,090×4,12+ 0,50×0,20 = 1,68

Ainsi $$I_P = \frac{1,68}{1,52} \times 100 \approx 110,5$$

NB : Il est donc important d'indiquer dans le calcul d'un indice composé la méthode employée.

Etude n° 2 d'un exemple

Un responsable d’approvisionnement de rayon a relevé, au cours des deux derniers mois de l’année « t 1) ; les quantités et les prix de trois produits « A » , « B » et « C » et a établi le tableau suivant :

Mois	Articles	Quantités (kg)	Prix	Valeurs. (quantité x Prix)
Novembre (o)	A	15	10	150
	B	20	5	100
	C	25	8	200
Décembre (t)	A	25	12	300
	B	25	6	150
	C	35	15	525

Si on s’intéresse à la seule évolution des quantités (indices des quantités) , l’indice synthétique est obtenu en calculant la moyenne des indices simples des quantités, pondérée par les valeurs. Les valeurs servant de coefficient de pondération sont soit celles de novembre (indice Laspeyres) soit celles de décembre (indice de Paasche ; IP)

a) Calcul d’indices Quantités.

1°) Formule de Laspeyres

Utilisons la formule simplifiée :

$$L_{j/o} = \frac{(25\times 10)+(25\times 5)+(35\times 8)}{(15\times 10)+(20\times 5)+(25\times 8)} = \frac{655}{450}\times 100 = 145{,}55$$

2°) Formule de Paasche

$$IP_{j/o} = \frac{(25\times 12)+(25\times 6)+(35\times 15)}{(15\times 12)+(20\times 6)+(25\times 15)} = \frac{975}{675}\times 100 = 144{,}44$$

b) **Calcul d’indices Prix .**

On peut symétriquement calculer les indices des prix en pondérant les indices simples des prix par les valeurs relevées, soit au niveau de novembre (indice Laspeyres) , soit à celui de décembre (indice Passche)

- **Formule de Laspeyres (pondération par les quantités de novembre)**

$$IL_{j/o} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{io} . P_{io}}$$

Soit :

$$L_{j/o} = \frac{(15 \times 12) + (20 \times 6) + (25 \times 15)}{(15 \times 10) + (20 \times 5) + (25 \times 8)} = 150$$

- **Formule de Paasche (pondération par les quantités de décembre)**

$$IP_{j/o} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} P_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} Q_{ij} . P_{io}}$$

D'où :

$$IP_{j/o} = \frac{(25 \times 12) + (25 \times 6) + (35 \times 15)}{(25 \times 10) + (25 \times 5) + (35 \times 8)} = 148{,}85$$

<u>Remarque :</u>
On vérifie que pour une même période :
Indice Laspeyres prix x indice Paasche quantité = Indice Laspeyres quantité x indice Paasche prix

<u>Activités 3.2</u>

Considérons une entreprise qui vend les produits b_1, b_2, b_3, b_4 . On veut expliquer l'évolution du chiffre d'affaires réalisé entre 2 dates 0 et t à partir de l'évolution des prix pratiques et celle des quantités vendues. Les données sont consignées dans le tableau suivant :

Recopier et compléter

produit	P_{i0}	Q_{i0}	P_{it}	Q_{it}	$V_{i0} = P_{i0} \times Q_{i0}$	$V_{it} = P_{it} \times Q_{it}$	$V_{i0}^{*} = P_{it} \times Q_{i0}$	$V_{it}^{0} = P_{i0} \times Q_{it}$
b_1	5	20	8	15	100	120	160	75
b_2	6	30	7	20	180	140	210	120
b_3	8	40	9	30	320	270	360	240
b_4	10	10	11	20	100	220	110	200

$V_0 = \sum_{i=1}^{4} V_{i0} = 700$	$V_t = \sum_{i=1}^{4} V_{it} = 750$	$V_0^* = \sum_{i=1}^{4} V_{i0}^* = 840$	$V_{it}^* = \sum_{i=1}^{4} V_{it}^* = 635$

On a : $I_{t/0}(V) = \frac{V_t}{V_o} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V_{io}} = \frac{750}{700} = 1.071.$

Le chiffre d'affaires a augmenté de 7.1% .

<u>Remarque :</u> Pour un bien b_i , on peut calculer l'indice d'affaires réalisé sur ce bien de la manière suivante : $I_{t/0}(V^i) = \frac{V_{it}}{V_{io}} = \frac{P_{it} \times Q_{it}}{P_{i0} \times Q_{i0}} = \left(\frac{P_{it}}{P_{i0}}\right) \times \left(\frac{Q_{it}}{Q_{i0}}\right) = I_{t/0}(p^i) \times I_{t/0}(q^i).$

L'indice élémentaire de V^i s'obtient comme un produit de deux indices élémentaires. Pour V , on ne peut pas obtenir ce résultat, mais on va tout de même décomposer l'indice de V comme produit de deux indices (prix et quantités), mais qui ne seront pas des indices élémentaires.

<u>Méthode de décomposition :</u>

On va utiliser la méthode de décomposition de l'indice de valeur vue précédemment :

Indice de valeur = indice de volume $\times$ indice de prix .

On a alors 2 possibilités : soit $I_{t/0}(V) = \frac{V_t}{V_o^*} \times \frac{V_o^*}{V_0}$, ou $I_{t/0}(V) = \frac{V_t}{V_{t'}} \times \frac{V_{t'}}{V_0}$.

$\frac{V_t}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}} = \frac{750}{840} = 0.893$, $\frac{V_t}{V_0}$ est un indice de volume.

$\frac{V_0^*}{V_0} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}^*}{\sum_{i=1}^{4} V_{i0}} = \frac{840}{700} = 1.20$, $\frac{V_0^*}{V_0}$ est un indice de prix.

$$I_{t/0}(V) = \frac{V_t}{V_o^*} \times \frac{V_o^*}{V_0} = \frac{750}{840} \times \frac{840}{700} = (0.893) \times (1.20) = 1.071.$$

$\frac{V_t}{V_t^*} = \frac{\sum_{i=1}^{4} V_{it}}{\sum_{i=1}^{4} V_{it}^*} = \frac{750}{635} = 1.18$, $\frac{V_t}{V_t^*}$ est un indice de prix.

 aliphedjiazet@yahoo.fr

$$\frac{V_t^*}{V_0}=\frac{\sum_{i=1}^{4}V_{it}^*}{\sum_{i=1}^{4}V_{i0}}=\frac{635}{700}=0.907\ ,\ \frac{V_t^*}{V_0}$$ est un indice de volume.

$$I_{t/0}(V)=\frac{V_t}{V_i^*}\times\frac{V_i^*}{V_0}=\frac{750}{635}\times\frac{635}{700}=(1.18)\times(0.907)=1.071\ .$$

Montrons que les indices utilisés précédemment sont des moyennes d'indices élémentaires.

a) Précisons les indices des prix :

$$\frac{V_0^*}{V_0}=\frac{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{i0}}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{i0}}=\frac{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{P_{it}}{P_{i0}}\right)\times(P_{i0}\times Q_{i0})}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{i0}}=\frac{\sum_{i=1}^{4}I_{t/0}(p^i)\times(P_{i0}\times Q_{i0})}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{i0}}\ .$$

Si on pose $\alpha_{i0}=\frac{(P_{i0}\times Q_{i0})}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{i0}}\ \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{4}\alpha_{i0}=\frac{(P_{10}\times Q_{10})+.....+(P_{40}\times Q_{40})}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{i0}}=1$.

Par suite :

$\frac{V_0^*}{V_0}=\sum_{i=1}^{r}\alpha_{i0}\times I_{t/0}(p^i)$, il s'agit donc de la moyenne arithmétique pondérée des indices élémentaires de prix $I_{t/0}(p^i)$.

Le coefficient α_{10} représente la part de la contribution du bien b_i dans le chiffre d'affaires global réalisé à la date 0.

$$\frac{V_t}{V_t^*}=\frac{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4}P_{i0}\times Q_{it}}=\frac{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{P_{i0}}{P_{it}}\right)\times(P_{it}Q_{it})}=\frac{1}{\frac{1}{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{it}}\times\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{P_{i0}}{P_{it}}\right)\times(P_{it}Q_{it})},$$

Comme : $I_{t/0}(p^i)=\frac{P_{it}}{P_{i0}}\ \Leftrightarrow\ \frac{P_{i0}}{P_{it}}=\frac{1}{I_{t/0}(p^i)}$,

Par suite : $\frac{V_t}{V_t^*}=\frac{1}{\frac{\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{I_{t/0}(p^i)}\times(P_{it}Q_{it})}{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{it}}}$, En posant $\alpha_{it}=\frac{P_{it}\times Q_{it}}{\sum_{i=1}^{4}P_{it}\times Q_{it}}$, on obtient : $\frac{V_t}{V_t^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{I_{t/0}\left(p^i\right)} \times \alpha_{it}}$, il s'agit donc de la moyenne harmonique pondérée des indices élémentaires de prix $I_{t/0}\left(p^i\right)$. Le coefficient α_{it} représente la part de la contribution du bien b_i dans le chiffre d'affaires global réalisé à la date t.

En utilisant les mêmes procédés, on montre que :

$\frac{V_t}{V_0^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{I_{t/0}\left(q^i\right)} \times \alpha_{it}}$ est la moyenne harmonique pondérée des indices élémentaires des quantités : $I_{t/0}\left(q^i\right)$.

$\frac{V_0^*}{V_0} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{I_{t/0}\left(q^i\right)} \times \alpha_{i0}$ est un moyenne arithmétique pondérée des indices élémentaires des quantités $I_{t/0}\left(q^i\right)$ par les coefficients α_{i0}.